Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS DE VISUALIZAÇÃO DE GRÁFICOS UTILIZANDO O GEOGEBRA: APLICAÇÕES DE DERIVADAS NO ENSINO DE CÁLCULO I

Autor: Prof. Ms. José Cirqueira Martins Júnior

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Ouro Preto

2015

M386a Martins Júnior, José Cirqueira.
Atividades exploratórias de visualização de gráficos utilizando o Geogebra: aplicações de derivadas no ensino de cálculo I / José Cirqueira Martins Júnior. - 2015.
Iv, 29f.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

1. Visualização. 2. Cálculo - Estudo e ensino. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Tecnologias da Informação. I. Reis, Frederico da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 519.6:37.016

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Ao Professor de Cálculo Diferencial e Integral I

Caro (a) colega Professor (a) de Cálculo I,

Este material chega até você como uma sugestão de atividades exploratórias para o ensino de construção e interpretação de gráficos de funções reais de uma variável real como Aplicações de Derivadas em Cálculo I, utilizando o *software* GeoGebra.

Ele representa o resultado gerado a partir de nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada "Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra", sob a orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

As atividades exploratórias aqui apresentadas foram aplicadas e avaliadas por 4 (quatro) Professores de Cálculo Diferencial e Integral, todos eles Mestres em Matemática ou Educação Matemática, com ampla experiência docente em disciplinas de Cálculo em Universidades Federais e/ou particulares de Minas Gerais.

Nosso intuito é oferecer a você, Professor de Calculo I, um material que apresenta as Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática – TICEM como uma possibilidade metodológica que, se bem utilizada, pode proporcionar intuições, conjecturações e explorações que fazem das atividades realizadas em laboratório de informática uma importante formação complementar na construção e aplicação dos conteúdos de Aplicações de Derivadas que são trabalhados na sala de aula.

A seguir, apresentamos 4 (quatro) atividades exploratórias relacionadas a gráficos de funções reais e suas derivadas, extraídas e adaptadas de livros "clássicos" de Cálculo I, consagrados como referências bibliográficas em diversas universidades brasileiras (FLEMMING; GONÇALVES, 2006 e STEWART, 2014).

Esperamos que esse material possa contribuir para um repensar / renovar de sua prática pedagógica, bem como motivar reflexões / possibilidades a respeito da utilização das TICEM no Ensino Superior de Matemática.

Prof. Ms. José Cirqueira Martins Júnior

SUMÁRIO

1. A visualização e o seu papel na aprendizagem de Matemática

O uso das tecnologias tem proporcionado muitas oportunidades para observar e experimentar o que está acontecendo com certos fenômenos, como a possibilidade de visualização e a múltipla representação das informações.

Neste trabalho, iremos tratar da visualização que é proporcionada pelo uso do computador. O processo de visualização tem sido muito pesquisado na Educação Matemática, contendo elementos que são necessários aos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos em todos os níveis. As pesquisas sobre esse assunto começaram a ganhar destaque a partir de trabalhos, como o de Presmeg (2006), que fez um mapeamento sobre as características que foram desenvolvidas na visualização em sala de aula.

Ainda que seja importante nos processos de ensino e aprendizagem, a visualização ainda representa um assunto secundário em relação a muitos aspectos da Matemática, como por exemplo, os processos algébricos e geométricos; também a sua utilização tem se caracterizado como muitas oportunidades para o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática (TALL, 1991a, 1991b; VILLARREAL, 1999; COSTA, 2002, 2005; GUZMÁN, 2002; ARCAVI, 2003; PRESMEG, 2006).

Mesmo sendo um foco de pesquisas relativamente novo, na definição de visualização ainda podemos encontrar muitas divergências, devido ao significado de muitas palavras que são usadas para a sua variação, como imagem visual e pensamento visual, como aconteceu com Presmeg (2006) que preferiu chamar de “inscrição” ao invés de “representação” ou algo similar.

Observando algumas definições gerais sobre a visualização, notamos que, no dicionário virtual, ela é uma ação da visão que permite o reconhecimento de dados. Está, portanto, condicionada à cognição[1] humana. Outra definição similar aparece no dicionário Aurélio (FERREIRA, 2004, p. 2069): “Visualização é o ato ou efeito de visualizar; transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis; processo de visualizar”.

