

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

ESCOLA DE MINAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METALICA

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO DE
PÓRTICOS PLANOS METÁLICOS COM
LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS**

POR

Adelmo Coelho Saldanha

Orientado por Prol Dr. Francisco Carlos Rodrigues

OURO PRETO

Junho/ 1997

SALDANHA, ADELMO COELHO

Análise Não-Linear do Comportamento de Pórticos Planos Metálicos com
Ligações Semi-Rígidas [Minas Gerais] 1997 iii, 99p. 29.7 cm (ESCOLA DE
MINAS/UFOP, M.Sc, Engenharia Civil, 1997).

Dissertação - Universidade Federal do Ouro Preto, Escola de Minas

1. Estabilidade Estrutural

2. Estrutura Metálica

3. Ligação Semi-Rígida

1. Escola de Minas/UFOP

II. TÍTULO (série)

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO DE PÓRTICOS PLANOS
METÁLICOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

ADELMO COELHO SALDANHA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA DE MINAS/UFOP, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

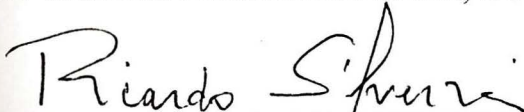
APROVADA POR



Prof. Dr. FRANCISCO CARLOS RODRIGUES, EE/UFMG
(PRESIDENTE)



Profª Drª MICHELE SCHUBERT PFEIL, COPPE/UFRJ



Prof. Dr. RICARDO AZOUBEL DA MOTA SILVEIRA, EM/UFOP

OURO PRETO, MG - BRASIL

JUNHO DE 1997

À

Solange, Larissa e Lucas (esposa e
filhos)

Maria Helena e José Coelho (pais)

AGRADECIMENTOS

A todos aqueles, que direta ou indiretamente contribuíram com sua paciência, compreensão e ajuda para que este trabalho se tornasse realidade.

Aos familiares. esposa, filhos, pais, irmãos e sogros;

Aos professores do curso de Mestrado em Construção Metálica/Escola de Minas/UFOP;
À USIMINAS, pela ajuda financeira que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho;

Aos amigos da República Peripatus;

Às diretorias das empresas. T-MIL, COBRAPI e EMCON;

Em especial, agradeço ao professor Francisco Carlos e sua família
e à prof^a. Michele Pfeil, pela valiosa co-orientação.

RESUMO DA DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO DECVIESCOLA DE MINASIUFOF COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO DE PÓRTICOS PLANOS
METÁLICOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

ADELMO COELHO SALDANHA

Junho de 1997

Orientador: Francisco Carlos Rodrigues

Co-orientadora: Michele Schubert Pfeil

O comportamento de pórticos planos metálicos com ligações semi-rígidas é analisado através de um modelo numérico que incorpora a não-linearidade geométrica nos moldes do Método dos Elementos Finitos (MEF). É empregado um algoritmo combinado que associa os aspectos de convergência do método incremental-iterativo tangente, calculando-se o vetor de cargas desequilibradas através da consideração de movimentos de corpo rígido. Os efeitos devidos às não-linearidades adicionais oriundas da presença das ligações semi-rígidas são considerados através do modelo B-Splines Tensionada para representar o comportamento não-linear da relação momento-rotação das ligações.

Com a finalidade de avaliar a performance dos modelos adotados, resultados numéricos obtidos são comparados com resultados experimentais de pórticos planos, deslocáveis e indeslocáveis. Desta forma, também é possível verificar o efeito do contraventamento por diagonais ou apoios laterais nos pórticos com ligações semi-rígidas.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1	INTRODUÇÃO	1
	I.1 - GENERALIDADES.....	1
	I.2 - OBJETIVOS E ESCOPO DO TRABALHO.....	5
CAPÍTULO II-	MODELOS PARA O COMPORTAMENTO DAS LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS	7
	II.1 -INTRODUÇÃO.....	7
	II.2 - MODELO POLINOMIAL.....	7
	II.3 - MODELO B-SPLINE TENSIONADA.....	13
	II.3.1 – Generalidades.....	13
	II.3.2 - Curvas Splines Cúbicas.....	14
	II.3.3 - Curvas de Bézier.....	19
	II.3.4 - B-Splines Tensionada.....	22
	II.4- FINALIDADE DOS MODELOS UTILIZADOS.....	27
CAPÍTULO III-	ALGORÍTIMO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR	
	III.1 -INTRODUÇÃO.....	28
	III.2 - MÉTODO INCREMENTAL- ITERATIVO.....	29
	III.3 – CONSIDERAÇÃO DOS MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO.....	35
	III.4 – ALGORITMO PARA CONTROLE DE DESLOCAMENTO.....	41
	III.5 – ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR.....	43
CAPÍTULO IV-	MODELO DAS LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS	49
CAPÍTULO V-	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	51
CAPÍTULO VI-	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	53
	VI.1- LIGAÇÕES UTILIZADAS NOS MODELOS.....	53
	VI.2 - EXEMPLO I - PÓRTICO SIMPLES.....	55
	VI.3 - EXEMPLOS II E III - PÓRTICOS ENSMADOS POR STELMACK	58

VI.4 - EXEMPLO IV - PÓRTICO ENSADO POR LAU.....	65
CAPITULO VII- APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	67
VII.1 – INTRODUÇÃO.....	67
VII.2 - EXEMPLO 1 - PÓRTICO SIMPLES.....	67
VII.3 - EXEMPLOS II E III - PÓRTICOS ENSMADOS POR STELMACK.....	70
.....	70
VII.3.1 - PÓRTICO I.....	72
VII.3.2 - PÓRTICO II.....	75
VII.4 - PÓRTICO ENSAIADO POR LAU.....	78
CAPITULO VIII- CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	81
ANEXO A.....	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	85

ABSTRACT OF DISSERTATION PRESENTED TO COURSE OF POSTGRADUATION IN CIVIL ENGINEERING AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

NONLINEAR ANALYSIS OF THE BEHAVIOR OF SEMI-RIGID CONNECTIONS
STEEL FRAME

ADELMO COELHO SALDAANIA

July, 1997

Dissertation Supervisor: Francisco Carlos Rodrigues

Department: Civil Engineering/ Structures

The behavior of steel plane frames with semi-rigid connections is focused through the results of a geometrically non-linear analysis by the finite element method. The effects of additional non-linearity arising from the presence of semi-rigid connections are accounted for by representing the non-linear moment-rotation curves as tensioned B-spline curves. The equilibrium path is traced with the aid of a hybrid algorithm which combines the convergence properties of the iterative-incremental tangent method, calculating the unbalancing forces by the consideration of the element rigid body motion. A comparison between experimental and numerical results for a particular example is also presented.

By the finality to valuation the performance of the adopted modes, numerical results are got and compared with experimental results of plane frame, deslocavable and undeslocavable. Thus, it is possible too verify the effect of bracing for diagonal or lateral beams in the frame with semi-rigid connections.

NOTAÇÕES

LETRAS DO ALFABETO ROMANO

A;B	-	etapa A; etapa B
a;b	-	parâmetros para o modelo de potência
A	-	área da seção transversal
A;B;C;D	-	coeficientes da equação da elástica da viga
C_i	-	caminhos de equilíbrio
$C_{i,j}$	-	matriz que contém 12 coeficientes determinados ao se impor as condições de contorno
$C_1;C_2;C_3$	-	coeficientes determinados empiricamente para modelo polinomial
d	-	diâmetro do parafuso
d	-	altura da viga
d_b	-	diâmetro do parafuso
E	-	modulo de elasticidade longitudinal do material
E'	-	segundo ponto de equilíbrio
~		
E''	-	terceiro ponto de equilíbrio
~		
E	-	primeiro ponto de equilíbrio
~		
E_i	-	pontos de equilíbrio
~		
F	-	vetor de forças nodais
~		
F_{int}	-	vetor de forças internas
~		
F^n	-	vetor de forças para o n-ésimo elemento no sistema de referencial inicial
~		
F^{n*}	-	vetor de forças para o n-ésimo elemento no sistema de referencial intermediário
~		
F^n	-	vetor de forças para o n-ésimo elemento no sistema de referencial final
~		
g	-	distância entre centros de duas linhas de furação
I	-	momento de inércia da seção transversal
$J_{k,i}$	-	funções de base de BERNSTEIN
K	-	ordem da B-spline Tensionada

K	-	fator de padronização adimensional para modelo polinomial
K_1	-	matriz de rigidez que contém os termos correspondentes à segunda aproximação da interação axial-flexão
K_2	-	matriz de rigidez que contém os termos da flinção quadrática dos deslocamentos
K_g	-	matriz de rigidez geométrica
~		
K_I	-	matriz de rigidez incremental
~		
K_O	-	matriz de rigidez convencional linear
~		
K_S	-	matriz de rigidez secante
K_T	-	matriz de rigidez tangente
k	-	ordem da curva de BÉZIER
L	-	comprimento da viga
l	-	comprimento da cantoneira da ligação TA
M	-	momento fletor
$M-\theta$	-	momento e rotação (diagrama, curva, relação)
M_1	-	momento nos apoios considerando a ligação como rígida
M_2	-	alívio dos momentos nos apoios devido a flexibilidade da ligação
n	-	número de vértices do polígono de controle B-Spline Tensionada
N	-	esforço axial
N	-	esforço axial inicial
$N_{i,k}$	-	funções de ponderações da base B-Spline
P_i	-	parâmetro geométrico de padronização (dimensões mais significativas da ligação)
P_i	-	vetor posição de componentes $[x_i(t); y_i(t); z_i(t)]$
P_j	-	conjunto de vértices ou pontos controle para curva de BÉZIER
P_j	-	pontos para interpolação da Spline Cúbica
P_0, P_n	-	primeiro e último vértice do polígono de controle
Q_1, Q_2	-	esforço cortante
R^i	-	vetor de resíduos

r	- raio de curvatura da elástica em um ponto qualquer da viga
t	- afastamento da viga ao pilar
t	- espessura da cantoneira conectada às mesas da viga
t	- variável paramétrica
t_c	- espessura da cantoneira conectada à alma da viga
U	- vetor de deslocamento
\sim	
U^n	- vetor deslocamento para o n-ésimo elemento no sistema referencial inicial
\sim	
U^{n*}	- vetor deslocamento para o n-ésimo elemento no sistema referencial intermediário
U^n	- vetor deslocamento para o n-ésimo elemento no sistema referencial final
\sim	
U^0	- vetor deslocamento inicial para a iteração $i=0$
\sim	
u_1, u_2	- deslocamentos incrementais das extremidades do elemento segundo a seu eixo longitudinal (direção axial)
v_1, v_2	- deslocamentos incrementais das extremidades do elemento na direção transversal (nó inicial e final)
W	- cargas distribuídas
x_i	- elementos que compõem o vetor nó
Y	- equação elástica da viga em função de x
Y''	- segunda derivada da equação da elástica da viga
$1/r(x)$	- curvatura elástica

LETRAS DO ALFABETO GREGO

θ	-	rotação relativa, em radianos, da seção transversal da extremidade da viga e a face do pilar
δ	-	alongamento do elemento deslocamento transversal
μ	-	nível de carga
Δ	-	incremento
ϕ_1, ϕ_2	-	deformação angular do elemento nas extremidades
θ_1, θ_2	-	rotação na extremidade do elemento
α_i	-	expoentes determinado empiricamente para relação M- θ da ligação para modelo polinomial
ε_i	-	deformação
μ^0	-	valor inicial de carga na primeira iteração $i=0$
θ_{pilar}	-	rotação do pilar
θ_{viga}	-	rotação da viga

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

I.1 - GENERALIDADES

Tradicionalmente, considera-se nos projetos envolvendo estruturas aperticadas metálicas que as ligações têm duas características bem definidas: ou são flexíveis (rótulas) ou são rígidas (engastes elásticos). No entanto, numa simulação teórica mais realística do comportamento das conexões deve-se levar em conta que elas têm rigidezes que se situam entre aqueles extremos, devendo então serem classificadas como semi-rígidas. Neste caso, o momento transmitido através de tais ligações não é nulo ou quase nulo como nas ligações flexíveis, nem o momento máximo (ou próximo dele) como teoricamente admitido para as ligações rígidas.

Uma síntese do comportamento das diversas classes de ligações pode ser feita conforme apresenta algumas referências [SIDERBRÁS 1988 e JONES et. al., 1983]. Para isto, considera-se o diagrama momento-rotação da figura (1.1 a), o qual representa graficamente o comportamento das três ligações.

Observe-se em tal figura as respostas relativas às ligações rígidas, semi-rígidas e flexíveis. Vê-se ainda a reta que relaciona momentos e rotações nos apoios para uma viga sob carregamento uniforme, tomada como exemplo.

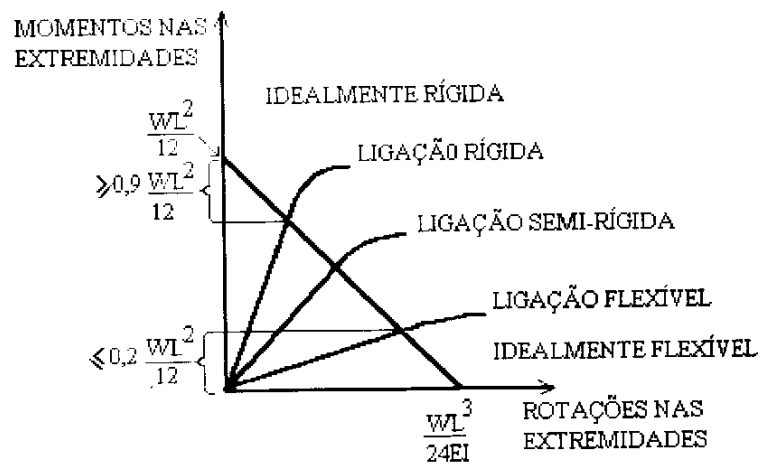
Para os momentos e rotações evidenciados nas figuras (I.1.a) e (I.1.b), tem-se

a) Ligações perfeitamente rígidas (engastes):

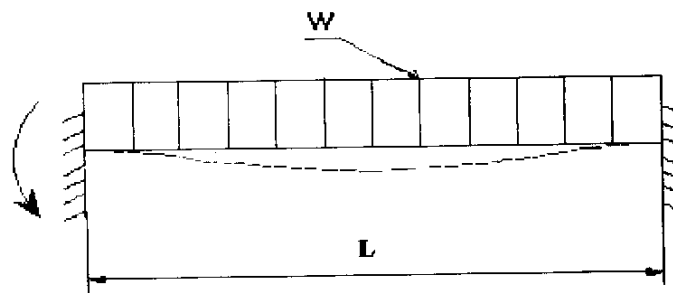
$$\theta = 0 \qquad M = \frac{WL^2}{12}$$

b) Ligações perfeitamente flexíveis (rótulas):

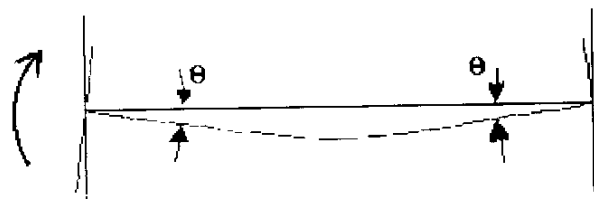
$$\theta = \frac{WL^3}{24 EI} \qquad M = 0$$



(a) Diagrama momento-rotação



$$M_1 = \frac{WL^2}{12}$$



$$M_2 = \frac{2EI}{L} \theta$$

(b) Momentos nos apoios da viga

Figura I.1 – Classes de ligações vigas-pilares [SIDERBRÁS,1988]

c) Ligações semi-rígidas

Neste caso, tendo as seções dos apoios rotações iguais à θ $\left(0 < \theta < \frac{WL^3}{24EI}\right)$, os momentos nas extremidades da viga serão expressos pela equação.

$$M = M_1 - M_2 = \frac{WL^2}{12} - \frac{2EI}{L}\theta \quad (I.3)$$

onde:

$M_1 = \frac{WL^2}{12}$: momentos nos apoios, considerando as ligações nas extremidades teoricamente rígidas (engastes) e

M_2 : alívio dos momentos nos apoios, considerando que as ligações não sejam teoricamente rígidas e que permitam alguma rotação θ das seções dos apoios.

$$M = \frac{4EI}{L}\theta - \frac{2EI}{L}\theta = \frac{2EI}{L}\theta \quad (I.4)$$

Para uma estrutura aperturada o ângulo θ expressa a rotação relativa entre a seção transversal da extremidade da viga e a face do pilar, conforme esquematiza a figura (1.2).

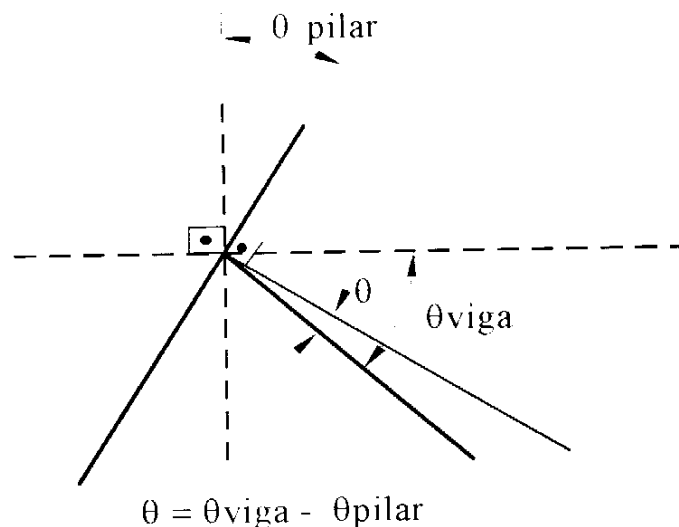


Figura I.2 - Rotação entre vigas e pilares.

As particularidades referentes aos diversos tipos de ligações (pertencentes às classes antes mencionadas) foram observadas a partir de diversas pesquisas teórico-experimentais iniciadas em meados de 1917. Os trabalhos de laboratório envolveram, a princípio, o estudo do comportamento isolado dos diversos tipos de ligações. Mais tarde foram ensaiados modelos mais complexos constituídos de pórticos simples, pórticos de andares múltiplos, pórticos de múltiplos vãos ou uma combinação entre eles [NETHERCOT, 1988].

As pesquisas procuraram principalmente solucionar o problema relativo à proposições de modelos matemáticos que representassem o comportamento não-linear da relação momento-rotação das ligações semi-rígidas entre vigas e colunas de aço.

Entre os diversos modelos propostos para o comportamento $M - \theta$ da ligações pode-se citar os de FRYE e MORRIS [1975] do tipo polinomial, e o proposto por JONES et. al.[1980] o qual utiliza a teoria B-Spline Cúbica. Estas proposições fornecem aproximações fechadas para a forma do diagrama experimental $M - \theta$.

Como será visto em detalhe no item (II), o modelo das ligações em forma polinomial - utilizado por FRYE e MORRIS - pode produzir flutuações indesejáveis na curva $M-\theta$. Representando a declividade de tal curva a rigidez da ligação, aquelas flutuações levam a valores de rigidez até mesmo negativos o que é fisicamente inaceitável. O modelo B-Splines Cúbicas permite, por sua vez. obter valores bem mais exatos para a rigidez da ligação.

No presente trabalho são utilizados dois tipos de modelos matemáticos de ligação:

- 1) Modelo polinomial de FRYE e MORRIS e
- 2) Modelo B-Spline Tensionada [MOLINA, 1988]

Este último modelo tem vantagem sobre a B-spline Cúbica pois permite "tensionar" a curva $M - \theta$ e daí determinar um melhor ajuste sobre a massa de resultados experimentais. Com isto obtém-se maior precisão para os valores das rigidezes da ligação, para qualquer valor M dentro do conjunto dos resultados experimentais considerados.

I.2 - OBJETIVOS E ESCOPO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento de estruturas metálicas através de uma simulação teórica por algoritmos numéricos que levam em conta a não-linearidade devido à presença das ligações dando continuidade às pesquisas iniciadas por BATISTA e PFEIL(1989) e RODRIGUES (1991). O problema é solucionado adotando-se para as ligações os modelos anteriormente mencionados e empregando-se um esquema numérico combinado incremental/iterativo proposto por BATISTA e PFEIL [1989] para a análise não-linear geométrica da estrutura.

Com este procedimento obtém-se uma simulação teórica mais realística do comportamento das estruturas apertadas em aço tendo em vista serem interdependentes a flexibilidade de suas ligações e os efeitos de segunda ordem.

A apresentação deste trabalho divide-se em 7 partes cada uma delas corresponde aos capítulos II a VIII. No capítulo II são apresentados com detalhes os modelos matemáticos de FRYE e MORRIS, da B-SPLINE CÚBICA, da B-SPLINE TENSIONADA e o modelo de ANG e MORRIS os quais podem ser utilizados para representar quantitativamente o comportamento $M-\theta$ das ligações semi-rígidas. São também apresentadas as vantagens e as desvantagens de um modelo em relação aos demais, sendo justificadas em função destas vantagens as finalidades de cada modelo adotado nesta pesquisa. No capítulo III é apresentado o algoritmo de solução para a análise não-linear geométrica, levando-se também em conta os efeitos devidos às não-linearidades adicionais oriundas da presença das ligações semi-rígidas. Este algoritmo foi implementado no sistema computacional MEDIFEM [PFEIL, 1991], que é por sua vez o produto da implementação de diversas rotinas e modificações no programa MINIFEM [ZIENKIEWCZ, 1977]. O modelo das ligações semi-rígidas assumido para o Método dos Elementos Finitos (MEF) é apresentado no capítulo IV. A implementação computacional referente a esta pesquisa é apresentada sucintamente no capítulo V. A descrição detalhada de todas as rotinas e os elementos finitos implementados no MEDIFEM consta no trabalho de PFEIL (1991). No capítulo VI são descritos os 4 exemplos de aplicação, cujos os resultados experimentais serviram para a verificação da performance dos modelos adotados. Na descrição constam as características geométricas e físicas dos exemplos bem como as

informações sobre a rigidez das ligações adotadas. A apresentação e análise dos resultados se dá no capítulo VII. São confrontados os resultados teóricos com respostas experimentais de alguns dos pórticos adotados como exemplo de aplicação. As conclusões e sugestões para pesquisas futuras são apresentadas no capítulo VIII.

CAPÍTULO II

MODELAGENS DO COMPORTAMENTO DAS LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

II.1 - INTRODUÇÃO

Apresentações detalhadas de diversos modelos analíticos referentes aos vários tipos padronizados de conexões foram elaboradas por NETHERCOT [1988], LUI [1987], RADZIMINSKI [1988] e CAMPOS [1988].

No presente trabalho são apresentadas e utilizadas apenas duas das possíveis modelagens: a primeira é do tipo polinomial e a segunda é do tipo Teoria B-Spline Tensionada. O primeiro modelo se justifica porque com uma só função de forma, é capaz de representar curvas $M - \theta$ da maioria dos tipos padronizados de ligações; o segundo modelo, entre outras vantagens, permite determinar valores mais precisos da rigidez da ligação.

