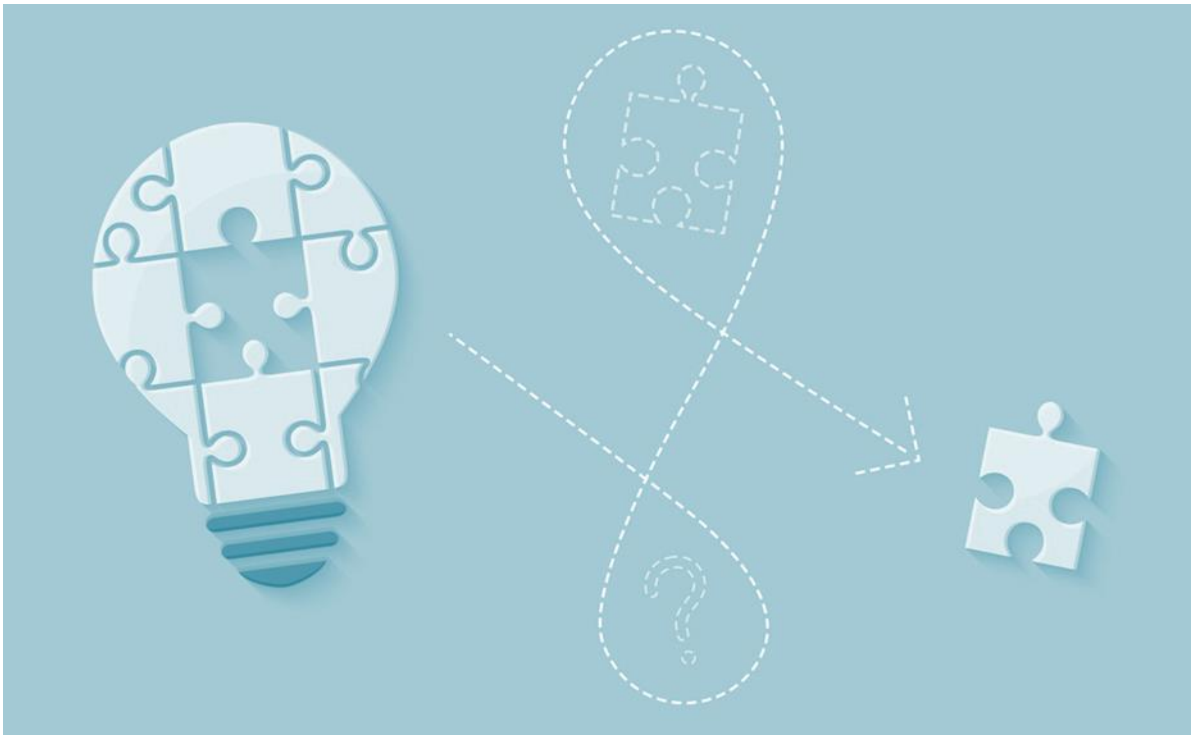


O TRABALHO DOCENTE COM OS ERROS MATEMÁTICOS NA ESCOLA: CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS

O trabalho docente com os erros matemáticos na escola: contribuições e desafios

Andréa Cristina de Oliveira Antão

Plínio Cavalcanti Moreira

O TRABALHO DOCENTE COM OS ERROS MATEMÁTICOS NA ESCOLA: CONTRIBUIÇÕES E DESAFIOS

EDITORA UFOP

Ouro Preto | 2017

O trabalho docente com os erros matemáticos na escola: contribuições e desafios

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

A634t Antão, Andréa Cristina de Oliveira .
O trabalho docente com os erros matemáticos na escola [manuscrito]: contribuições e desafios / Andréa Cristina de Oliveira Antão. - 2019.
72f.:

Orientador: Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

1. Matemática - Erros. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Moreira, Plínio Cavalcanti . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 510

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Um erro corrigido (pelo sujeito) pode ser mais fecundo que um êxito imediato, porque a compreensão de uma hipótese falsa e suas consequências prevê novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas ideias (PIAGET, 1976)

Expediente Técnico

Organização | Andréa Cristina de Oliveira Antão

Pesquisa e Redação | Andréa Cristina de Oliveira Antão

Revisão | Andréa Cristina de Oliveira Antão

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Fotos | Andréa Cristina de Oliveira Antão

Ilustração | Andréa Cristina de Oliveira Antão

Sumário

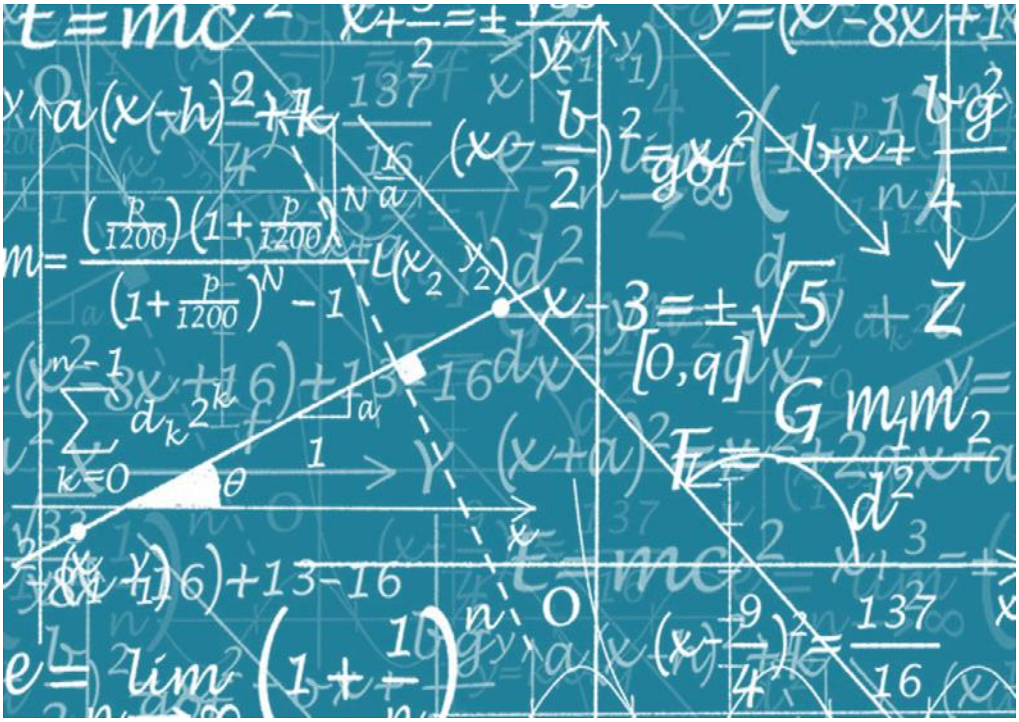
Apresentação

Ao longo de minha trajetória profissional, fui me dando conta de vários problemas do ensino e da aprendizagem escolar, entre eles a falta de "intimidade" dos alunos com a linguagem matemática, os erros frequentes e, em geral, a pouca dedicação aos estudos. Aliado a tudo isso, uma coisa me chamava a atenção, de modo especial: grande parte dos alunos estão interessados em obter, por qualquer meio, apenas a resposta certa para um problema matemático. Os erros costumam ser rapidamente descartados e simplesmente substituídos pela resolução correta, dificultando uma análise mais detida a respeito das razões pelas quais aparece.

No entanto, percebi recentemente que, como professora, não utilizava os erros de forma consistente e fundamentada em minhas aulas de matemática na escola. Observava, é claro, o que os alunos tinham errado, fazia as devidas correções, mas não tinha suficientemente desenvolvida a competência docente para usar os erros de forma didática e proveitosa, de modo a tentar transformá-los em objeto de observação e de reflexão dos alunos. Enfim, me faltava desenvolver um "Conhecimento Pedagógico do Conteúdo do Erro", como diz Helena Cury, num artigo de 2012. A ideia de fazer um mestrado profissional em Educação Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), abordando essa temática - o trabalho do professor sobre os erros matemáticos dos alunos - conduziu-me ao estudo dos erros, vistos como instrumento pedagógico, e a um repensar da minha própria prática de sala de aula na Educação Básica.

Minha intenção é compartilhar essa experiência, oferecendo esse material de apoio a atuais e futuros professores que desejem trabalhar tal tema em sua sala de aula. Apresento-lhes uma breve descrição de minha pesquisa e os resultados encontrados. Para saber mais sobre a pesquisa, vocês podem acessar a página www.ppgedmat.ufop.br. Disponibilizo também o meu endereço eletrônico acoamatematica@gmail.com.

Andréa Cristina de Oliveira Antão



Fonte: https://segredosdeconcurso.com.br/matematica-para-concurso/

> *Queiramos ou não, o erro é o componente mais arraigado do processo educativo - mais do que qualquer outro elemento.*
>
> (PINTO, 2000, p. 36)

Introdução

Em qualquer nível de ensino, corrigir os erros cometidos em avaliações ou em atividades de sala de aula de matemática é uma atividade habitual na prática docente. Entretanto, a forma como o professor de matemática lida com esses erros varia de acordo com sua formação e com suas concepções. Analisar os erros dos alunos pode ir muito além de identificar o que está certo ou errado. De uma perspectiva pedagógica, o erro cometido pelo aluno pode ser encarado como um elemento construtivo da sua aprendizagem.

Por outro lado, o professor não costuma ter acesso a evidências de como o aluno pensou para encontrar a solução para um problema proposto. Os erros podem começar na interpretação da situação problema, passar pela estratégia de resolução ou pela sua execução. No entanto, para trabalhar pedagogicamente com os erros dos alunos é preciso saber o que levou o aluno a cometer determinado erro, tentar fazer com que ele reconheça a forma de pensar que o conduziu àquele erro, de modo que possa refazer seu raciocínio e reorganizar, se for o caso, a estratégia incorreta de resolução do problema em questão. Além disso, o trabalho pedagógico sobre o erro envolve tanto uma competência profissional docente (associada, claro, a conhecimentos profissionais específicos para o trabalho com os erros), como também a disposição de cada aluno para analisar e reanalisar suas formas de encaminhar a resolução dos problemas ou tarefas propostas.

Há também que se considerar a obrigação do professor de cumprir um programa anual, cujo domínio será requerido do aluno em anos posteriores, no sequenciamento de sua formação escolar em matemática. Assim, fica clara a necessidade tanto de mobilização de saberes profissionais específicos por parte do professor, como de engajamento por parte dos alunos.

O erro e suas interpretações

Tratar a questão do erro no ensino de matemática na escola não é tarefa fácil, tendo em vista a diversidade de interpretações e abordagens que esse tema admite. Há interpretações do erro como fracasso, atribuindo-lhe uma conotação essencialmente negativa. No entanto, muitos pesquisadores atribuem uma função positiva aos erros, principalmente no que se refere ao processo cognitivo, sendo apontado como diagnosticador de dificuldades e como recurso para repensar as estratégias de ensino. Essa visão positiva justifica o trabalho investigativo sobre o tratamento pedagógico do erro, a fim de que o professor venha a compreendê-lo como um fenômeno inerente ao processo de aprendizagem, redirecionando o ensino, de modo a ser capaz de ajudar efetivamente o aluno na busca de superação dos erros matemáticos que comete no desenvolvimento normal de sua escolarização em matemática. Para isso, entre outras ações, torna-se necessário conhecer as possíveis origens dos erros matemáticos (o modo de pensar que pode produzir ou gerar um determinado erro), e desenvolver estratégias didáticas específicas e apropriadas para torná-los observáveis pelo aluno, de modo a ser eventualmente superado.

No contexto escolar, é comum que esteja enraizado na mente e na postura de alunos, pais e professores, o sentido depreciativo do erro, acompanhado da necessidade urgente de eliminá-lo, sem ao menos tentar observar as pistas que ele pode fornecer no que diz respeito ao aprendizado do aluno e ao planejamento da ação pedagógica do professor. Afinal, todas as vezes que tentamos algo novo, estamos sujeitos a errar, este é um percurso inevitável, pois o desacerto é natural ao ser humano em todas as aprendizagens que vivencia. Aprendemos por meio de equívocos e tentativas.

Somando-se às ideias positivas relacionadas ao erro, pesquisas vêm sendo desenvolvidas, oferecendo uma contribuição importante para mostrar o poder educativo que possui.

Análise dos erros

Realizei uma revisão de literatura sobre o trabalho com os erros dos alunos e apresento aqui uma síntese abreviada das ideias de Helena Cury, uma pesquisadora brasileira que vem tratando dessa questão há muitos anos. Para uma síntese de outras pesquisas nesse campo, ver a minha dissertação de mestrado em www.ppgedmat.ufop.br.

