José Cirqueira Martins Júnior

ENSINO DE DERIVADAS EM CÁLCULO I: APRENDIZAGEM A PARTIR DA VISUALIZAÇÃO COM O USO DO GEOGEBRA

OURO PRETO

2015

José Cirqueira Martins Júnior

ENSINO DE DERIVADAS EM CÁLCULO I: APRENDIZAGEM A PARTIR DA VISUALIZAÇÃO COM O USO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

OURO PRETO

2015

M386e Martins Júnior, José Cirqueira.

Ensino de derivadas em cálculo I [manuscrito]: aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra / José Cirqueira Martins Júnior. - 2015.

123f.: il.: color; grafs; tabs. (xii, 123)

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Visualização. 2. Cálculo - Estudo e ensino. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Tecnologias da Informação. I. Reis, Frederico da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 519.6:37.016

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ENSINO DE DERIVADAS EM CÁLCULO I: APRENDIZAGEM A PARTIR DA VISUALIZAÇÃO COM O USO DO GEOGEBRA

Autor: José Cirqueira Martins Júnior

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por José Cirqueira Martins Júnior e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 25/03/2015

Frederico da Silva Reis
....
Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Frederico da Silva Reis
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis (UFOP)

Prof. Dr. Marco Antônio Escher (UFJF)

Prof. Dr. Daniel Clark Orey (UFOP)

2015

Dedico esse trabalho a Deus, a minha mãe e a minha esposa pelo amor, apoio e incentivo incondicionais.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Senhor, Criador e Salvador de todas as coisas que me orientou e capacitou em todos os momentos dessa pesquisa.

Aos meus pais, Maria Iracy Carvalho da Silva e José Cirqueira Martins, pelo amor incondicional. Amo vocês!

À minha esposa, Eli de Almeida Cirqueira, pelo seu amor e pelo seu apoio mesmo nas horas em que te trocava pela produção dos textos ou pelos estudos nas disciplinas do curso. Desculpe-me por tudo. Eu te amo!

À UNEB, pela licença e bolsa para os estudos que possibilitou uma maior dedicação ao Mestrado.

Ao Professor Dr. Frederico da Silva Reis, pela orientação, dedicação e por acreditar que seria possível a concretização deste projeto. Obrigado pela sua confiança!

Ao Prof. Dr. Daniel Clark Orey e ao Prof. Dr. Marco Antonio Escher, por participarem da Banca Examinadora e por suas valiosas contribuições que me fizeram aprimorar e ampliar o foco e os horizontes deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da UFOP, por mostrar que a Educação Matemática e a Matemática precisam caminhar juntas para que aconteça uma excelente formação de alunos, professores e pesquisadores.

A todos os colegas do Mestrado – 2013, em Educação Matemática, da UFOP pela amizade e companheirismo. Que Jesus continue abençoando cada um de vocês!

Aos professores atores dessa pesquisa, obrigado pelas suas colaborações!

RESUMO

O presente trabalho objetiva discutir as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de diversos conteúdos relacionados a derivadas de funções reais de uma variável real no ensino de Cálculo I, a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra. O trabalho fundamentou-se teoricamente em estudos sobre a Educação Matemática no Ensino Superior, com foco no Ensino de Derivadas em Cálculo e na Visualização proporcionada pelas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM. A pesquisa de campo foi realizada com Professores de Matemática do Ensino Superior, a partir do desenvolvimento de atividades exploratórias de construção e interpretação de gráficos. Para a análise dos dados, foram utilizados os registros e o áudio do desenvolvimento das atividades pelos professores, além de um questionário de avaliação das atividades, aplicado aos professores. Os resultados obtidos apontam que a visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra contribuiu para uma ressignificação de diversos conceitos e propriedades de derivadas que são requisitados na construção de gráficos de funções reais, além de destacar como fundamental, nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, um equilíbrio entre os processos visuais e os processos algébricos.