[1] Para completar a definição geral, cognição é o ato ou processo da aquisição do conhecimento que se dá através da percepção, da atenção, memória, raciocínio, juízo, imaginação, pensamento e linguagem. A palavra *Cognitione* tem origem nos escritos de Platão e Aristóteles. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Visualização>. Acesso em: 20de abril de 2014.

Não temos como desatrelar a visualização de algo relacionado à cognição, pelo fato de possuir aspectos direcionados aos estudos de Psicologia e em especial, aos processos de ensino e aprendizagem. Desse modo, Presmeg (2006, p. 206, tradução nossa) afirma que: “Assim, a visualização inclui processos de construção e transformação, tanto imagem visual mental e todas as inscrições de natureza espacial, que podem ser implicadas no fazer Matemática” [2]. Nota-se que, no fazer Matemática, a visualização está diretamente ligada a esses processos e o que pode acontecer no cérebro humano é o que se justifica para usá-la com o uso das imagens que podem ser formadas durante a aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina.

Também como complementação a essas ideias, apresentamos a definição dada por Arcavi (2003), para quem:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados [3]. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa)

Nessa definição, nota-se uma abrangência de aplicação da visualização e de como ela pode beneficiar o ensino e a aprendizagem. Também aparecem elementos que são característicos para um melhor desenvolvimento dos processos mentais e de como essas ideias podem se tornar poderosas para a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Quando tais imagens são formadas no cérebro, oriundas de uma percepção ou abstração, elas começam a tomar forma na mente humana. Presmeg (2006) esclarece sobre a imagem visual e ainda caracteriza a pessoa que pode utilizá-la, da seguinte forma: “[...] uma *imagem visual* é tida como uma construção mental que representa a informação visual ou espacial, e um *visualizador* é uma pessoa que prefere usar métodos visuais quando existe essa opção” [4] (PRESMEG, 2006, p. 207, tradução nossa, grifo da autora).

---

[2] Thus visualization is taken to include processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics.

[3] Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

[4] […] a *visual image* is taken to be a mental construct depicting visual or spatial information, and a *visualizer* is a person who prefers to use visual methods when there is a choice.

Como o pensamento pode ocasionar a formação de imagens, ao realizar a formação destas, pode-se alcançar um pensamento visual. Desse modo, Costa (2002) trouxe algumas reflexões sobre o pensamento visual, discorrendo sobre sua importância e sobre como ele pode ser incorporado ao estudo dos Pensamentos Matemáticos Elementar e Avançado. Nos aspectos que caracterizaram a visualização, é destacado que não se trata somente de olhar para uma figura e perceber relações sobre ela, existe algo a mais que tem que ser trabalhado.

A visualização está relacionada com o ato de ver e está diretamente ligada ao pensamento e a função cerebral. Mesmo que muitos professores não valorizem a visualização como uma oportunidade de aprendizagem para os alunos, é inegável que ela contribui para isso. Porém, essas oportunidades variam de acordo com as propostas que podem ser feitas para os alunos e quais pensamentos eles podem mobilizar.

No uso da cognição, trabalhando com processos mentais, os professores e alunos desenvolvem o pensamento matemático e, dentro desse componente, temos o pensamento visual-espacial, definido por Costa (2002, p. 263) como “o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objectos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas”.

Dessa forma, ao usar o pensamento visual, pode-se fazer operações intelectuais sobre o material perceptivo-sensorial e de memória, relacionando-as com a manipulação e transformação de ideias, bem como na tradução e comunicação dos métodos e conceitos que foram utilizados na exploração desse pensamento.