Cury (2007) ressalta que mesmo que os pesquisadores pretendam descobrir as causas dos erros e aproveitá-los como instrumentos de aprendizagem, uma grande dificuldade é a proposição de atividades que consigam desafiar o aluno e que promovam uma mudança de atitude frente ao próprio erro. Analisar erros e decidir como tratá-los faz parte da prática docente, porém fatores como a formação do professor, suas crenças e concepções acerca do ensino da matemática na escola projetam atitudes diversificadas dos docentes face aos erros dos alunos. É que as decisões sobre o tratamento pedagógico dos erros envolvem conhecimentos profissionais docentes específicos. Inspirada na noção de "Conhecimento Pedagógico do Conteúdo" (SHULMAN, 1987) e nas categorias do "Conhecimento Matemático para o Ensino" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), Cury propõe o conceito de "Conhecimento Pedagógico do Conteúdo dos Erros" e entende que

> O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros exige muito mais do que o simples conhecimento do conteúdo ou da pedagogia. Esse conhecimento deve incluir uma compreensão do que faz aquele determinado conteúdo fácil ou difícil; das concepções errôneas que os alunos têm sobre o conceito ou sobre suas operações e propriedades; das formas de auxiliar os alunos a desconstruir suas concepções (CURY, 2012, p. 37).

No geral, as pesquisas sugerem que é possível (embora desafiador) trabalhar pedagogicamente sobre os erros dos alunos de modo a transformá-los em instrumentos de reflexão, o que contribui para a aprendizagem. Por outro lado, constatamos certas lacunas na literatura, no que se refere à análise do engajamento dos alunos em possíveis propostas de atividades didáticas específicas, no sentido de desenvolvimento do trabalho pedagógico de promoção da superação do erro. Lacunas são constatadas também no que se refere aos tipos concretos de dificuldade que o professor que pretende trabalhar pedagogicamente os erros dos alunos teria que enfrentar no dia a dia do trabalho docente escolar em matemática. É no sentido de contribuir para o preenchimento possível dessas lacunas que direcionamos a nossa pesquisa, como veremos a seguir.

As questões de investigação

Investigamos quais contribuições para a aprendizagem do aluno um trabalho docente de tratamento pedagógico dos erros matemáticos pode trazer, mas tentamos também identificar as dificuldades que um professor enfrenta no desenvolvimento de um trabalho escolar voltado para a superação dos erros matemáticos por parte dos seus alunos. Para isso, trabalhamos com as seguintes questões de investigação:

Questão 1: “Quais contribuições para a aprendizagem e para o ensino pode trazer um trabalho docente de tratamento pedagógico dos erros matemáticos cometidos por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em atividades escolares ao longo de um semestre letivo?”

Questão 2: “Que limitações o professor enfrenta no desenvolvimento desse tipo de trabalho, numa sala de aula *real* de matemática, de uma escola *real* da rede pública do Estado de Minas Gerais”?

As atividades não foram criadas especialmente para a pesquisa, os tópicos abordados eram os do programa proposto para o 9º ano, o livro texto foi o mesmo usualmente utilizado etc.. A ideia era não criar artificialidades que pudessem dificultar a replicação da pesquisa em outras salas de aula de outras escolas públicas. Entretanto, ainda que a ideia fosse essa, alguns arranjos especiais tiveram que ser pensados e executados, como comentaremos adiante.

Nossa pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Barbacena, Minas Gerais. A opção por essa escola deu-se em função de ser o local onde exercemos a docência em matemática desde 2008. Trabalhamos com atividades “normais” de sala de aula de 9º ano do Ensino Fundamental (a maioria delas propostas no livro didático utilizado), com o objetivo de identificar e catalogar os tipos de erros cometidos nessas atividades, observar a forma (mais engajada ou menos engajada) como os alunos participavam das correções que conduzimos, registrar as eventuais mudanças ocorridas no modo como cada aluno se relacionava com o próprio erro (a partir da abordagem desenvolvida pela professora pesquisadora) e perceber como reagem às intervenções da professora no sentido de levá-los a observar e refletir sobre o próprio erro (descobrir onde errou, por que errou e como poderia corrigir o erro cometido).

Após a realização das atividades, analisávamos cada uma das resoluções apresentadas pelos alunos, identificando os erros cometidos, catalogando-os e observávamos quais informações relevantes para o trabalho docente a resolução do exercício e a explicação do próprio raciocínio forneciam, quais conhecimentos anteriores não pareciam estar bem consolidados, bem como quais exemplos, contra-exemplos e analogias poderiam ser colocados aos alunos, a fim de tornar o erro de cada aluno observável por ele. Na aula seguinte, retomávamos conceitos, procedimentos e cálculos que os alunos haviam utilizado incorretamente, sem mencionar quem errou e onde errou. Em seguida, a atividade era devolvida ao aluno para que tentasse observar e registrar onde havia errado e tentar corrigir. O intuito era deixar de priorizar apenas a resposta correta, fazendo com que o aluno atentasse especialmente para o processo de observação e análise do erro.

A partir da terceira atividade, resolvi perguntar quem poderia ficar na escola após o horário das aulas para uma conversa individual sobre as próprias resoluções das tarefas propostas e quatro alunos se dispuseram a ficar. As discussões nesses encontros extraclasse se desenvolveram de acordo com a necessidade observada nas correções das tarefas e com as dúvidas que surgiam em sala de aula. Tais discussões sofreram muitas influências internas e externas, seu desenvolvimento não seguiu um roteiro rígido e pré-determinado. Na sequência das atividades foram, algumas vezes, retomados exercícios de atividades anteriores em que os alunos cometeram erros, uma vez que se observou a recorrência desses erros, mesmo após as discussões feitas em sala de aula.

As atividades e os erros

Como já dissemos, as atividades foram propostas de acordo com o andamento normal da matéria do nono ano, mas levando em conta as dificuldades que se apresentavam nos trabalhos anteriores. No dia a dia das aulas foram aproveitadas as oportunidades que surgiram para fazer analogias, dar exemplos, contraexemplos e reforçar os processos de resolução, principalmente nos tipos de exercícios em que foi observada maior incidência de erros. Ao final, apresentamos um catálogo dos erros cometidos pelos alunos em todas as atividades, com algumas sugestões de ações do professor para trabalhar com os alunos sobre esses erros. Tais sugestões são provenientes tanto da literatura especializada referida ao trabalho com os erros matemáticos dos alunos, como desta minha experiência específica neste trabalho que relato.

Atividade 1

Resolva o exercício com atenção, preenchendo, a seguir, a coluna ao lado.

	Explique detalhadamente como pensou
1) $\sqrt{2}.\sqrt{8} =$	
2) $\sqrt{\frac{25}{100}} =$	
3) $2\sqrt{3}+4\sqrt{5}-8\sqrt{3}+3\sqrt{5} =$	
4) Simplifique $\sqrt{200}$	

Os exercícios desta atividade foram feitos sem consulta e individualmente. Os alunos tiveram cerca de 40 minutos para produzir suas respostas. Demonstraram muita dificuldade em escrever o modo como pensaram. Após a realização da atividade, os exercícios foram recolhidos e olhei, um por um, sem fazer nenhuma anotação na folha onde estavam as soluções. Na aula seguinte, decidi abordar novamente alguns tópicos, dando um enfoque maior aos erros que os alunos cometeram sem, naturalmente, citar quem errou e onde errou. Essa estratégia não surtiu muito efeito, pois tornou-se apenas, aos olhos dos alunos, uma repetição do conteúdo. Percebi, na análise das resoluções, alguns problemas relacionados a conteúdos dos anos anteriores, tais como operações com números negativos, fatoração em primos e a própria noção de raiz quadrada. Alguns alunos têm o hábito de decorar o modo como se faz o exercício, sem compreender a lógica subjacente a esse modo. O que pudemos perceber também é que, muitas vezes, erros ou deslizes que julgamos insignificantes ou pequenos, contribuem para que o aluno posteriormente cometa erros mais graves.

Descrição abreviada dos erros cometidos

(para maiores detalhes ver o catálogo no final deste texto)

- Trocar o sinal dos termos semelhantes ao coloca-los próximos, talvez lembrando-se confusamente de uma “regra” para resolução de equações que diria (na forma em que provavelmente lembrou): um termo, quando troca de lugar, também troca de sinal.
- Não ter claro quais são os termos que podem ser extraídos do radical.
- Não escrever o radical sobre todo o radicando, apenas sobre parte dele. Ao longo da resolução, pode não lembrar exatamente o que está sob o radical e o que está fora.
- Ter dificuldade de decompor em fatores primos.
- Ter dificuldade de entender, no contexto particular, o que significa simplificar o radical.
- Errar nas operações com números inteiros.
- Somar radicais que não são semelhantes, segundo regras inventadas e incorretas.
- Ter dificuldade com o uso da linguagem matemática correta. Por exemplo, diz que fez o m.m.c. de 200 (em lugar de dizer que fatorou 200 em primos).

Comentário da autora

Percebe-se nesta primeira atividade, grande dificuldade dos alunos em escrever o que pensaram, atendo-se sempre ao que fizeram. Sugiro aos professores que forem utilizar essa estratégia, que dediquem mais tempo a ela. No inicio, fazendo, talvez, um roteiro a ser seguido pelo aluno, ou sugerir que a cada passo dado na execução já descreva ao lado o que fez, ou ainda que faça alguns exercícios junto com os alunos para que se familiarizem melhor com a proposta. A dificuldade desta estratégia é a falta de costume com esse tipo de atividade em matemática

Alguns alunos conseguiram detectar erros cometidos e corrigi-los, porém, não se pode garantir que entenderam os fundamentos dos seus erros, pois, ao que parece, identificam o erro com a simples realização incorreta de uma determinada sequência de procedimentos. E a correção do erro, com o restabelecimento da sequência correta. Notam-se muitos erros associados ao trabalho de anos anteriores de escolarização (a velha falta de base).

Decorar um procedimento sem entender sua lógica, normalmente impossibilita a correção do erro (caso venha a ser constatado), além de aumentar a possibilidade de utilizar o procedimento incorretamente.

Ao que parece, os alunos costumam se prender às instruções sobre o que fazer. Como comentado acima, não é uma prática comum o professor de matemática solicitar que os alunos descrevam como pensaram. Aliado a isso pode estar presente a "preguiça" de escrever, o que é bastante comum, principalmente em matemática, que, na percepção de muitos alunos, é uma disciplina que exige fazer contas e não redigir textos.

Atividade 2

A segunda atividade proposta contemplava os mesmos tipos de exercício da Atividade 1, em razão das dificuldades observadas anteriormente. Os alunos fizeram essa segunda atividade sem consulta e individualmente. Examinei os erros que surgiram, sem sinalizá-los para os alunos e não realizei uma aula específica para trabalhar os erros encontrados. Na devolutiva, planejada para que refizessem os eventuais erros, utilizei outra estratégia: permiti que olhassem o caderno e/ou o livro. A ideia era que aproveitassem a consulta para conseguir penetrar mais profundamente no entendimento dos fundamentos dos erros cometidos, mas depois percebi que a consulta aos cadernos poderia reforçar o foco nos procedimentos em si. Mas isso só me ocorreu quando não havia mais como voltar atrás. Eis as questões propostas nessa segunda atividade:

Calcule:

1) $\sqrt{4}.\sqrt{36}$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}$

3) Simplifique, fatorando o radicando: $\sqrt[5]{486}$

4) Calcule $-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}$

(explique detalhadamente como você pensou)

Descrição dos erros cometidos

- Errar na hora de extrair fatores do radical.
- Operar de forma incorreta com números negativos. Ignorar o índice do radical
- Usar incorretamente a linguagem matemática.

Comentário da autora

Podemos perceber que a Atividade 2 contempla os mesmos tipos de exercícios da Atividade 1, e que mesmo após a realização desta última, com uma discussão dos exercícios e a devolução para os alunos refazerem, muitos continuam cometendo os mesmos erros. Observa-se também que os tipos de erro indicam que os procedimentos são feitos sem compreender a lógica subjacente. Na devolutiva para correção, alguns alunos conseguiram perceber que erraram, apesar de não conseguirem corrigir o erro.

A maioria comete erro de sinal, confundindo talvez a “regra” da multiplicação com a da adição. Desfazer a memorização de uma regra inadequada parece ser uma tarefa mais complexa do que simplesmente reexplicar a matéria. Depende de um trabalho mais profundo. Veja o que diz Helena Cury:

> detectado um erro, procura-se reapresentar o conteúdo, com a (falsa) crença de que a repetição vai fazer com a que a falta de compreensão sobre o tópico em questão vai fazer com que o aluno entenda e não mais cometa o mesmo erro. No entanto, se essa ideia fosse correta, não teríamos erros sistemáticos, pois detectados e remediados por uma nova explicação, já teriam sido eliminado (CURY, 2010, p. 8).

Como já mencionado, ao final da segunda atividade, houve uma mudança de estratégia. Percebi que não conseguiria fazer o trabalho de levar os alunos a se interrogarem a respeito do quê e do porquê dos erros cometidos se continuasse apenas com as discussões amplas envolvendo toda a turma. Eram muitos alunos na sala, alguns erravam, outros não, e na discussão coletiva é difícil conter os que percebem os erros dos outros e apontam onde eles estão errando e qual é a forma correta de fazer o exercício. Além disso, não dá para esperar que um determinado aluno reflita sobre seu erro, enquanto os outros não se dispõem a fazê-lo, seja porque não erraram, seja porque não estão suficientemente interessados nessa reflexão. Percebi que muitos esperam apenas que a professora apresente o procedimento correto para que "aprenda", sem penetrar nos porquês dos seus próprios erros

Outra dificuldade encontrada nas discussões coletivas foi a timidez de alguns alunos e o medo de falar, pela possibilidade de cometer erros crassos. Outro complicador: muitos alunos têm o hábito de apagar rapidamente o exercício quando algum colega diz a sua resposta, especialmente se esse colega for reconhecido por eles como "bom aluno". É uma atitude quase automática, dificultando a percepção do fundamento do seu erro, daquilo que o levou a cometer esse erro e, mais difícil ainda, como poderia corrigir esse erro.