PALAVRAS-CHAVE: Visualização. Ensino de Cálculo e Derivadas. Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática. GeoGebra.

ABSTRACT

The present work aims to discuss the contributions of exploratory activities used for learning related content of real functions of a real variables in teaching Calculus I from visualizations provided by *software* GeoGebra. The work was based on theoretical studies in Mathematics Education in Higher Education, with a focus on teaching calculus and in previews provided by Information Technologies and Communication in Mathematics Education – TICEM. Field research was conducted with mathematics teachers in higher education, from the development of exploratory activities of the construction and interpretation of graphs. Data analysis used records and audio from the development of the activities by teachers, as well as questionnaires for evaluation of activities. The results obtained indicate that the visualizations provided by *software* GeoGebra contributed to various concepts and ressignification of derived properties required in the construction of graphs of real functions, in addition to fundamental highlights in the processes of teaching and learning of Calculus I, a balance was achieved between visual and algebraic processes.

KEYWORDS: Visualization. Teaching of Calculus and Derived. Technologies of Information and Communication in Mathematics Education. GeoGebra.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

Capítulo 1

O INÍCIO DA CAMINHADA

> Nesse sentido, a prática pode ser vista como um processo de aprendizagem através do qual os professores retraduzem sua formação e a adaptam à profissão, eliminando o que lhes parece inutilmente abstrato ou sem relação com a realidade vivida e conservando o que pode servir-lhes de uma maneira ou de outra. A experiência provoca, assim, um efeito de retomada crítica (*retroalimentação*) dos saberes adquiridos antes ou fora da prática profissional. Ela filtra e seleciona os outros saberes, permitindo assim aos professores reverem seus saberes, julgá-los e avaliá-los e, portanto, objetivar um saber formado de todos os saberes retraduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana. (TARDIF, 2013, p. 53, grifo do autor)

1.1. De pedra a vidraça

Ao deparar-me, em certos momentos, com muitas pessoas falando que a Matemática é muito difícil e que nunca poderá ser aprendida, especialmente ao se tratar de Cálculo Diferencial e Integral I, que nesse trabalho chamaremos apenas de Cálculo I para facilitar a dinâmica das leituras e possíveis interpretações, iniciaram muitas das inquietações e questionamentos que me impulsionaram a fazer esta pesquisa.

Lembro-me de minhas aulas de Cálculo I quando fazia o curso de Licenciatura em Matemática, de 1999 a 2002, na Universidade Estadual do Piauí – UESPI. O professor começou com algumas demonstrações sobre os limites, apresentou muitos exemplos sobre as funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras, pensando ser, na medida do possível, o suficiente para a minha aprendizagem e de meus colegas. Muitas questões que eram resolvidas, e na maioria delas, eu não conseguia entender o motivo de tudo aquilo que estava sendo feito, e os argumentos em muitos casos consistiam no fato de que a ementa precisava ser cumprida a qualquer custo pelo professor. Na semana em que aconteciam as avaliações finais, passávamos por um sufoco tremendo, pois existiam poucos livros de Cálculo na biblioteca e tínhamos que aguardar uma enorme fila de espera para consegui-los. Montávamos grupos de estudos, mas tudo isso nunca parecia ser o suficiente para que os conteúdos da disciplina pudessem ser aprendidos por nós, os simples alunos. Nas dúvidas, o professor respondia algumas das questões, as mais difíceis em nossa concepção, mas nada disso evitou o problema da reprovação em massa.

Pensava, então: a ementa poderia ser mudada? Mas como a postura do professor poderia contribuir para que os alunos aprendessem os conteúdos de Cálculo I?

Mais tarde, quando comecei minhas atividades docentes no Ensino Superior, a primeira disciplina que tive a oportunidade de trabalhar foi Cálculo I, com carga horária de 90 horas, ou seja, 6 aulas / semana para uma turma do curso de Licenciatura em Matemática. Estava me sentindo cheio de vida tendo a oportunidade de trabalhar uma disciplina no curso de Matemática e não me preocupava com qualquer tipo de situação ou adversidade, apenas com a "transmissão" dos conhecimentos matemáticos que a disciplina de Cálculo I me exigia durante as aulas.