II.2 - MODELO POLINOMIAL

O modelo polinomial foi originalmente desenvolvido por SOMMER [1969] para todas as ligações de um determinado tipo. FRYE e MORRIS [1975] divulgaram o emprego do método de SOMMER em resultados experimentais disponíveis e expressaram, sob forma adimensional, as relações $M-\theta$ características dos sete tipos de ligações mais comumente utilizadas. A Figura (II.1) apresenta um esquema de dois tipos de ligações padronizadas.

O modelo analítico adotado representa a relação $M-\theta$ da ligação através do polinômio de potências ímpares expresso pela equação (II.1).

$$\theta = C_1(KM)^1 + C_2(KM)^3 + C_3(KM)^5 \quad (II.1)$$

sendo:

K :fator de padronização adimensional dependente do tipo e das dimensões geométricas mais significantes da ligação:

$$K = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$$

P_i :parâmetros geométricos de padronização (dimensões mais significantes) da ligação, os quais afetam a relação $M-\theta$;

α_i expoentes determinados empiricamente;

C_1, C_2, C_3 . coeficientes determinados empiricamente através de ajustes pelo Método dos Mínimos Quadrados;

M :momento aplicado na conexão e

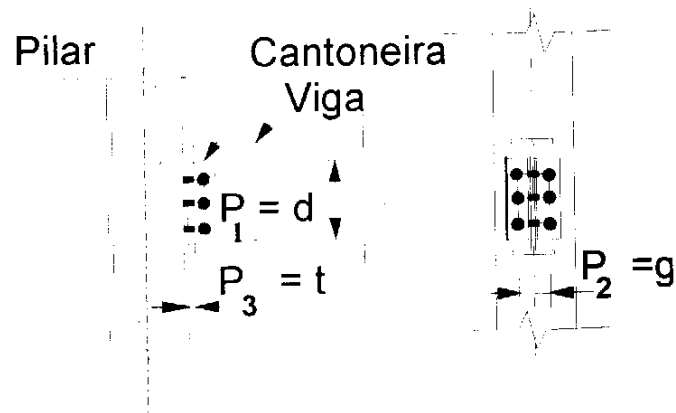
θ :rotação relativa, em radianos, da seção correspondente à ligação.

Na figura (II.1) estão indicados os parâmetros de padronização P_i (representados por d , t , g , l , f e w) correspondentes aos dois tipos de ligações apresentados. Na tabela (II.1) são encontradas todas as informações necessárias para a determinação da função que relaciona momentos com rotações de cada tipo de ligação esquematizada na Figura (II.1).

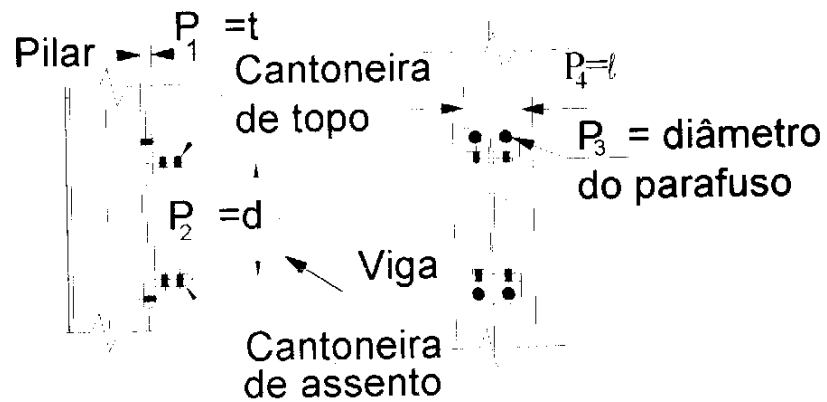
As funções apresentadas na segunda coluna da tabela (II.1) só são válidas quando se adota para as variáveis e parâmetros envolvidos as unidades Kips e in.

RADZIMINSKI e AZIZINANINI [1988] determinaram valores dos parâmetros de padronização e das constantes C_1 , C_2 e C_3 correspondentes a um tipo de ligação até então não estudado por SOMMER ou FRYE e MORRIS. Trata-se da ligação com cantoneiras de topo e assento em combinação com cantoneiras duplas de alma como mostrado na figura (II.2). Por

meio de investigações experimentais, aqueles autores determinaram os parâmetros de padronização que afetam mais significativamente a performance da curva M- θ da ligação.



(a) LIGAÇÃO DUPLA DE ALMA (DA)



(b) LIGAÇÃO DE TOPO E ASSENTO (TA)

FIGURA (II.1) – Tipos de conexões e parâmetros de padronização, por FRYE e MORRIS

[1975].

Tabela II.1 – Funções momento-rotação padronizadas para algumas ligações

(FRYE e MORRIS, 1975)

TIPO DE LIGAÇÃO	FUNÇÃO PADRONIZADA MOMENTO-ROTAÇÃO	CONSTANTE DE PADRONIZAÇÃO	Desvio máximo da Curva Padronizada e a Curva Experimental
Cantoneira Dupla de Alma (DA)	$\theta = 3.66(KM) \times 10^{-4} + 1.15(KM)^3 \times 10^{-6} + 4.57(KM)^5 \times 10^{-8}$	$K = d^{-2.4} t^{-1.81} g^{0.15}$	6%
Cantoneira de Topo e Assento (TA)	$\theta = 8.46(KM) \times 10^{-4} + 1.01(KM)^3 \times 10^{-4} + 1.24(KM)^5 \times 10^{-8}$	$K = t^{-0.5} d^{-1.5} f^{1.1} I^{-0.7}$	11%

A figura (II.2) apresenta os detalhes da ligação analisada por RADZIMINISKI e AZIZINAMINI.

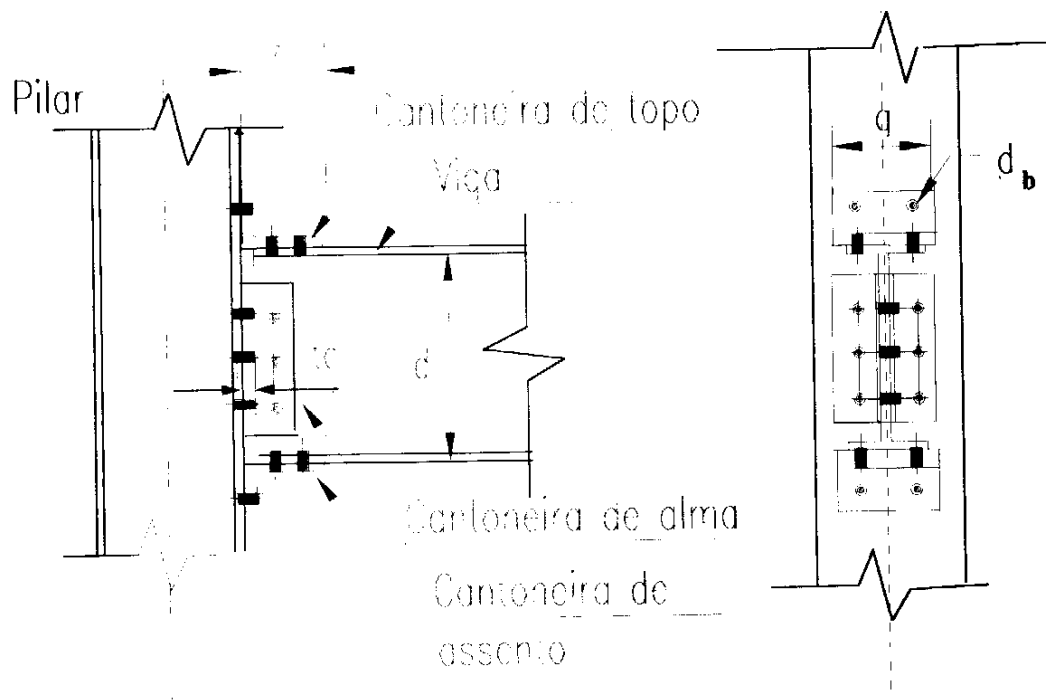


FIGURA (II 2) - Detalhes da ligação analisada por RADZfMINISKI e AZIZINAMINI [1988].

Os parâmetros de padronização P_i selecionados para o modelo analítico, conforme Figura (II.2), são:

- d : altura de viga
- t, l : espessura e comprimento, respectivamente, das cantoneiras conectadas aos flanges da viga;
- $g - \frac{d_b}{2}$: comprimento efetivo das abas das cantoneiras de mesa conectadas na mesa do pilar (distância entre os extremos de dois furos para parafusos);
- g : distância entre os centros de dois furos na aba da cantoneira;
- d_b : diâmetro do parafuso e
- t : espessura das cantoneiras conectadas à alma da viga.

Para os coeficientes C_1 e os expoentes α_1 foram encontrados os seguintes valores:

$P_1 = t$	$\alpha_1 = -1,1280877$
$P_2 = d$	$\alpha_2 = -1,2870455$
$P_3 = t_c$	$\alpha_3 = -0,41454097$
$P_4 = \ell$	$\alpha_4 = -0,69412158$
$P_5 = g - \frac{d_b}{2}$	$\alpha_5 = 1,34994572$

$$C_1 = 0,2232429 \times 10^{-4}$$

$$C_2 = 0,1850728 \times 10^{-7}$$

$$C_3 = 0,3188976 \times 10^{-11}$$

Comprova-se que o modelo polinomial representado pela equação (II. 1) dá resultados razoáveis quando comparado com os dados experimentais das ligações padronizadas. Um dos problemas com este tipo de modelagem se manifesta através das flutuações indesejáveis da curva $M-\theta$ a partir de certo alcance. Isto tem como consequência uma variação considerável nos valores das rigidezes das ligações, já que tais rigidezes são obtidas através da determinação das declividades da curva. Pode-se até mesmo determinar valores negativos para as rigidezes, o que fisicamente não tem sentido.

A função polinomial adotada, da forma $\theta = f(M)$, tem emprego imediato quando se utiliza o Método da Flexibilidade; isto porque a determinação do coeficiente de flexibilidade da ligação é feita através da derivada $d\theta/dM$.

Nos sistemas computacionais baseados no Método da Rigidez (como é o caso do Sistema utilizado pela presente pesquisa) o coeficiente de rigidez da ligação é obtido através da inversão da derivada $d\theta/dM$. Isto se deve à impossibilidade de se obter da função $\theta = f(M)$

para, a partir daí, obter diretamente a declividade da curva inversa - expressa por $d\theta/dM$, que dá a medida da rigidez da ligação.

II.3- MODELO B-SPLINE TENSIONADA

II.3.1 - Generalidades

No intuito de contornar os problemas expostos acima, obtendo maior precisão matemática na determinação do comportamento das ligações, foram propostos diversos outros modelos para a descrição do comportamento $M-\theta$. Em vários destes modelos foram adotadas funções do tipo exponencial (veja-se, entre outros, o modelo de CHEN e LUI [1985]) ou funções em forma de potências como, por exemplo os modelos de KISHI e CHEN [1990] e KISHI et. al. [1988]. Nestes modelos foram apresentadas algumas proposições para a determinação da rigidez inicial e do momento último resistente da conexão.

Entre os demais modelos não-lineares para a curva $M-\theta$ pode-se citar o que utiliza a Teoria B-Spline Cúbica, adotado por JONES et. al.[1983]. Este procedimento consiste em dividir o conjunto de resultados experimentais da ligação em um número finito de subgrupos de resultados. Em cada subgrupo é feito um ajuste utilizando-se funções cúbicas, mantendo-se contínua a primeira e a segunda derivada das funções entre tais subgrupos.

Esta técnica de modelagem iterativa de formas geométricas permite obter uma descrição numérica da curva $M-\theta$ da ligação. Além disto, pode-se obter valores corretos para a rigidez da ligação, os quais podem ser utilizados diretamente na matriz de rigidez numa análise de estruturas apertadas com ligações semi-rígidas.

As teorias sobre a B-Spline Cúbica e a Curva de Bézier formam a base para o entendimento da técnica de ajuste B-Spline Tensionada aqui utilizada. Por isso, nos dois itens seguintes são introduzidos alguns conceitos básicos.

11-3.2- Curvas Splines Cúbicas

Fisicamente, uma spline é um instrumento de desenho que consiste de uma tira de plástico, ou outro material, a qual pode servir de guia para o desenho de curvas suaves a serem passadas por um conjunto de pontos (pontos de controle) pré-estabelecidos em um desenho. O conjunto de pontos é dividido em diversos subgrupos pelos quais desenha-se os trechos de curva. Estes trechos de curva são desenhados de tal forma que as mudanças de curvatura sejam graduais, havendo, portanto, vértices entre os trechos considerados.

Uma curva Spline Cúbica tem uma forma que pode ser associada à da elástica de uma viga bi-apoiada sob carga concentrada. Da Mecânica dos Sólidos pode-se deduzir que a elástica de tal viga tem uma forma cúbica nos trechos sem carga. No ponto de aplicação de carga, a terceira derivada desta função cúbica tem uma descontinuidade proporcional à carga aplicada. Ainda no ponto de aplicação da carga são contínuas a segunda derivada (curvatura) e, conseqüentemente, a primeira derivada da função.

Considerando que a viga seja solicitada no regime elástico, tem-se:

$$M(x) = \frac{E.I}{r(x)} \quad (\text{II.2})$$

Onde:

- $M(x)$: momento fletor em um ponto qualquer da viga;
 $r(x)$: raio de curvatura da elástica em um ponto qualquer da viga;
 E : módulo de elasticidade longitudinal do material e
 I : momento de inércia da seção transversal da viga

Supondo que as deflexões sejam pequenas pode-se escrever:

$$\frac{1}{r(x)} = Y''(x) \quad (\text{II.3})$$

sendo $\frac{1}{r(x)}$: curvatura da elástica

$Y''(x)$: segunda derivada da equação da elástica da viga em função de x .

Reescrevendo a equação (11.2) tem-se:

$$Y''(x) = \frac{M(x)}{E.I}$$

O momento $M(x)$ varia linearmente ao longo da viga. Integrando-se duas vezes a equação(II.4) pode-se verificar que a elástica da viga é descrita por duas funções polinomiais cúbicas, sendo uma para cada trecho delimitado pelos apoios e pelo ponto de aplicação da carga.

A curva Spline Cúbica é uma técnica de interpolação.

A definição desta modelagem pode ser feita segundo PRESS et. al. [1989]. Considere-se para isto que se queira interpolar o conjunto de valores tabelados da função $y_i = y(x_i)$, $i = 1 \dots n$, sendo x_i uma seqüência de números reais dispostos em ordem crescente. Deste conjunto de números, destaque-se o sub-grupo correspondente ao intervalo entre x_j e x_{j+1} para o qual pretende-se fazer um trecho de interpolação. A este sub-grupo da tabela faz-se corresponder valores, supostos conhecidos de y''_i e y''_{i+1} (demonstra-se, a seguir, que tais valores da função derivada y'' podem ser determinados).

Os valores y''_j e y''_{j+1} podem ser tomados como coeficientes lineares de dois termos polinomiais cúbicos linearmente independentes conforme expressa a equação (11.5)

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy''_j + Dy''_{j+1} \quad (II.5)$$

sendo A e B obtidos através da particularização da fórmula geral de interpolação de Lagrange para o caso de interpolação linear, ou seja:

$$A \equiv \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad (\text{II.6})$$

$$B \equiv 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (\text{II.7})$$

Para C e D considera-se as expressões:

$$C \equiv \frac{1}{6} (A^3 - A) (x_{j+1} - x_j)^2 \quad (\text{II.8})$$

$$D \equiv \frac{1}{6} (B^3 - B) (x_{j+1} - x_j)^2 \quad (\text{II.9})$$

Pode-se provar que y'' é de fato a segunda derivada do polinômio interpolador expresso pela equação (II.5). Derivando duas vezes em relação a x a equação (II.5), obtém-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Ay''_j + By''_{j+1} \quad (\text{II.10})$$

Observando as equações (II.6) e (II.7), pode-se determinar:

$$A = 1 \quad \text{para } x = x_j$$

$$A = 0 \quad \text{para } x = x_{j+1}$$

$$B = 0 \quad \text{para } x = x_j$$

$$B = 1 \quad \text{para } x = x_{j+1}$$

Estes valores demonstram, através da equação (II.10), que y'' é realmente a segunda derivada anteriormente tabelada. Prova-se ainda que a segunda derivada é contínua no contorno entre os dois intervalos (x_{j-1}, x_j) e (x_j, x_{j+1}) .

A idéia básica na definição de uma spline cúbica é que seja também contínua a primeira derivada no contorno entre os dois intervalos (x_{j-1}, x_j) e (x_j, x_{j+1}) . A partir deste princípio pode-se obter as equações que determinam os números y''_i quais satisfazem às condições de continuidade. Basta igualar as duas expressões obtidas através das avaliações da primeira derivada dy/dx (cuja a expressão foi omitida aqui para abreviar o texto) nos pontos $x = x_j$, correspondente ao intervalo (x_{j-1}, x_j) e $x = x_j$ correspondente ao intervalo (x_j, x_{j+1}) .

Deste procedimento obtém um sistema com $n - 2$ equações lineares e n incógnitas y''_i , $i = 1, \dots, n$. Este sistema tem dois graus de liberdade e admite, pois, duas famílias de parâmetros como possíveis soluções básicas. Para se garantir a unicidade da solução do sistema é necessário especificar duas condições adicionais, geralmente estabelecidas como condições de contorno em x_1 e x_n e que são a seguir enumeradas:

1. os valores das derivadas segundas y''_1 e y''_n são iguais a zero. Isto permite obter a Spline Cúbica Natural, a qual têm como zero o valor de y'' em ambos ou em um dos pontos de contorno.
2. determinar os valores de y''_1 e y''_n , calculando-os através da equação da primeira derivada dy/dx , de modo que a primeira derivada da função interpolante tenha um determinado valor em ambos ou em um dos contornos.

Em geral, é mais conveniente utilizar a representação paramétrica das curvas. Os parâmetros utilizados podem ser, por exemplo, a distância entre os pontos dados, os vetores que definem os vértices dos polígonos ou um contador estabelecido como o próprio tempo.

Desta forma, pode-se definir (no espaço tridimensional) um trecho de curva Spline Cúbica através da forma recursiva apresentada na expressão (II.11).

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^4 C_{i,j} t^{j-1}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (\text{II.11})$$

onde:

$P_i(t)$: vetor posição de componentes

$$[x_i(t), y_i(t), z_i(t)]$$

$C_{i,j}$: matriz que contém 12 coeficientes (4 por componente) determinados

ao se impor as condições de contorno tais como as derivadas nos extremos;

t : parâmetro utilizado.

Conforme menciona MOLINA [1988] as funções splines de ordem k (grau $k-1$) são contínuas e diferenciáveis até a ordem $k-2$ interpolando todos os pontos. Sendo a determinação das variáveis dependente das condições de contorno, tais como as derivadas primeira e segunda nos extremos, pode-se determinar diferentes desenhos de curvas de interpolação para um mesmo conjunto de pontos. A figura (II-3) apresenta os desenhos das curvas de interpolação utilizando splines cúbicas.

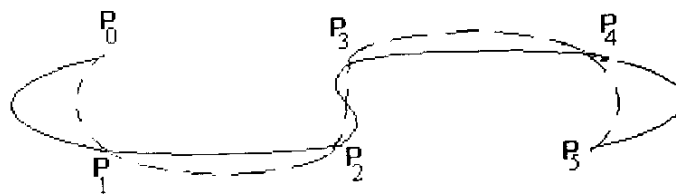


Figura (11.3) - Interpolação dos pontos $P_0 \dots P_5$ através de splines cúbicas. A linha contínua é uma spline cúbica natural.

As splines cúbicas são muito utilizadas em desenhos de cascos de navio. Tais modelagens apresentam características análogas às dos instrumentos de desenho utilizados nas concepções de projetos de navios. O problema com tal modelagem é que, por interpolar todos os pontos

dados - ficando assim à mercê da distribuição dos pontos no desenho - apresenta oscilações indesejáveis, tal como acontece com a modelagem através de funções polinomiais.

11.3.3- Curvas de Bézier

Além dos inconvenientes causados pelas indesejáveis oscilações no desenho da curva, a técnica das splines cúbicas não oferece ao usuário uma idéia de como será o “design” da curva. Isto se deve, por exemplo, ao fato de se especificar a conformação da curva através de condições de contorno, tais como direção e magnitude das derivadas. Não se pode dizer que existe sempre uma relação entre a forma da curva e as grandezas envolvidas.

Como opção para o desenho de curvas sem os problemas mencionados acima, pode-se adotar a técnica que utiliza as Curvas de Bézier

Bézier partiu do princípio de que um ponto de um segmento de curva pode ser dado através de uma função paramétrica da seguinte forma [MOLINA, 1988; BARTELS, 1987]:

$$P(t) = \sum_{j=1}^k P_j J_{k,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{II.12})$$

sendo

k : ordem da curva;

P_i : conjunto de vértices. os quais formam o “polígono característico” aberto. Os vértices são também chamados de pontos de controle”, conforme esquematiza a Figura (II.4).

$$J_{k,i}(t) = \frac{k!}{i!(k-i)!} t^i (1-t)^{k-1} \quad (\text{II.13})$$

$J_{k,i}(t)$ são as funções de base de Bernstein. Estas funções de ponderação formam uma família de funções polinomiais que satisfazem às condições para que se obtenha as curvas de Bézier, de forma simples e direta.

A técnica de Bézier permite uma percepção melhor da relação entre as condições de contorno e a curva obtida. Pode-se mudar o desenho e a ordem da curva até atingir a forma desejada; para tanto, basta que se empregue parâmetros facilmente controláveis [MOLINA, 1988].

Com esta técnica interpola-se apenas o primeiro e o último vértice. Os outros vértices do polígono de controle definem as derivadas a ordem e a forma da curva [ROGERS e ADAMS, 1976]. Observe-se na figura (II.4) um esboço do traçado de curvas de Bézier; as formas das curvas se aproximam do polígono de controle e podem ser modificadas facilmente através da mudança das posições dos vértices do polígono.

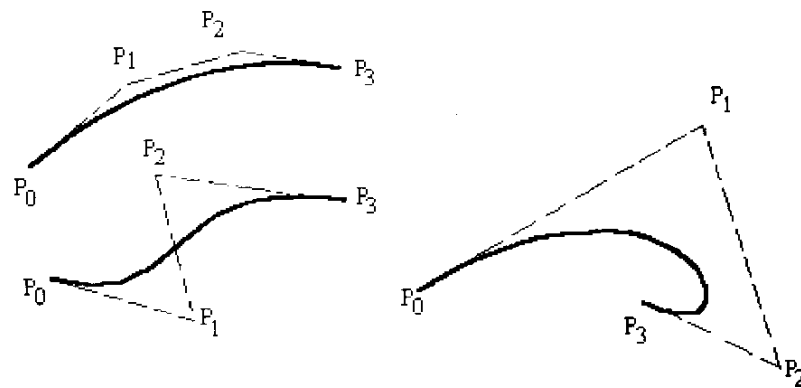


Figura II.4 - Curvas de Bézier $P_0 \dots P_3$; são os pontos que formam o polígono de controle.