Assim, a partir da terceira atividade, resolvi perguntar quem poderia ficar na escola após o horário das aulas para uma conversa individual sobre as próprias resoluções das tarefas propostas. Quatro estudantes se dispuseram **(A1**, **A2**, **A3**, **A4)** e elaboramos uma escala de trabalho com um deles a cada semana. Ressalto, entretanto, que, desses quatro, dois faltavam frequentemente às aulas, e consequentemente aos encontros.

Os encontros aconteceram na escola, após o último horário. Tínhamos problemas em relação a um lugar onde nos reunir, já que as salas não poderiam ser usadas (estavam sendo limpas pelos funcionários responsáveis), e não havia um lugar adequado para esses encontros. Muitas vezes ficávamos na sala da supervisão, e outras vezes na sala dos professores. Em ambos, além de barulho, havia sempre funcionários, professores ou outros alunos interrompendo-nos ou conversando por perto. Mas é a escola real, com as condições reais de que dispúnhamos. Fomos em frente.

Atividade 3

Resolva os exercícios, explicando como você pensou.

1. A área de um quadrado é 189 cm². Determine a medida do lado deste quadrado.
2. Calcule o valor da soma $\sqrt{32} - 3\sqrt{8}$
3. Calcule o valor de $\sqrt[3]{\frac{128}{16}}$ aplicando as propriedades dos radicais.
4. Aplique as propriedades dos radicais e calcule o valor de $\sqrt{6}.\sqrt{12}$.

Nesta atividade, alguns alunos apresentaram dificuldade na diferenciação entre área e perímetro. Utilizei algumas estratégias tais como solicitar que pesquisassem o que é área de um polígono, desenhar um quadrado e quadriculá-lo mostrando como se calcula a área, utilizei uma folha no formato de quadrado e medimos o lado e o perímetro, além de vários problemas em que era dado o lado e pedida a área do quadrado ou retângulo, bem como fornecendo a área e pedindo o lado e o perímetro.

Em relação às operações com números negativos, usei o artifício de fazê-los pensar em dinheiro para resolver as situações de adição e subtração. Entretanto, quando chamados a por atenção no exercício, conseguiam pensar corretamente, mas, quando faziam sozinhos, alguns alunos voltavam a cometer os mesmos erros. Ressalto, mais uma vez, dois problemas que dificultam o avanço nesse tipo de trabalho: a grande defasagem em relação a conteúdos anteriores e a falta de engajamento, que impossibilita a retenção daquilo que foi aprendido.

Erros cometidos

- Não observar o índice da raiz quando há uma fração no radicando: alguns fizeram a raiz cúbica do numerador e raiz quadrada do denominador.

- Não multiplicar o número que saiu do radical pelo que já está fora do radical.
- Somar incorretamente radicais não semelhantes.

Comentário da autora

Os alunos, especialmente os que erram mais frequentemente, não têm o hábito de conferir suas contas. Combinando isso com os frequentes erros de distração, amplia-se o número de soluções incorretas. Uma estratégia utilizada foi estimular os alunos a lerem diversas vezes o enunciado dos problemas, prestando atenção no que é pedido e nos dados fornecidos, para só depois traçarem uma estratégia de resolução e conferirem a resposta encontrada.

Para a fixação do aprendizado é preciso que o aluno mantenha a atitude de reflexão em situações futuras. Voltando ao antigo “automático”, provavelmente cometerá o mesmo tipo de erro.

Os erros parecem ser, aos olhos de muitos alunos, decorrentes de uma lembrança equivocada da regra a ser utilizada ou dos passos a serem dados. Isso significa, para eles, não ter “aprendido” direito a “explicação” do professor. Essa concepção de aprendizagem se naturaliza e parece não ser mais posta em questão, a partir de certo momento. Assim, trabalhar pedagogicamente o erro matemático na escola torna-se uma tarefa difícil para o professor porque, entre outras razões, esbarra em concepções muito entranhadas, nos alunos, sobre o aprender e o ensinar matemática. Outro fator que dificulta a aprendizagem é a baixa autoestima dos alunos em relação à disciplina. Pode-se imaginar o quanto lhe é difícil “aprender” se já está incutida em sua mente a incapacidade para tal.

Deparei-me também com a necessidade de mobilização de conhecimentos que não são passíveis de serem “preparados”, ou seja, um tipo de conhecimento cuja necessidade de mobilização emerge repentinamente numa situação de ensino não previsível. O docente precisa ter um grande repertório de conhecimentos disponíveis para serem mobilizados instantaneamente, caso a necessidade se apresente. Uma “explicação” previamente preparada nem sempre se adapta a todos os alunos que cometeram um mesmo erro.

A

Nesta atividade continuamos trabalhando com os radicais. Eis as questões:

1. A área de um quadrado é 81 cm². Quanto mede o lado deste quadrado?

Após a resolução dos exercícios, olhei um a um, sem corrigi-los e, antes de devolvê-los aos alunos, refiz com a turma toda, alguns deles. Esse tipo de discussão, que exige uma analise mais profunda das resoluções e atenção dos alunos, é difícil de ser feita com toda a turma por vários motivos, já comentados. Além disso, toma-se muito tempo da aula, o que pode prejudicar o andamento do programa a ser seguido e causar problemas institucionais. São exemplos de limitações impostas ao trabalho com os erros dos alunos na escola. Isso não significa, é claro, que esse tipo de trabalho seja impossível, apenas que é imperativo trabalhar com limitações.

Descrição dos erros cometidos

- Usar incorretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
- Cálcular soma de radicais não semelhantes.

Atividade 5

1. Resolva a equação $x^2 - 16 = 0$
2. O quadrado de um número, acrescido de 10, é igual a sete vezes esse número. Qual é o número?

(Os alunos poderiam recorrer às suas anotações feitas nas aulas).

No que diz respeito às equações do segundo grau, de acordo com minha experiência profissional, comecei insistindo na identificação dos coeficientes a, b e c da fórmula de Bhaskara, já que é comum os alunos errarem nessa identificação, seguindo muitas vezes a ordem em que os coeficientes aparecem na equação, sem relacioná-los com o expoente da incógnita. De acordo com a abordagem do livro, primeiro trabalhamos com as equações incompletas para depois partir para as completas. Observação: só um aluno, dos quatro que frequentavam as conversas extraclasse, fez essa atividade, pois os outros faltaram neste dia.

Erros cometidos

- Novamente não operar corretamente com números negativos.

Comentário da autora

Algumas estratégias simples que podem ajudar o aluno: pedir que leia quantas vezes for preciso o enunciado da questão, de modo a entender perfeitamente o que foi pedido, grifando, se necessário, as palavras que julgarem importantes para a resolução. Ao chegar à resposta, voltar ao enunciado, conferindo todos os dados e verificando se a resposta realmente atende ao que foi pedido.

Atividade 6

Na sequência, apresentamos dois exercícios, passados no quadro para serem feitos em sala.

1) Em um retângulo com área de 80 cm^2, o comprimento tem 11cm a mais que a largura. Calcule o comprimento e a largura do retângulo.
2) O dobro do quadrado da quantidade de livros que Emanuel leu em 3 meses é igual a 52 menos 5 vezes essa mesma quantidade de livros. Quantos livros Emanuel leu nesses 3 meses?

Falhas detectadas

- Fazer um desenho desproporcional. Não se atentar ao fato de que o maior lado do retângulo deveria ser designado por x+11 e não por x.
- Usar incorretamente a linguagem matemática.
- Não verificar a resposta.
- interpretar do enunciado.
- Traduzir para a linguagem matemática.

Comentário da autora

Em relação à linguagem matemática, houve a necessidade de uma longa conversa com o intuito de levar um aluno a interpretar corretamente o enunciado e matematizar a situação. Dois exemplos foram colocados abaixo para que o leitor possa constatar a complexidade de se levar o aluno a pensar sobre o que está fazendo.

Um aluno não conseguiu traduzir o enunciado do problema 2 para a linguagem matemática. Não conseguia interpretar matematicamente a frase “o dobro do quadrado de x”.

Perguntei: quanto é o dobro do quadrado de 3? O aluno respondeu rapidamente: 18. Pedi que ele explicasse como pensou e ele disse: 3.3 é 9 e o dobro de 9 é 18. Frisei que primeiramente ele fez 3.3 para depois fazer o dobro e que seria representado como 2x9. Perguntei como representaria o nove na forma de potência de 3 e ele respondeu 3^2, então ficaria 2.3^2.

Passei a outro exemplo: o dobro do quadrado de 6. Ele fez corretamente: 6x6 = 36, 2x36 = 72.Relembrei o que ele havia feito: 2.9; 2.36; e pedi que escrevesse o 9, o 25 e o 36 na forma de potência, ficando 2.3^2; 2.5^2 e 2.6^2. Depois disso, li novamente “o dobro do quadrado de x” e dei outros exemplos, pedindo que escrevesse como a conta é feita e não seu resultado. Perguntei: e se fosse o dobro do quadrado de x? Ele disse $2x^2$.

Percebendo a dificuldade dos alunos em matematizar o enunciado, interpretá-lo e traçar uma estratégia de resolução, propus a resolução de outro problema: a área de um retângulo é 84 m^2. A medida do comprimento supera em 5 metros a medida da largura. O objetivo era trabalhar os mesmos elementos do problema 1.

A frase “a medida do comprimento supera em 5 metros a medida da largura” cria dificuldades de interpretação e de expressão na linguagem matemática. Mais uma vez me dou conta de que coisas que são consideradas simples pelo professor na verdade podem ser bem complicadas para os alunos. Mas ao levá-lo a pensar sobre a frase acima, consegue, após alguns erros, responder corretamente.

Pergunto: se a largura fosse 1, o comprimento seria quanto? Ele diz 6. E se fosse 3? Ele responde 8. Se fosse 10? Ele responde 15. E se fosse x? Ele responde 5x. Observe como responde automaticamente sem raciocinar sobre as operações que realizou. Pergunto: se a largura fosse 2, o comprimento seria 10? Ele diz que não. Peço que verbalize a operação que está fazendo e pergunto novamente: se fosse 1, ele responde 1 + 5, se fosse 6, ele diz 6 + 5, se fosse 8, ele diz 8 + 5. Fiz a pergunta com vários números até chegar novamente ao x e obter a resposta x + 5.

Neste momento me dou conta de que, muitas vezes, esses detalhes são deixados de lado em sala de aula por pensarmos, como professores, que é muito fácil ou que já é um conhecimento consolidado pelo aluno.

Como se vê, em qualquer das duas hipóteses, muitos deles acabam excluídos da possibilidade de desenvolver certos aspectos da aprendizagem que ainda precisam de alguma insistência por parte do professor. A necessidade de levar o aluno a pensar em todos os pormenores é fundamental. Sua defasagem em relação aos conhecimentos trabalhados em anos anteriores da escolarização requer um olhar mais próximo, mais cuidadoso. Mais uma vez saliento que em uma sala com 30 alunos nem todos conseguirão interpretar os problemas de forma desejável, nem o professor será capaz de sentar com cada aluno e compreender cada dificuldade que enfrenta.

Por outro lado, este estudo sugere a seguinte hipótese: a falta de engajamento na aprendizagem, e até certo desinteresse em acertar, podem levar a uma leitura e interpretação desatentas dos problemas e gerar erros. No exemplo acima relatado, bastou que a professora levasse o aluno a uma atitude de reflexão interessada para que o erro fosse rapidamente corrigido. Uma grande dificuldade parece ser a manutenção dessa atitude interessada por parte do aluno, sem depender de uma intervenção do professor no sentido de provocá-la.

Teste

Foi dada uma avaliação sobre equações do segundo grau e problemas cujas soluções recaem nesse tipo de equação. Antes de corrigir o teste xeroquei e entreguei uma cópia a cada aluno, para que analisassem se havia algo errado em suas resoluções.

Questões:

1) Resolva as equações do segundo grau: a) $x^2 - 36 = 0$ b) $3x^2 - 18x = 0$
2) Resolva a equação completa: $x^2+9x+8=0$
3) O quadrado de um número aumentado de 25 é igual a dez vezes esse número. Calcule o número.

- Operar com números inteiros.
- Não identificar corretamente os coeficientes a, b e c de uma equação do segundo grau.
- Não trocar o sinal de b na fórmula da resolução.
- Ignorar o sinal negativo dos coeficientes e também na resposta.
- Confundir os procedimentos de resolução de uma equação incompleta.
- Errar a ordem das operações numa expressão algébrica ou numérica.

Comentário da autora

A conversa abaixo dá indicação das dificuldades dos alunos no trato com o sinal negativo dos coeficientes da equação do segundo grau.