Sentia-me o máximo fazendo as demonstrações com épsilons (ε) e deltas (δ), bem como as aproximações tanto pela esquerda como pela direita, provando todas as regras dos limites e chegando, por fim, às generalizações, quando percebia o quadro todo lotado de conteúdos e aquela magnitude de conhecimentos expostos, dignos de serem plausíveis e admiráveis, conforme a descrição que muitos alunos faziam; mesmo não aprendendo nada daquelas demonstrações feitas na aula.

Eu ficava "cheio de vida" com aquelas demonstrações realizadas; percebia nos olhares atentos e cautelosos de meus alunos, não entendendo muita coisa do que sempre copiavam do quadro para o caderno ou para as folhas de rabiscos, mas eles ficavam espantados com a grandeza dos conhecimentos matemáticos exibidos e lá no fundo da sala, bem baixinho, ouvia alguns alunos murmurarem que, algum dia, eles também conseguiriam fazer essas demonstrações "cabulosas".

Com um olhar matemático, tudo isso era digno de toda aceitação e perfeição. Mas o tempo foi passando e comecei a perder a graça quando tive a oportunidade de pensar na aprendizagem dos alunos.

Refletindo sobre a disciplina de Cálculo I, hoje percebo que a maioria das metodologias adotadas contemplam: aulas expositivas e pouco dialogadas com os alunos, demonstrações das principais regras das derivadas, construção de alguns gráficos que mostram a aproximação do limite para se chegar às derivadas, solução de exemplos básicos que ajudam na aplicação das regras e muitas, muitas listas de exercícios.

Pensando nesses padrões de aula, depois de certo tempo atuando no Ensino Superior, comecei a questionar-me sobre o meu papel de formador de professores de Matemática, surgindo as seguintes perguntas: Como está saindo esse profissional licenciado em Matemática que eu estou ajudando a formar na universidade? Depois que esses profissionais saírem da universidade, como vai ser o seu trabalho com os alunos? Que recursos didáticos estou usando para diminuir as dificuldades que meus alunos possuem durante a construção de conhecimentos que são indispensáveis para a sua formação? Que concepções os alunos estão construindo durante sua formação para que consigam desempenhar um bom trabalho no local em que estão inseridos? Os pré-requisitos que eles estão tendo durante sua formação no curso de Licenciatura em Matemática são suficientes para ajudá-los a vencer as grandes barreiras e obstáculos que a Matemática demarcará em sua trajetória? Diante disso, como encontrar caminhos para resolver alguns problemas da aprendizagem em disciplinas, como Cálculo I, possuindo décadas de reprovações? Existe algum caminho que pode ser intermediado entre aluno e professor para que a aprendizagem de derivadas possa se tornar mais agradável e significativa?

Essas são algumas das muitas reflexões que precisam ser feitas não só por mim, mas por todos os que desejam que os conhecimentos matemáticos, em especial aquele relacionado a derivadas, façam diferença não só no meio acadêmico, mas principalmente no desenvolvimento profissional do professor de Matemática.

Com esse novo olhar idealizado, comecei a pensar em novas concepções sobre a minha realidade e a de meus alunos. Após algumas leituras, a Educação Matemática trouxe uma luz no final do túnel, percebendo que ela se preocupa não só com os conteúdos, mas principalmente em como estes devem ser trabalhados. Percebo que a discussão da Educação Matemática facilita a dinâmica de trabalho, ajuda a organizar metodologias, permite fazer vínculos entre os conteúdos e a realidade das ementas que a disciplina propõe, facilita o diagnóstico dos erros cometidos tanto pelos alunos como os meus, como professor, prioriza a construção de conhecimentos por parte dos alunos dando oportunidades de experimentarem e vivenciarem o processo de aprendizagem, percebendo que existe algo muito mais além do que só a “transmissão de conteúdos”: existe o brilho do descobrir e a alegria em poder desvendar o acontecimento dos conteúdos no ensino e na aprendizagem.