Outra pesquisa a se destacar em relação à visualização foi a de Guzmán (2002), que estudou sobre a sua influência no ensino da disciplina Análise Matemática, percebendo que as múltiplas representações que poderiam ser feitas pela intuição direcionavam para uma melhor compreensão dos conceitos e definições que são considerados como conhecimentos avançados para a aprendizagem dessa disciplina. Desse modo, Guzmán (2002) esclareceu que:

> Os especialistas em um campo particular possuem uma variedade de imagens visuais, de formas intuitivas para perceber e manipular os conceitos e métodos mais usuais no assunto em que trabalham. Por meio destas, os especialistas são capazes de relacionar, de forma flexível as constelações de fatos e resultados da teoria que, frequentemente, são complexas para serem tratadas de uma forma mais analítica e lógica. De

> uma forma direta, semelhante à forma em que reconhecemos um rosto familiar, eles são capazes de selecionar, através do que para os outros parece ser uma confusão intrincada de fatos, as formas mais adequadas de atacar os problemas mais difíceis do sujeito [5]. (GUZMÁN, 2002, p. 2, tradução nossa)

A visualização aparece como um elemento natural, estando disposta nas imagens visuais que todos podem ter acesso e fazer a sua construção; aqui, ela representa um objeto de estudo da Matemática, mas pode ser trabalhada em qualquer disciplina nos diferentes níveis de ensino, pois funciona como uma ferramenta que permite encontrar solução para os problemas mais difíceis com os quais uma pessoa pode se deparar ao tentar resolvê-los.

Quando Guzmán (2002) realizou alguns experimentos na disciplina Análise Matemática, conseguiu encontrar alguns tipos de visualização: Isomórfica, Homeomórfica Analógica e Diagramática, ainda relatou algumas dificuldades que podem surgir para que a visualização seja usada corretamente, em propostas na sala de aula. Isto pode acontecer com ou sem o uso da tecnologia computacional. O primeiro tipo de visualização foi a isomórfica, nesta os objetos podem ter uma correspondência “exata” com as representações que fazemos deles. Assim, se for possível estabelecer um conjunto de regras que traduzam os elementos de nossa representação visual e as relações com os objetos matemáticos, as manipulações visuais podem ser transformadas em relações matemáticas abstratas.

Em seguida, o pesquisador trata da visualização homeomórfica, na qual:

> [...] alguns dos elementos têm certas relações mútuas que imitam suficientemente bem as relações entre os objetos abstratos e assim eles podem nos fornecer apoio, às vezes, muito importante, para guiar a nossa imaginação nos processos matemáticos de conjecturar, investigar, provar, [...] [6] (GUZMÁN, 2002, p. 5, tradução nossa)

Para ilustrar essa possibilidade de visualização, o autor utilizou os conhecimentos sobre os conjuntos numéricos para classificá-los a partir das setas de uma função injetora,

---

[5] The experts in a particular field own a variety of visual images, of intuitive ways to perceive and manipulate the most usual concepts and methods in the subject on which they work. By means of them they are capable of relating, in a versatile manner the constellations of facts and results of the theory that are frequently too complex to be handled in a more analytic and logic manner. In a direct way, similar to the one in which we recognize a familiar face, they are able to select, through what to others seems to be an intricate mess of facts, the most appropriate ways of attacking the most difficult problems of the subject.

[6] […] some of the elements have certain mutual relations that imitate sufficiently well the relationships between the abstract objects and so they can provide us with support, sometimes very important, to guide our imagination in the mathematical processes of conjecturing, searching, proving, […].

em que o esquema das setas deixou claro para os alunos as definições formais que tinham sido usadas no experimento.

Na sequência, Guzmán (2002) definiu a visualização analógica, tal visualização permite substituir mentalmente os objetos trabalhados por outros que se interrelacionam de modo análogo e cujo comportamento é mais conhecido ou mais fácil de manusear, devido a algumas de suas características já terem sido exploradas.

Finalizando, o pesquisador apresenta a visualização diagramática:

> Nesse tipo de visualização, nossos objetos mentais e suas relações mútuas em matéria de aspectos que são de interesse para nós, são apenas representados por diagramas que constituem um instrumento útil para a nossos processos de pensamento. Pode-se dizer que, em muitos casos, tais diagramas são semelhantes às regras mnemotécnicas [7]. (GUZMÁN, 2002, p. 7, tradução nossa)

Como se refere às regras mnemotécnicas, que representam a memorização por meio dos símbolos ou diagramas, para algumas pessoas esses elementos podem não facilitar a aprendizagem pelo fato de que memorizar representa uma tarefa difícil e, por vezes, estas pessoas não ficam atentas sobre o que realmente interessa, que é a justificação formal para os argumentos visualizados e não a sua memorização.