O aluno na hora de separar os coeficientes a, b e c, colocou 18 como o valor de b. Pedi que ele lesse a equação novamente e separasse os coeficientes novamente. Ele fez a mesma coisa e colocou 18. Isso ocorreu por duas vezes e o aluno não percebeu o que estava fazendo errado. Pedi que ele falasse cada número com seu respectivo sinal, então ele percebeu que deveria ser -18 no lugar do b.

Outro exemplo, agora com a questão da ordem das operações: ao fazer a verificação da resposta (6) no exercício 1, letra b, o aluno escreveu $3(6)^2 - 18(6) = 0$, chegando então a $324 – 108 = 0$.

Pergunto como achou o 324 e ele diz ter feito 3.6 = 18 e então elevou 18 ao quadrado. Fiquei por alguns minutos tentando encontrar um modo de ajudá-lo a perceber seu erro, mas não consegui, num primeiro momento. Queria arrumar um exemplo do dia a dia onde aparecesse essa situação. Percebendo que eu estava pensando num exemplo para aquela situação, o aluno notou que havia feito algo errado e disse: “se na conta do 6 está errado, então tenho que fazer 6 ao quadrado primeiro e depois multiplicar por 3!” Confirmei que era assim que deveria fazer. A partir daí conseguiu finalizar corretamente. Depois, conversando com meu orientador, ele me disse que eu poderia ter feito como fiz em outras situações parecidas: levar o aluno a identificar $3x^2$ com 3.x.x A partir daí, pode-se ver que apenas o 6 está elevado ao quadrado, no caso de $3.6^2 = 3.6.6$. Isso parece uma coisa boba, mas é uma questão importante na prática docente.

Os pesquisadores canadenses Bednarz e Proulx (2009) exemplificam várias situações de sala de aula de matemática que demandam esse tipo de conhecimento profissional do professor. Em oposição ao que chamam de conhecimento matemático cristalizado em livros didáticos, por exemplo, chamam esse conhecimento (por exemplo, como levar o aluno a perceber seu erro em determinadas situações) de “emergente”, no sentido de que emerge inesperadamente em uma situação imprevista e o professor é instado a mobilizá-lo “na lata”, para usar uma expressão popular. Essa foi uma das grandes dificuldades com que tive que conviver ao longo desse trabalho com os erros, mas observei que, como em outros aprendizados profissionais, aos poucos fui me precebendo mais e mais capaz de resolver adequadamente algumas situações desse tipo, embora não todas, evidentemente. São oportunidades de aprendizagem para o professor.

Prova

Questões da prova

Querido aluno: faça a prova com atenção. Não é permitido o uso de corretivos, aparelhos eletrônicos ou calculadora. Boa prova.

1. Resolva as equações do segundo grau incompletas:
a) $x^2 - 49 = 0$ b) $2x^2 + 36x = 0$

2. A equação $x^2 + 3x = 0$
   a) Não tem raízes reais.
   b) Tem uma raiz nula e outra negativa.
   c) Tem uma raiz nula e outra positiva.
   d) Tem duas raízes simétricas
   JUSTIFIQUE.

3. Encontre as raízes da equação $x^2 + 5x – 14 = 0$

4. Uma equação de 2º grau tem:

a) 2 soluções
b) 1 solução
c) 2 soluções ou 1 solução
d) 2 soluções, 1 solução ou nenhuma solução.

5. A área de um tapete retangular, cujo comprimento tem 3m a mais que a largura, é 10 m². O perímetro deste tapete é.....

6. Encontre o valor de delta na equação $2x^2 + 3x + 11 = 0$ e diga quantas raízes a equação possui.

7. (FACESP) O conjunto solução, no campo real, da equação
$z^4 - 13z^2 + 36 = 0$ é:
a) S = {-3, -2, 0, 2, 3}
b) S = {-3, -2, 2, 3}
c) S = {-2, -3}
d) S = {0, 2, 3}
e) S = {2, 3}

8. Resolva as equações irracionais:

a) $\sqrt{x+1} = 9$ Verificação

b) $\sqrt{x+4} - 3 = 0$ Verificação

9. Sabendo que 4 é raiz da equação $x^2 + 6x + 2m = 0$, ache o valor de m.

10. A professora pediu que Marina transcrevesse para a linguagem matemática o seguinte problema: "O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro tem? Marina escreveu $x^2 - 3x = 63 - 12x$. Marina escreveu corretamente? Justifique. Carlos disse que Pedro tem 3 filhos. Essa resposta está correta? Justifique.

Foi dada a avaliação valendo nota. Antes de corrigi-la em sala, foi feita uma cópia da resolução de cada aluno e entregue a eles para que na próxima aula eles procurassem observar os possíveis erros cometidos, explicassem por que erraram e refizessem a questão errada. Apresento abaixo, algumas observações que julguei pertinentes para esse relato. Vale ressaltar que, por causa do tempo, os alunos tiveram que escolher apenas algumas questões para correção e, devido às dificuldades encontradas, muitos conseguiram rever apenas uma.

Erros cometidos

- Operar com números inteiros.
- Errar nas prioridades relativas à ordem de execução das operações em uma expressão numérica.
- Utilizar a linguagem matemática.

Comentário da autora

O exercício 5 da prova pedia o perímetro de um retângulo, sendo dada a área e uma relação entre suas duas dimensões. Percebendo que a dificuldade (de vários alunos) de distinguir entre área e perímetro ainda persistia, resolvi discutir novamente essa questão. Uma coisa me intriga. Como já foi observado, é muito comum o aluno perceber o erro cometido (ainda que com a ajuda da professora), corrigi-lo, mas voltar a errar em atividades posteriores. É difícil entender os detalhes desse processo porque, em tese, se o próprio aluno reconhece o erro e o corrige, gera a expectativa de que o aprendizado esteja consolidado. Mas não está, como já comentado em vários casos. Talvez haja muitos motivos para que o aluno volte a cometer um erro que parece estar superado, mas acredito que um dos mais fortes seja o seguinte: é preciso certo esforço para reter o aprendizado desenvolvido ao participar do processo que leva à observação e à superação do erro cometido em determinadas circunstâncias. Se esse esforço não é empenhado, o aprendizado pode ter ocorrido, mas não ser retido e o retorno ao erro acontece quase de modo natural.

Por que acerta depois de uma discussão extraclasse e erra de novo numa prova? Uma hipótese é a de que tenha entendido em função da discussão e dos exemplos apresentados, mas que o entendimento que construiu não seja algo que ele valorize suficientemente, a ponto de transformá-lo em aprendizagem, ou seja, não se esforça por incorporar esse entendimento a seu repertório de conhecimentos matemáticos, de modo a poder mobilizá-lo em situações (escolares ou não-escolares) que o demandem.

A falta de atenção e de concentração podem ser fatores que contribuem para voltar a erros que aparentemente já haviam sido superados. São muitos erros de (suposta) distração. Se for mesmo apenas distração, temos evidências de que não há muito interesse em acertar (e talvez aí esteja a raiz do maior problema, em termos da aprendizagem).

As considerações acima conduzem à ideia de que certos erros matemáticos podem ter (também) uma origem psicológica, que não se refere necessariamente ao medo de errar ou das eventuais consequências negativas do erro, mas simplesmente a uma espécie de desinteresse (que pode ter variadas causas) em incorporar à sua vida, digamos assim, um aprendizado ocorrido em dado momento do processo de educação escolar. Ao lado da defasagem de grande parte dos alunos em relação a conhecimentos já trabalhados em anos anteriores de escolaridade e da internalização profunda de uma cultura de valorização dos procedimentos mecânicos, em detrimento da lógica que sustenta esses procedimentos, o trabalho com os erros matemáticos na escola ainda precisa lidar com esse aspecto “motivacional”, estimulando o interesse do aluno em reter e incorporar um aprendizado conquistado em determinadas situações, para uso em situações futuras.

As visões dos alunos sobre os resultados

Para saber qual a visão dos alunos antes e depois do trabalho com o erro, utilizamos um questionário.

O Questionário

1) Em anos anteriores, durante sua trajetória escolar, como você encarava o erro nos exercícios de matemática?
2) Esse trabalho com os erros fez com que você mudasse sua opinião ou continua a mesma? Explique.
3) Após esse trabalho com os erros, houve alguma estratégia que você desenvolveu para verificar se sua resolução de um exercício está correta?
4) Houve alguma mudança em como você se sentia quando errava e como você se sente agora? Explique.
5) A partir do momento em que você detecta que cometeu um erro na resolução de um exercício, o que você faz?
   a) Apaga o exercício imediatamente e espera o professor fazer.
   b) Apaga o exercício imediatamente e tenta fazer de novo.
   c) Revê todo o processo para tentar encontrar onde errou.
   d) Apaga e copia de algum colega que acertou.
6) Para você o erro é um sinal de:
   a) Falta de dedicação aos estudos
   b) Fracasso
   c) Oportunidade de aprender
   d) Incompetência do professor

   Outros:
7) Quando você detecta que errou, qual é a sua maior dificuldade?

O Questionário foi apresentado aos alunos do nono ano no dia 21 de outubro de 2018. Vinte e seis estudantes responderam, em sala de aula.

A primeira pergunta nos permitiu identificar alguns elementos da visão que os alunos construíram a respeito do erro matemático, ao longo da sua trajetória escolar. Quinze alunos desenvolveram uma visão negativa do erro, 4 alunos achavam normal errar e 7 eram indiferentes ao erro (QUADRO 1).

Quadro 1 – Visão dos alunos sobre os erros matemáticos

Características	**Justificativas**
Visão negativa	Encarava o erro como uma dificuldade
	Falta de atenção
	Complicado
	Me sentia incompetente
	Ficava chateada e frustrada
	Ficava super revoltada
	Me achava meio burra
	Incapaz
Normal	Normal, porque eu erro frequentemente
	Encaro de forma normal
	Normal, só apagava e corrigia do jeito que a professora fazia
Indiferente	Tentava refazer, se errasse novamente, não ligava mais
	Não ligava muito.
	Não ligava, só refazia
	Achava uma coisa boba, normal entre as pessoas, pois nem sempre a gente acerta

A pergunta 2 visou identificar indícios de contribuição do trabalho realizado, no sentido de que uma visão negativa em relação ao erro viesse a se modificar. Vinte e um alunos relataram que o trabalho contribuiu para que sua visão fosse modificada para uma forma mais positiva e cinco disseram que não houve mudança.

Quadro 2 – Contribuição do trabalho para a mudança da opinião negativa do aluno sobre o erro.

Houve mudança?	Justificativa
Não mudou	Continua a mesma, porém tenho mais ânimo para refazer
	Não mudou minha opinião, pois ainda não ***to*** conseguindo entender muito
	Continua a mesma, pois ainda é complicado
	Continua a mesma mas agora tento prestar mais atenção
Mudou para umavisão mais positiva a respeito do erro	Aprendi ter mais paciência, como que o erro fosse uma inspiração para eu tentar refazer
	Sim
	Agora acho até legal perceber o nosso erro e tentar refazer
	Agora penso que errar é humano
	Hoje apago e faço de novo
	Sim. fez com que eu não desistisse do que errei
	Sim, pois está ajudando muito a achar nosso erro
	Um pouco, pois agora eu tento refazer o exercício com a mesma fórmula ou com outro modo de fazer
	Sim, aprendi a aprender com o meu erro, aceitei que isso é normal.
	Sim, agora não fico tão triste ou revoltada
	Sim, comecei a reparar mais nos meus erros
	Sim, antes eu apagava o exercício sem descobrir onde estava o erro, agora eu não faço mais isso.
	Sim, antes eu olhava só a resposta e tentava fazer novo e se não conseguisse eu deixava pra lá.
	Sim, agora procuro saber onde errei
	Sim, antes achava uma coisa boba, mas agora vejo como uma oportunidade de aprender mais.

Em resposta à pergunta 3, oito alunos disseram que não desenvolveram nenhuma estratégia para lidar com o erro. Dezoito alunos afirmaram ter desenvolvido alguma estratégia com a qual se sentiam mais satisfeitos. Eis algumas das estratégias desenvolvidas:

Quadro 3 – Algumas estratégias desenvolvidas para lidar com o erro

Ler o enunciado várias vezes
Olhar passo a passo o que fez e ir refazendo o que estiver e
Ler novamente, circulando as partes mais importantes
Fazer o exercício com o máximo possível de detalhes

O objetivo da pergunta 4 era verificar se houve alguma mudança na forma como o aluno se sentia quando errava, em relação a como se sente agora. Nove alunos relataram que não houve mudança e dezessete alunos relataram que houve mudanças. No QUADRO 4, algumas justificativas do próprios alunos para as respostas.