1.2. A motivação para a pesquisa

Durante certo tempo de trabalho no Ensino Superior com a disciplina de Cálculo I, sempre ouvi reclamações por parte dos alunos sobre a dificuldade de aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina, na qual a reprovação tem sido muito grande; além disso, sempre notei que a maioria dos cursos de graduação na área de ciências exatas possui disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral ou disciplinas similares que, na maioria dos casos, formam a base inicial da Matemática dos estudantes no Ensino Superior.

Em uma aula de Cálculo I, ao trabalhar o conteúdo de derivadas, certo aluno mencionava a sua grande dificuldade na disciplina e não sabia mais o que fazer para continuar no curso de Licenciatura em Matemática. Ele afirmou que precisava de ajuda para aprender, compreender e resolver as derivadas, pois já havia passado por vários professores e, até aquele momento, não construíra nada de importante sobre esses e outros conteúdos da disciplina. Cabe ressaltar, que o referido aluno já havia sido reprovado na disciplina de Cálculo I duas vezes, sendo que, pelo estatuto da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, um aluno só pode reprovar duas vezes em uma mesma disciplina, caso seja reprovado uma terceira vez, esse aluno será jubilado do curso, restando como opções o trancamento em templo hábil ou a realização de um novo vestibular ou ainda, a reopção para outro curso de áreas afins.

Pelo exposto acima e por vários outros motivos relacionados às dificuldades que os alunos apresentam, resolvi testar um procedimento que pode ajudar a entender como funciona o processo de compreensão e ensino das derivadas com atividades exploratórias, utilizando para isso, o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Foi aí que pensei: Como faço para ajudar aquele e outros alunos que estão na mesma condição? Quais recursos devo utilizar para diminuir as dificuldades dos alunos e contribuir para a aprendizagem sobre as Derivadas? Como a visualização proporcionada pelas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM podem ajudar os professores e alunos a construírem o conceito de derivada? Visualizar é uma característica do Pensamento Matemático Avançado que pode ser incorporada aos processos de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo I? Devido a essas e outras inquietações, resolvi propor uma pesquisa.

A pesquisa será feita como requisito parcial para o Mestrado Profissional em Educação Matemática, dentro do tema de ensino de derivadas com o uso o GeoGebra.

1.3. A questão da visualização

A visualização tornou-se uma área de pesquisa recente na Educação Matemática e, na medida em que o tempo está passando, ela ganha força, originando focos de estudos em várias universidades e centros de pesquisa distribuídos pelo mundo.

Um dos trabalhos que passou a se destacar foi o levantamento realizado sobre a visualização com Presmeg (2006), que fez uma análise da produção do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (*Psychology of Mathematics Education* – PME) ocorrida a partir de 1991.

O estudo realizado por Presmeg (2006) contém a descrição do trabalho feito por esse grupo de pesquisadores para investigar as situações de aprendizagem que envolvem a visualização na sala de aula com os alunos e professores, os aspectos de dificuldades que os alunos possuem na aprendizagem em relação à visualização, bem como as dificuldades que se apresentam no ensino de Cálculo, além das contribuições do computador aos processos de visualização dos conteúdos de Matemática.

Sempre que se aborda a questão da visualização, notamos a participação de um pensamento específico, caracterizado como Pensamento Matemático Avançado. Para Dreyfus (1991), que tem sido um dos principais estudiosos a respeito do Pensamento Matemático Avançado, consegue-se representá-lo como uma série de processos que se interagem, quando ocorre: generalização, representação, visualização, classificação, indução, síntese, formalização, conjecturação, análise ou síntese.