Já sobre a importância da visualização no estudo de Matemática, na disciplina Cálculo I, observamos o que afirma Tall (1991a):

> No entanto, negar a visualização é negar as raízes de muitas das nossas mais profundas ideias matemáticas. Nos estágios iniciais do desenvolvimento da teoria das funções, limites, continuidade, etc, a visualização provou ser uma fonte fundamental de ideias. Negar essas ideias aos alunos é como cortá-las das raízes históricas da disciplina [8]. (TALL, 1991a, p. 105, tradução nossa)

A visualização está interligada com a Matemática e a literatura a tem apontado como uma possibilidade para vencer dificuldades que os alunos possuem na compreensão de muitos conceitos trabalhados pelos professores. Conforme diagnosticado nas pesquisas

---

[7] In this kind of visualization our mental objects and their mutual relationships concerning the aspects which are of interest for us are merely represented by diagrams that constitute a useful help in our thinking processes. One could say that in many cases such diagrams are similar to mnemotechnic rules.

[8] Yet to deny visualization is to deny the roots of many of our most profound mathematical ideas. In the early stages of development of the theory of functions, limits, continuity &c, visualization proved to be a fundamental source of ideas. To deny these ideas to students is to cut them off from the historical roots of the subject.

dos seguintes autores em Educação Matemática, a visualização é apresentada como uma ferramenta facilitadora; entretanto, pode se tornar uma vilã ao trabalho dos professores e na aprendizagem dos alunos se for usada incorretamente (TALL, 1991a; VILLARREAL, 1999; GUZMÁN, 2002; ARCAVI, 2003; PRESMEG, 2006).

Não existe um tipo específico de tecnologia para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos da disciplina de Cálculo. As possibilidades podem variar de acordo com o que o professor dispõe, ou pelos tipos de conhecimentos que ele pretende trabalhar para que os alunos consolidem sua aprendizagem, sendo indispensável o seu papel na elaboração das atividades que os alunos irão realizar. Desse modo, o pensamento visual ocupa um lugar de destaque nas representações gráficas, nos processos algébricos, geométricos e numéricos, utilizando alguns tipos de representações do conhecimento para caracterizar o processo de aprendizagem (DUVAL, 2011).

Em relação ao trabalho do professor, o papel da visualização ocupa uma valorização significativa, como destacado por Frota (2013):

> Analisados do ponto de vista da formação de professores, os resultados indicam mudanças na prática docente dos pesquisadores que desenvolveram cada uma das investigações. Ao desenharem e conduzirem na própria sala de aula atividades com um foco na utilização dos processos de visualização, de forma que se envolvessem com os seus alunos na exploração de ideias do Cálculo, esses professores e pesquisadores incorporaram tecnologias como ferramentas cognitivas para pensar Matemática. (FROTA, 2013, p. 83-84)

Assim, a visualização tem grande utilidade na formação e no trabalho dos professores de Cálculo. Percebemos uma relação muito próxima da atividade docente com o trabalho de pesquisa, neste, os envolvidos constroem situações de ensino e de aprendizagem das mais variadas formas, usando para alcançar seus objetivos, os pensamentos visuais.

Os professores de Cálculo I que pretendem trabalhar com a possibilidade de utilização de tecnologias coadunadas com a visualização, precisam saber que devem refletir sobre o novo papel do professor de Matemática, sendo este um profissional que:

> Reflete sobre a sua própria prática e desenvolve esforços para alterar o foco das tarefas que propõe; cria ambientes de aprendizagem que possibilitam a troca de experiências e a sua construção ou a reconstrução de ideias matemáticas, utilizando tecnologias que podem ser consumidas e incorporadas, aos poucos, como ferramentas cognitivas; está consciente

> de que a utilização de determinada tecnologia em sala de aula depende de seu esforço pessoal para conhecer as potencialidades e as limitações do recurso tecnológico adotado, ou seja, depende de seu esforço pessoal em consumir e incorporar tecnologias, para empregá-las de maneira que mudem as formas de pensar e fazer Matemática com seus alunos. (FROTA, 2013, p. 84)

Refletir sobre tais possibilidades não é uma tarefa fácil, pois temos que repensar e modificar muitas de nossas práticas que acontecem principalmente na sala de aula, e também em como administrar esse novo ator nas aulas de Matemática em tempos modernos (BORBA, 2000; PENTEADO, 2000; BORBA; PENTEADO, 2001).