Quadro 4 – Mudanças do sentimento do aluno em relação ao erro após a pesquisa

Houve mudança?	**Justificativa**
Não	Não houve mudança, eu sempre fico triste quando erro
	Não, pois sinto que sou incapaz de aprender e acabo me revoltando
	Continua igual
	Não, sempre me sinto frustrado
	Ainda me sinto triste quando não consigo fazer os exercícios

Sim	Sim, antes me achava a pessoa mais burra do mundo
	Antes não ligava muito, hoje já me sinto mais frustrado por ter errado cada questão
	Sim, fico frustrado por errar por bobeira
	Sim, agora vejo o erro como uma forma de tentar de novo
	Sim, antes eu nem ligava, mas agora me sinto um pouquinho mais feliz, pois tentei fazer as atividades com vontade e persistência
	Sim, agora consigo identificar o motivo do erro e me dedicar para não se repetir
	Me sinto mais tranquila, pois sei que é preciso de um erro para grandes acertos
	Sim, agora não fico tão brava quanto antes
	Sim, agora fico frustrada apenas quando meu erro é por falta de atenção
	Sim, antes eu me sentia incapaz
	Sim, antes eu pensava que não tinha competência para fazer de novo, hoje em dia eu paro, penso e faço de novo e me sinto melhor
	Sim, agora não me culpo por ter errado Sim, agora não me culpo por ter errado.

A questão 5 versa sobre a atitude do aluno ao detectar que errou em um exercício matemático. Cinco alunos responderam que apagam o exercício imediatamente e tentam fazer de novo, quatro responderam que apagam o exercício imediatamente e esperam o professor fazer e dezessete responderam que reveem todo o processo para tentar encontrar onde erraram.

Na sexta pergunta, 12 alunos responderam que errar é um sinal de falta de dedicação aos estudos, 1 aluno respondeu que é falta de atenção, 1 aluno respondeu que é sinal de fracasso, 1 aluno disse que é um aviso para que ele estude mais, 1 aluno respondeu que é sinal de dificuldade, 3 alunos disseram que o erro é um sinal de falta de dedicação, mas também uma oportunidade de aprender e 7 disseram que é uma oportunidade de aprender.

Ao serem questionados, na pergunta 7, sobre a maior dificuldade que encontram ao detectar um erro em suas resoluções de problemas matemáticos, 1 aluno respondeu que é corrigi-lo sem a orientação da professora, 4 alunos disseram que é refazer o exercício corretamente, 1 disse que é interpretar o exercício, 3 responderam que não têm dificuldade alguma, 12 disseram que a maior dificuldade é detectar o erro, 1 disse que sempre espera o professor corrigir, 3 disseram que é pensar em uma outra forma de fazer o exercício e 1 disse que é lembrar o que tem que fazer.

De acordo com nossa análise, as respostas, de modo geral, indicam que a maior parte dos alunos identificam alguns pontos de melhora em suas atitudes frente aos erros matemáticos, em função do trabalho realizado. Na percepção desses alunos, os avanços se referem basicamente a dois aspectos. Um, de ordem emocional, relativo a um controle maior sobre os sentimentos (de frustração, de reafirmação da condição de fracasso na aprendizagem matemática e de incapacidade de superação dessa condição) de muitos estudantes, anteriormente à participação no trabalho de tratamento pedagógico dos erros matemáticos aqui relatado.

O segundo aspecto, provavelmente relacionado com o primeiro, refere-se a uma mudança de atitude diante da constatação do erro: embora reconhecendo a permanência de grandes dificuldades para a identificação e eventual superação dos erros matemáticos cometidos, a maioria dos alunos afirma que passou a reagir ao erro com uma atitude mais ativa e positiva, procurando rever em detalhes a resolução incorreta que construíram num primeiro momento, a fim de perceber onde e por que erraram, além de procurar identificar possíveis erros de distração. Consideramos tais atitudes ativas e positivas porque as contrastamos com uma atitude passiva e negativa, frequentemente observada por eles mesmos ao longo do trabalho, como a de não se dispor a atuar sobre os próprios erros e simplesmente esperar que a professora apresente a resolução correta para copiá-la no caderno.

Apresentamos abaixo, com mais detalhes, as respostas dos alunos **A1**, **A2**, **A3** e **A4** (que participaram das conversas extraclasse).

Tais respostas confirmam, com maior ênfase, os comentários gerais que fizemos acima, sobre as respostas de todos os alunos.

As respostas de A1, A2, A3, A4

A aluna **A1** descreve que antes, quando errava, se sentia incapaz de aprender e também frustrada por errar. Com o decorrer das atividades percebeu que pode aprender com o erro e aceitar que errar é normal. Também cita que revê todo o exercício para verificar se está certo, porém algumas vezes não "enxerga" o erro. Em relação ao sentimento que surge quando erra, **A1** diz que fica frustrada apenas quando o erro é por falta de atenção. Relata também que o erro é um aviso para que estude mais e sua maior dificuldade quando detecta um erro é refazer o exercício sem que a professora a oriente.

A2 relata que antes das atividades se achava *meio burra* quando errava e que o trabalho fez com que ela mudasse, no seguinte sentido: antes olhava só a resposta e tentava fazer de novo e, se não conseguisse, *deixava pra lá*. Com o desenrolar da pesquisa, passou a olhar todo o desenvolvimento das contas que precisa fazer e que agora não fica tão brava quando erra. Passou a ver o erro como um sinal de que tem alguma dificuldade.

A3, que antes da pesquisa ficava frustrado quando errava, após realizar as atividades começou a aceitar que o erro faz parte normal do aprendizado. Porém salienta que tem que se dedicar mais aos estudos. A estratégia que desenvolveu para verificar se o exercício está certo é rever toda a resolução. Disse também que ainda se sente mal ao errar, mas que agora vê o erro de uma forma mais "normal". Quando detecta que errou em um exercício, revê o que fez e só então apaga e tenta fazê-lo novamente. Sua maior dificuldade quando detecta um erro é fazer o exercício novamente de um jeito diferente. Para **A3**, o erro é um sinal de falta de dedicação aos estudos, mas também uma oportunidade de aprender.

A4 diz que anteriormente, ao perceber que errou, apagava e "*largava de lado, esperava a professora corrigir e copiava".* Após participar do trabalho, lê novamente o exercício até achar o erro e tenta corrigi-lo. A estratégia que desenvolveu para lidar com o erro foi ler e reler o exercício, verificando passo a passo o que foi feito até encontrar o erro. Antes se achava "burro" quando errava, agora acredita que errar é "normal", todo mundo erra. Para **A4**, o erro é um sinal de falta de dedicação aos estudos e, quando detecta um erro, sua maior dificuldade é "lembrar o que tem que fazer".

Resultados

As nossas questões de pesquisa foram as seguintes:

Questão 1: *Quais contribuições para a aprendizagem e para o ensino pode trazer um trabalho docente de tratamento pedagógico dos erros matemáticos cometidos por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, em atividades escolares ao longo de um semestre letivo?*

Questão 2: *Que limitações o professor enfrenta no desenvolvimento desse tipo de trabalho, numa sala de aula real de matemática, de uma escola real da rede pública de ensino do Estado de Minas Gerais*?

Resposta à primeira questão de pesquisa

Tendo em conta os dados apresentados e a análise desenvolvida no capítulo 3 deste relato, acreditamos que uma resposta fundamentada para a primeira questão de pesquisa pode ser colocada nos seguintes termos: *o trabalho contribuiu para favorecer o desenvolvimento de uma visão mais positiva dos alunos em relação aos erros matemáticos, situando-os como parte integrante do aprendizado, deslocando uma visão do erro como sinal de fracasso e incapacidade, visão essa até então predominante em grande parte dos participantes da experiência. Além disso, o trabalho contribuiu para a construção de uma atitude ativa e positiva de tentar identificar o erro cometido e buscar a sua superação através da revisão dos passos dados na resolução incorreta. Assim, podemos notar que o trabalho mostrou resultados que contemplam algumas das possibilidades antecipadas por nós.*

É muito importante ressaltar, entretanto, que essas contribuições não podem ser tomadas como absolutas e permanentes, tendo em vista uma série de fatores limitantes do trabalho e condicionantes da eventual volatilidade dos avanços conseguidos. Alguns desses fatores limitantes serão comentados na nossa resposta à segunda questão de pesquisa, logo abaixo, mas queremos registrar aqui que: diante das condições em que se desenvolveu o trabalho, incluindo as de formação escolar dos participantes, nos ciclos anteriores; as concepções já incorporadas pelos alunos ao longo dessa formação escolar (p. ex., de que aprender matemática na escola é guardar na memória os procedimentos a serem utilizados em cada situação; de que o erro é consequência de não ter guardado na memória o procedimento correto e de que a superação do erro se consegue relembrando os passos do procedimento "esquecido"), repetimos, diante de tais condições, entendemos que as contribuições do trabalho ainda podem ser vistas como significativas, especialmente no que se refere ao despertar de uma atitude mais confiante frente ao ato de errar, à sensibilização do aluno no sentido de identificar o erro cometido e buscar a sua correção. Contribuições nos sentidos apontados acima podem ser constatadas tanto a partir das análises dos registros dos alunos (capítulo 3), como nas respostas dos alunos ao Questionário (também comentadas no capítulo 3).

Cabe reconhecer que avanços mais refinados certamente não foram alcançados. Entretanto, há que se considerar que tais avanços, ainda que possíveis, demandariam uma atuação de longo prazo com a turma (mesmo assim, se contássemos com um engajamento mais forte dos alunos, o que não se pode garantir a priori). Uma atuação de longo prazo não constava do planejamento da pesquisa, uma vez que se trata de pesquisa de mestrado, com prazo relativamente curto para ser planejada, executada e relatada.

Resposta à segunda questão de pesquisa

O trabalho com os erros implica um engajamento profundo, tanto por parte do professor quanto do aluno. A desconstrução de toda uma concepção acerca do erro matemático na escola (e suas implicações) não ocorre da noite para o dia, especialmente quando se considera que tais concepções estão (mais fortemente ou menos) enraizadas tanto na prática corrente do ensino escolar de matemática, quanto na de aprendizagem.

Como mencionado anteriormente, esta pesquisa foi realizada numa sala de aula “real”, ou seja, tentei desenvolver discussões acerca dos erros efetivamente cometidos pelos alunos durante as aulas, ao realizarem atividades usuais no cotidiano do ensino de matemática do nono ano da escola básica. Assim, quando pensava, após discussões em sala ou extraclasse, que determinado erro havia sido superado por determinado aluno, esse mesmo erro aparecia, cometido por esse mesmo aluno, em outra atividade e relacionado a outros tópicos em estudo. Isso me obrigava a mobilizar novos conhecimentos e novas estratégias - adaptadas ao novo contexto em que o erro se manifestava - a fim de tentar conduzir o aluno ao reconhecimento do erro e ajudá-lo a trabalhar na tentativa de sua superação. Por exemplo, após o trabalho com radicais (em que foram identificados problemas em relação à noção de divisão, à decomposição de inteiros em fatores primos, à extração de raízes de inteiros, entre outros) iniciou-se o estudo da equação do segundo grau, o que pressupunha o domínio dos tópicos anteriores, além de outros, como a resolução de equações do primeiro grau, fatoração de polinômios etc. Mas, como professora, não podia contar com o domínio dos pré-requisitos nesse novo contexto por parte dos alunos, e muitos erros cometidos anteriormente voltaram à tona, demandando novas discussões e o uso de novas estratégias didáticas de análise desses erros.

No que se refere ao “normal” de sala de aula, outros fatores também contribuem para dificultar o trabalho de tratamento pedagógico do erro: são muitos alunos numa mesma sala, cada um erra por um motivo diferente, nem sempre é possível “segurar” o aluno que não errou e quer dizer aos colegas e ao professor como fez o exercício em discussão. Outros, ao contrário, são tímidos e não conseguem colocar suas dúvidas ou suas formas de entendimento ou desentendimento em discussão. Além disso, o mesmo erro pode ter diferentes origens e causas, dependendo de cada aluno e das circunstâncias em que é cometido. Obviamente todas essas variáveis estão inseridas na prática real do professor, mas ao tentar realizar uma análise mais profunda, junto com os alunos, a respeito dos seus respectivos erros matemáticos, aparecem dificuldades de toda ordem e a tendência usual é concentrar-se na resolução correta e deixar os erros sob pouca atenção. Estratégias inadequadas que alguns alunos desenvolvem e que deveriam ser analisadas e discutidas “in loco” tendem a ser ignoradas. A defasagem de conteúdo, que leva a vários erros, raramente pode ser minuciosamente trabalhada em função da sua diversidade e dos diferentes níveis de consciência de cada aluno em relação à sua própria defasagem. Formas equivocadas de pensamento lógico também propõem um trabalho quase que personalizado, em contradição com a dinâmica do dia a dia da sala de aula.

Outro fator complicador importante foi, como sempre, o programa a ser cumprido. Muito frequentemente, mesmo percebendo a necessidade de prolongar uma discussão sobre diferentes formas em que se manifestavam os erros cometidos na resolução de uma questão, sentia aquela vibração me lembrando de que não podia prejudicar o “andamento da matéria”.