Referindo-se ainda à Figura (II.4) apresenta-se a seguir as quatro propriedades - e justificativas - que motivaram Bézier a adotar as funções de base de Bernstein para a sua técnica de modelagem.

1. As funções permitem interpolar o primeiro e o último vértice do polígono de controle; ou seja o segmento de curva deve partir de P_0 e terminar em P_n . A função escolhida tem a tarefa de controlar a "partida" e a "chegada" dos pontos da curva de Bézier.
2. A tangente em P_0 deve ser dada por " $P_1 - P_0$ " e a tangente em P_n por " $P_n - P_{n-1}$ ". Disto resulta o controle da direção da tangente em cada extremidade da curva.
3. A exigência anterior deve ser atendida também com relação às derivadas de ordem superior. Desta forma, a segunda derivada em P_0 deve ser calculada utilizando-se os pontos. Generalizando, a derivada de ordem r em um ponto extremo da curva deve ser calculada utilizando-se os r vértices da vizinhança. Este procedimento permite que se tenha um controle ilimitado de continuidade na união de dois segmentos de uma curva composta.
4. As funções básicas de Bernstein devem ser simétricas com relação à t e $(1-t)$. Isto significa que a forma da curva não muda ao se inverter a seqüência dos vértices do polígono de controle que define a curva. Este é o caso de inversão de parametrização.

As funções selecionadas por Bézier dependem do número de vértices usados para especificar uma curva particular. Isto significa que, para aumentar a ordem da curva, é preciso apenas que se especifique mais vértices para o polígono de controle. A figura (II.5) apresenta uma curva de Bezier e os vértices do polígono de controle.

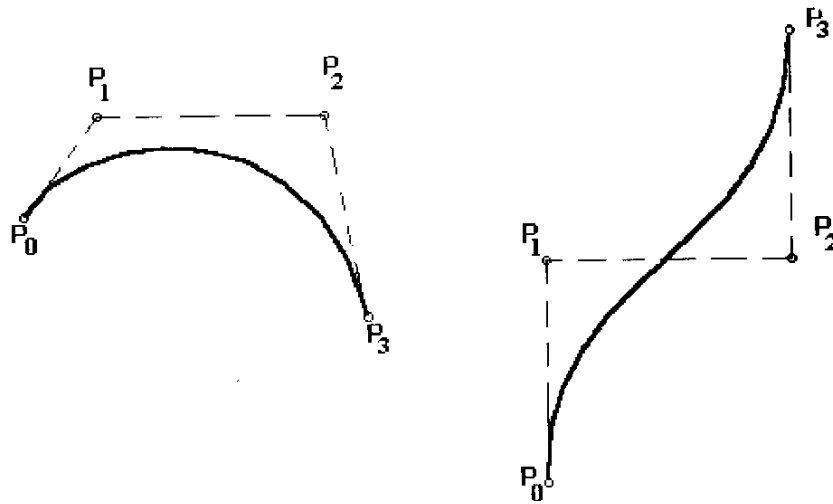


Figura (11.5) - Curvas cúbicas de Bézier e polígonos de controle associados.

11.3.4 - B-Spline Tensionada

A curva gerada usando a técnica B-Spline é dada pela expressão parametrizada [MOLINA, 1988; BARTELS, 1987; ROGERS, 1988; ROGERS 1976; DE BOOR, 1978]:

$$P(t) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,k}(t) \quad (\text{II.14})$$

Onde:

$P(t)$: vetores posição ao longo da curva em função do parâmetro t ;

P_i : vértices do polígono de controle da curva;

$N_{i,k}(t)$: funções de ponderação da Base B-Spline de ordem k ;

n : número de vértices do polígono de controle.

As funções de ponderação $N_{i,k}(t)$ são definidas recursivamente, segundo BOOR [1978], pela seguinte expressão.

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_{i+1}} \quad (\text{II.16})$$

Os valores de x_i são os elementos que compõem o vetor nó. Eles relacionam a variável paramétrica t aos P_i pontos de controle. Ou seja, o vetor nó fixa a variação do parâmetro t na faixa de valores tais que $x_1 \leq t \leq x_{n+k}$. Para uma curva aberta, os pontos x_i são dados pela regra:

$$\begin{aligned} x_i &= 0, & i &= 1, 2, \dots, k \\ x_i &= i - k, & i &= k + 1, k + 2, \dots, n \\ x_i &= n = k + 1, & i &= n + 1, n + 2, \dots, n + k \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Segundo esta regra, o número de elementos do vetor nó depende do número de vértices do polígono de controle e do grau da curva ($k-1$).

Os vértices P_i são pontos desconhecidos do polígono requerido para a geração da curva B-Spline que corresponde aos pontos dados através de $P(t)$.

Referindo-se apenas a um dos pontos dados, têm-se:

$$P(t) = P_1 N_{1,k}(t) + P_2 N_{2,k}(t) + \dots + P_n N_{n,k}(t)$$

Para os demais pontos dados pode-se obter expressões similares. Disto resulta um sistema de equações lineares simultâneas, o qual pode ser escrito sob a seguinte forma matricial simbólica:

$$[P(t)] = [P][N]$$

onde:

$[P(t)]$: matriz $r \times 3$ composta pelos r pontos dados;

$[P]$: matriz $n \times 3$ correspondente aos n pontos do polígono de controle (incógnitas do problema) e

$[N]$: matriz $r \times n$ formada pelos coeficientes das funções bases B-Spline.

As curvas B-Splines são definidas de forma similar às curvas de Bézier; elas também utilizam um conjunto de funções de ponderações as quais combinam os efeitos sobre os n pontos do polígono de controle. A diferença básica entre estes dois processos numéricos pode ser notada ao se comparar as expressões (II.12) e (II.14). Note-se que para as curvas de Bézier, o número de pontos de controle determina o grau das funções polinomiais de ponderação; para as curvas B-Spline o grau destas funções é controlado pelo parâmetro k , independentemente do número de pontos de controle.

As funções Splines Fundamentais (funções de ponderação), também denominadas Base B-Spline, SÃO geralmente locais. Um caso particular deste conjunto de funções é a Base de Bernstein, característica global.

Numa técnica com característica global (controle global da forma da curva), uma mudança de posição em um dos vértices do polígono de controle (mudança local) se propaga fortemente por toda a curva.

A Base B-Spline é local devido ser cada uma de suas funções diferente de zero só em uma parte do domínio paramétrico.

Ao se adotar para a ordem da curva o mesmo número de pontos do polígono de controle, obtém-se a curva de Bézier. Quanto menor for a ordem da curva mais próxima a curva estará do polígono de controle. Quando a ordem for igual a dois (grau 1) a curva coincidirá com o próprio polígono de controle.

Uma curva B-Spline é definida matematicamente como uma combinação linear de B-Splines. Devido a isso, a suavidade da curva gerada é função da ordem (ou grau) da B-Spline [MOLINA, 1988].

Aumentando a ordem da curva, obtém-se uma configuração mais tensionada da curva gerada. Inversamente, ao se diminuir a ordem obtém-se curvas que se aproximam mais do polígono de controle. Na figura (II.6) pode-se observar o desenho de curvas B-Splines de diversas ordens obtidas para os mesmos vértices de controle.

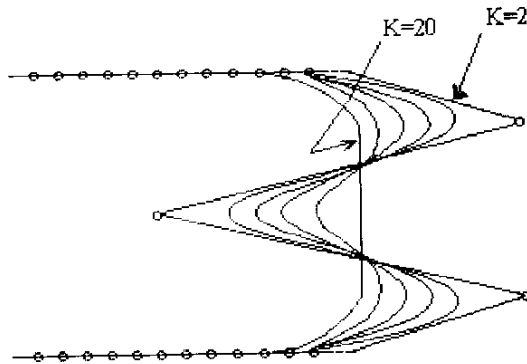


Figura (II.6) - Curvas B-Spline de ordens 2,3,4,5,10 e 20 para os mesmos vértices de controle

[BARTELS et. al., 1987].

A figura (II.7) apresenta as modelagens do comportamento $M-\theta$ da ligação do pórtico do EXEMPLO 1, apresentado no capítulo VI, utilizando-se B-Spline Tensionada. Observe-se as curvas geradas com B-Spline de ordens 4,8 e 10.

AJUSTE POR B-SPLINE TENSIONADA
LIGACAO DO PÓRTICO DO EXEMPLO 1

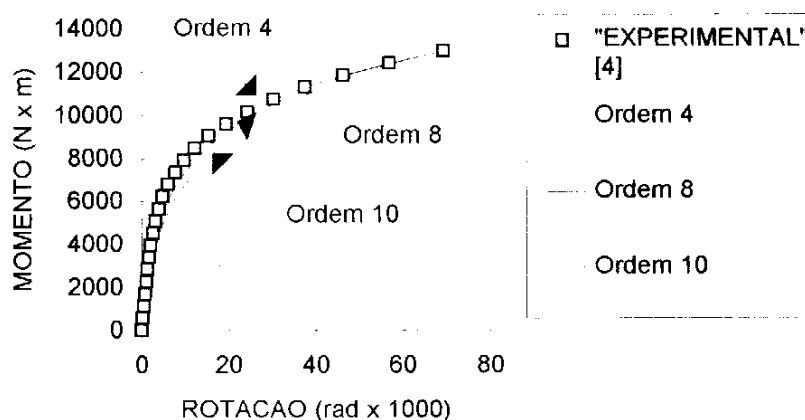


Figura (II.7) - Curvas B-Spline de ordens 4, 8 e 10 geradas para a relação M- θ da ligação do pórtico EXEMPLO 1

II.4 - FINALIDADE DOS MODELOS UTILIZADOS

Para a determinação de um modelo matemático que represente bem o comportamento M - θ de uma ligação é necessário que os ajustes ou interpolações se dêem sobre uma razoável quantidade de resultados experimentais referentes àquela ligação: principalmente quando a técnica utilizada é a da B-Spline.

No presente trabalho, os comportamentos M - θ das ligações dos pórticos utilizados como exemplos de aplicação, são obtidos segundo os procedimentos abaixo:

1. No caso do modelo idealizado no EXEMPLO 1, os pontos da curva M- θ da ligação são obtidos primeiramente utilizando-se a modelagem polinomial de FRYE e MORRIS, descrita no item (II.2). Sobre tais resultados é gerada uma curva B-Spline Tensionada, sendo esta apresentada através de uma descrição numérica de M- θ .

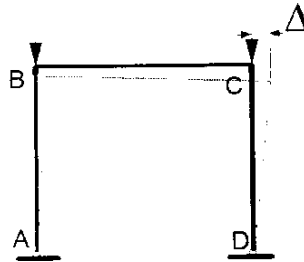
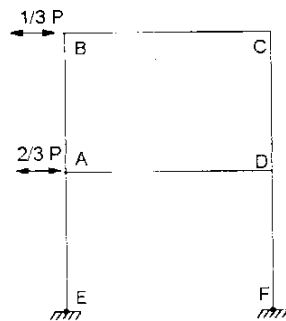
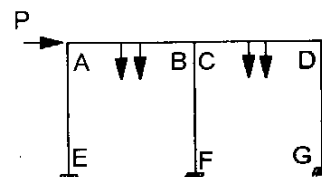


Figura (11.8) - Exemplo I

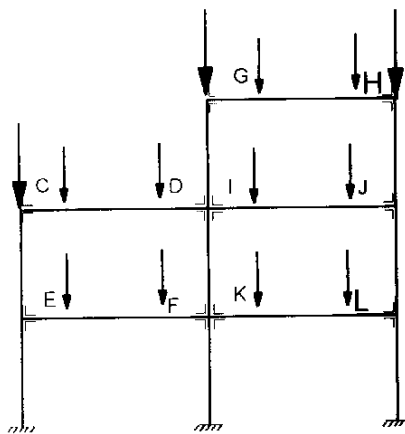
2. Com relação aos pórticos ensaiados por STELMACK et. al. [1986] e LAU [1995], EXEMPLO II e III e EXEMPLO IV, respectivamente, são geradas curvas B-Spline diretamente sobre os valores médios (em termos de $M - \theta$) dos resultados experimentais das ligações utilizadas. Utiliza-se, ainda, o primeiro procedimento acima descrito, para efeito de comparações entre os resultados.



a) Exemplo II



b) Exemplo III



c) Exemplo IV

Figura 11.9) Exemplos II, III e IV

CAPÍTULO III.

ALGORITMO DE SOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA IMPLEMENTADO NO SISTEMA COMPUTACIONAL MEDIFEM

III.1 - INTRODUÇÃO

Utilizando o método dos elementos finitos (MEF) analisa-se os comportamentos não-lineares, um devido aos efeitos da força axial na rigidez à flexão e outro devido à perda de rigidez da ligação. Esta tarefa é realizada através de uma formulação adaptada em um programa automático para análise não-linear geométrica incremental de pórtico.

Para o elemento finito de viga-coluna implementado são considerados apenas os efeitos do esforço normal e do momento fletor os efeitos devidos ao esforço cortante não são considerados na presente análise.

A pesquisa utiliza um algoritmo para análise não-linear geométrica de estruturas aperticadas planas e leva em conta a redução da rigidez da estrutura devido à presença da ligação semi-rígida. Este método de análise foi implementado através de adaptações de novas rotinas no sistema computacional MEDIFEM (PFEIL, 1991) que é por sua vez o produto da implementação de diversas rotinas e modificações no programa MINIFEM (ZIENKIEWCZ, 1977). Este programa foi desenvolvido para resolver problemas em 1D, 2D, 3D, lineares ou não-lineares, estáticos ou dinâmicos.

O programa MEDIFEM é escrito em FORTRAN e utiliza linguagem de macro-instruções associadas, cada uma delas, a um conjunto de subprogramas compactos. Estes subprogramas são destinados à realização de uma ou mais tarefas no processo de solução via Métodos dos Elementos Finitos. O conceito de macro-instruções possibilita que novos algoritmos sejam inseridos no sistema sem que seu conteúdo seja afetado. Uma descrição detalhada do MEDIFEM é apresentada por PFEIL (1991) em seu Seminário de Doutorado.

O presente capítulo tem por objetivo a apresentação do algoritmo usado para a análise não-linear já referida. Deve-se destacar que é utilizado o método incremental-iterativo, tendo este características semelhantes ao algoritmo de Newton-Raphson, calculando-se no entanto o vetor de cargas desequilibradas através da consideração de movimentos de corpo rígido. A resposta completa da estrutura incluindo o estado limite último, é obtida aplicando-se a solicitação externa através da combinação do controle de carga e de deslocamento.

Visando uma exposição do esquema de cálculo, apresenta-se inicialmente o método incremental-iterativo. A seguir são apresentados a conceituação do movimento de corpo rígido e o algoritmo adotado para o controle de deslocamento. Por fim, apresenta-se o algoritmo usado para a análise não-linear.

III.2 - MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO

ALVES (1993a), apresenta em seu trabalho um estudo detalhado acerca do desempenho de diversos algoritmos para a resolução das equações de equilíbrio em uma análise não-linear geométrica de estruturas utilizando-se o MEF. Um dos métodos analisados consiste na solução combinada incremental-iterativa, a qual é a seguir apresentada.

A partir do princípio da energia potencial total estacionária, pode-se deduzir as equações de equilíbrio de um sistema estrutural discreto. O sistema não-linear constituído por tais equações é apresentado através de equação (III.1).

$$\left[\underset{\sim}{K}_0 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{K}_1(\underset{\sim}{U}) + \frac{1}{6} \underset{\sim}{K}_2(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{U}) \right] \underset{\sim}{U} = \mu \underset{\sim}{F} \quad (\text{III.1})$$

onde as matrizes de rigidez $\underset{\sim}{K}_1$ e $\underset{\sim}{K}_2$ são funções dos deslocamentos e rotações, incógnitas do problema. $\underset{\sim}{U}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\mu \underset{\sim}{F}$ é o vetor de forças nodais externas, cuja magnitude é função do parâmetro único μ .

A solução do sistema formado pelas equações de equilíbrio pode ser obtido através de um processo incremental no qual o carregamento é aplicado gradativamente.

Para a obtenção da equação que caracteriza o processo incremental pode-se supor inicialmente que seja conhecido o ponto de equilíbrio $(\mu^E \underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{U}^E)$, e que a partir deste ponto é dado um incremento de carga $\Delta \mu \underset{\sim}{F}$. O novo ponto de equilíbrio, E' , é então definido por $(\mu^E \underset{\sim}{F} + \Delta \mu \underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{U}^E + \Delta \underset{\sim}{U})$. Neste ponto deverá também ser satisfeita a equação de equilíbrio (III.1), tendo pois que:

$$\left[\underset{\sim}{K}_0 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{K}_1(\underset{\sim}{U}^E + \Delta \underset{\sim}{U}) + \frac{1}{6} \underset{\sim}{K}_2(\underset{\sim}{U}^E + \Delta \underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{U}^E + \Delta \underset{\sim}{U}) \right] (\underset{\sim}{U}^E + \Delta \underset{\sim}{U}) = (\mu^E + \Delta \mu) \underset{\sim}{F} \quad (\text{III.2})$$

Do desenvolvimento da equação (III.2) obtém-se a seguinte equação de equilíbrio para o processo incremental (ALVES 1993a):

$$\left(\underset{\sim}{K}_T^E + \underset{\sim}{K}_I \right) \Delta \underset{\sim}{U} = \Delta \underset{\sim}{\mu} F \quad (\text{III.3})$$

onde

$$\underset{\sim}{K}_T^E = \underset{\sim}{K}_0 + \underset{\sim}{K}_1 \left(\underset{\sim}{U}^E \right) + \frac{1}{2} \underset{\sim}{K}_2 \left(\underset{\sim}{U}^E, \underset{\sim}{U}^E \right) \quad (\text{III.4})$$

é a matriz tangente, que corresponde á rigidez da estrutura do ponto $(\underset{\sim}{\mu}^E F, \underset{\sim}{U}^E)$ e

$$\underset{\sim}{K}_0 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{K}_1 \left(\Delta \underset{\sim}{U} \right) + \frac{1}{2} \underset{\sim}{K}_2 \left(\Delta \underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{U}^E \right) + \frac{1}{6} \underset{\sim}{K}_2 \left(\Delta \underset{\sim}{U}, \Delta \underset{\sim}{U} \right) \quad (\text{III.5})$$

é a matriz de rigidez incremental.

A matriz de rigidez incremental “corrige” a rigidez dada pela matriz tangente, de modo a se ter uma matriz secante aos dois pontos $(\underset{\sim}{\mu}^E F, \underset{\sim}{U}^E)$ e $(\underset{\sim}{\mu}^E F + \Delta \underset{\sim}{\mu} F, \underset{\sim}{U}^E + \Delta \underset{\sim}{U})$. A figura (III.1) ilustra o procedimento.

O processo incremental apresentado deve ser iterativo tendo em vista que a matriz $\underset{\sim}{K}_I$ depende dos deslocamentos $\Delta \underset{\sim}{U}$, incógnitas do problema; o que caracteriza o método descrito como incremental-iterativo

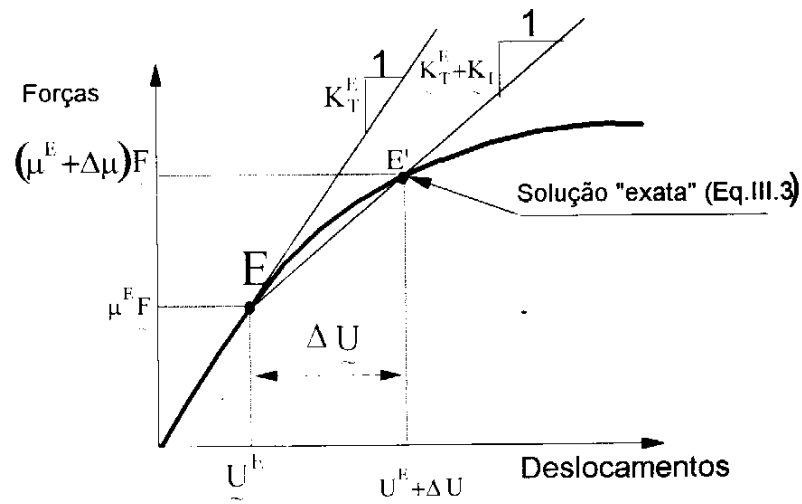


FIGURA (III.1) - Método incremental (ALVES, 1993a)

No programa MEDIFEM as equações de equilíbrio são escritas adotando-se um referencial lagrangeano atualizado, que é a melhor forma de se corrigir os problemas da não consideração dos movimentos de corpo rígido (conforme ALVES 1993 a). Neste caso, a parcela não-linear da matriz tangente é definida em termos de esforços internos, assim como apresentam CHAJES e CHURCHILL (1987) isto é.

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_o + \tilde{K}_g \quad (\text{III.6})$$

onde \tilde{K}_g denominada matriz de rigidez geométrica ou matriz de tensões iniciais, pois depende dos esforços internos existentes no início de cada incremento.

Ainda segundo CHAJES e CHURCHILL, para um elemento de pórtico plano, a hipótese de se considerar como constantes as deformações em toda a seção transversal, resulta na

obtenção de uma matriz \tilde{K}_g dependente apenas do esforço axial. Sabe-se que tal aproximação linear das deformações não é válida na presença de flexão.

Deve-se ainda ressaltar que no referencial lagrangeano atualizado, a matriz incremental, \tilde{K}_1 , é função apenas dos incrementos de deslocamentos $\Delta \tilde{U}$. Neste caso, com a atualização da geometria ao final de cada incremento, \tilde{U}^E será sempre nulo, sendo nula por conseguinte a parcela $\frac{1}{2} \tilde{K}_2(\Delta \tilde{U}, \tilde{U}^E)$ na expressão (III.5).

Deste modo, para um referencial lagrangeano atualizado, a equação de equilíbrio (III.3) assume a forma final:

$$\left[\tilde{K}_o + \tilde{K}_g + \frac{1}{2} \tilde{K}_1(\Delta \tilde{U}) + \frac{1}{6} \tilde{K}_2(\Delta \tilde{U}, \Delta \tilde{U}) \right] \Delta \tilde{U} = \Delta \mu \tilde{F} \quad (\text{III.7})$$

cuja resolução é possível no sistema MEDIFEM adaptado.

Para um elemento de pórtico plano na equação (III.7), \tilde{K}_o é a matriz de rigidez convencional (linear); \tilde{K}_g é a matriz de rigidez geométrica (não-linear) no caso em que o esforço axial N é expresso por:

$$N = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2)$$

o que corresponde a uma primeira aproximação da interação entre os esforços axiais e os de flexão quando as cargas externas aplicadas não causam flexão. A matriz \tilde{K}_1 contém os termos que correspondem a uma segunda aproximação da interação axial-flexão, considerando-se que as cargas causam flexão (rotação θ_1 e θ_2) (ALVES, 1993a). Esta matriz contém termos que são funções lineares dos deslocamentos incrementais v_1 , v_2 , θ_1 e θ_2 . A matriz \tilde{K}_2 contém termos que são funções quadráticas de tais deslocamentos.