No caso da presente pesquisa, é necessário pensarmos em atividades investigativas que serão construídas sobre as derivadas e que, na medida do possível, possibilitem oportunidades para nas quais o aspecto da visualização possa ser contemplado de maneira significativa nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos. O *software* será usado no sentido de permear a possibilidade de uma melhor compreensão de como a dinâmica realizada com a visualização é capaz de proporcionar aprendizagem, a partir de gráficos de funções reais de uma variável real e suas derivadas.

A utilização dos computadores para possibilitar a oportunidade de construção de conhecimento remete-nos à visualização computacional, pois a partir dos recursos tecnológicos, temos condições de aprimorar e aprofundar os conceitos e fazer relações que tornam possíveis os conhecimentos sobre as funções que são trabalhadas na disciplina Cálculo I. Essa ideia foi também relatada por Machado (2008, p. 111), mostrando que "A visualização computacional é uma ferramenta matemática e científica para favorecer a compreensão, análise e predizer um pensamento visual".

Mesmo pensando em uma função qualquer, relativamente simples, como uma função polinomial do primeiro ou do segundo grau e supondo que ela seja de uma determinada forma, ao digitar sua expressão algébrica em um *software*, por exemplo, o GeoGebra, aquela função torna-se uma imagem que passa a ser concreta no desenvolvimento do pensamento visual. Dessa forma, torna-se possível que os olhos captem algo que é processado na parte cognitiva e, em seguida ocorrem as articulações, pensamentos, ideias, relações, formalizações, conjecturas, demonstrações e definições.

Nosso objetivo ao usar o *software* GeoGebra para a visualização é tentar oportunizar um melhor entendimento na construção do conhecimento de funções das propriedades que envolvem suas derivadas. Assim, a partir da dinâmica que o *software* pode proporcionar, iremos construir atividades que orientem a prática de professores para uma oportunidade de aprendizagem para seus alunos.

Desse modo, recorrendo aos estudos investigativos com o uso de tecnologias que foram sugeridos por Gravina e Santarosa (1998), para quem os objetos matemáticos podem proporcionar a construção de conhecimento através de suas múltiplas representações, acreditamos que o *software* GeoGebra, que será utilizado nessa pesquisa, possibilita as manipulações algébrica e geométrica e, com isso, proporciona a visualização durante as investigações.

Como as derivadas trabalham com funções e representações gráficas, as pesquisadoras ainda destacam que:

> [...] a uma função, pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou uma representação matricial numérica que evidencia variações quantitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 11)

Portanto, neste trabalho, a visualização será usada como uma ferramenta para evidenciar as variações qualitativas das funções em operações com os gráficos das derivadas, para auxiliar na compreensão de conhecimentos sobre esses conteúdos. A visualização, assim, será aqui concebida como o ato de fazer percepções de informações visuais mediadas por objetos matemáticos que, a partir de conexões feitas sobre eles, possam permitir uma reflexão coerente sobre os assuntos abordados e quais caminhos foram mais favoráveis para a construção das definições.

Assim, finalizamos afirmando que a visualização representa um componente indispensável para o trabalho com os gráficos das funções e suas derivadas, pois representa um método que pode ser usado para perceber informações de desenvolvimento de um Pensamento Matemático Avançado por meio de funções manipuláveis e por tecnologias que proporcionem a sua construção.