Tais dificuldades acabaram por me afastar, pelo menos parcialmente, dos objetivos originais que prescreviam o trabalho em condições “reais” de uma sala de aula “real” de uma escola pública “real”. Optei, então, como exposto anteriormente, por realizar encontros semanais individuais, com alguns alunos que se dispuseram a ficar após a aula. Digo que o desvio das condições reais foi apenas parcial porque os erros cometidos por esses alunos não eram muito diferentes daqueles cometidos pelos demais, mas as discussões individuais se colocavam como uma resposta viável às condições que dificultavam o encaminhamento mais detalhado das discussões que ocorriam na sala com a turma toda. O que se tornou “artificial”, de fato, foram as condições de discussão personalizada com cada um deles e que abriu a possibilidade de atuar mais efetivamente na proposição de questões que pudessem levar cada um deles a observar seus próprios erros, entender melhor o que os levava a cometê-los e a eventualmente corrigi-los. Isso foi importante para o resultado da pesquisa porque mostrou que esse tipo de trabalho (o tratamento pedagógico dos erros matemáticos) tem potencial para levar os alunos a observar e eventualmente superar seus erros, mas tem que enfrentar grandes dificuldades, se se restringe a um trabalho com toda a classe, simultaneamente.

No entanto, é importante considerar que uma eventual superação do erro, mesmo após discussão individualizada, fica sempre na dependência do interesse e do esforço de cada aluno no sentido de incorporar os elementos corretivos (a respeito das origens e motivos que o levaram ao erro) que vêm à tona nas discussões. E que tal interesse e esforço não podem ser vistos como garantidos a priori, mas podem ser trabalhados em espaços individuais (talvez em pequenos grupos) de discussão entre estudantes e professor.

De forma mais ou menos secundária (mas não de todo sem importância nos resultados do trabalho), enfrentei também problemas com a falta de um lugar apropriado para me reunir com os alunos nos encontros extraclasse. Tive que desenvolver as discussões com esses alunos na sala dos professores ou na sala da supervisora, locais onde havia muito barulho e interrupções por parte de funcionários e/ou outros alunos.

Enfrentei também, por outro lado, dificuldades de romper com concepções já instaladas em minha prática como professora, pois também não tinha o hábito, na docência cotidiana, de analisar os erros tão de perto e tão profundamente, buscando entender suas causas, produzindo perguntas, analogias, comparações, enfim, estratégias didáticas que levassem o aluno a perceber o próprio erro sem que eu o apontasse, e a mobilizar conhecimentos e meios para superá-lo, sem que eu dissesse como se produz a solução correta. Muitas vezes me preparava para discutir determinado erro com o aluno, antecipando que uma determinada "falha" de entendimento tivesse levado o aluno ao erro, mas ao longo da conversa percebia que o erro tinha uma origem diferente para aquele aluno. Isso obriga o professor a ter um repertório extenso de conhecimentos sobre aquele erro, mobilizando um ou outro elemento desse repertório em função da percepção daquilo que leva cada aluno a esse erro, em cada circunstância. Ou então, mais difícil todavia, criar, de uma forma praticamente instantânea, uma estratégia inédita para ajudar o aluno a observar e/ou corrigir o erro, especialmente no caso em que a origem detectada desse erro seja, correspondentemente, inédita para o professor. Em suma, é preciso ter muito mais que familiaridade com a literatura geral sobre análise de erros, o que apesar de não ter feito parte de minha formação universitária nem de minha experiência docente até então, consegui alcançar, com muito esforço e dedicação, ao longo de meu curso de mestrado na UFOP. Hoje vejo que é preciso ter também, ao lado da familiaridade com a literatura especializada e particular a cada tópico, uma experiência profissional que possibilite a construção desse repertório, da mais ampla forma possível, pois é a ele que o professor se vê obrigado a recorrer, de repente, quando percebe que aquilo que foi previamente preparado não está “funcionando” ou não vai “funcionar”.

Por fim, o acúmulo de trabalho também contribuiu para limitar, de certa forma, um envolvimento ideal com a pesquisa, pois lecionava em mais cinco turmas, sendo duas delas em outra escola (particular). Apesar de todos esses obstáculos, posso dizer que o trabalho me envolveu positivamente. Para mim, tornou-se cada dia mais clara a necessidade de investir nesse tipo de trabalho, visando abrir possibilidades reais de melhora na aprendizagem e no ensino escolar de matemática. Apesar dos resultados não terem sido espetaculares, tenho consciência de que consegui abrir portas e possibilidades reais para um avanço dos alunos no processo de aprendizagem, bem como para o meu avanço profissional no processo de ensino de matemática na Educação Básica. Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, aprendi muito, tanto em termos teóricos quanto em termos de reflexões muito ricas que fui obrigada a fazer a respeito da minha própria prática docente.

Um catálogo dos erros cometidos

Como já mencionamos, fizemos um levantamento geral dos tipos de erros matemáticos cometidos e que foram objeto de tratamento pedagógico nesta pesquisa. Não nos propusemos a um trabalho amplo de discussão das origens e categorização dos erros de acordo com critérios gerais e abstratos, de acordo com certas teorias. Nosso objetivo, mais modesto, foi produzir um pequeno catálogo de erros cometidos por alunos do nono ano do Ensino Fundamental, com alguns comentários a respeito de análises desses erros já desenvolvidas pela literatura especializada, entendendo que, conjugado a outras pesquisas do mesmo tipo, esse catálogo possa ajudar o professor do nono ano a antecipar algumas das dificuldades que serão enfrentadas por seus alunos no trabalho com temas como cálculo com radicais e equações do segundo grau no nono ano. Como também já comentamos, muitos desses erros possuem lastro em tópicos anteriores ao nono ano, como operações com números negativos, fatoração em primos, confusão entre as noções de perímetro e área de figuras planas etc.

Os tipos de erros cometidos e alguns tratamentos pedagógicos indicados (a partir da literatura e de uma "meta análise" da nossa experiência neste trabalho)

Analisando os erros cometidos pelos alunos ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, resolvemos agrupá-los em quatro categorias, nem sempre desprovidas de interseção. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que essas categorias, embora tenham sentido no estudo que empreendemos, estão fundadas no entendimento que construímos, como professora e com ajuda da literatura, das formas de pensar que podem levar aos erros catalogados. Sendo assim, como tal entendimento constitui-se, muitas vezes, a partir de hipóteses mais ou menos plausíveis (e quase nunca a partir de certezas), é preciso ver essas categorias também como possibilidades de análise e não como construções robustas, do ponto de vista dos resultados da pesquisa.

CATEGORIA 1
Uso de regras inadequadas à situação ou invenção de regras "ad hoc"

Nessa categoria incluímos erros que têm origem na aplicação de regras ou procedimentos que podem ser corretos no caso de algumas situações, mas que são incorretos no contexto em que foram usados. Como exemplo típico desse caso podemos citar o seguinte: a regra "menos com mais dá menos", usada numa situação de adição de inteiros. Segundo a regra, aplicada a uma situação inadequada, -9+11 seria igual a -2 porque "menos com mais dá menos". Essa categoria engloba também casos em que um procedimento ad hoc é inventado para uma situação na qual esse procedimento "não funciona". Exemplos de erros nesta categoria são apresentados a seguir.

Cálculo de expressões com radicais:

- $2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-4\sqrt{5}-3\sqrt{5} = 10\sqrt{3}-1\sqrt{5}$

O estudante parece ter procedido como se fosse $2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-(4\sqrt{5}-3\sqrt{5})$. Uma leitura em voz alta poderia sugerir esse tipo de interpretação para o cálculo a ser feito. Caso se confirme essa origem do erro numa dada situação, o trabalho do professor poderia se encaminhar para ajudar o aluno a desenvolver uma familiaridade maior com as convenções relativas ao uso de parêntesis, colchetes e chaves em expressões matemáticas (assunto de anos anteriores do Ensino Fundamental).

- $-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}=1\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ (mesmo caso anterior)
- $2\sqrt{3}+4\sqrt{5}-8\sqrt{3}+3\sqrt{5}=6\sqrt{3}+7\sqrt{5}$

Aqui o erro pode ter sido simplesmente uma distração (2-8=6). Nesse caso, uma sugestão seria propor ao aluno que cometeu esse erro outras questões do mesmo tipo (p.ex., 12-21 =?; 3x-7x=?) de modo a certificar-se de que foi mesmo uma distração ou se o aluno em questão tem dificuldades mais profundas com esse tipo de cálculo. Se estiver usando uma regra incorreta para concluir que 2-8 vale 6, provavelmente aparecerá um padrão de erro nos cálculos acima sugeridos e então o professor poderá reconhecer a regra incorreta utilizada. Aliás essa é uma sugestão geral para erros de cálculo: quando o professor não estiver seguro a respeito da forma de pensar que está conduzindo o aluno ao erro, uma ideia que costuma ser frutífera é propor várias questões semelhantes, de modo a reconhecer um padrão nas respostas do aluno. Por exemplo: se ele afirma que $2^{-3} = -8$, proponha as questões: quanto vale 3^{-2}? E 4^{-2}? Caso as respostas sejam respectivamente -9 e -16, parece estar estabelecido um padrão e o professor poderá trabalhar sobre essa ideia de potência com expoente negativo mantida pelo aluno (ver Cury, 2007, p.82). Outra possibilidade nesta questão é a seguinte: o aluno considera impossível "tirar 8 de 2 (na verdade achar o resultado de $2\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$) e usa uma espécie de "propriedade comutativa" para transformar 2-8 em 8-2 e dar sentido ao resultado (ver Hart, 1981, capítulo 6). Voltaremos a esse ponto nos erros relativos às operações com números inteiros, mais adiante.

- $7\sqrt{5} - 10\sqrt{3} = 3\sqrt{5}$

Seria o mesmo caso anterior, apenas com a identificação (por distração) de $\sqrt{5}$ com $\sqrt{3}$?

- $2\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - 8\sqrt{3} + 3\sqrt{5} = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

Uma possibilidade aqui seria a seguinte: o aluno tenta agrupar os radicais semelhantes, mas deixando os sinais no mesmo lugar. Assim, troca de lugar $4\sqrt{5}$ com $8\sqrt{3}$ deixando os sinais nos lugares originais. E porque troca o sinal de $3\sqrt{5}$ (a última parcela)? Talvez porque entendeu que o sinal negativo antes de $4\sqrt{5}$ deveria atuar sobre tudo que estivesse adiante, não apenas sobre o $4\sqrt{5}$. Para testar esse tipo de possibilidade, o professor poderia propor cálculos semelhantes ao aluno e verificar se esse padrão emerge.

- $3 + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; $8 - 3\sqrt{8} = 5\sqrt{8}$

Em ambos os exemplos, parece que o aluno entende a ordem da conta como se lê: 3+2 (que é 5) $\sqrt{2}$. Então o resultado seria $5\sqrt{2}$. O professor pode passar outros cálculos semelhantes ao aluno para certificar-se da presença desse padrão e, uma vez confirmado, poderia perguntar a ele se existe diferença entre as expressões 3+2x e (3+2)x. Em caso de dúvida, poderá pedir ao aluno que faça o cálculo das duas expressões para alguns valores de x e, em seguida, sugerir que compare os resultados para verificar se é efetivamente diferente. A questão aqui está na escrita, pois a leitura das duas expressões é a mesma. Isso costuma ser complicado para quem valoriza dominantemente a cultura oral, em detrimento da escrita. Pode ser o caso de uma boa parte dos alunos dessa faixa de idade (e de determinada classe social) numa sala de aula.

- $2\sqrt{4} - 3\sqrt{8} = 1\sqrt{4}$

Aqui pode ter acontecido uma sequência de raciocínios visando dar sentido ao que aparentemente não tem. Em primeiro lugar, como 2 é menor do que 3 e 4 é menor do que 8, pode-se ter invertido a expressão (alegando, conscientemente ou não, uma espécie de “comutatividade”) para $3\sqrt{8} - 2\sqrt{4}$. Daí, o próximo passo seria fazer (3-2) ($\sqrt{8} - \sqrt{4})$ para chegar em $1\sqrt{4}$. De novo, é apenas uma hipótese que precisaria ser verificada, como nos outros casos comentados acima.

Vários autores (por exemplo, BOOTH, 1994) comentam esse último passo ($\sqrt{8} - \sqrt{4}) = \sqrt{8-4}$, considerando o seguinte: muitos alunos veem uma expressão como $\sqrt{8} - \sqrt{4}$ como um cálculo a ser feito (análogo a 17-10, p.ex., em que ninguém continuaria trabalhando com a expressão e sim com o resultado 7). Não veem a expressão como um objeto em si (no caso, um número real), mas como um processo que deve ser terminado. Por isso procuram meios de achar um resultado para o cálculo que, em sua concepção, é preciso fazer. E nessa ansiedade de chegar ao “resultado” produzem regras ad hoc do tipo 5a+7b = 12ab ou $\sqrt{8} - \sqrt{4} = \sqrt{8-4}$. De todo modo, parece intrigante que a sensação de ter que chegar a um “resultado” se refira apenas à operação de adição, mas não, em geral, à multiplicação (12ab ainda tem implícita a operação de multiplicação a fazer, mas isso não parece incomodar tanto quanto a adição a fazer em 5a+7b). Como o professor pode tratar pedagogicamente esse tipo de erro? Uma possibilidade seria convidar o aluno a aplicar a regra ad hoc inventada a uma situação em que obviamente não oferece um resultado correto (no caso em exame, poderia ser sugerido o cálculo de $\sqrt{4}-\sqrt{1}$ pela regra do aluno e fica claro que a igualdade não se verifica). Na sequência, é importante discutir até onde se pode chegar na expressão de um radical (e qual o sentido de colocar uma expressão radical na forma mais simples).