Referindo-se às extremidades 1 e 2 de um elemento de pórtico plano, tem-se:

u_1, u_2 : deslocamentos na direção longitudinal do elemento (eixo x);

v_1, v_2 : deslocamentos na direção transversal do elemento (eixo y);

θ_1 e θ_2 : rotações (em torno do eixo z)

Os elementos que compõem as matrizes \tilde{K}_o , \tilde{K}_g , \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 são apresentados no trabalho de ALVES (1993a).

Uma das tarefas do programa MEDIFEM é resolver o caso particular representado pela equação (III.7) de uma forma iterativa com semelhanças ao algoritmo de Newton-Raphson, só que calculando o vetor de forças desequilibradas considerando-se os movimentos de corpo rígido.

A interpretação geométrica do método incremental-iterativo está ilustrada na figura (III.1) na qual são apresentadas esquematicamente todas as fases referentes a um passo de carga.

III.3 - CONSIDERAÇÃO DOS MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO

A formulação apresentada anteriormente está restrita aos problemas com pequenas rotações. A sua validade pode ser estendida um pouco mais a partir da consideração dos movimentos de corpo rígido. Nesta pesquisa foram levados em conta apenas as expressões deduzidas considerando o movimento de corpo rígido para o cálculo das forças internas nos elementos, não tendo sido introduzidos aqueles efeitos nas matrizes de rigidez dos elementos.

O cálculo das forças internas correspondentes a um dado vetor de deslocamentos \tilde{U} é uma importante etapa no processo iterativo de solução das equações de equilíbrio. Em geral, as forças internas são calculadas através da equação (III.9), referindo-se à figura (III.2).

$$\tilde{F}_{int} = \tilde{K}_s \cdot \tilde{U}$$

onde:

\tilde{F}_{int} : vetor de forças internas;

\tilde{K}_s : matriz de rigidez secante relativa ao deslocamento \tilde{U}

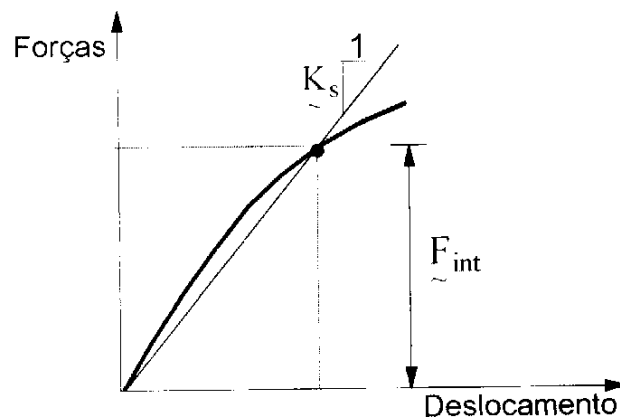


Figura (III.2) – Cálculo das forças internas pelo método secante.

Os procedimentos adotados no método de Newton-Raphson foram utilizados por ALMEIDA (1989) e por RODRIGUES (1991) em um algoritmo que consiste de um esquema híbrido proposto por BATISTA e PFEIL (1989). Neste algoritmo combinam-se os procedimentos: incremental não-linear (método tangente); direto (método secante) e a estratégia iterativa de Newton- Raphson. Tais procedimentos são apresentados, em separado, na publicação de CHAJES e CHURCHILL (1987). O método híbrido implementado por ALMEIDA (1989) visa o estudo dos efeitos da não-linearidade geométrica e da não-linearidade devido à flambagem local em elementos comprimidos, constituídos por perfis leves, de estruturas treliçadas ou aporticadas. Neste caso, o método secante é utilizado para o cálculo das forças internas logo após a alteração das propriedades da seção efetiva do elemento em virtude da flambagem local do perfil. O algoritmo assim constituído apresentou, no entanto, para perfis com determinadas rigidezes de coluna e de seção, problemas de convergência. Com implementação do algoritmo híbrido, o que também é feito no sistema computacional MEDIFEM, o autor da presente dissertação visa o estudo do comportamento de pórticos planos metálicos com ligações semi-rígidas.

Normalmente, o método secante é utilizado para o cálculo das forças internas logo após detectada a redução da rigidez de um determinado elemento (ligação, flambagem local de perfis leves, etc.), a partir da qual a estrutura perde a capacidade de suportar um determinado carregamento. O cálculo dos esforços internos da forma apresentada anteriormente não leva em conta os movimentos de corpo rígido. Sabe-se que estes poderão causar deformações, que provocarão mudanças na rigidez. Necessita-se pois de um cálculo mais rigoroso dos esforços absorvidos, o que permite avaliar o comportamento da estrutura em configurações deformadas nas quais as rotações não são mais consideradas infinitesimais.

A exposição sucinta acerca dos movimentos de corpo rígido, segue a apresentação elaborada por ALVES (1993a) de onde as figuras utilizadas para ilustrações foram adaptadas.

Três sistemas de referência são definidos para os esforços e deslocamentos, considerando-se sempre o elemento deformado. Constam no sistema inicial [figura (III.3)] os deslocamentos estritamente necessários para se concretizar o estado de deformação do elemento. Desta forma, sendo eliminados todos os deslocamentos de corpo rígido, necessita-se apenas definir o alongamento δ e as rotações ϕ_1 e ϕ_2 .

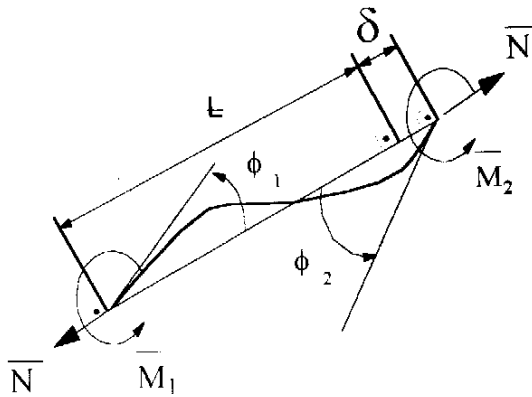


Figura (III.3) - Sistema de referência inicial.

Nesses sistemas os deslocamentos e forças correspondentes para o n-ésimo elemento são definidos pelos vetores.

$$\tilde{U}^{n'} = [\delta, \phi_1, \phi_2]^T \quad (III.10)$$

$$\tilde{F}^{n'} = [\bar{N}, \bar{M}_1, \bar{M}_2]^T \quad (III.11)$$

A figura (III.4) apresenta a configuração deformada do elemento em relação a um sistema de referência intermediário. Neste caso o sistema já apresenta os deslocamentos e as forças nas direções dos eixos locais do elemento.

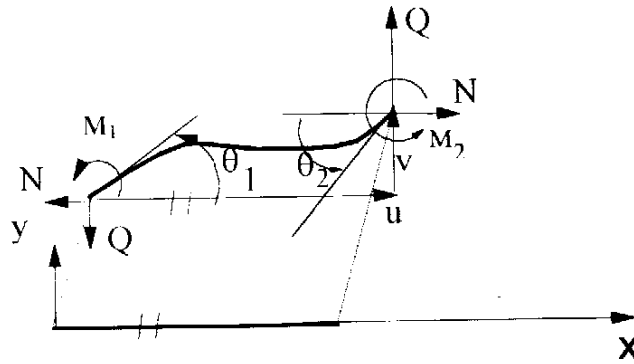


Figura (III.4) - Sistema de referência intermediário.

Neste sistema, os deslocamentos e os esforços correspondentes para o n-ésimo elemento são definidos por

$$\tilde{U}^{n*} = [u, v, \theta_1, \theta_2]^T \quad (\text{III.12})$$

$$\tilde{F}^{n*} = [N, Q, M_1, M_2]^T \quad (\text{III.13})$$

O sistema final, apresentado na figura (III.5), é o que foi utilizado nos desenvolvimentos de ALVES (1993a) com relação às formulações dos métodos utilizados para a solução das equações de equilíbrio em um problema não-linear geométrico.

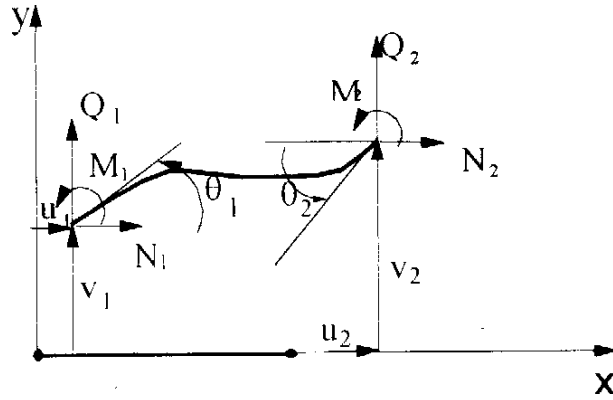


Figura (III.5) - Sistema de referência final.

Deve-se notar na figura (III.5) a representação dos deslocamentos e forças nodais para o n -ésimo elemento de pórtico apresentado na configuração indeformada, conforme figura (III.6).

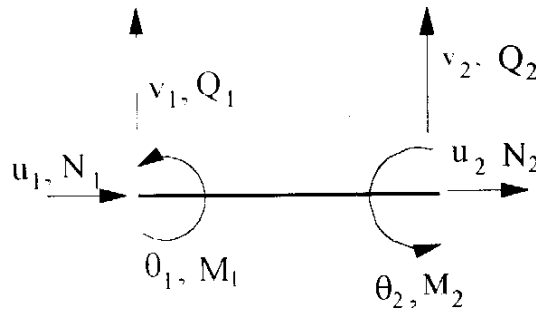


Figura (III.6) – Deslocamentos e forças nodais do elemento de pórtico plano.

Estes deslocamentos e forças, quando escritos na forma vetorial, são designados por

$$\tilde{U}^n = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]^T \quad (III.14)$$

$$\tilde{F}^n = [N_1, Q_1, M_1, N_2, Q_2, M_2]^T \quad (\text{III.15})$$

A partir das geometrias apresentadas nas figuras (III.3) a (III.5) são determinadas as relações entre os deslocamentos dos sistemas inicial e intermediário, e entre este e o sistema final. Em seguida, são obtidas as relações entre as forças $(\bar{N}_1, \bar{M}_1, \bar{M}_2)$ e os deslocamentos (δ, ϕ_1, ϕ_2) no sistema inicial. Sendo as forças funções não-lineares dos deslocamentos, recorre-se ao principio dos trabalhos virtuais para a determinação da equivalência entre o sistema inicial e o intermediário. Seguindo um procedimento conveniente na transformação do sistema intermediário para o sistema final determina-se o vetor de forças internas no n-ésimo elemento. O vetor de forças absorvidas pela estrutura é então determinado pelo somatório dos esforços internos em cada elemento já transformados para o referencial global.

O desenvolvimento da formulação para o cálculo dos esforços internos é detalhadamente apresentado no trabalho de ALVES (1993 a). Segundo este autor, nas expressões de cálculo das forças internas estão englobadas tanto a não-linearidade elástica (expressa através da não-linearidade da matriz de rigidez relativa ao sistema inicial) e decorrente da relação tensão-deformações devidas à flexão quanto a não-linearidade geométrica associada às rotações e translações, principalmente de corpo rígido.

III.4 - ALGORITMO PARA CONTROLE DE DESLOCAMENTO

Os problemas de não-linearidade geométrica de estruturas elásticas são geralmente resolvidos utilizando-se métodos tipo Newton sendo a carga utilizada como parâmetro de controle. Para os casos de estruturas que apresentam instabilidade do tipo ponto limite, o caminho pós-crítico pode ser obtido utilizando-se os mesmos métodos tipo Newton porém adotando para parâmetro de controle uma componente de deslocamento; a partir do que a carga passa a ser uma incógnita do problema.

Daqui em diante, ao se referir à matriz de rigidez \tilde{K} do elemento de pórtico plano estará se referindo ao somatório das parcelas de rigidez apresentadas na equação (III.7), a qual é um caso particular da equação (III.3).

O algoritmo implementado no programa MEDIFEM para o controle de deslocamento foi proposto por BATOZ e DHATT (1979). Este algoritmo não requer a modificação da matriz de rigidez \tilde{K} , desde que esta não seja singular. É suposta conhecida uma solução \tilde{U} do problema para um nível $\tilde{\mu}$ de carga. Desta forma os valores de \tilde{U} e $\tilde{\mu}$ são assumidos como valores iniciais (na primeira iteração $i=0$) para o ciclo seguinte ($i=1$), ou seja:

$$\mu = \mu^0 \quad (III.19)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}^0 \quad (III.18)$$

Escolhendo a componente q do vetor solução \tilde{U} como o novo parâmetro de controle e dando a ela um incremento $\Delta U q$, o vetor solução inicial é redefinido como

$$\tilde{U} = \tilde{U}^0 \quad (III.19)$$

$$U_q^0 = U_q^0 + \Delta U_q \quad (\text{III.20})$$

Empregando um método tipo Newton para a solução do sistema de equações, podem ser obtidos os valores incrementais das incógnitas $\Delta\mu^i$ e ΔU^i , considerando como fixo U_q^0 , ou seja, $\Delta U_q^i = 0$.

Dois sistemas de equações são resolvidos:

$$\tilde{K}^i \cdot (\Delta U^a) = \tilde{R}^i \quad (\text{III.21})$$

$$\tilde{K}^i \cdot (\Delta U^b) = P \quad (\text{III.22})$$

sendo \tilde{R}^i o vetor de resíduos correspondentes a U^i e P o vetor de distribuição de cargas, que multiplicado por μ fornece o vetor de cargas externas. Tem-se que:

$$\Delta U^i = (\Delta U^a) + \Delta\mu^i \cdot (\Delta U^b) \quad (\text{III.23})$$

Sendo nula a componente q do vetor $\Delta U^i = (\Delta\mu^1 = 0)$, resulta que

$$\Delta\mu^i = -(\Delta U_q^a / \Delta U_q^b)^i \quad (\text{III.24})$$

e ainda

$$U^{i+1} = U^i + \Delta U^i \quad (\text{III.25})$$

$$\mu^{i+1} = \mu^i + \Delta\mu^i \quad (\text{III.26})$$

Repetem-se as iterações até que seja alcançada a precisão desejada ou que seja atingido o número máximo de iterações permitidas.

III.5- ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

O algoritmo implementado no sistema MEDIFEM leva em conta a não-linearidade geométrica e a não-linearidade devido à presença das ligações semi-rígidas entre vigas e pilares dos pórticos planos.

A figura (III.7) ilustra o esquema combinado incremental-iterativo utilizado na solução numérica para um passo de carga ΔF_i . Dentro deste passo de carga, deve-se destacar a existência de duas etapas a serem cumpridas até ser atingido o ponto de equilíbrio E_{i+1} . Estas etapas, aqui denominadas de A e B, referem-se aos distintos caminhos de equilíbrio C_i e C_{i+1} . Cada uma destas respostas está relacionada a uma determinada condição de rigidez da ligação semi-rígida. Outro dos aspectos importantes a serem observados, e que está representado esquematicamente na figura (III.7), é a determinação do vetor de cargas desequilibradas ΔF_i^* . Este vetor está associado à redução de E'_i na curva C_i para E''_i na curva C_{i+1} e indica a mudança de rigidez das ligações, em correspondência com o estado de deformações estabelecido em E'_i .

A figura (III.8) apresenta o esquema global para obtenção da resposta completa do comportamento não-linear da estrutura sujeita à redução de rigidez das ligações com o aumento da solicitação imposta. Esta resposta não-linear é obtida ligando-se os pontos de equilíbrio E_i , indicados por círculos na figura (III.7).

Ainda na figura (III.7), dentro do passo de carga ΔF_i , o processo tem início a partir de um ponto genérico de equilíbrio E_i , indicado por um círculo. Neste ponto de equilíbrio são conhecidos, evidentemente, os deslocamentos U_{i-1} e o nível de carga F_{i-1} . Tal estado de equilíbrio pode também se referir à situação correspondente à solicitação nula na estrutura, ou seja: $F = U = 0$. No ponto de equilíbrio E_i aplica-se um incremento de carga ΔF_i e utiliza-se o método combinado incremental-iterativo para alcançar o outro estado de equilíbrio E_{i+1} ,

também em destaque segundo a marca de um círculo. Em E_{i+1} os deslocamentos e o carregamento são dados por \tilde{U}_i e \tilde{F}_i , respectivamente.

No ponto E_i são conhecidas as propriedades relacionadas com a rigidez dos elementos da estrutura e das ligações semi-rígidas. A partir deste ponto, emprega-se o método incremental-iterativo para a determinação de E'_i segundo o caminho de equilíbrio C_i (etapa A). Em cada iteração j os deslocamentos incrementais são obtidos através da equação (III.27). Ressalte-se que esta equação é a própria equação (III.3), na qual a rigidez do elemento é composta pela matriz tangente \tilde{K}_T^A e pela matriz incremental \tilde{K}_I^A , que “corrige” a rigidez dada pela matriz tangente, o que é simbolicamente apresentado na figura(III.7).

$$\tilde{K}_{i,j-1}^A \cdot \Delta \tilde{U}_{i,j}^A = \Delta \tilde{F}_{i,j}^A \quad (\text{III.27})$$

$$\text{com} \quad \tilde{K}_{i,j-1}^A = \left(\tilde{K}_T + \tilde{K}_I \right)_{i,j-1}^A \quad (\text{III.28})$$

sendo utilizado o sub-índice j para indicar o número de iterações.

Os testes de convergência são realizados considerando-se os valores das cargas desequilibradas, $\Delta \tilde{F}_{i,j}^A$, as quais são calculadas a partir das considerações dos movimentos de corpo rígido (apresentadas no item (III.3)) e não mais através do método secante conforme apresenta a equação (III.29). Este último procedimento é geralmente adotado quando se utiliza o método de Newton-Raphson.

$$\Delta \tilde{F}_{i,j}^A = \Delta \tilde{F}_i - \tilde{K}_{i,j}^A \cdot \Delta \tilde{U}_{i,j}^A \quad (\text{III.29})$$

O processo é repetido até que ao final de j iterações, seja obtida a convergência para o ponto de equilíbrio \tilde{E}'_i , quando se verifica que:

$$\Delta F_{\sim i,n}^A = F_{\sim i} - (F_{\sim int}^A)_{i,j} = 0 \quad (III.30)$$

sendo $F_{\sim int}^A$ o vetor das forças internas calculado, como já foi dito, através das considerações de movimentos de corpo rígido.

O deslocamento total na etapa A é dado por:

$$\Delta U_{\sim i}^A = \sum_{j=1}^n \Delta U_{\sim i,j}^A \quad (III.31)$$

Assim que é atingindo o estado de equilíbrio E'_i deve-se alterar os valores da rigidez das ligações, em correspondência com o estado atual da sollicitação interna. Os novos valores da rigidez são extraídos das relações entre rigidez e rotação, estabelecidos numericamente ou experimentalmente - para cada tipo de ligação na estrutura - através dos modelos apresentados no capítulo II.

Em geral, no estado atual de sollicitação interna, verifica-se uma diminuição das rigidezes das ligações. Ou seja, no passo de carga i tais propriedades são inferiores àquelas referentes ao passo $i-1$. Esta variação de propriedades é responsável pelo vetor de forças internas desbalanceadas, $\Delta F_{\sim i}^A$.

O novo ponto de equilíbrio E''_i , correspondente ao mesmo estado de deformações configurado em E'_i , só pode ser determinado agora segundo o novo caminho de equilíbrio C_{i+1} esquematizado na figura (III.7), em um nível de carga menor que F_i . Isto corresponde ao início da etapa B do algoritmo.

Com a redução da rigidez das ligações entre vigas e colunas, a estrutura perde a capacidade de suportar um determinado nível de carregamento. Esta perda de capacidade portante é representada por ΔF_i^* e é calculada através da expressão:

$$\Delta \tilde{F}_i^* = \tilde{F}_i - \tilde{F}_{int} + \Delta \tilde{F}_i^A \quad (III.32)$$

onde \tilde{F}_{int} é o vetor de forças nodais absorvidas pelos elementos da estrutura (com referência ao novo estado de equilíbrio), cuja determinação também é feita a partir da consideração dos movimentos de corpo rígido, de acordo com o já citado anteriormente.

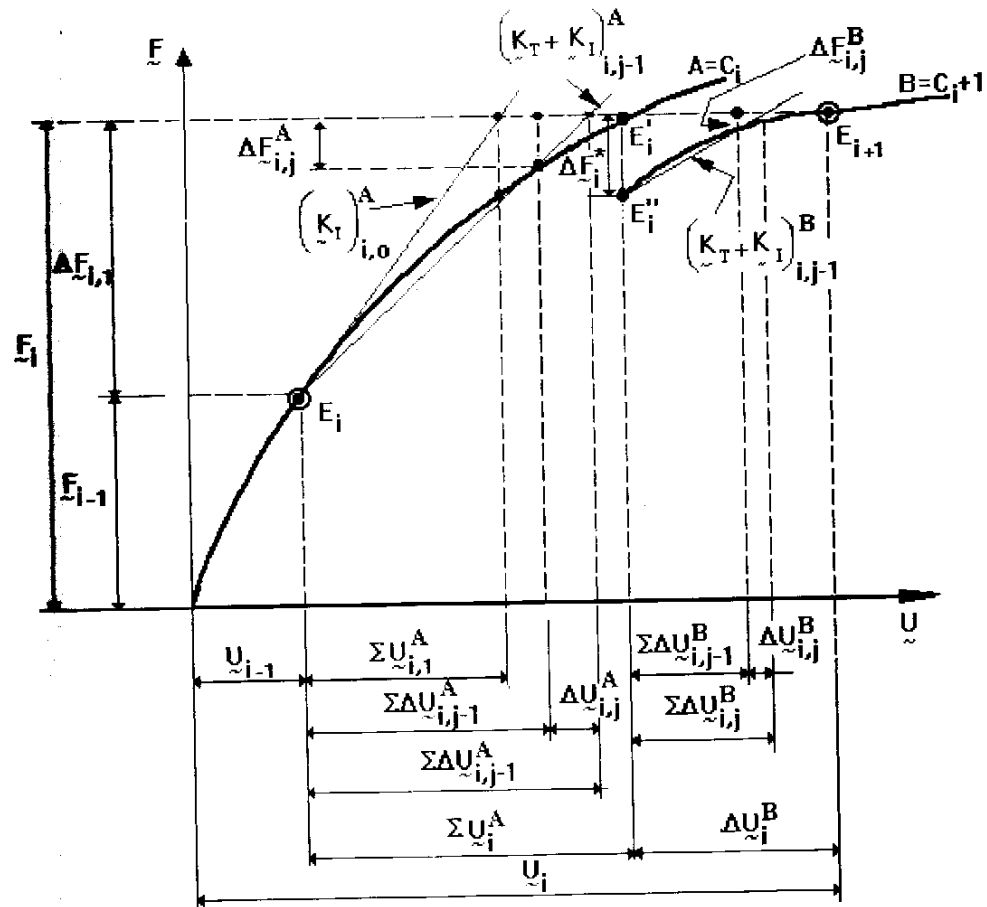


Figura (III.7) Esquema combinado incremental-iterativo

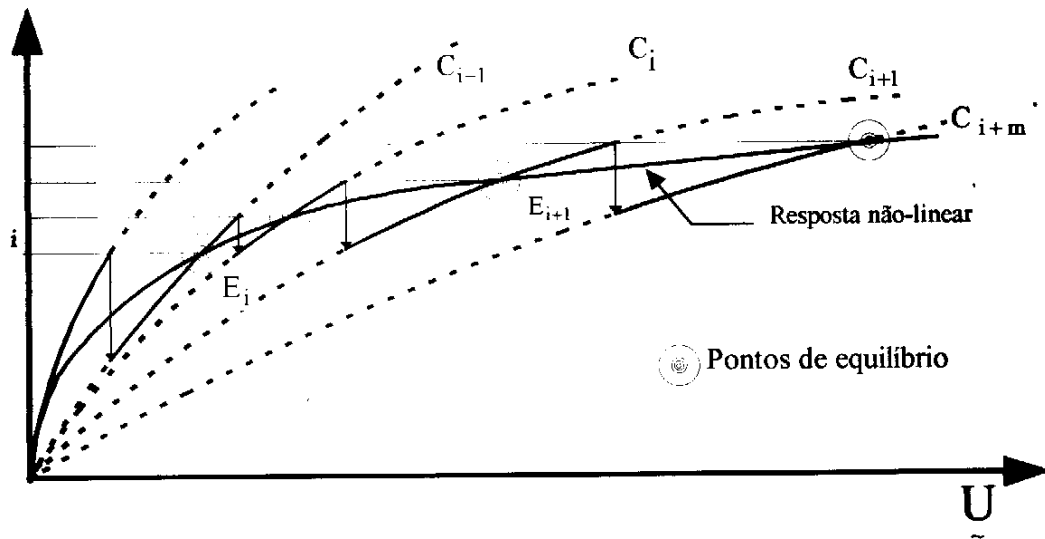


Figura (III.8) - Esquema global da análise não-linear.