2. Apresentando as atividades exploratórias com o uso do GeoGebra

2.1. Atividade Exploratória 1A

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o **domínio** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a **imagem** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as **raízes** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os **pontos críticos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de **extremos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de **crescimento e decrescimento** da função:

Sugestão:

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a **concavidade** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de **pontos de inflexão** da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os **limites no infinito** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de **assíntotas**:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

2.2. Atividade Exploratória 1B

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o **domínio** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a **imagem** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as **raízes** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os **pontos críticos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de **extremos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de **crescimento e decrescimento** da função:

Sugestão:

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a **concavidade** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de **pontos de inflexão** da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os **limites no infinito** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de **assíntotas**:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

2.3. Atividade Exploratória 2A

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$f(x) = \frac{4 + x^2}{4 - x^2}$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o **domínio** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a **imagem** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as **raízes** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os **pontos críticos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de **extremos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de **crescimento e decrescimento** da função:

Sugestão:

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a **concavidade** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de **pontos de inflexão** da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os **limites no infinito** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de **assíntotas**:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

2.4. Atividade Exploratória 2B

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o **domínio** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a **imagem** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as **raízes** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os **pontos críticos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de **extremos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de **crescimento e decrescimento** da função:

Sugestão:

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a **concavidade** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de **pontos de inflexão** da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os **limites no infinito** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de **assíntotas**:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

3. Algumas recomendações para os Professores de Cálculo I

A partir de nossa experiência docente no Ensino Superior e de nossa experiência de pesquisa realizada, ousamos fazer algumas recomendações para os professores que quiserem utilizar nossas atividades exploratórias com utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM em sua prática pedagógica de Cálculo I.

Investigamos o ensino de Cálculo e nos deparamos, nos vários contextos, com o fato de que o uso de tecnologias no ensino tem se tornado, cada vez mais, uma tendência no Ensino Superior, devido à possibilidade de adaptação e incorporação no ensino, de aspectos mais significativos e aplicados com o uso de *softwares* matemáticos.

Detectamos que os trabalhos analisados destacaram aspectos relevantes por proporcionar aulas diferenciadas e conseguir melhorar a qualidade de aprendizagem dos alunos em ambientes informatizados. Não estamos com isso, querendo dizer que se não utilizarmos *softwares* nas aulas de Cálculo I, não ocorrerá um ensino voltado para a aprendizagem, mas devemos sim, diversificar o ensino nesses ambientes, para incorporar aulas com atividades mediadas por *softwares* como tentativa de construir algo mais dinâmico durante a nossa *práxis*.

Durante essa pesquisa, compreendemos que é necessário aos professores de Matemática do Ensino Superior, em especial aos de Cálculo I, refletir a respeito da qualidade de seu ensino e da possibilidade de se criar oportunidades para que os seus alunos tenham experiências reais e dinâmicas com os conteúdos que envolvem os gráficos de derivadas de uma função de variável real. Afirmamos que é indispensável tecermos reflexões rotineiras a respeito do que estamos fazendo durante as aulas com os gráficos das derivadas e, com isso, desenvolvermos uma postura de mudança em nosso ensino que precisa ser continuamente redefinido pelos seus mediadores nas situações onde ele acontece, precisa ser adequado aos mais diversos locais, aos mais diferentes indivíduos, com o objetivo de proporcionar uma real aprendizagem para os nossos alunos.

O ensino em Cálculo I exige do professor mediador a teoria, a prática, a pesquisa, a leitura reflexiva da realidade, a confrontação de ideias, as explorações, as descobertas, as possibilidades de aprendizagem, a preparação para as avaliações, os acertos e os erros e, principalmente, a humildade para admitir e aceitar que somos humanos, em constante processo de aprendizagem e que, em todos os momentos, temos a oportunidade para tentar reconstruir o que é significativo, para o melhor desempenho daquilo que fazemos durante o ensino, pesquisa e extensão. A partir dessas ideias, entendemos que "aprender para nós é *construir*, reconstruir, *constatar para mudar*, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito" (FREIRE, 2006, p. 69, grifo do autor).