Outro pesquisador que tem se destacado nos estudos do Pensamento Matemático Avançado é Tall (1995) que apresenta as seguintes características:

> Pensamento matemático avançado hoje envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla área de atividades matemáticas para construir novas ideias que se baseiam em ampliar cada vez mais o sistema de teoremas demonstrados. O crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado no indivíduo pode, portanto, ser colocada a hipótese de começar a partir da "percepção de" e "ação sobre" esses objetos no mundo externo, construindo através de dois desenvolvimentos paralelos – um visual-espacial para o verbal-dedutivo, o outro é constituído por encapsulações sucessivas do processo-para-conceito utilizando símbolos manipuláveis – desse modo, tudo isso conduz para inspirar o uso de um

> pensamento criativo baseado em objetos definidos formalmente e em prova sistemática[1]. (TALL, 1995, p. 3, tradução nossa)

Desse modo, observamos que o Pensamento Matemático Elementar se relaciona com o Pensamento Matemático Avançado e, durante essa relação, ocorre a oportunidade para tentar compreender melhor a visualização usando, por exemplo, *softwares* como o GeoGebra para a construção de gráficos de derivadas de uma função de variável real.

Percebemos que há uma grande importância quanto à questão da visualização no ensino de Cálculo. Os alunos apresentam dificuldades, muitas vezes devido a aspectos de formação na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Diante dessas dificuldades, é necessário que algo seja feito para mudar essa realidade em relação à aprendizagem, usando a visualização como auxílio para tal mudança. Desse modo, concordamos com as ideias de Fainguelernt (1999), ao afirmar que:

> As imagens visuais são fatores importantes na imediação, mas a imediação não é uma condição suficiente para produzir uma estrutura específica de uma cognição intuitiva. A visualização contida numa atividade cognitiva adequada é um fator essencial para a compreensão intuitiva. As representações visuais, por um lado, contribuem para a organização das informações em representações sinópticas, constituindo um fator importante de globalização. Por outro lado, o aspecto concreto das imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto-evidência e imediação. Uma imagem visual não somente organiza os dados à mão em estruturas significativas, mas é também um importante fator que guia o desenvolvimento da solução. As representações visuais são dispositivos antecipatórios essenciais. (FAINGUELERNT, 1999, p. 42)

A aprendizagem que utiliza os aspectos visuais como características que podem ser desenvolvidas na sala de aula deve ser repensada por professores de Cálculo I. Desse modo, intentamos observar o desenvolvimento de professores em atividades que valorizem a visualização com os conteúdos das derivadas, para entender como a visualização pode ajudar seus alunos de Cálculo I na construção do conhecimento.

---

[1] Advanced mathematical thinking today involves using cognitive structures produced by a wide range of mathematical activities to construct new ideas that build on and extend an ever-growing system of established theorems. The cognitive growth from elementary to advanced mathematical thinking in the individual may therefore be hypothesised to start from “perception of” and “action on” objects in the external world, building through two parallel developments – one visuo-spatial to verbal-deductive, the other successive process-to-concept encapsulations using manipulable symbols – leading to a use of all of this to inspire creative thinking based on formally defined objects and systematic proof.

1.4. Questão de Investigação

A partir das discussões realizadas até aqui, propomos a seguinte questão de investigação:

Que contribuições a realização de atividades exploratórias com o uso do GeoGebra pode trazer à aprendizagem de Derivadas a partir da visualização?

Nossa questão de investigação se enquadra na linha de pesquisa de Educação Matemática no Ensino Superior, desenvolvida no Mestrado Profissional de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, na Linha de Pesquisa 1: Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática.

1.4.1. Objeto de Estudo

O objeto de estudo do trabalho a ser desenvolvido pode ser atrelado a uma análise do processo de ensino relacionados às derivadas, por meio da visualização de gráficos e funções, com o auxílio do *software* GeoGebra, de livre utilização. Tradicionalmente, a construção de gráficos de funções com o auxílio das derivadas nas disciplinas de Cálculo é feita de forma mecânica.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo Geral

Em nossa pesquisa, assumiremos como hipótese de trabalho que a utilização de *softwares* matemáticos pode contribuir para o ensino a partir da visualização de funções e imagens gráficas relacionadas às derivadas de funções reais.