Deve-se destacar que o cálculo de $\Delta \tilde{F}_i^*$ nesta pesquisa se dá de forma diferente daquela utilizada nos trabalhos de ALMEIDA (1989) e BATISTA e PFEIL (1989). Em tais trabalhos o cálculo dos esforços internos acumulados é feito utilizando-se o método direto (secante), que é aplicado considerando-se os deslocamentos acumulados totais referentes à geometria indeformada inicial (\tilde{U}_i , na figura III.7).

O cálculo do valor de $\Delta \tilde{F}_i^*$ leva à determinação do novo ponto de equilíbrio E_i ".

A partir do ponto E_i " é dado um incremento de $\Delta \tilde{F}_i^*$ à carga remanescente correspondente, de modo que o ponto de equilíbrio E_{i+1} seja atingido em definitivo. O equilíbrio é feito sobre a curva C_{i+1} sendo novamente aplicado o método incremental-iterativo. Em cada iteração j desta etapa, os deslocamentos incrementais são determinados através da expressão:

$$\tilde{K}_{i,j-1}^B \cdot \Delta \tilde{U}_{i,j}^B = \Delta \tilde{F}_{i,j} \quad (III.33)$$

$$\text{com} \quad \underset{\sim}{K}_{i,j-1}^B = \left(\underset{\sim}{K}_T + \underset{\sim}{K}_I \right)_{i,j-1}^B \quad (\text{III.34})$$

O processo é repetido até que ao final de j iterações, seja obtida a convergência para o ponto e equilíbrio E_{i+1} , quando se determina o deslocamento ΔU_i^B .

Terminada a etapa B determina-se o deslocamento total ΔU_i referente ao passo de carga

ΔF_i , o que é dado por:

$$\Delta U_i = \Delta U_i^A + \Delta U_i^B \quad (\text{III.35})$$

Aplicando-se repetidas vezes o algoritmo global (etapa A e etapa B) para sucessivos passos de carga, chega-se ao valor da carga última N_u (estado limite último). Esta carga é função das esbeltezes dos elementos comprimidos (ou flexo-comprimidos) e de sua seção transversal e pode ser definida por um dos critérios de ruína a seguir descritos:

a) a tensão máxima em Lima das paredes da seção transversal atinge o valor do limite de escoamento do material. Isto corresponde ao início de plastificação da parede, indicando assim o início de formação do mecanismo de ruína o que induz ao aparecimento de uma rótula plástica no elemento estrutural.

b) instabilidade elástica global a qual pode ser caracterizada por perda súbita de estabilidade ocorrendo para pequenos deslocamentos transversais δ ou pela apresentação de um extenso patamar de carga com aumento acentuado das deformações ϵ_i e dos deslocamentos transversais δ .

A figura (III.8) apresenta a resposta global do comportamento não-linear da estrutura segundo o método combinado incremental-iterativo com movimentos de corpo rígido. Note-se que cada ponto destacado com um círculo refere-se a um ponto de equilíbrio obtido após um procedimento global (etapas A e B) para um determinado incremento de carga.

CAPÍTULO IV

MODELO DAS LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

No presente trabalho o modelo de uma ligação semi-rígida consiste de um elemento de pórtico plano (conexão elástica) de comprimento nulo, com dois nós e três graus de liberdade por nó. Conforme esquematiza a Figura (IV.1), esta modelagem se da segundo a adoção de três molas fictícias. cada uma delas assumindo uma das seguintes funções:

- uma mola espiral de rigidez $K(\theta)$ simulando o comportamento à flexão da ligação;
- uma mola axial de rigidez $K(x)$ simulando o comportamento axial da ligação;
- uma mola axial de rigidez $K(y)$ simulando o comportamento da ligação sob esforços de cisalhamento.

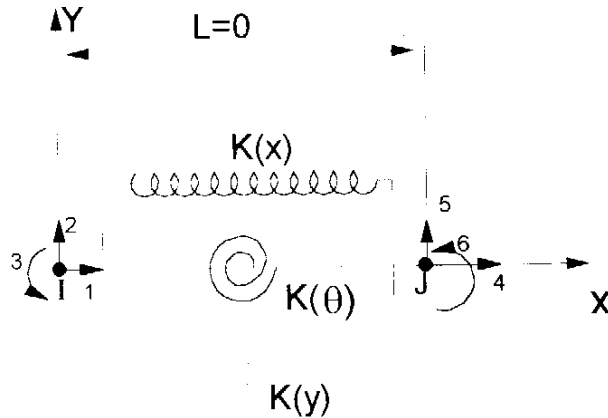


Figura IV. 1 - Modelo adotado para as ligações semi-rígidas

A interação destas molas fictícias reproduz o comportamento global da ligação. No comportamento não-linear da ligação a rigidez $K(\theta)$ é modificada a cada passo de carga do processo incremental, em concordância com a evolução do estado de deformação da mesma ligação.

As rigidezes equivalentes $K(x)$ e $K(y)$ são assumidas como infinitamente grandes. A primeira destas considerações simplifica os cálculos e permite ignorar os efeitos da não-linearidade geométrica do elemento de ligação.

Para simular uma rótula ou um engaste perfeito no lugar da ligação semi-rígida, basta que se tome para $K(\theta)$ uma rigidez nula ou um valor infinitamente grande, respectivamente.

Assume-se nesta pesquisa que o carregamento se dê no próprio plano da ligação e que esta não esteja submetida aos efeitos de descarregamento.

Ainda na presente pesquisa, não se considera a influência da força cortante no comportamento intrínseco da ligação.

CAPÍTULO V

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O sistema MEDIFEM [PFEIL, 1991] foi desenvolvido para resolver diversos tipos de problemas estruturais em uma, duas ou três dimensões, lineares ou não lineares; estáticos ou dinâmicos. O programa, escrito em FORTRAN utiliza uma linguagem de macro-instruções sendo cada uma delas associada a um conjunto de subprogramas compactos. Estes subprogramas são destinados a realização de uma ou mais tarefas no processo de solução pelo Método dos Elementos Finitos [MEF].

Uma das análises possíveis de serem realizadas com o MEDIFEM consiste na solução do problema estático não-linear onde são utilizados vários métodos convencionais, tais como: incremental não-linear (tangente), direto (secante) e estratégia iterativa de Newton-Raphson. Também encontra-se implementado um algoritmo híbrido, constituindo-se apenas de uma combinação adequada entre aqueles métodos convencionais. Os diversos esquemas de solução são realizados a partir de uma série de macro-instruções solicitadas em uma seqüência adequada.

Para a obtenção da resposta do comportamento das estruturas analisadas no presente trabalho, foi utilizado o elemento de pórtico plano ou espacial (ELMTO6). Na matriz de rigidez \tilde{K} de tal elemento estão incorporadas a matriz de rigidez \tilde{K}_0 (linear), a matriz de rigidez geométrica, K_g e as matrizes de rigidez \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 todas referenciadas no item III.2.

A matriz de rigidez \tilde{K}_g permite introduzir na análise os efeitos da força axial na rigidez à flexão.

Deve-se observar que tal elemento de pórtico plano está apto a resolver estruturas aporticadas com não-linearidade geométrica acentuada inclusive com rotações moderadas.

A incorporação da flexibilidade das ligações na estrutura se dá segundo o elemento de mola plano (ELMTO5). Em tal elemento devem ser fornecidas as rigidezes das molas equivalentes, conforme o exposto no capítulo (IV), com referência ao sistema global.

Os algoritmos de solução do problema não-linear são acessados (ou construídos) segundo diversas instruções dadas através de macro-comandos. Entre estas instruções pode-se citar: TTAN, TFOR e LOCA, cujos significados e finalidades são apresentados no Anexo (A).

No sistema é também implementado o cálculo das forças internas considerando-se os deslocamentos de corpo rígido. Isto difere do procedimento clássico da análise não-linear, no qual as forças internas são calculadas simplesmente através do produto $\tilde{K}_s \cdot \tilde{U}$. Tal procedimento não conduz a resultados tão bons quanto os obtidos com a consideração dos movimentos de corpo rígido.

CAPÍTULO VI

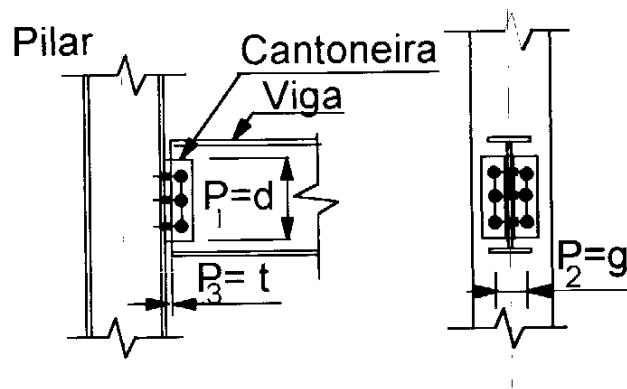
EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**VI.1 - LIGAÇÕES UTILIZADAS NOS MODELOS**

Foram analisados os comportamentos de seis pórticos planos metálicos. Três destes pórticos são imaginários; os outros são modelos em escala natural ensaiados por STELMACK [1986] e por LAU [1995]. Os resultados experimentais destes modelos, em termos da relação carga-deslocamento, foram confrontados com os resultados teóricos obtidos com a utilização do sistema MEDIFEM adaptado nesta pesquisa.

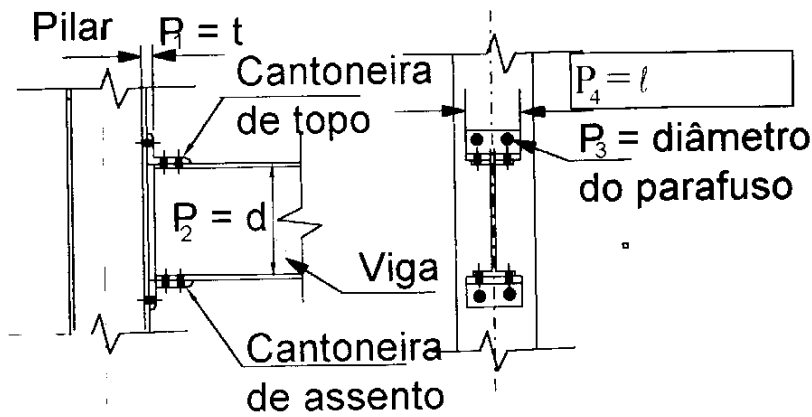
As ligações utilizadas são as seguintes:

- 1) ligação com cantoneiras duplas de alma, denominada neste trabalho como ligação tipo DA, a qual se encontra esquematizada nas figuras (II.1.a) e (VI.1.a);
- 2) ligação com cantoneiras de topo e assento, denominada como ligação TA, a qual se encontra esquematizada nas figuras (II.1.b) e (VI.1.b).
- 3) ligação com chapa de topo, denominada CT, a qual se encontra esquematizada na figuras (VI.1.c).

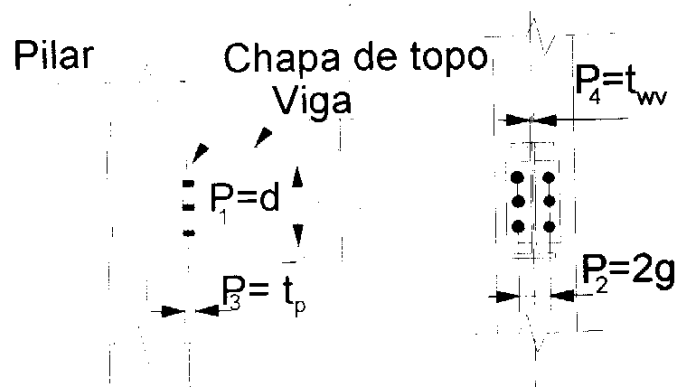
A figura (VI.1) apresenta ainda, e com maiores detalhes, os parâmetros de padronização correspondentes a estes tipos de ligação.



(a) ligação com cantoneiras duplas de alma (Tipo DA).



(b) ligação com cantoneiras de topo e assento (Tipo TA).



(c) ligação com chapa de topo (Tipo CT).

Figura (VI.I) – Tipos de ligações utilizadas nesta pesquisa e os correspondentes parâmetros de padronização

VI.2 - EXEMPLO I - PÓRTICOS SIMPLES

A figura (VI.2) apresenta um esquema sobre a geometria do pórtico simples. Note-se que também são apresentadas algumas propriedades físicas e geométricas, o tipo e a relação entre as cargas atuantes.

Procurou-se simular diversas situações para testar a influência dos diferentes tipos de ligação no comportamento do pórtico em estudo. Para isto foi considerada a possibilidade de serem utilizadas as ligações tipos DA e TA, alternadamente, no nó B. Em outro caso, estas ligações foram trocadas por uma ligação idealmente rígida. Nos nós A e D foram consideradas rótulas perfeitas e no nó C ligação idealmente rígida.

A tabela (VI.1) apresenta os valores dos parâmetros de padronização correspondentes aos dois tipos de ligações utilizadas.

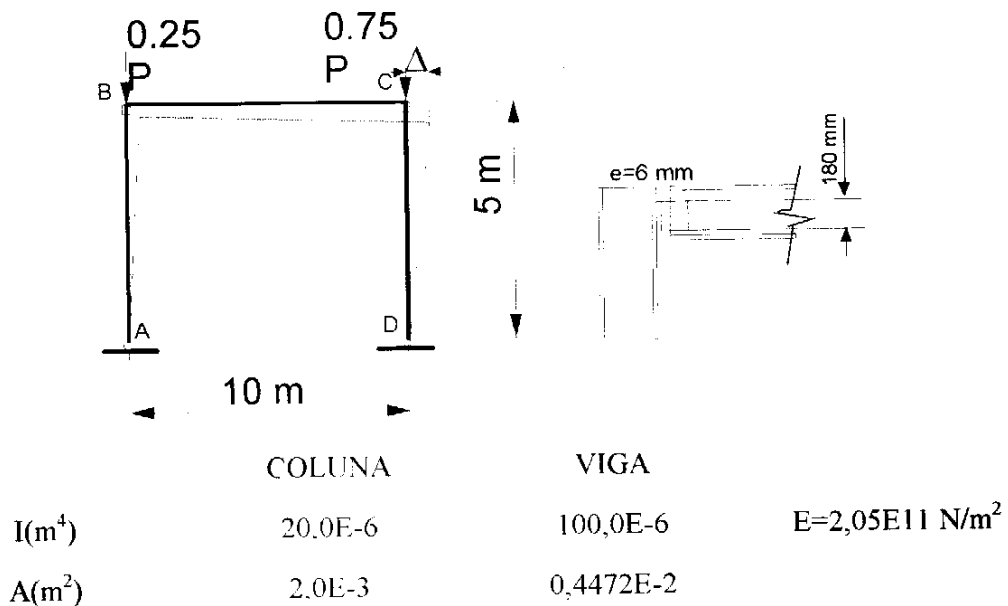


Figura (VI.2) - EXEMPLO I - Pórtico plano metálico com ligações semi-rígidas.

Tabela (VI. 1) - Ligações utilizadas no pórtico simples.

Ligação	d		g		t		f		l	
	mm	pol	mm	pol	mm	pol	mm	pol	mm	pol
DA	180	7,08	70	2,75	6	0,23	-	-	-	-
TA	330	12,99	-	-	15	0,59	9,52	0,37	160	6,29

A tabela (VI.2) apresenta os diversos casos de aplicação, propostos através de variações das ligações no pórtico simples.

Tabela (v'.2) - Casos de aplicação. tendo por base o pórtico simples do EXEMPLO 1.

CASO	TIPOS DE LIGAÇÕES UTILIZADAS (*)			
	EM A	EM B	EM C	EM D
I	RÓTULA	DA	RÍGIDA	RÓTULA
II	RÓTULA	TA	RÍGIDA	RÓTULA
III	RÓTULA	RÍGIDA	RÍGIDA	RÓTULA

(*) Esta tabela está em correspondência com a Figura (VI.2).

A figura (VI.3) apresenta o comportamento $M - \theta$ das ligações tipos TA e DA consideradas para o pórtico simples. Estes resultados foram obtidos primeiramente através da formulação de FRYE e MORRIS. Sobre os conjuntos de pontos assim obtidos, foram geradas duas B-Splines Tensionadas, uma para cada ligação. as quais foram utilizadas para as simulações apresentadas no capítulo (VII).

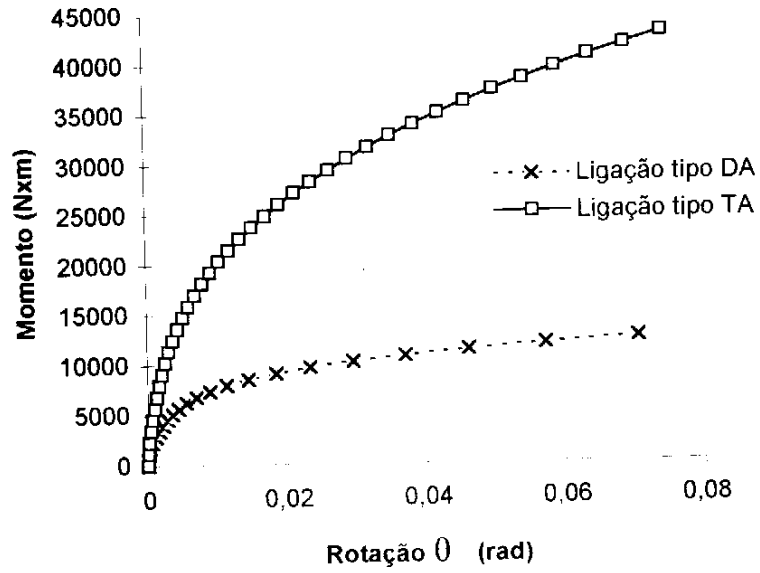


Figura VI.3 – Comportamento $M - \theta$ das ligações tipos TA e DA do pórtico do EXEMPLO I.

Resultados obtidos com B-Spline Tensionada de Ordem 4.

Os diagramas rigidez-rotação das duas ligações utilizados são apresentados na Figura (VI.3).

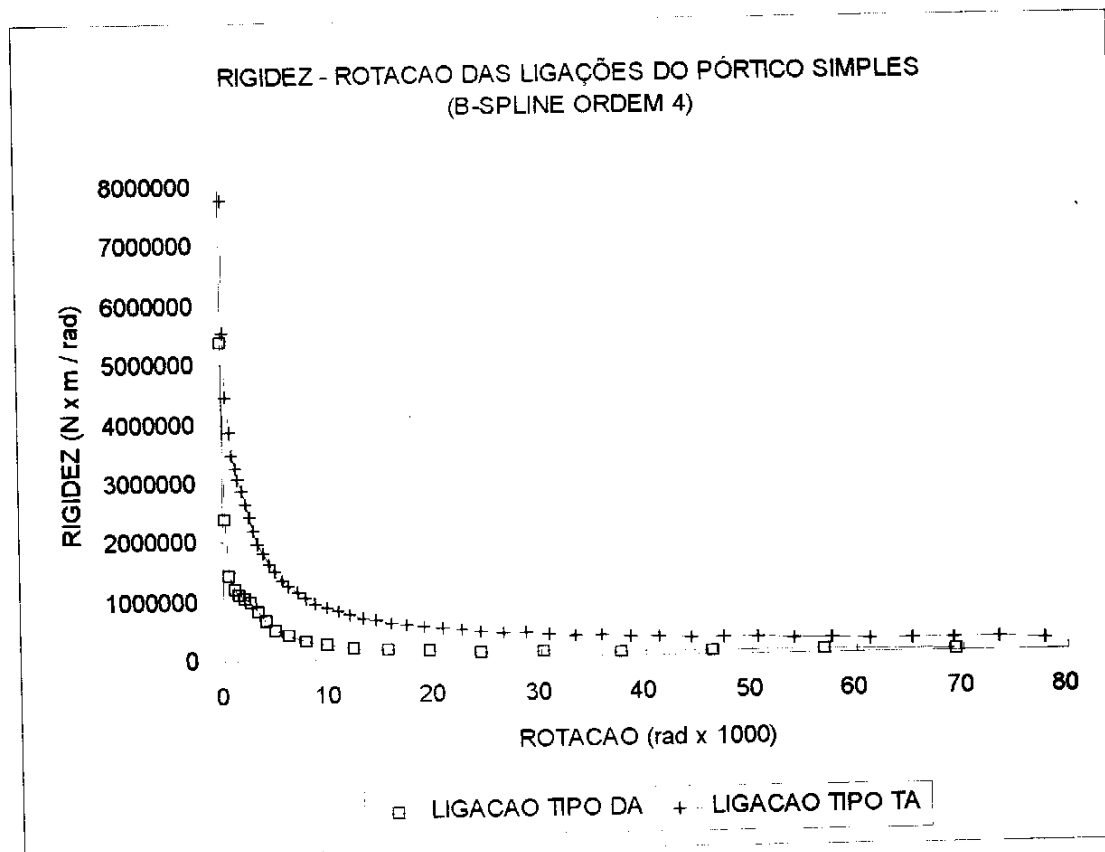
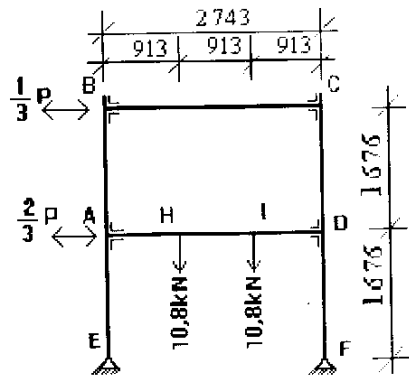


Figura (VI.3) – diagramas rigidez-rotação das ligações utilizadas no pórtico simples.