Para a elaboração das atividades exploratórias usamos livros considerados "clássicos", consagrados como referências bibliográficas em diversas Universidades brasileiras (FLEMMING; GONÇALVES, 2006 e STEWART, 2014). Existem vários livros utilizados em cursos superiores no Brasil que sugerem atividades com o uso de tecnologias e, a partir disso, optamos por selecionar esses dois para extrair e adaptar as nossas atividades. Salientamos que os livros didáticos provavelmente ainda serão adotados por mais alguns anos nas Universidades brasileiras e não estamos afirmando que eles devem ser rejeitados ou trocados por tecnologias computacionais; nosso intuito é mostrar que, mesmo com a utilização de livros tradicionais, é possível uma ampliação na forma com que eles são trabalhados na sala de aula, articulando uma aprendizagem mais dinâmica com o uso de tecnologias que proporcionem isso.

Pelos relatos dos professores que participaram de nossa pesquisa testando e avaliando nossas atividades exploratórias, entendemos que estas podem ajudar na melhoria da qualidade de ensino nas aulas de gráficos de funções reais em aspectos como a visualização de definições e demonstrações, além da verificação de propriedades e exemplos. Um de seus principais objetivos foi despertar o interesse de professores de Cálculo para o fato de que o livro didático pode oferecer recursos que possibilitam conexões entre o algébrico e o visual a serem trabalhadas com seus alunos durante as aulas de Cálculo I, seja em sala ou em laboratório de informática.

Aos professores de Cálculo I, apontamos que é necessária a incorporação de *softwares* matemáticos que auxiliem no trabalho pedagógico e na melhoria de um ensino que garanta oportunidades para despertar nos alunos, momentos de criatividade, exploração e dinâmica. As atividades exploratórias que sugerimos nesse Produto Educacional mostraram ser um diferencial que, se incorporado à prática docente, pode acrescentar resultados significativos na compreensão de conjecturas e definições dos principais conceitos utilizados no estudo de gráficos de funções reais de uma variável real e suas derivadas.

Referências / Bibliografia Recomendada

ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2005.

ALMEIDA, M. C.; VISEU, F. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, ano 15, n. 1, 2002, p. 193-219. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1822/493>. Acesso em: 05 de dezembro de 2013.

ALVES, A. J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas em Educação. *Cadernos de pesquisa,* São Paulo, v. 77, p. 53-61, maio, 1991.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Naturais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. (Orgs.). *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998, p. 107-188.

AMORIM, F. V.; SOUSA, G. C; SALAZAR, J. V. Experiência de atividade sobre derivada utilizando o *software* GeoGebra. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, *Anais*... Recife: EDUMATEC, p. 1-12, 2011.

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*, n. 52, p. 215-241, 2003. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.126.6579&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 23 de maio de 2014.

BARBOSA, M. A. *O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná: Curitiba, 2004.

BARBOSA, S. M. *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2009.

BARUFI, M. C. B. *A construção / negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo: São Paulo, 1999.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 111-124.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. GPIMEM E UNESP: Pesquisa, Extensão e Ensino em Informática e Educação Matemática. PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão*. São Paulo: Olho d'Água, 2000, p. 47-66.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 23-29.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática.* 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORRÕES, M. L. C. *O Computador na Educação Matemática.* 1998. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/borroes>. Acesso em: 05 de janeiro de 2014.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. *Bolema,* Rio Claro, ano 14, n. 16, p. 48-62, outubro, 2001.

COSTA, M. C. M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores.* João Pedro da Ponte (Org.). Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 257-274, 2002.

COSTA, M. C. M. *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Nova de Lisboa: Lisboa, 2005.

COUY, L. *Pensamento visual no estudo da variação de funções.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais: Belo Horizonte, 2008.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática da teoria à prática*. 4. ed. São Paulo: Papírus, 1998.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Org.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991, p. 25-41.

DUARTE, R. Pesquisa Qualitativa: reflexões sobre o trabalho de campo. *Cadernos de pesquisa*, Rio de Janeiro, n. 115, p. 139-154, março, 2002.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. 8. ed. Campinas: Papírus, 2011, p. 11-33.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação Matemática: representação e construção em Geometria.* Porto Alegre: Artmed, 1999.

FERREIRA, A. B. *Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.* 3. ed. 2. impres. Curitiba: Positivo, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 34. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2006.

FROTA, M. C. R. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.* Campinas: Papírus, 2013, p. 61-88.