- $\frac{-7+3}{2}=\frac{4}{2}=2$

Pode ser um caso de pura distração (Categoria 4 adiante) ou pode ser aquela inversão já comentada: como não se concebe a possibilidade de tirar o maior do menor, inverte-se, aplicando uma comutatividade ad hoc.

Extração de fatores do radical

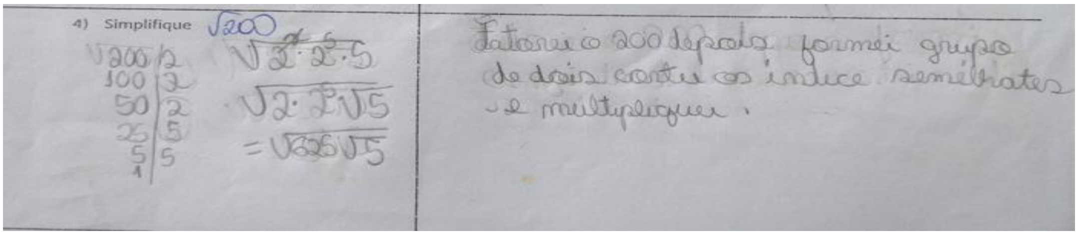
- $\sqrt{2.3^2.3.3}=2.3\sqrt{9}$

Talvez o procedimento possa ter tido origem no entendimento de que 2.3^2 é o mesmo que $(2.3)^2$. Para certificar-se, o professor poderia sugerir cálculos do tipo: achar o valor numérico da expressão $2x^2$ para x=3, x=4, x=5 e também de $(2x)^2$ para x=3, x=4 e x=5), a fim de que se faça notar a diferença.

- $\sqrt{2^3.5^2}=8\sqrt{25}$

Para levar o aluno a perceber que houve um erro nesse processo, pode-se tentar a estratégia de elevar ambos os termos da igualdade ao quadrado e verificar que ela não se mantém. Pode ter sido apenas uma distração, mas de todo modo, seria interessante tentar entender, em conversas com o aluno, se possível, o que o leva a passar o 2^3 para fora do radical sem modificar o valor que estava dentro do radical. Segundo essa lógica, porque não fazer isso com qualquer número que esteja dentro de um radical? Por exemplo, por que não aplicar o mesmo procedimento ao 25?

- FIG. 86



Erro: extração de fatores do radical.

Há algumas possibilidades de entendimento da origem do erro. Em primeiro lugar, parece haver uma falha de entendimento do significado da fatoração em primos. O algoritmo é executado corretamente, mas o que se conclui dele é que 200 = $2^2.2^5.5$. Em seguida observa-se o “corte” do expoente 2 do fator 2, sem extrair esse fator do radical. Na sequência, pode-se imaginar que o aluno tenha “distribuído” a raiz quadrada pelos fatores (o que seria correto se $\sqrt{5}$ não estivesse mais sob o primeiro radical, o que não acontece). Observe-se que o estudante escreve ao lado, explicando seu procedimento: “cortei os índices semelhantes e multipliquei”. Talvez o único “índice semelhante” identificado tenha sido o 2 do expoente com o 2 da raiz quadrada. Os demais “índices” não eram “semelhantes” (o 2 da raiz quadrada com o 5 do expoente, e com o 1 do outro expoente), por isso não foram “cortados”. Bom, vemos aqui um conjunto de erros, que podem parecer que ocorreram de forma mais ou menos aleatória, mas que talvez tenham origem em alguma lógica estranha, gerada pela memorização de regras desprovidas de qualquer sentido matemático, agregadas a uma forma confusa de uso da linguagem associada ao estudo do assunto (os termos “semelhante”, em radicais semelhantes e “índice”, em índice de um radical, podem ter se misturado na expressão índices semelhantes). Isso reforça o que comentamos a respeito do nível das dificuldades que o professor enfrenta ao desenvolver um trabalho como esse. Entender o que está matematicamente correto é certamente muito mais fácil do que entender a lógica (ou falta de) que conduz o aluno aos erros. Por outro lado, sem entender essa lógica que conduz aos erros é muito difícil realizar efetivamente um tratamento pedagógico dos erros matemáticos na escola.

- $\sqrt{2.3.9^2} = \sqrt{6.9^2} = 6.9 = 54$

Será que aparece de novo aquela ideia de que $6.9^2 = (6.9)^2$?

- $\sqrt{189} = \sqrt{3^3\sqrt{7}} = 9\sqrt{7}$

Pode ser que se tenha "distribuído" a raiz pelos fatores, mas estendeu-se o símbolo da raiz quadrada de modo a englobar também a raiz de 7. Uma questão de usar corretamente os símbolos. De todo modo, ainda fica por se entender por que a raiz quadrada de 3^3 seria 9.

- $\sqrt{2^2.5^2.2} = 2\sqrt{10}$

Nesse caso, faz-se uma inversão completa do procedimento correto. O que poderia ser extraído fica dentro do radical e o que deveria ficar dentro do radical é extraído. Será que a lógica é que o aluno simplesmente decorou invertido?

Resolução de equações do segundo grau

- $x^2 + 10 = 7x$, então $x^2 + 7x – 10 = 0$

Uma possibilidade de entendimento da origem do erro neste caso seria a seguinte: o aluno recorda-se, confusamente, de uma regra que diz: ao mudar de lugar um termo da equação devemos trocar o sinal desse termo. Assim, aplicando duas vezes essa "regra" teríamos (passando o 7x para o primeiro membro e trocando seu sinal): $x^2 + 10 – 7x = 0$ e finalmente (trocando de lugar o 10 com o 7x e trocando o sinal de ambos) chegamos a $x^2 + 7x – 10 = 0$. Mas pode ter sido também uma distração: passou o 10 e o x^2 para o segundo membro trocando o sinal apenas do 10.

- $2x^2 + 36x = 0$ outro exemplo: $2x^2 + 36x = 0$ $2x^2 (x-36) = 0$

$x = 0$ e $2x = 36$

$x = 18$

Falha na fatoração. No primeiro caso, parece ter simplesmente esquecido de trocar o sinal. No segundo, parece ter se esquecido de dividir o 36 pelo 2 que foi posto em evidência. Em ambos os casos, é preciso levar o aluno a "conferir" as respostas e verificar se realmente satisfazem a equação. O aluno deve criar esse hábito de conferir, a fim de evitar ou minimizar os erros de distração.

- $3x^2 - 18x = 0$

$x(x-18) = 0$

$2x-18 = 0$

$2x = 18$
$x = 18/2 = 9$
$x= \pm 9$

Há dois erros principais aqui. O primeiro se refere à fatoração errada. É importante induzir o aluno a sempre verificar se a expressão original pode ser resgatada pela multiplicação indicada na expressão fatorada. O outro erro parece decorrer do fato de que foi ensinado, em algum momento, que a equação do segundo grau tem normalmente duas raízes. Isso pode ter levado o aluno a acrescentar o -9 no conjunto solução da equação, em lugar do zero que deriva do produto da segunda linha ser igual a zero. Mais uma vez mostra-se adequada a estratégia de levar sempre o aluno a verificar se as respostas encontradas efetivamente satisfazem a equação original dada.

- $3x^2 - 18x = 0$

$15x = 0$
$x = \pm 15$

O erro no final é semelhante ao comentado no exemplo anterior. Quanto à igualdade $3x^2$-18x = 15x, entendemos que merece algumas considerações. Talvez seja interessante o professor pedir ao aluno que substitua alguns valores de x nas duas expressões ($3x^2$-18x e 15x) para verificar que são diferentes. Por fim, se 15x = 0 então x = 15? Talvez seja o caso de gastar algum tempo com esse aluno tentando entender como ele entende algumas questões teóricas referentes às operações com monômios e também questões referentes ao que seja raiz de uma equação.

- $3x^2 - 18x = 0$

$x(x-18)=0$
$x=0$ e $x=18$

Aqui apenas um erro na fatoração. Pode ser uma simples distração, mas de qualquer maneira pode ser interessante pedir que multiplique x por x-18 e verifique se obtém $3x^2 – 18x$ como resultado.

- $3x(x-18) = 0$

$3x^2 - 18x = -54$

Não é fácil entender a lógica utilizada, mas sempre se pode pedir ao aluno que explique. Se não conseguir dar uma explicação, talvez seja o caso de somar 54 a ambos os membros da segunda equação e chegar a $3x^2 - 18x + 54 = 0$. A equivalência dessa equação com a original deve levar à conclusão de que os primeiros membros das duas devem ser iguais. Aí pode-se pedir que calcule o valor de $3x^2 - 18x$ e de $3x(x-18)$ para alguns valores de x e ver que não são iguais. O que pode ter levado ao erro? Uma possibilidade é a seguinte: o aluno multiplica 3x por x e obtém corretamente $3x^2$. Em seguida multiplica 3x por 18 distribuindo o produto da seguinte maneira: x por 18, obtendo 18x, e 3 por 18, obtendo 54. Resta ainda entender porque o 54 vai parar no segundo membro da equação.

- $x^2 + 36 = 0$

$x^2 = \sqrt{36}$

$x = 6$

Soluções: 0 e 6

Aqui, provavelmente, um resquício do aprendizado confuso de resolução do caso em que c=0 e que admite sempre a solução x=0. De todo modo, mais uma vez, pode-se, antes de qualquer discussão, pedir ao aluno que substitua os valores encontrados na equação, e verificar se satisfazem.

- $3x^2 - 18x = 0$

$3x^2 = - 18x$

$3x = \sqrt{18x}$

$\frac{18x}{3x} = 6$

O aluno parece ter criado regras personalizadas para a resolução desta equação. Será que entende que 6 é a solução da equação? Uma resolução correta chega a essa resposta: $3x^2=18x$ e, portanto, $x = \frac{18x}{3x} = 6$ (supondo que x seja diferente de zero). Se x for zero, claramente resolve a equação original dada. Assim, as soluções seriam x=0 e x=6. Resta entender o que foi feito com o sinal negativo da segunda linha e qual o papel da terceira linha na resolução. Talvez seja o caso de perguntar ao aluno que apresentou essa resolução.

- $2x^2 + 36x = 0$

$x(2x - 36x)$

$2x^2 = 36x^2$

$2x = \pm\sqrt{36}$

$2x = 6$

$x = \pm 3$

Há vários erros neste exemplo, embora ainda não sejam muito claras, para mim, as suas origens. No primeiro passo, há uma troca de sinal que pode ser simples distração, e um abandono do sinal de igual. No segundo passo, volta-se à equação original, porém com o sinal do segundo membro trocado e com $36x^2$ no lugar de 36x. São as vicissitudes da manipulação algébrica mecânica, sem crítica. Se passarmos o $36x^2$ para o primeiro membro da igualdade, voltamos a uma expressão claramente diferente da original. Isso deveria intrigar o aluno que tivesse o espírito voltado para conferir seus passos na resolução de um problema matemático. Mas não parece ser o caso desse aluno real cuja resolução estamos analisando. No terceiro passo da resolução, chegamos a algo semelhante ao que foi feito na questão anterior: $\sqrt{2x^2} = 2x$ e $\sqrt{36x^2} = \pm\sqrt{36}$. Por que será que o $\pm$ apareceu apenas de um lado da igualdade? Como se vê, pode ser muito difícil entender o que leva o aluno aos seus erros (provavelmente, nem mesmo o aluno entenda isso muito bem, uma vez que ainda está em um estágio anterior no qual tem dificuldade até para reconhecer seus próprios erros). Por isso mesmo, a análise de erros é um processo que traz aprendizagem para o professor e para alunos, embora demande esforço de ambos.

- $x^2 + 9x + 8 = 0$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2}$

Aqui o aluno simplesmente ignora o sinal do -b na fórmula de resolução da equação do segundo grau. Isso foi muito comum e pode ser considerado um caso de negativofobia, próximo de outros procedimentos registrados neste estudo (e em vários outros, ver, p. ex., Hart, 1981), em que se troca a conta 6-8 por 8-6 porque, provavelmente, não se construiu uma aceitação real do número negativo como número e, portanto, não se pode “tirar 8 de 6”.

- $\Delta = (5)^2 - 4(1)(-14) = 25 - 56 = 81$

Simples distração ou outro caso de negativofobia? (ver os três exemplos a seguir)

- $\frac{-7+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- $\frac{11-21}{2}$=5
- x = $\frac{-(5)\pm\sqrt{441}}{2(2)}, então\ x' = \frac{5-21}{4} = \frac{16}{4}$
- $\frac{-5-9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

De novo, pode ser uma simples distração ou, talvez, uma aplicação da regra de sinais da multiplicação para uma adição de inteiros: "menos com menos dá mais".

CATEGORIA 2
Falhas conceituais

Nesta categoria incluímos os erros provenientes de uso incorreto de certos conceitos matemáticos ou de confusão entre conceitos ainda não suficientemente apreendidos. Confusão entre as noções de área e perímetro

- Se um quadrado tem lado 5cm, a área dele será quanto? O aluno responde: "20 porque é lado mais lado mais lado mais lado"
- Um estudante, ao ser indagado sobre como se calcula a área de um quadrado, pergunta: o lado é uma parte da área?
- Calcule o perímetro de um quadrado cuja área mede 144 cm². resolução: 144 $\div 4 = 36$.