VI.3 - EXEMPLOS II e III - PÓRTICOS ENSAIADOS POR STELMACK

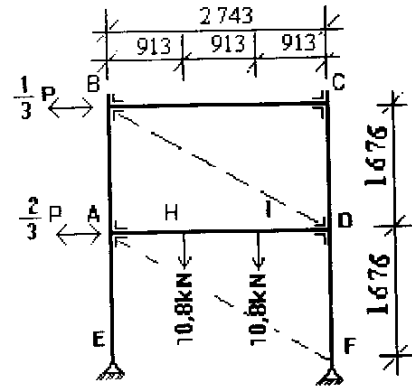
Os pórticos ensaiados por STELMACK [1986] são apresentados esquematicamente na Figura (VI.4).

PÓRTICO I



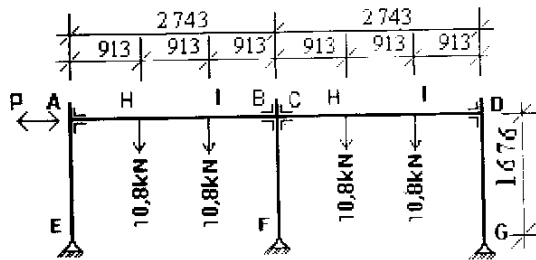
a.1) Pórtico ensaiado

(medidas em mm)



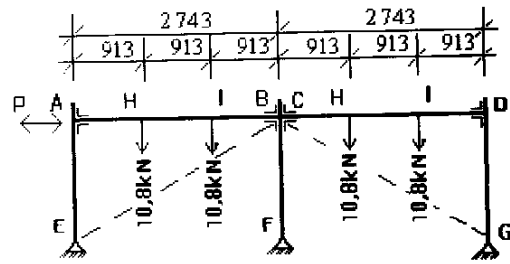
a.2) Pórtico contraventado (imaginário)

PÓRTICO II



b.1) Pórtico ensaiado

(medidas em mm)



b.2) Pórtico contraventado (imaginário)

Aço	Coluna	Viga	Diagonais
ASTM A-36	Perfil W 5x16	Perfil W 5X16	2 L50,8x50,8x4,76
$f_y = 2,50 \times 10^8 \text{ N/m}^2$	$I = 0,887 \text{E-}5 \text{ m}^4$	$I = 0,887 \text{E-}5 \text{ m}^4$	$I = 23,2 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
$E = 2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$A = 0,303 \text{E-}2 \text{ m}^2$	$A = 0,303 \text{E-}2 \text{ m}^2$	$A = 9,16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
			Distância entre cantoneiras, $e = 8 \text{ mm}$

Figura (VI.4) - Pórticos ensaiados por STELMACK [1986]

Os resultados analisados pertencem a dois de uma série de dez modelos ensaiados. Todos os elementos dos modelos são constituídos por perfis W 5x16 de aço A36. Nos nós A, B, C e D foram utilizadas ligações iguais do tipo TA, com uma espessura padrão de 1,27 cm. As ligações em E e F no pórtico I e em E, F e G no pórtico II foram projetadas de forma a se comportarem como rótulas perfeitas.

Os contraventamentos impostos aos pórticos I e II são imaginários (figuras VI.4.a2 e VI.4.b2). A intenção é verificar os diferentes comportamentos destes pórticos sem ou com as diagonais de contraventamento, caso elas de fato fossem utilizadas com as ligações semi-rígidas em estudo. Estas diagonais foram dimensionadas segundo a NBR8800 (ABNT, 1986).

O pórtico I foi solicitado por cargas horizontais cíclicas aplicadas nos nós A e B. O carregamento se iniciava com uma carga cíclica de $\pm 4,53$ kN (± 1 kip) aplicada no nó A. Em seguida eram dados incrementos de 4.53 kN até que a carga em A atingisse os valores máximos de $\pm 22,68$ kN. A carga aplicada em B era sempre a metade da carga em A.

O pórtico II foi submetido a cargas de gravidade e a uma carga horizontal cíclica, conforme esquematiza a figura (VI.4.bl). Após a aplicação das cargas de gravidade de 10,88 kN (2,4 Kips) nas posições indicadas por H, I, J e K nos vãos do modelo, dava-se início ao carregamento horizontal cíclico. Os ciclos foram realizados aplicando-se cargas sucessivas de: $\pm 4,53$ kN; $\pm 9,07$ kN; $\pm 18,14$ kN (três vezes), $\pm 27,21$ kN, $\pm 36,28$ kN, $\pm 45,35$ kN e, por último, uma série de ciclos entre -18,14 kN e 27,21 kN.

Em ambos os pórticos foi computado o peso próprio dos perfis.

A tabela (VI.3) apresenta os valores dos parâmetros de padronização correspondentes à ligação utilizada nos modelos ensaiados.

Tabela (VI.3) - Ligação utilizada nos pórticos de STELMACK [1986].

Ligação	d		g		t		f		l	
	mm	pol	mm	pol	mm	pol	mm	pol	mm	pol
TA	127	5,00	-	-	12,70	0,50	19,05	0,75	127	5,00

Nesta pesquisa, a modelagem do comportamento $M - \theta$ da ligação utilizada está restrita à incrementos monotônicos dos momentos nas ligações. Os modelos ensaiados por STELMACK foram submetidos como se viu, a cargas cíclicas. Desta forma, para propiciar uma confrontação mais significativa entre os resultados experimentais disponíveis na referência [STELMARCK, 1986] e os teóricos obtidos com o sistema MEDIFEM, foram considerados dois casos de diagramas momento-rotação da ligação utilizada.

CASO 1 - Diagrama $M - \theta$ obtido através da modelagem B-Spline Tensionada realizada sobre pontos artificialmente gerados segundo a modelagem polinomial de FRYE e MORRIS [1975]. A figura (VI.5) apresenta a modelagem proposta e a figura (VI.6) apresenta o diagrama rigidez-rotação da ligação.

CASO 2 - Diagrama $M - \theta$ definido a partir dos pontos médios extraídos dos diagramas $M - \theta$ experimentais, os quais foram obtidos através dos ensaios de 14 ligações iguais às utilizadas nos pórticos ensaiados. Estas ligações foram solicitadas por momentos incrementados monotonicamente. Os pontos médios experimentais foram ajustados por B-Spline Tensionada de ordem 6. As figuras (VI.7) e (VI.8) ilustram este procedimento.

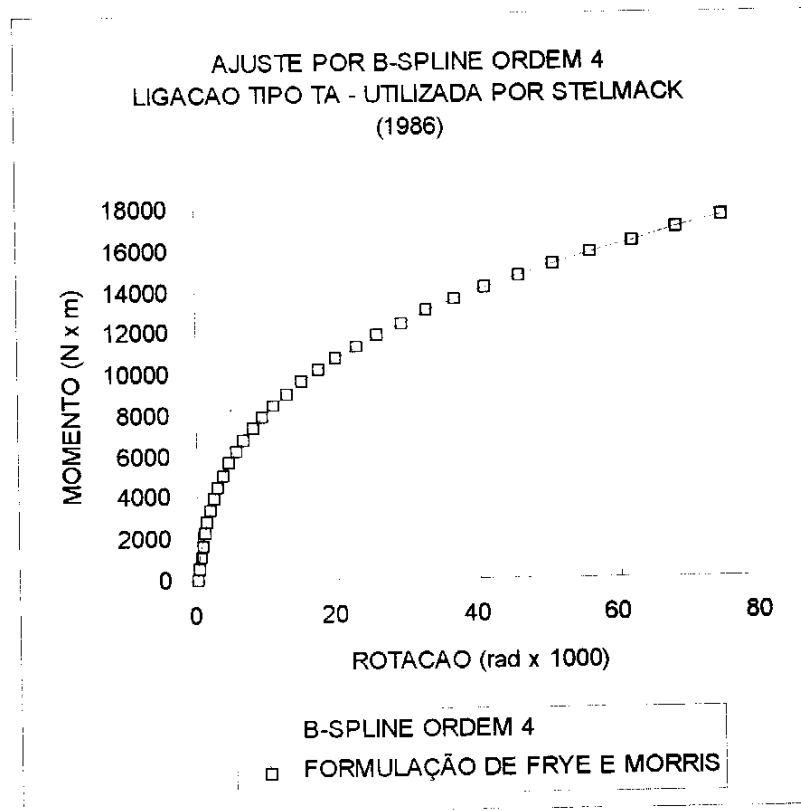


Figura (VI.5) - Modelagem de comportamento $M - \theta$ das ligações utilizadas nos pórticos de STELMACK (CASO 1).

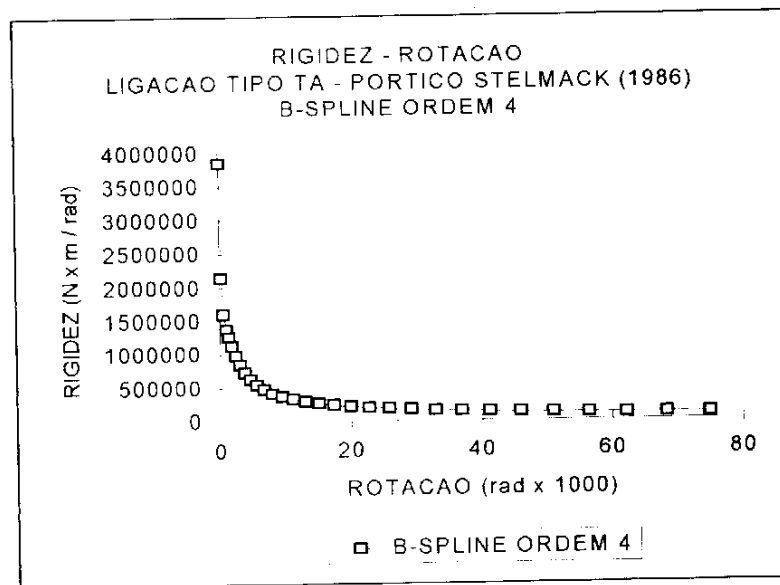


Figura (VI.6) - Diagrama rigidez-rotação das ligações utilizadas nos pórticos de STELMACK (CASO 1)

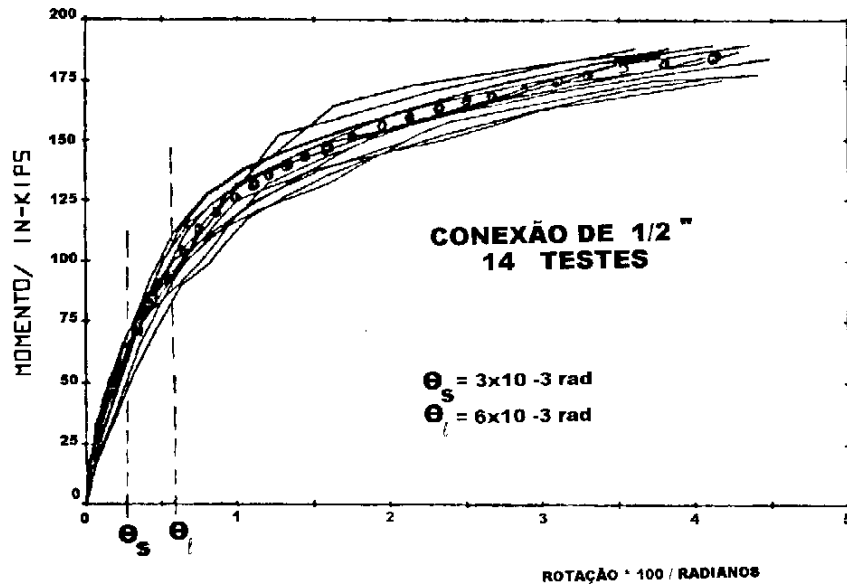


Figura (VI.7) - Respostas aos momentos incrementados monotonicamente, para as 14 ligações de 1/2" ensaiadas por STELMACK.

A rotação $\theta_s = 3,0 \times 10^{-3}$ rad indicada na figura VI.7, de acordo com STELMARCK e outros (1986), é o limite superior para a rotação relativa das ligações de 1/2" sob carga de serviço. Já a rotação $\theta_t = 6,0 \times 10^{-3}$ rad indicada define o limiar das grandes rotações das ligações de 1/2", a partir das quais as cargas cíclicas de grande intensidade causam consideráveis quedas nas rigidezes das ligações, ocorrendo sempre plastificação das mesmas.

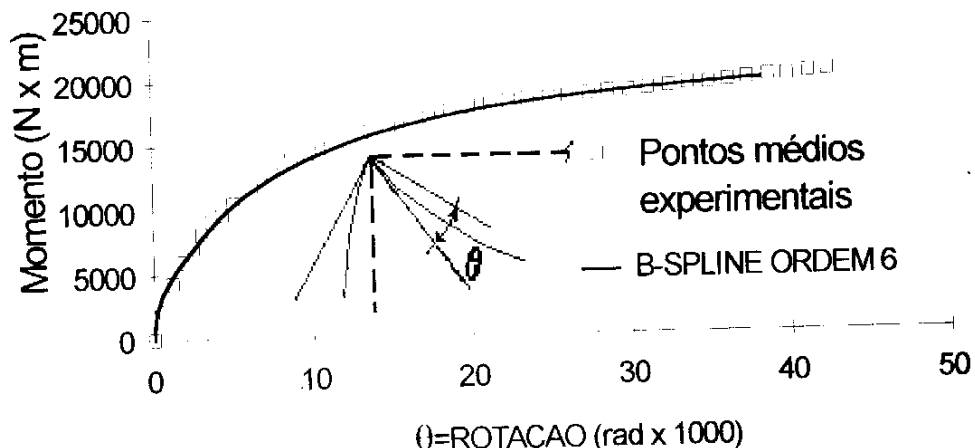


Figura (VI.8) - Modelagem do comportamento M - θ das ligações utilizadas nos pórticos de STELMACK (CASO 2).

A figura (VI.9) apresenta a comparação entre as respostas experimental e teórica da ligação quando submetida a cargas cíclicas. A resposta teórica foi obtida através de simulações realizadas por STELMACK e colaboradores [STELMACK, 1986], os quais utilizaram a formulação de MONCARZ [1981]. Esta formulação incorpora uma idealização trilinear para a relação M - θ da ligação e prevê o caso de cargas cíclicas.

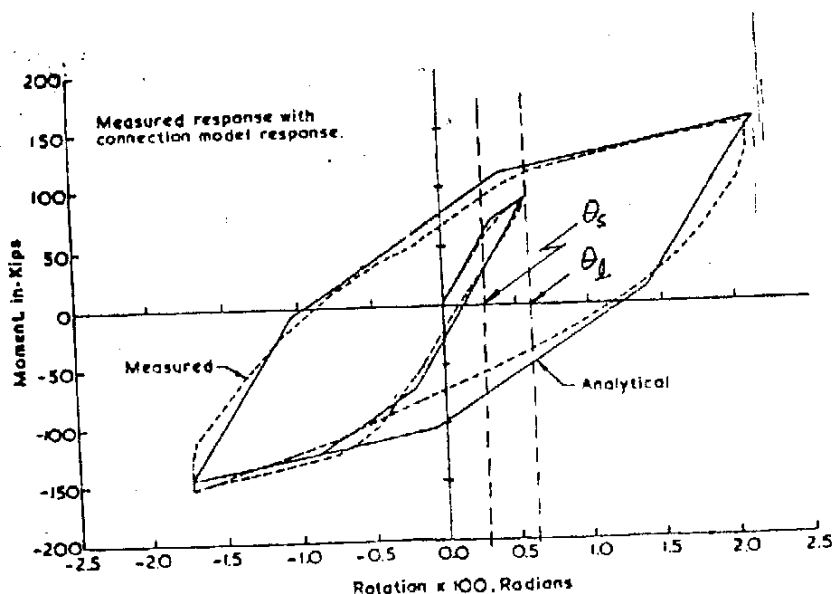
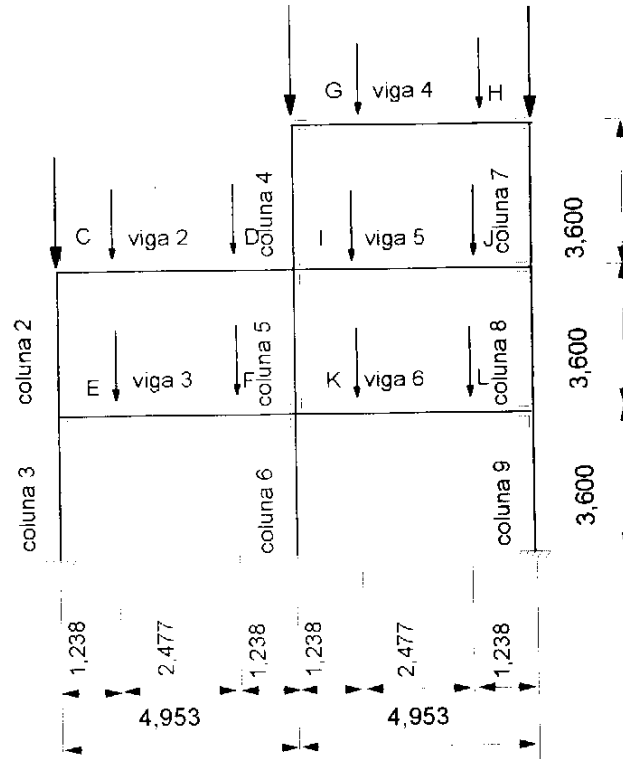


Figura (VI.9) - Comparação entre as respostas experimental e teórica de uma ligação de 1/2" ensaiada por STELMACK, sob cargas cíclicas.

Foi ainda considerado para a análise o caso extremo de ligação idealmente rígida.

VI.4 - EXEMPLO IV - PÓRTICO ENSAIADO POR LAU

O pórtico ensaiado por LAU (LAU et. al., 1995) é apresentado esquematicamente na figura (VI.10).



(Medidas em m)

Figura VI. 10 - Pórtico ensaiado por LAU (1995).

Trata-se de um pórtico indeslocável, constituído por pilares de perfis UC23 (152x152x23) e vigas de perfis UB22 (254x102x22) de acordo com a nomenclatura apresentada em tabela de perfis da British Steel.

Neste pórtico, todas as ligações são do tipo TA, sendo que os resultados experimentais $M - \theta$ oriundos de ensaios realizados em ligações idênticas às do modelo ajustados por B-Spline de ordem 4 e estão apresentados na figura VI. 11.

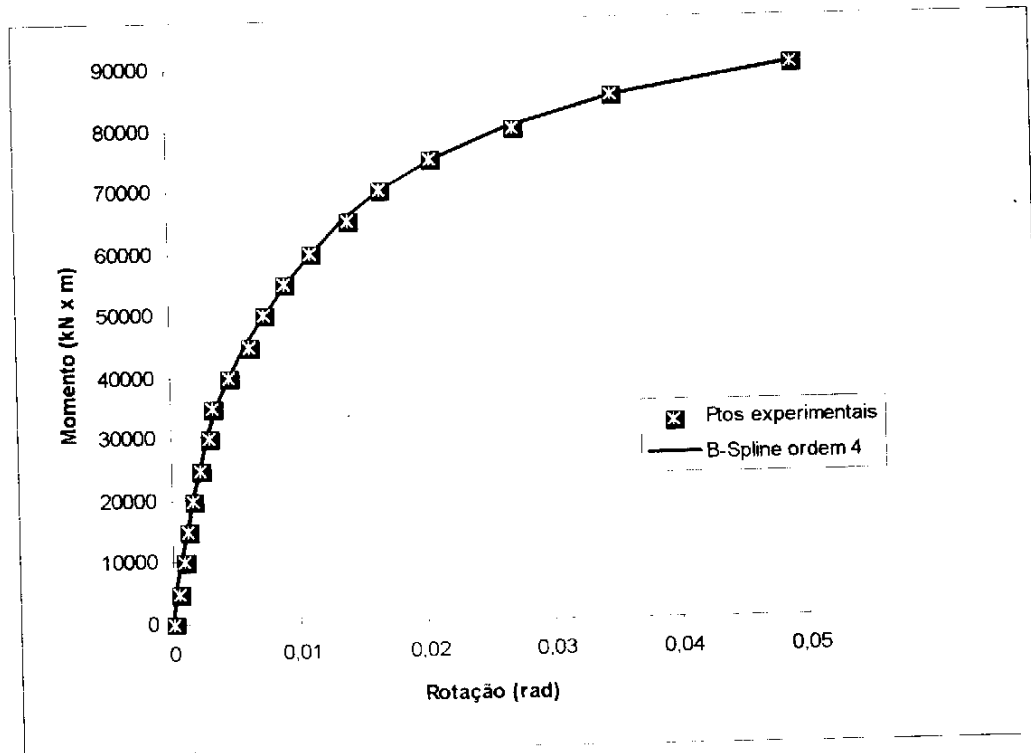


Figura VI.1 1 - Comportamento $M - \theta$ das ligações ensaiadas por LAU (1995). Resultados obtidos com B-Spline de ordem 4 sobre pontos Experimentais.

Durante o ensaio, as cinco vigas do pórtico foram carregadas com cargas de gravidade no valor de 102 kN, em pequenos incrementos. As vigas 2, 3, 4 e 6 foram então carregadas até atingirem sua carga de projeto enquanto a viga 5 permaneceu submetida apenas às cargas de gravidade. As colunas central e da direita do pórtico foram então submetidas a cargas concentradas no valor de 250 kN, sendo o carregamento aplicado em cinco incrementos. A seguir, a coluna da esquerda foi então carregada até seu colapso.