GARZELLA, F. A. C. *A disciplina de Cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2013.

GOLDENBERG, M. *A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. In: Rede Ibero-Americana de Informática na Educação, IV, Brasília, *Anais...* Brasília: RIBIE, p. 1-24, 1998.

GUIMARÃES, A. M.; DIAS, R. Ambientes de Aprendizagem: reengenharia da sala de aula. In: COSCARELLI, C. V. (Org.). *Novas tecnologias, novos textos, novas formas de pensar*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 23-42.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis. In: *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*, Hersonissos: University of Crete, p. 1-24, 2002. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf>. Acesso em: 21 de abril de 2014.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.* Recife: SBEM, 2009, p. 11-26.

KENSKI, V. M. *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação.* 4. ed. Campinas: Papírus, 2008.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática.* São Paulo: Editora 34, 1993.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, R. M. *A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2008.

MARIN, D. *Professores de Matemática que usam a Tecnologia de Informação e Comunicação no Ensino Superior*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2009.

MARTINS JÚNIOR, J. C. Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, XVII, Vitória, *Anais*... Vitória: SBEM, p. 1-12, 2013.

MARTINS JÚNIOR, J. C. *Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015.

MEYER, C. *DERIVADA / RETA TANGENTE: imagem conceitual e definição conceitual.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2003.

MIQUELINO, L. H.; RESENDE, M. R. As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de Cálculo. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, Curitiba, *Anais*... Curitiba: SBEM, p. 1-16, 2013.

NÓVOA, A. O passado e o presente dos professores. In: NÓVOA, A. (Org.). *Profissão Professor*. 2. ed. Porto Alegre: Porto Editora, 1999, p. 13-34.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de Matemática. PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão*. São Paulo: Olho d'Água, 2000, p. 23-34.

PIMENTEL, R. A.; PAULA, M. J. A dinâmica dos processos de aprendizagem em uma atividade de investigação. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, Belo Horizonte, 2007, *Anais*... Belo Horizonte: SBEM, p. 1-16, 2007.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: BOERO, P.; GUTIÉRREZ, A. (Orgs.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Roterdã: Sense Publishers, p. 205-235, 2006. Disponível em: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

RICHIT, A.; BENITES, V. C.; ESCHER, M. A.; MISKULIN, R. G. S. Contribuições do *software* GeoGebra no estudo de Cálculo Diferencial e Integral: uma experiência com alunos do curso de Geologia. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 90-99, 2012.

REIS, F. S. *A tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2001.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, 2009, p. 81-97.

REIS, F. S.; RICALDONI, M. A; MARTINS JÚNIOR, J. C. Tendências da pesquisa sobre o ensino de Cálculo utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: um olhar sobre a Educação Matemática no Ensino Superior brasileiro. In: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, XXVII, Buenos Aires, *Anais*... Buenos Aires: CLAME, p. 1-2, 2013.

ROCHA, M. D. *Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.* Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto**:** Ouro Preto, 2010.

SAD, L. A. Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1998.

SCHÖN, D. A. *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.* 1. reimp. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SHULMAN, L. S. Those who understand: the knowledge growths in teaching. *Educational Researcher,* Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, February, 1986. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1175860>. Acesso em: 03 de março de 2014.

SOUZA JÚNIOR, A. J. *Trabalho Coletivo na Universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2000.

STEWART, J. *Cálculo.* Vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TALL, D. Intuition e rigor: the role of visualization in the Calculus. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs.). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, p. 105-119, 1991a. Disponível em: <http:www.davidtall.com>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

TALL, D. *Recent developments in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts*. Washington: The Laboratory Approach to Teaching Calculus, n. 20, 1991b, p. 15-25. Disponível em: <http:www.davidtall.com>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: *19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Recife / Brasil, vol. 1, p. 161-175, 1995. Disponível em: <http:www.davidtall.com>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional.* 15. ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

VALENTE, J. A. Mudanças na sociedade, mudanças na educação: o fazer e o compreender. In: VALENTE, J. A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento.* 1. reimp. Campinas: Unicamp, 2002, p. 29-48.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1999.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.