Há alguns estudos que tratam dessa questão da confusão entre perímetro e área. Por exemplo, Serrazina e Matos (1988) afirmam que essa confusão pode ter origem na forma como os professores tratam o assunto em suas aulas:

> [...] muitas vezes o perímetro e a área são introduzidos através de fórmulas. Mais tarde é pedido aos alunos para determinarem o 'comprimento à volta', ou 'o espaço ocupado', e muitos não são capazes de reconhecer aquelas ideias. Para muitos alunos, a área é apenas o comprimento vezes a largura, e por isso calculam todas as áreas usando a mesma fórmula, por exemplo no caso dos paralelogramos (SERRAZINA; MATOS, 1988, p. 114 *apud* PEREIRA, 2015, p.28).

Nesse sentido, achamos interessante citar aqui uma sugestão de abordagem que pode ajudar os alunos a superarem as dificuldades com relação a esses conceitos:

> Dados recolhidos por Pires (1995) revelam que quando os conceitos de perímetro e área são introduzidos separadamente, os alunos respondem com alguma segurança e adequação. No entanto, quando abordados em simultâneo, surgem algumas dificuldades e confusões na sua aplicação. Neste âmbito, tão importante como trabalhar estes conceitos em separado numa fase mais inicial é, posteriormente, apresentar uma gama de atividades e problemas que os ponham em confronto, explorando-os em simultâneo, como, por exemplo: explorar atividades que apresentem figuras com o mesmo perímetro, mas áreas diferentes ou figuras com a mesma área, mas perímetros diferentes; descobrir qual a figura com maior área a partir de um determinado valor de perímetro; num conjunto de figuras com o mesmo perímetro, descobrir a que tem a maior área; investigar o que acontece à medida de área de, por exemplo, um retângulo, quando se alteram as suas dimensões – comprimento e largura - mas não se altera o seu perímetro, etc. (PEREIRA, 2015, p.29-30).

Significado da raiz (quadrada):

- Ao calcular o lado de um quadrado com área dada, o aluno explica o que fez: “eu dividi a área por dois, pois tá elevado ao quadrado”.
- $\sqrt{200} = 20$
- $\sqrt{200} = \sqrt{2^2.2.5^2} = 10\sqrt{2} = 5\sqrt{1}$ (“simplificou” o 10 e o 2 dividindo ambos por 2)
- $\sqrt{8}\,.\sqrt{8} = \sqrt{16}$ (“duas raízes de 8 é igual a uma raiz de 16”)
- $\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{16} = 8$

Os erros acima mostram alguma semelhança entre si e talvez possam ser percebidos pelo aluno através do procedimento didático de lhe pedir que verifique se a igualdade permanece após elevar ambos os lados (da igualdade) ao quadrado (o que significa, de certa forma, fazer um apelo ao significado da raiz quadrada). Ou então, pedindo que calcule aproximadamente as raízes quadradas envolvidas e faça as contas com os valores aproximados, verificando se a igualdade ainda permanece válida. Por exemplo, no caso $\sqrt{16} = 8$, se elevarmos ao quadrado os dois lados da igualdade teremos 16=64. Percebido o erro, chegamos então ao momento de analisar os passos dados na resolução, verificando a validade de cada um, até que se identifique onde ocorreu o erro e qual foi o procedimento incorreto que levou a ele.

Categoria 3
Interpretação de enunciados e entendimento ou uso da linguagem simbólica

- O dobro do quadrado da quantidade de livros que Emanuel leu em 3 meses é igual a 52 menos 5 vezes essa mesma quantidade de livros. Quantos livros Emanuel leu nesses 3 meses?

Equacionamento do problema feito pelo aluno: $x^2 + 2x.3 = 52 - 5x$

O segundo membro da igualdade está correto. No primeiro membro, parece que o aluno força o aparecimento de um dado (3, que se refere ao número de meses), o qual não tem relevância para a resolução matemática do problema. Vários autores sugerem que se proponham problemas com dados numéricos irrelevantes para o seu tratamento matemático, de modo a desenvolver no aluno uma atitude crítica em relação aos dados apresentados. É preciso fazer uma separação entre os dados relevantes e os irrelevantes para a resolução do problema. Neste caso, por exemplo, se fosse dado que os livros foram lidos em 15 meses não afetaria em nada o equacionamento do problema (para uma discussão interessante sobre isso, ver Oliveira, 2018)

- A área de um tapete retangular cujo comprimento tem 3 m a mais que a largura é 10m². Qual o perímetro deste tapete?

Equacionamento do problema: $x + 3 = 10$.

Não conseguimos imaginar uma lógica para esse equacionamento. A ideia aqui parece ser o uso de uma entrevista em que se procure a identificação do que o aluno pensou como representado por x e a partir daí uma discussão a respeito da validade da igualdade entre x+3 e 10, usando os dados do problema.

- O quadrado de um número aumentado de 10 é igual a sete vezes esse número. Qual é o número?

Equacionamento feito: $x^2 + 7 = 10$.

Aqui há uma ambiguidade no enunciado, permitindo pelo menos duas possibilidades de interpretação: uma daria lugar ao equacionamento $(x+10)^2 = 7x$ e outra ao equacionamento dado por $x^2 +10 = 7x$. O equacionamento proposto pelo aluno seria uma terceira possibilidade, cuja lógica não conseguimos alcançar. Talvez o próprio aluno possa explicar, numa conversa, no caso em que isso seja possível.

- Em um retângulo com área de 80 cm², o comprimento tem 11 cm a mais que a largura. Calcule o comprimento e a largura do retângulo.

Equacionamento feito: $x^2 + 11 = 80$.

Não conseguimos entender a lógica do equacionamento proposto pelo aluno.

- a medida do comprimento supera em 5 metros a medida da largura.

Tradução do dado para a linguagem matemática: + 5x

- No equacionamento de um problema, um aluno designou o menor lado por (x + 11) e o maior por x. Será pura distração?

A literatura trata de muitos estudos sobre as dificuldades de interpretação de enunciados de problemas matemáticos. Para um estudo desse tipo, que inclui referências a vários outros estudos sobre essa mesma temática, ver Oliveira (2018).

- Ao fatorar um número em primos, o aluno descreve sua ação como “fazer o m.m.c do número”.

Uso incorreto da linguagem. Falha na concepção de m.m.c e de fatoração em primos, misturando nomes sem o domínio adequado dos conceitos. Observe-se que isso ocorre no nono ano do Ensino Fundamental.

- $3(6)^2 - 18(6) = 324 – 108$ (ou seja, entendeu 3.6^2 como $18^2 = 324$). Falha na leitura da linguagem simbólica. Já comentamos esse problema (e outros semelhantes) anteriormente.

Categoria 4
Distração

Aqui listamos sob esse rótulo alguns erros que nos pareceram originários de pura distração. Alertamos, no entanto, que é sempre aconselhável, num processo de tratamento pedagógico dos erros matemáticos na escola, confirmar se se trata realmente de distração. Uma maneira de fazer isso, como já comentamos, seria propor situações semelhantes e verificar se os erros permanecem e, neste caso, qual o padrão de erro que emerge.

- $2.2\sqrt{2} + 3.2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{\frac{128}{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{4}$
- 14x14 = 186
- 81 – 32 = 48
- $\frac{-9+7}{2} = -1,5$
- $\frac{10-0}{2} = \frac{-10}{2} = -5$
- $\sqrt[3]{486} = 3\sqrt{2.3.3} = 3\sqrt{18}$
- 81 – 32 = 57

Considerações finais

Dentre as diversas possibilidades de interpretação do erro, a que lhe atribui uma conotação negativa está certamente inserida na cultura e no cotidiano escolar. No entanto, associar o erro ao fracasso e ignorar as pistas que pode fornecer para o ensino e para a aprendizagem matemática escolar significa descartar oportunidades de repensar estratégias de ensino e de utilizar o erro de forma produtiva no processo de formação matemática escolar. Nesse sentido, atribuímos ao erro, uma função didática e investigamos as contribuições que um trabalho docente de tratamento pedagógico dos erros matemáticos pode trazer para o ensino e a aprendizagem matemática no nono ano do Ensino Fundamental. Conseguimos identificar também, ao lado das contribuições, algumas dificuldades importantes que um professor enfrenta ao desenvolver esse tipo de trabalho na sua prática docente escolar em matemática.

As contribuições desse tipo de trabalho para a aprendizagem dependem, muito frequentemente, do engajamento dos alunos num processo ativo de construção e desenvolvimento de atitudes positivas em relação ao erro e em relação à análise das informações que o erro pode fornecer a quem o comete. Em outras palavras, é preciso que o professor ajude o aluno a desenvolver uma atitude de *responsabilidade* e *reflexão*, de modo a não procurar desculpas ou justificativas para o fato de ter cometido o erro, mas buscar diretamente o reconhecimento e a identificação daquilo que o levou a errar, tendo em vista a sua correção. Entretanto, é preciso também levar em consideração que os alunos participantes deste trabalho aqui relatado cursavam o nono ano da escola e os valores internalizados nesse longo período de formação escolar não são totalmente compatíveis com atitudes positivas em relação ao erro, nem com o desenvolvimento de reflexões aprofundadas (que, às vezes se distanciam da obtenção de resultados imediatos) sobre o que conduz cada aluno a um determinado erro matemático. Isso impôs limites ao trabalho, embora tenha sido possível observar evidências claras de contribuições para a aprendizagem.

Por outro lado, é importante observar que, analogamente ao que acontece com o aluno, não é sempre fácil para o professor, ajudar o aluno que cometeu um erro a observar o erro cometido e desenvolver uma forma de raciocínio que conduza à superação desse erro. O que muitas vezes é (tácita ou explicitamente) esperado pelo aluno é que o professor lhe aponte o erro e lhe mostre imediatamente uma forma correta de resolução da questão, contando que, assim, não voltará a errar da mesma maneira. No entanto, todo o fundamento teórico do trabalho de tratamento pedagógico dos erros assenta-se exatamente na negação radical desse tipo de procedimento de ensino. A ideia não é desprezar a resolução incorreta do aluno e lhe oferecer, de “mão beijada”, uma resolução correta. Bem ao contrário, o objetivo é priorizar estratégias didáticas e pedagógicas que ajudem o aluno a perceber que errou (sem lhe apontar o erro), a identificar a forma de pensar que o levou a cometer esse erro e, finalmente, a desenvolver formas alternativas de raciocínio que levem à superação do erro (isto é, à construção ativa de estratégias para uma correta resolução da questão).

Nesse sentido, ao desenvolver este trabalho, embora tenha me preparado por mais de um ano para executá-lo, estudando as teorias e experiências relatadas na literatura especializada sobre o assunto, me deparei com dificuldades de toda ordem, que comentei na resposta à segunda questão de pesquisa. A conclusão principal a que cheguei ao final do processo é a de que esse tipo de trabalho oferece contribuições relevantes para a aprendizagem escolar do aluno, bem como para a formação profissional do professor, mas demanda muito esforço e persistência de ambos. Além disso, acredito que a perspectiva mais promissora nessa direção seja a de um trabalho permanente do professor da escola, buscando alcançar não apenas resultados imediatos, mas principalmente os de médio ou longo prazo. No entanto, tal perspectiva, em princípio, pode não se harmonizar inteiramente com o desenvolvimento de uma pesquisa de mestrado, como foi o caso desta aqui relatada, que teve que ser planejada e executada dentro de prazos restritos e pré-fixados. Por isso é fundamental que se relativizem os resultados obtidos, levando em conta as condições reais e concretas de seu desenvolvimento.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov/dec. 2008.

BEDNARZ, N.; PROULX, J. Knowing and using mathematics in teaching: conceptual and epistemological clarifications. **For the Learning of Mathematics,** v. 29, n. 3, nov. 2009.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994. p. 23-37.

CURY, Helena Noronha. O conhecimento pedagógico de conteúdo dos erros. In: CURY, H; VIANNA, C. R. (Org.) **Formação do professor de Matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz: Editora IPR, 2012. pp. 19-48.

CURY, Helena Noronha. **Analise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, Salvador – BA 7 a 9 de julho de 2010.

HART, Kathleen (ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray, 1981.

OLIVEIRA, Clarissa Alves de. **Interpretação dos enunciados de problemas matemáticos**: um estudo com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior de Minas Gerais. 2018. 231p. Dissertação

[Mestrado Profissional em Educação Matemática] – Universidade Federal de Ouro Preto, MG, Brasil, 2018.

PEREIRA, Marta Cristina Varela. **Perímetro e área de figuras planas no segundo ciclo do Ensino Básico.** 2015. 208 f. Dissertação [Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico] – Universidade do Algarve, Portugal, 2015.

PIAGET, J. **L´équilibrationdes estructures cognitives**: problème central du développement. Paris: PUF, 1975.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar. Papirus: Campinas, 2000.

SHULMAN, L. S. Those Who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n.2, p 4-14, 1986.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto,
em **agosto** de **2019**
sobre papel 100% reciclato (miolo) 90g/m^2 e (capa) 300 g/m^2