CAPÍTULO VII

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

VII.1 - INTRODUÇÃO

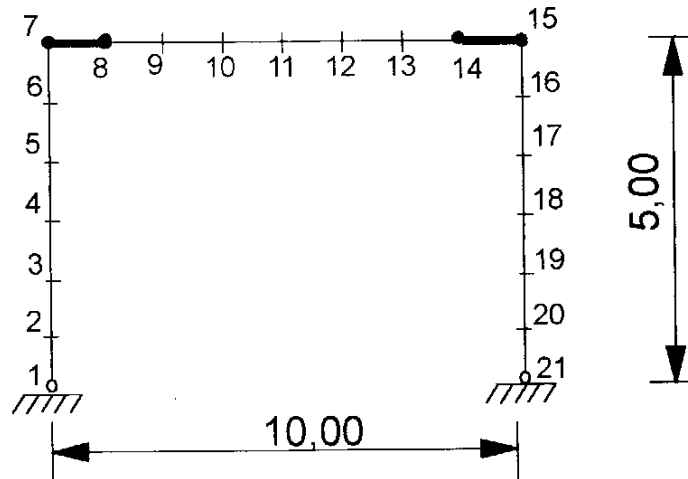
Por se tratar de um processo incremental-iterativo o que foi implementado no sistema MEDIFEM, deve-se dar atenção a dois fatores diretamente ligados à convergência e à precisão da análise, quais sejam: o número de elementos adotados na discretização das estruturas dos exemplos de aplicação e o tamanho do passo de carga.

Com relação à discretização das estruturas foi verificado que o número de seis elementos de mesmo comprimento por barra é adequado para garantir parcialmente a convergência dos resultados numéricos.

Para os passos de carga foram adotadas taxas que variaram de 1% a 2% do valor da carga total. No início do carregamento eram dados passos de carga de 2% do valor da carga total; a 1/3 da carga última (ou da carga total aplicada) diminuía-se a taxa de carga para 1%; a seguir, a solicitação era imposta através de controle de deslocamento até ser atingido o estado limite último da estrutura. Deste modo, mesmo nos casos de convergência numérica lenta, era geralmente possível chegar-se a um resultado satisfatório.

VII.2 - EXEMPLO 1- PÓRTICO SIMPLES

A figura (VII. 1) apresenta a discretização do pórtico simples analisado.



(dimensões em m)

Figura VII.1 - Discretização do pórtico simples.

A figura (VII.2) apresenta as respostas teóricas do comportamento dos três casos considerados (tabela VI.2) para o pórtico simples.

Nas diversas simulações teóricas foi considerado como se o material da estrutura fosse perfeitamente elástico. As modelagens $M - \theta$ das ligações também foram consideradas como totalmente elásticas. A única restrição referiu-se ao estado de deformações das ligações; para isto, limitou-se o alcance do ângulo θ em, no máximo, 0,08 rad (aproximadamente $4^{\circ}30'$). O fim da execução do programa e, por conseguinte, o estado de deformação da estrutura, passou a depender apenas da rotação relativa das ligações ou da convergência do algoritmo de solução - quando a carga imposta não era alcançada.

Numa observação global da Figura (VII.2), verifica-se que a presença das ligações flexíveis modificam sensivelmente o comportamento das estruturas aporticadas.

Observe-se na Figura (VII.2) que as cargas últimas dos diversos casos de aplicação podem ser previstas segundo os patamares horizontais sugeridos pelas formas de suas respostas.

Relacionando, na mesma figura, a carga última do caso III (rótula em A e engastes perfeitos em B e C) com as dos demais casos pode-se verificar que:

- a presença de uma ligação com cantoneiras de topo e assento (tipo TA), no lugar da ligação rígida, reduz em 10% a carga última do pórtico.;
- quando a ligação se faz através de cantoneiras duplas de alma (tipo DA) esta redução aumenta para 15%

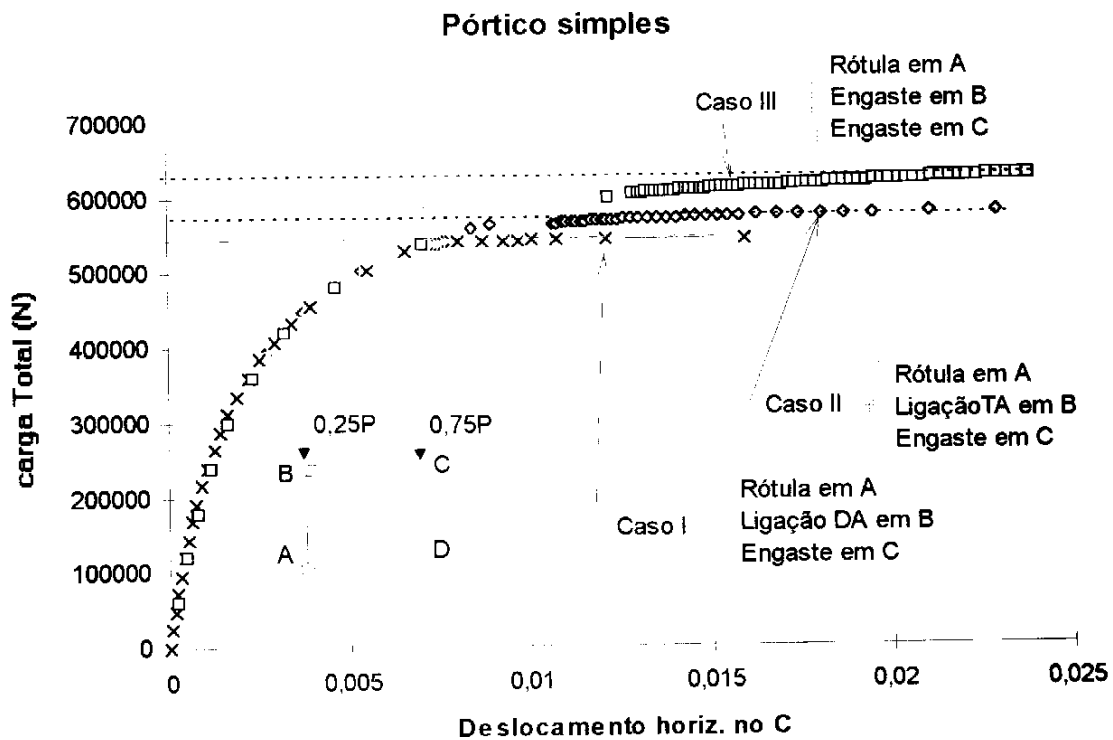


Figura VII.2 - Diagrama carga-deslocamento dos casos I, II e III.

Tais comportamentos são indiferentes ao fato de três casos apresentarem uma mesma rigidez inicial.

A resposta não-linear de cada um desses casos depende tão somente da interação entre os efeitos da não-linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações utilizadas

VII.3 - EXEMPLO II E III- PÓRTICOS DE STELMACK

A Figura (VII.3) apresenta a confrontação entre dois diagramas $M - \theta$ da ligação utilizada, sendo um dos diagramas obtido a partir da formulação de FRYE e MORRIS (CASO 1) e o outro obtido a partir dos resultados experimentais (CASO 2). Note-se que existe uma considerável diferença entre os dois diagramas.

De acordo com o que se pode depreender da Figura (VI.9), a rotação das ligações de 1/2" não deve exceder a 3×10^{-3} radianos para as cargas de serviço. A esta rotação atribui-se a denominação θ_s .

Conforme se pode observar na figura (VII.3), para a rotação correspondente às cargas de serviço, θ_s , resulta uma diferença de 40% entre os momentos previstos segundo cada diagrama.

A utilização de um ou outro diagrama leva á determinação de diferentes respostas do comportamento dos pórticos analisados.

Este fato serve como advertência aos projetistas de estruturas metálicas, ratificando que se deve fazer unia análise detalhada do modelo do comportamento $M - \theta$ da ligação a ser utilizada.

Nas simulações teóricas foi utilizado apenas o CASO 2 de diagrama, ou seja, B-SPLINE sobre resultados experimentais.

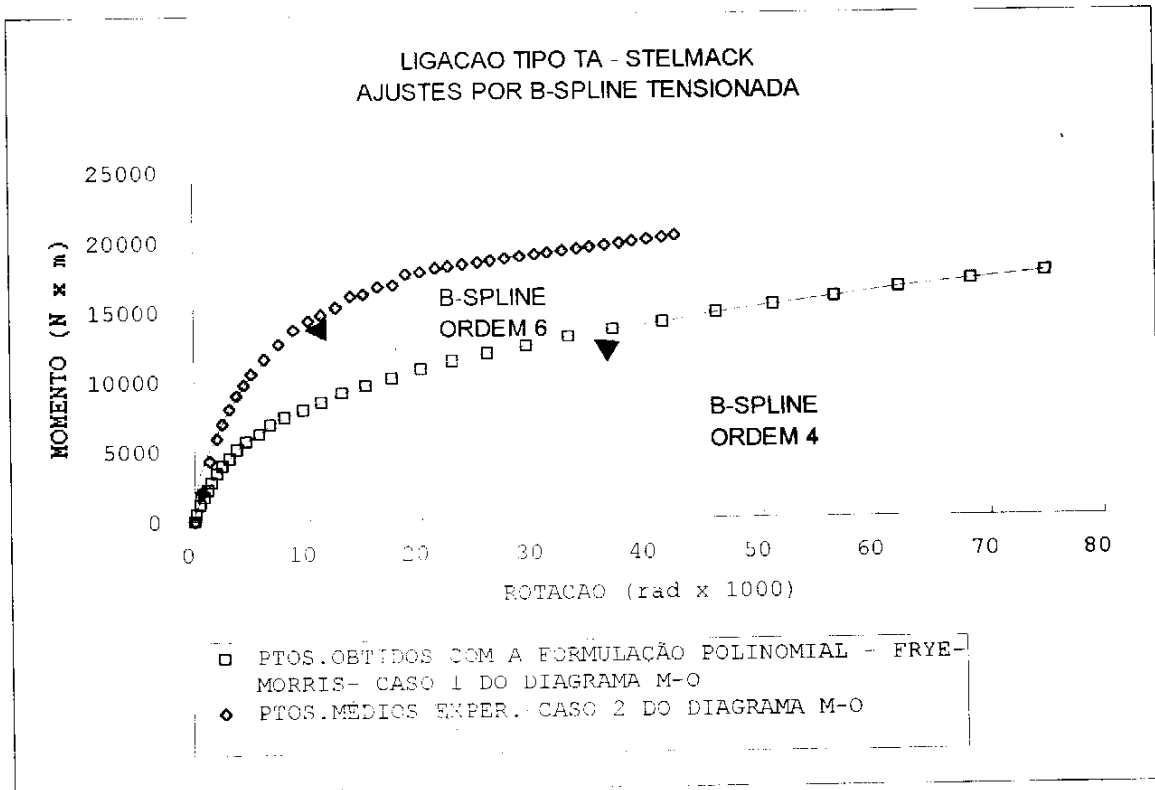


Figura (VII.3) - Comparação entre os diagramas M - θ correspondentes aos CASOS 1 e 2.

As simulações considerando o contraventamento foram realizadas considerando uma deformada inicial em todas as diagonais, cuja forma senoidal foi imposta segundo a expressão (VII.1):

$$y = a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{VII.1})$$

sendo:

y = valor da deformada em função da posição x considerada ao longo da diagonal;

L = comprimento da diagonal;

a = amplitude máxima da deformada inicial, cujo valor foi considerado igual a L/1000.

Para o cálculo das tensões nas fibras extremas das mesas dos perfis (todos os perfis foram dispostos no plano do pórtico segundo sua maior inércia) adotou-se neste trabalho a seguinte formulação simplificada:

$$\sigma_{s,i} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} h_{s,i} \quad (\text{VII.2})$$

Na equação (VII.2), M e N são o momento fletor e o esforço normal, respectivamente, atuantes na seção. As tensões σ_s e σ_i as distâncias h_s e h_i se referem às mesas superior e inferior do perfil. A e I são área e a inércia da seção transversal do perfil.

As Figuras (VII.5) a (VII.7) apresentam os diagramas teórico-experimentais, em termos de carga-deslocamento (P- δ), dos pórticos ensaiados por STELMACK.

VII.3.1 - EXEMPLO II- PÓRTICO 1

A figura (VII.4) apresenta a discretização do pórtico I de STELMACK.

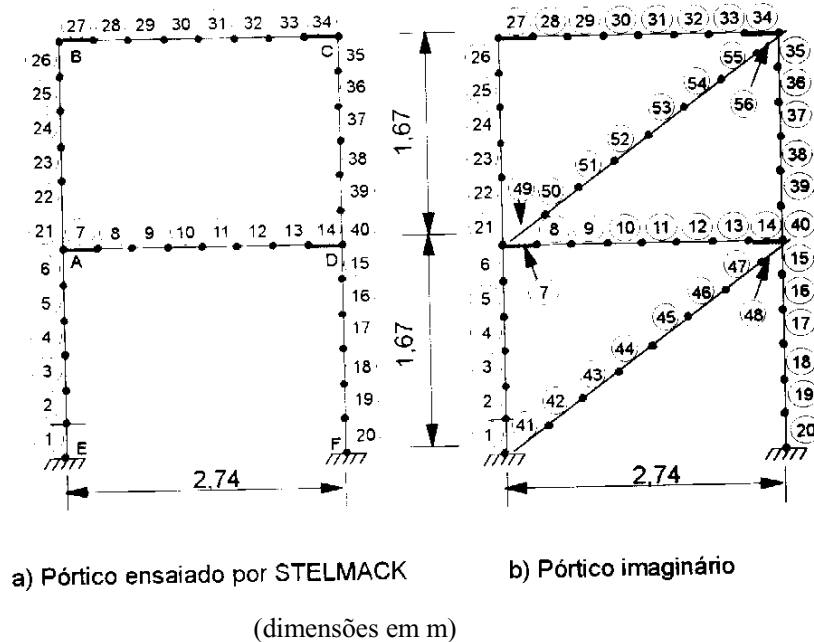


Figura VII.4 - Discretização do Pórtico I de STELMACK.

A Figura (VII.5) apresenta a confrontação entre os resultados experimentais e os teóricos em termos de carga-deslocamento (horizontais) referidos ao nó C ou A do pórtico. Os resultados experimentais foram obtidos durante ~ 40 ciclo de carga. A simulação teórica foi realizada considerando-se o CASO 2 do diagrama $M - \theta$.

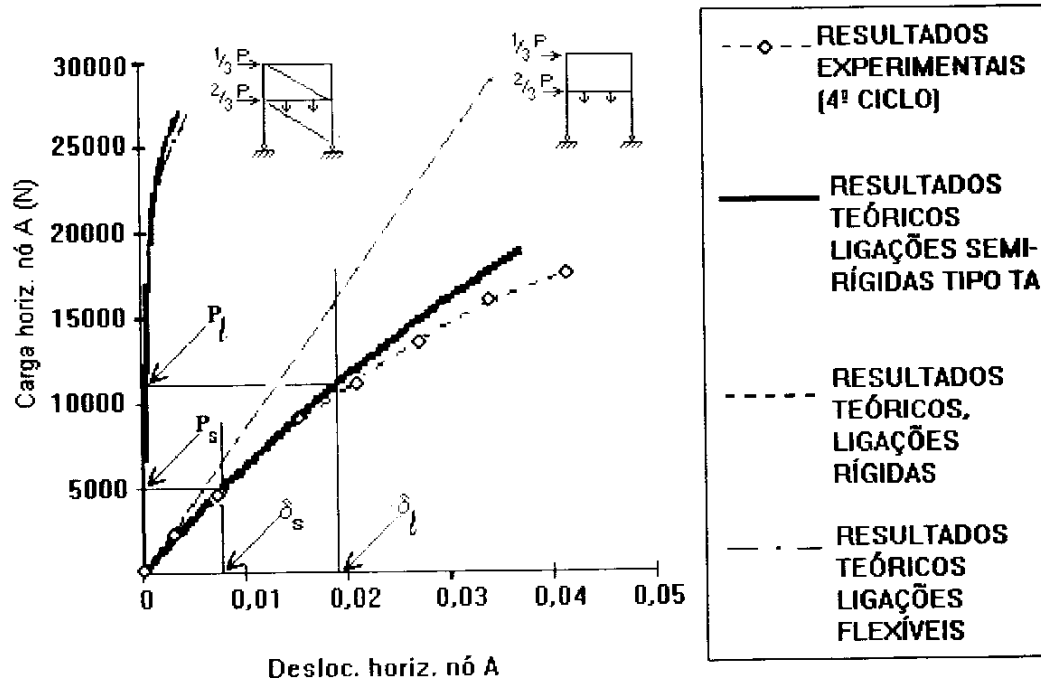


Figura (VII.5) - Resultados teóricos e experimentais do pórtico I ensaiado por Stelmark

A Fig. VII.5 apresenta as confrontações entre os resultados experimentais e os teóricos obtidos com o sistema MEDIFEM implementado com o modelo adotado na pesquisa, sendo apresentadas as relações entre carga aplicada e deslocamento, ambos horizontais, referidos ao nó A do pórtico ensaiado. São apresentados também os resultados oriundos das simulações considerando-se a utilização de diagonais para o contraventamento de estrutura.

Neste trabalho, a modelagem do comportamento M-O das ligações utilizadas está restrita a incrementos monotônicos dos momentos nas ligações. O pórtico ensaiado por Stelmack foi submetido a cargas cíclicas. Desta forma, para propiciar uma confrontação mais significativa entre resultados experimentais disponíveis e os teóricos obtidos com o MEDIFEM adaptado, foi considerado para o cálculo das rigidezes das ligações (iguais entre si) o diagrama M- θ

definido numericamente a partir dos pontos médios experimentais, conforme apresenta a figura VI.8. Para as confrontações foram considerados apenas os resultados experimentais do diagrama $P \times \delta$ correspondentes aos ramos ascendentes do quarto ciclo de carga do modelo. Foi também computado o peso próprio dos perfis do pórtico ensaiado.

Na Figura VII.5 estão destacados os deslocamentos horizontais δ_s e δ_ℓ , correspondentes às rotações relativas das ligações $\theta_s = 0,003$ rad e $\theta_\ell = 0,006$ rad. De acordo com Stelmack (1986), θ_s é o limite superior para a rotação relativa das ligações de 1/2" sob carga de serviço. A rotação θ_ℓ define o limiar das grandes rotações das ligações de 1/2", a partir das quais as cargas cíclicas de grande intensidade causam consideráveis quedas nas rigidezes das ligações, ocorrendo sempre plastificação das mesmas.

Percebe-se na figura que as respostas da estrutura dentro do campo das cargas de serviço, apresentam-se com formas aproximadas à elástica linear. A partir de δ_s nota-se uma sensível não-linearidade nos diagramas. Até δ_ℓ há uma ótima concordância entre os resultados experimentais e os teóricos quando considera-se as ligações semi-rígidas do tipo TA. A partir de δ_s , a concordância dos resultados experimentais com as previsões teóricas é boa, sendo muito mais representativa do que quando comparada com os resultados teóricos considerando as ligações como rígidas. Nota-se que a partir de δ_ℓ há uma sensível perda da capacidade portante da estrutura ensaiada. Para o pórtico ensaiado são também apresentados os resultados teóricos considerando-se no lugar das ligações semi-rígidas engastes elásticos perfeitos (tomando-se para $K(\theta)$ um valor infinitamente grande). Nota-se na figura a diferença entre as respostas do comportamento das estruturas quando se compara os resultados obtidos através das duas simulações teóricas (com engastes elásticos e com ligações semi-rígidas). As cargas de serviço assim previstas resultaram em valores bem diferentes. A carga de serviço considerando-se ligações semi-rígidas representa apenas 66 % do valor da carga de serviço quando se considera engastes elásticos. Supondo que a carga identificada por P_ℓ na figura representa solicitação no estado limite último (apenas para efeito de análise), pode-se verificar que a consideração de engastes elásticos leva à determinação de uma configuração menos deformada que aquela considerando as ligações como semi-rígidas. Assim, tanto para as cargas de serviço como para o estado limite último, o fato de se considerar que as ligações sejam

idealmente rígidas tem como conseqüências resultados desfavoráveis à segurança do pórtico analisado.

É notável o efeito do contraventamento por diagonais quando comparado com o contraventamento garantido apenas pelas ligações rígidas ou semi-rígidas. O pórtico contraventado se manteve praticamente indeslocável, sendo que os estados limites agora não são mais alcançados pela deformação exagerada das ligações, uma vez que as rotações θ_s e θ_ℓ não foram atingidas.

Na figura (VII.5) pode-se ainda verificar a superposição dos resultados de todos os casos referentes ao PÓRTICO I, contraventado, quais sejam. pórtico com todas as ligações idealmente rígidas; pórtico com todas as ligações semi-rígidas e pórticos com todas as ligações idealmente flexíveis (rótulas). Isto demonstra mais uma vez a eficiência do contraventamento por meio de diagonais indiferente da rigidez da ligação utilizada.

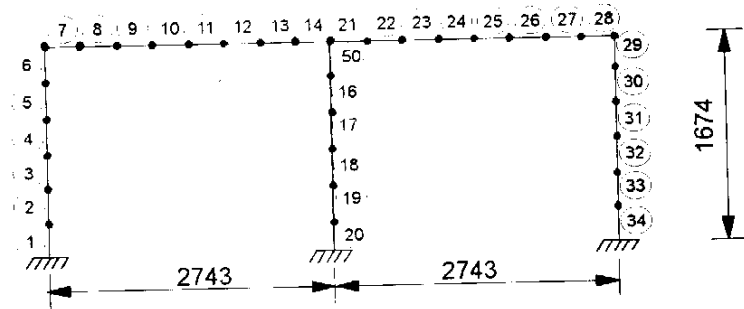
Para todos os casos de ligação considerados para o PÓRTICO I, sem contraventamento, não foi detectado início de escoamento em nenhum de seus elementos. Nestes casos, o estado limite último ficou caracterizado pela rotação excessiva em algumas de suas ligações - apontada na figura (VII.5) pelo deslocamento δ_ℓ , indicando a plastificação destas ligações.

Com relação aos casos nos quais foram considerados os contraventamentos, até ser atingido o carregamento imposto de 30 kN, também não foi detectado início de escoamento em qualquer de seus elementos.

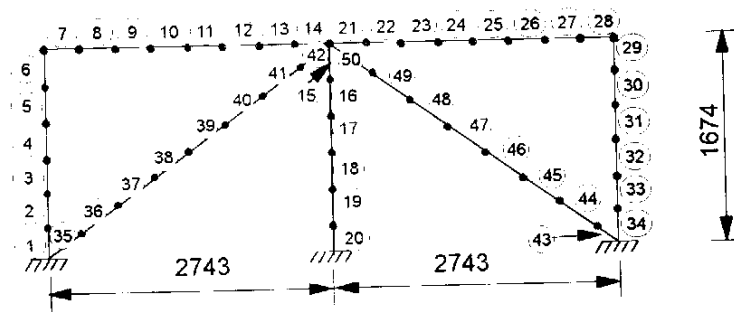
VII.3.2 - EXEMPLO III- PÓRTICO II DE STELMACK

A figura (VII.6) apresenta a discretização do PÓRTICO II ensaiado por STELMACK e a figura (VII.7) apresenta as confrontações entre os resultados experimentais e os teóricos obtidos com o sistema MEDIFENI, sendo apresentadas as relações entre carga aplicada e deslocamento, ambos horizontais, referidos ao nó A do pórtico. São apresentados também os resultados oriundos das simulações considerando-se a utilização de diagonais para o contraventamento da estrutura. Para as confrontações foram considerados apenas os

resultados experimentais do diagrama $P \times \delta$ correspondentes ao ramo ascendente do oitavo ciclo de carga do modelo.



a) Pórtico ensaiado por STELMACK



B) Pórtico contraventado (Imaginário)

(dimensões em mm)

Figura VII.6 – Discretização do PÓRTICO II ensaiado por STELMACK.

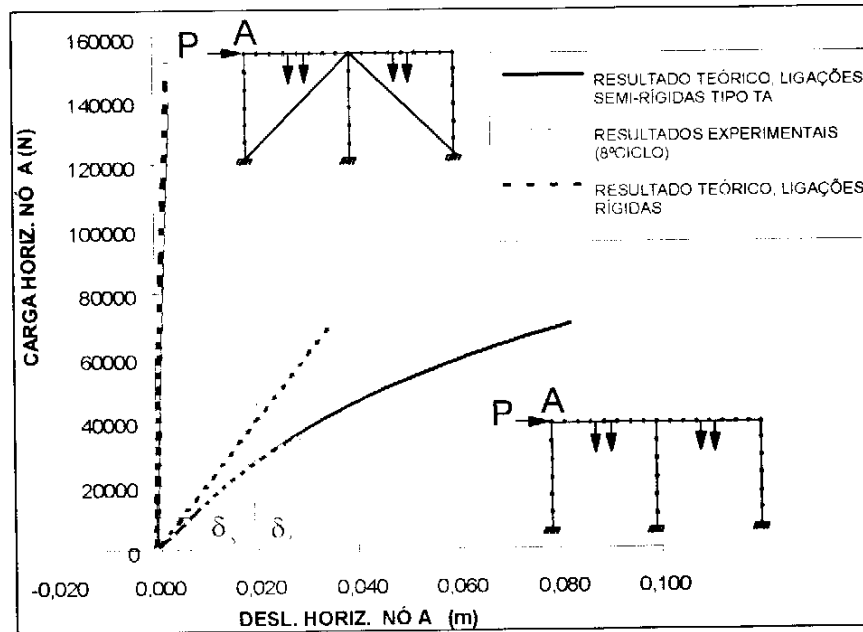


Figura VII.7 - Resultados teóricos e experimentais do PÓRTICO II ensaiado por STELMACK.

Na figura (VII.7) estão indicados os deslocamentos horizontais δ_s e δ_i correspondentes às rotações relativas das ligações θ_s e θ_i . Percebe-se na figura que as respostas da estrutura, dentro do campo das cargas de serviço, são perfeitamente elásticas lineares. A partir de δ_i nota-se uma fraca não-linearidade nestas respostas. Até δ_i há uma excelente concordância entre os resultados experimentais e os teóricos, quando considera-se na estrutura as ligações semi-rígidas do tipo TA. A partir de δ_i , a concordância dos resultados experimentais com as previsões teóricas é boa, sendo muito mais representativa do que quando comparada com os resultados teóricos considerando as ligações como rígidas.

Para o pórtico ensaiado são também apresentados os resultados teóricos considerando-se no lugar das ligações semi-rígidas engastes elásticos perfeitos. Nota-se na figura a diferença entre as respostas da estrutura quando se compara os resultados obtidos através das simulações (com engastes elásticos e com ligações semi-rígidas). As cargas de serviço assim previstas resultaram em valores bem diferentes. A carga de serviço considerando-se ligações semi-rígidas representa apenas 74% do valor da carga de serviço quando se considera engastes

elásticos nas ligações. Supondo que a carga identificada por P_l na figura representa a sollicitação no estado limite último (apenas para efeito de análise), pode-se verificar mais uma vez que a consideração de engastes elásticos leva á determinação de uma configuração menos deformada que aquela considerando as ligações como semi-rígidas. Assim, tanto para as cargas de serviço como para o estado limite último, o fato de se considerar que as ligações sejam idealmente rígidas leva a resultados desfavoráveis à segurança do pórtico analisado.

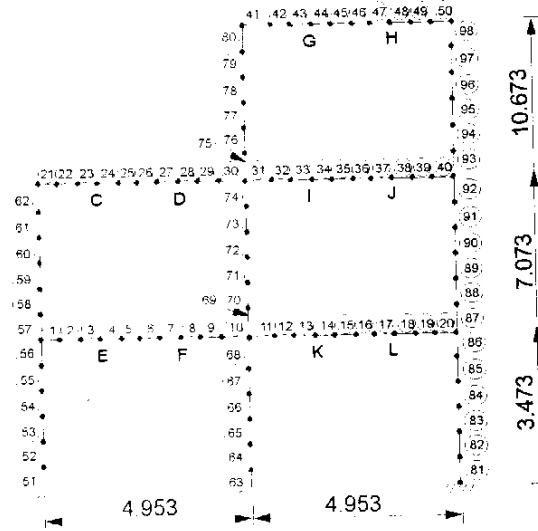
Para o caso de pórtico sem contraventamento, não foi verificado teoricamente o início de escoamento em nenhum de seus elementos independentemente da ligação considerada.

Verifica-se, também no PÓRTICO II, que é notável o efeito do contraventamento por diagonais quando comparado à pequena deslocabilidade garantida pelas ligações rígidas ou semi-rígidas. O pórtico contraventado se mantém praticamente indeslocável - indiferentemente ao tipo de ligação adotada. Ao contrário do PÓRTICO I, neste exemplo não há a superposição completa de todos os resultados teóricos obtidos para os três casos de ligação adotados.

Os estados limites agora não são mais alcançados pela deformação das ligações, uma vez que as rotações θ_s e θ_t não são alcançadas. Para todos os casos de ligação adotados no PÓRTICO II, foi detectado o início de escoamento nas fibras inferiores do elemento 46 (meio do vão da diagonal comprimida), o que se deu para a carga aplicada de 140 kN.

VII.4 - EXEMPLO 4- PÓRTICO DE LAU

A figura (VII.8) apresenta a discretização do pórtico ensaiado por LAU(1995) e a figura (VII.9) apresenta as confrontações entre seus resultados experimentais e os teóricos obtidos com o sistema MEDIFEM sendo apresentadas as relações entre as cargas aplicadas nos pontos E e F e o deslocamento vertical da seção central da viga 3 do pórtico.



(medidas em mm)

Figura VII.8 - Discretização do pórtico ensaiado por LAU.

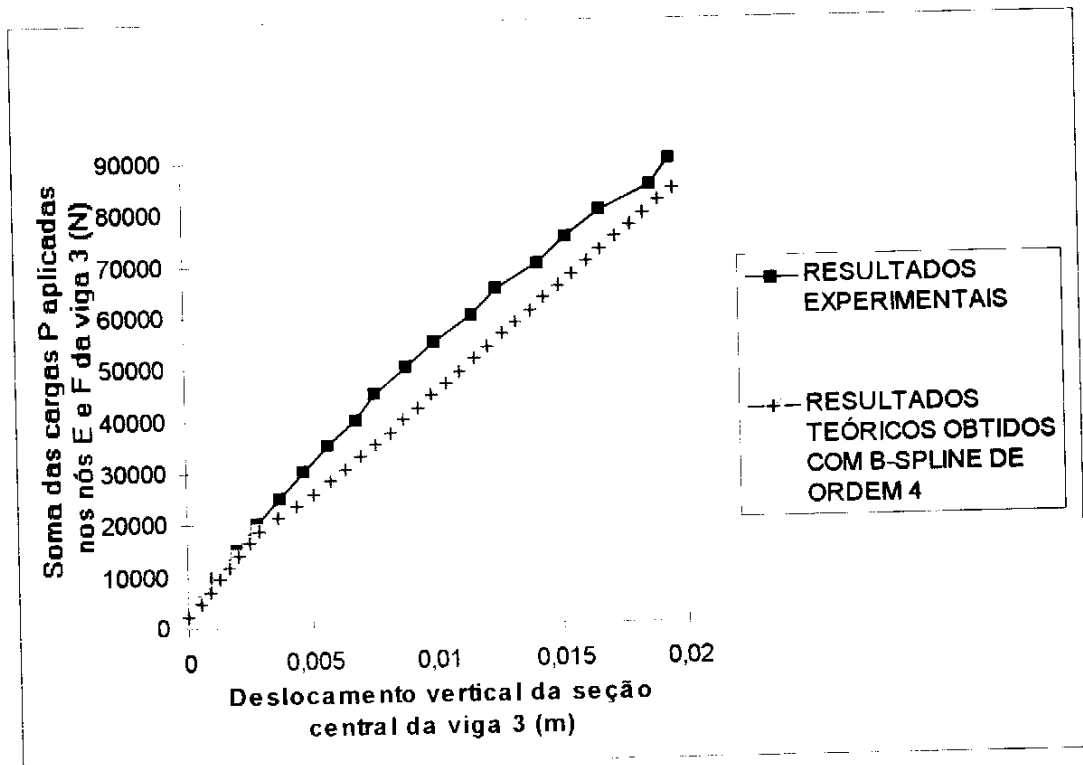


Figura VII.9 – Resultados teóricos e experimentais do pórtico ensaiado por LAU.

Na figura (VII.9) pode-se verificar uma excelente concordância entre os resultados experimentais e os teóricos na fase inicial do carregamento. Nas etapas subsequentes, verifica-

se não mais haver a concordância entre os resultados podem ser verificadas diferenças de até 20% entre os resultados teóricos e os experimentais. No entanto, ao longo de todo o comportamento do pórtico há um paralelismo entre os seus comportamentos.

A diferença entre os resultados teóricos e os experimentais pode ser devido ao fato de que, na simulação teórica os carregamentos nas colunas e nas vigas foram impostos simultaneamente e no ensaio do pórtico, estes carregamentos foram aplicados um após o outro.

Segundo observou LAU et. al. (1995), devido à semi-rigidez das ligações utilizadas, ao nível da carga de projeto, a deflexão da viga 3 mostrou uma redução de 25% daquela que seria verificada na seção central de uma viga idêntica simplesmente apoiada. Estes resultados mostraram que ligações flexíveis podem aumentar a capacidade de carga de pórticos e isto indica os benefícios de se utilizar projeto envolvendo as ligações semi-rígidas.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Avaliando os resultados obtidos pode-se concluir que:

- 1) O modelo do comportamento $M-\theta$ das ligações utilizando B-Spline Tensionada mostrou-se eficiente para o estudo do comportamento das ligações analisadas, quando estas são solicitadas por momento incrementado monotonicamente.
- 2) O algoritmo usado para a análise não-linear utiliza o método incremental-iterativo para a solução do sistema de equações de equilíbrio (com características semelhantes ao algoritmo de Newton-Raphson), calculando-se no entanto o vetor de cargas desequilibradas através da consideração dos movimentos de corpo rígido. Nesta dissertação, tal algoritmo foi implementado em conjunto com a modelagem por B-Spline Tensionada e a formulação de FRYE e MORRIS. Os resultados relativos às estruturas analisadas serviram para comprovar a eficiência do algoritmo, uma vez que foram considerados bons os resultados numéricos frente às respostas experimentais. O sistema computacional MEDIFEM assim constituído, mostrou-se adequado para a previsão das respostas dos pórticos estudados, os quais foram solicitados por carregamento monotônico ou por cargas cíclicas de pequena intensidade.
- 3) A concordância entre os resultados teóricos e os experimentais foi verificada não só para os resultados obtidos dentro da faixa de cargas de serviço mas também para aqueles próximos ao limiar das grandes deformações. Isto qualifica, mais uma vez, o sistema computacional adaptado nesta pesquisa.
- 4) Os resultados obtidos considerando as análises dos pórticos de STELMACK que as ligações comportam-se como rígidas apresentaram-se desfavoráveis à segurança estrutural. Isto foi verificado mesmo em se tratando de cargas de serviço. De acordo com as respostas obtidas, prevêem-se comportamentos ainda mais desfavoráveis para o estado limite último das estruturas em análise. Este fato serve de advertência aos projetistas, ratificando a necessidade de se fazer análises não-lineares das estruturas metálicas aporricadas levando em conta os efeitos de segunda ordem e a não-linearidade das ligações utilizadas.

- 5) É notável o efeito do contraventamento por meio de diagonais quando comparado com as pequenas deslocabilidades garantidas apenas pelas ligações rígidas ou semi-rígidas nos pórticos analisados. No caso de pórticos indeslocáveis, a deslocabilidade não sofreu uma influência sensível quanto à ligação adotada (flexível, semi-rígida ou rígida). Mas, para a determinação do comprimento de flambagem dos elementos, se faz necessária a real determinação da flexibilidade ou engastamento da ligação.

Como sugestões, propõe-se o seguinte:

- 1) Otimizar as modelagens relacionadas às ligações semi-rígidas, por meio de comparações dos resultados teóricos obtidos com o modelo polinomial de FRYE e MORRIS, o modelo de potência de ANG e MORRIS. B-Spline Tensionada e outros modelos oriundos de recentes pesquisas, que traduzem a rigidez a resistência e a capacidade de deformação de nós semi-rígidos, soldados, parafusados ou mistos.
- 2) Desenvolver pesquisas sobre o comportamento de pórticos planos metálicos com ligações semi-rígidas e submetidos a carregamento cíclico.
- 3) Desenvolver pesquisas sobre a provável vantagem financeira que poderá ser levada em conta no projeto estrutural. com utilização de modelos de nó que tornem possível a consideração da semi-rigidez das ligações na análise estrutural, uma vez que a presença destas ligações pode acarretar reduções de momentos fletores nas vigas ou colunas, redução de deslocamentos nas vigas alterações no comprimento de flambagem das colunas, etc...,
- 4) Sensibilidade das dimensões da ligação na curva $M-\theta$.
- 5) Estudo paramétrico para pórticos deslocáveis considerando o efeito das ligações semi-rígidas x relação rigidez viga / rigidez pilar.
- 6) Desenvolver modelos simplificados para serem utilizados em projetos.

ANEXO A

MACRO-INSTRUÇÕES PARA USO DO PROGRAMA LIGAÇÃO SEMI-RÍGIDA

Para construir algoritmos de solução as seguintes macro-instruções podem ser usadas:

MACR	-	primeiro cartão das macro instruções
CHEC	-	faz o check da malha
CMAS	-	montagem da massa consistente
CONV	-	testa a convergência dos deslocamentos
DATA	-	ler dados * * macro instrução (um cartão * * macro é inserido como dado seguindo o programa macro)
DISP N	-	escreve os deslocamentos nodais em todos os N passos do “loop”
VELO N	-	escreve velocidade nodais em todos os N passos do “loop”
ACEL N	-	escreve acelerações nodais em todos os N passos do “loop”
DT V	-	fornece um incremento de tempo (ou carga) de valor V
FORM	-	forma o lado direito das equações de equilíbrio (vetor de força)
LMAS	-	montagem da matriz de massa discreta
LOOP N	-	faz o ciclo N vezes de todas as instruções entre as macro instruções LOOP E NEXT
NEXT	-	fim do ciclo (“loop”) de instruções
PROP N	-	fornece tabela de carga proporcional (dados após o fim do macro programa)
REAC	-	computa as reações nodais
SOLV	-	resolve equações tangentes
STRE N	-	escreve as tensões em todos os N passos no “loop”
LOCA	-	calcula novas propriedades de rigidez e momentos internos devido à presença da ligação semi-rígida
TTAN	-	gera matriz de rigidez tangente

TANG	-	formulação da matriz de rigidez tangente simétrica
TIME	-	incremento de tempo de valor DT
TOLV	-	faz a tolerância da convergência ser um valor V
UTAN	-	formulação da matriz de rigidez tangente não simétrica
END	-	fim das macro instruções
MESH	-	faz o programa lê novos dados, por exemplo, nova carga. (Não deve mudar condições de contorno)
IDIS q	-	lê o componente q [2] escolhida como parâmetro de controle. Incrementa o deslocamento $U_q [2]$ do valor fornecido na macro instrução DT
SDIS	-	processa uma iteração do algoritmo para controle de deslocamento fornecendo o vetor de deslocamento totais $\{ U \}^i$ e o parâmetro de carga $\lambda^i [2]$
SSPA	-	calcula os p menores autovalores e autovetores do sistema
SHIF u	-	promove um “shif” u na matriz de rigidez
NEWM α'	-	macro instrução para o método de Newmark - aloca novos espaços no vetor M e lê o valor de α' na primeira vez em que é chamada - atualiza os vetores de velocidade e aceleração no tempo $t + \Delta t$, da segunda vez em diante
DTAN	-	macro instrução para o método de Newmark - forma a matriz de rigidez efetiva K [2]
DFOR	-	macro instrução para o método de Newmark - monta o vetor de carga efetivo ${}^{t+\Delta t}R(K-1)$
MODON	-	lê N autovalores e autovetores
FREQ	-	na primeira chamada lê dados, aloca posições no vetor único de armazenamento NI, e calcula os coeficientes de Fourier da carga [2]. A partir da segunda chamada é feito o cálculo da resposta
STOP	-	último cartão do arquivo de dados

Obs.: Informações e referências complementares, ver MANUAL DO MEDIFEM.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, S. B.(1989), “Instabilidade de Estruturas Metálicas Planas Compostas de Perfis de Chapa Dobrada”, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- ALVES, R. C. (1993a),”Formulação para análise não-linear geométrica de estruturas e comparação de algoritmos numéricos”, 1º Seminário de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, agosto.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS(1986); "Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios". ABNT. Rio de Janeiro.
- BARTELS, R. H., BEATTY, J. C. e BARSKY, B. A. (1987), An Introduction to Splines for use in Computer Graphics & Geometric Modeling, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., Los Altos, Califórnia.
- BATISTA, R. C. e PFEIL, M. S (1989), “A Hybrid I/I Scheme to Nonlinear Structural Analysis”, MECON - X Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia. Universidade do Porto, Setembro.
- BATOZ, J.L. e DHATT, G. (1979), “Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, pp. 1262-1267.
- BRITISH STEEL, “Structural Sections to B54: Part 1 and BS4848: Part 4”, Sections Plates & Commercial Steels.
- CAMPOS JUNIOR, R. A. (1990). “Análise do Comportamento de Estruturas Reticuladas de Aço com Ligações Semi-Rígidas”, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- CHAJES, A. C. e CHURCHILL, J. E. (1987). “Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods”, Journal of Structural Engineering. Vol. 113, N^o 6, Junho, pp. 1221-1235.
- CHEN, N.F.; LUI E.M. (1991). "Stability Design of Steel Frames", CRC Press, Boca Raton.
- CHEN, W. F. e LUI, E. M.(1985), “Columns with End Restraint and Bending in Load and Resistance Factor”, AISC Journal, Third Quarter, pp. 105-132.
- DE BOOR, C. (1978), A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, New York.
- FRYE, M. J. e MORRIS, C. A. (1975). "Analysis of Flexibly Connected Steel Frames", Canadian Journal of Civil Engineering, 2, 280. pp. 280-291.
- JONES, S. W. , KIRBY, P. A. e NETHERCOTT, D. A. (1980), "Effect of Semi-Rigid Connections on Steel Column Strength", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 1, N^o 1 , London, Sept., pp. 38-46.
- JONES, S. W. , KIRBY, P. A. e NETHERCOTT, D. A.(1983), "The Analysis of Frames with Semi-Rigid Connections - A State-of-the Art Report", Journal of Constructional

SteelResearch, Vol. 3. Nº 2, pp. 2-13.

- KISHI, N. e CHEN, W. F. (1990). "Moment-Rotation Relations of Semirigid Connections with Angles", Journal of Structural Engineering, Vol. 116, Nº 7, July, pp. 1813-1834.
- KISHI, N., CHEN, W. F., MATSUOKA, K. G. e NOMACHI, S. G. (1988), "Moment-Rotation Relation of Top-and Seat-Angle with Double Web-Angle Connections", Connections in Steel Structures, Edited by R. BJORHOVDE, J. BROZZETTI e A. COLSON, Elsevier Applied Science. pp. 121-134.
- LAU, S.M., KIRBY, P.A. e DAVISON, J.B. (1995), "Behaviour of Partially Restrained Members in Non-Swav Frames: Comparison of Experimental and Analytical Results", Fifth East Asia Pacific Conference on Strutural Engeneering and Construction, Queensland, July.
- LUI, E. M. e CHEN, W. F. (1987), "Steel Frame Analysis with Flexible Joints", Joint Flexibility in Steel Frames. Edited by W. F. CHEN. Elsevier Applied Science, pp. 161-202.
- MANUAL DO MEDIFEM. Laboratório de Estruturas, COPPE/UFRJ.
- MOLINA, M. L. A. (1988), "Descrição Matemática de Cascos de Navios através da Teoria B-Spline". Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- MONCARZ, P. D. e GERSTLE. K. H. (1981). "Steel Frames with Non-Linear Connections", Journal of the Structural Engineenng Division, ASCE, Vol. 107, Nº STB, Aug.
- MONTEIRO, R. C. (1997). "Análise de Estruturas de Aço com ligações Semi-Rígidas", Curso de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia /UFMG, Belo Horizonte.
- NETHERCOT, D. A. e CHEN. W. F. (1988), "Effects of Connections on Columns", Stell Beam-to-Column Building Connections, Edited by W. F. CHEN, Elsevier Applied Science, pp. 201-240.
- PFEIL, M.S. (1991), "MEDIFEM - Um Sistema Computacional para Análise de Estruturas", 1º Seminário de Doutorado, Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, julho.
- PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A. e VETTERLING, W. T. (1989), Numerical Recipes - The Art of Scientitic Computing. Cambridge University Press.
- RADZIMINSKI, J. B. e AZIZINAMINI, A. (1988), "Prediction of Moment-Rotation Behavior of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections", Connections in Steel Structures, Edited by R. BJORHOVDE, J. BROZZETI e A. COLSON, Elsevier Applied Science, pp. 33-40.

- RODRIGUES, F. C. (1991), “Previsão do Comportamento de Pórticos Planos Metálicos com Ligações Semi-rígidas”. 3º Seminário de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, agosto.
- ROGERS, D. F. e FOG, N. G. (1988), “Constrained B-Spline Curve and Surface Fitting”, Proceeding of the Conference on Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design VI (ICCAS 88). Shangai.
- ROGERS, D. F. e ADAMS, J. A. (1976), Mathematical Elements for Computer Graphics, Mc. Graw Hill, New York.
- SIDERBRÁS (1988), "Ligações em Estruturas Metálicas", Bibliografia.Técnica para o Desenvolvimento da Construção Metálica, Vol. II, Siderbrás.
- SOMMER, W. H. (1969), “Behaviour of Welded Header Plate Connections”, M.S. Thesis, University of Toronto, Ontário.
- STELMACK, T. W., MARLEY. M. J. e GERSTLE. K. H. (1986), “Analysis and Tests of Flexibly Connected Steel Frames”. Journal of Structural Engineering, Vol. 112, Nº 7, July, pp. 1573-1588.
- ZIENKIEWCZ, O. C. (1977). “The Finite Element Method”, 3th edition, McGraw-Hill, New York.