Com nossa pesquisa, pretendemos identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de funções e gráficos.

Pretendemos, também, fazer um levantamento teórico-bibliográfico sobre o Ensino de Cálculo no Brasil, além de discutir o Ensino de Cálculo e as Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM.

Assim, pretendemos investigar como Professores de Matemática do Ensino Superior avaliam o desenvolvimento do conhecimento sobre as derivadas a partir da visualização de gráficos de funções, utilizando para tal, o *software* de geometria dinâmica GeoGebra; com isso, elaboraremos uma proposta de atividade em forma de produto educacional que possa contribuir para a prática de professores de Cálculo Diferencial e Integral.

1.5.2. Objetivos Específicos

Em nossa pesquisa, configuram-se os seguintes objetivos específicos:

- Investigar o ensino de Cálculo no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior e das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM;

- Elaborar, testar e avaliar atividades exploratórias com o *software* GeoGebra, relacionadas à análise de gráficos utilizando derivadas de uma função real de uma variável real;

- Apresentar um conjunto de atividades exploratórias relacionadas às Aplicações de Derivadas: análise de gráficos com a utilização de *softwares*, para disciplinas de Cálculo I em cursos de Licenciatura em Matemática ou da área de ciências exatas, como Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática.

1.6. Metodologia de Pesquisa / Tarefas de Pesquisa

Na metodologia foram contemplados: a realização de uma Pesquisa Teórico-bibliográfica analisando livros, artigos publicados em congressos e em revistas da área de Educação Matemática, teses e dissertações do banco de dados da CAPES, relacionados ao Ensino de Cálculo e às Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática.

Também foi contemplada a realização de uma Pesquisa de Campo, no 2º semestre de 2014, com Professores de Matemática do Ensino Superior.

Para a Pesquisa de Campo, realizamos as seguintes tarefas:

- Elaboração de atividades exploratórias utilizando o GeoGebra, relacionadas às Aplicações das Derivadas na construção de gráficos de funções reais;

- Desenvolvimento e avaliação das atividades exploratórias com Professores de Matemática do Ensino Superior.

1.7. Estrutura da Dissertação

Após este 1º Capítulo, no qual apresentamos as discussões iniciais e motivações de nosso trabalho, partimos para o Capítulo 2, em que tecemos algumas considerações sobre o Ensino de Cálculo com TICEM e aprofundamos a discussão da questão da visualização.

No Capítulo 3, apresentamos nossa pesquisa em seu contexto, além de um detalhamento da metodologia e dos instrumentos de pesquisa.

Já no Capítulo 4, descrevemos e analisamos os dados obtidos a partir dos instrumentos de pesquisa adotados.

Finalizamos com o Capítulo 5, que são as Considerações Finais, buscamos apresentar um conjunto de respostas à questão de investigação que propulsionou essa pesquisa e algumas recomendações a Professores de Cálculo Diferencial e Integral.

Capítulo 2

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS, O ENSINO DE CÁLCULO E A VISUALIZAÇÃO NA APRENDIZAGEM

> A questão que se coloca para os educadores é: como integrar essa nova forma de pensar, impulsionada pela realidade de espaço cibernético, ao desenvolvimento de conhecimento e saberes do aluno? Torna-se cada vez mais necessário um fazer educativo que ofereça múltiplos caminhos e alternativas, distanciando-se do discurso monológico da resposta certa, da sequência linear de conteúdos, de estruturas rígidas dos saberes prontos, com compromissos renovados em relação à flexibilidade, à interconectividade, à diversidade e à variedade, além de contextualização no mundo das relações sociais e de interesses dos envolvidos no processo de aprendizagem. (GUIMARÃES; DIAS, 2006, p. 23)

2.1. Caminhos do ensino com o uso de Tecnologias Digitais

Ao entrar numa sala de aula do Ensino Superior nos dias atuais, qualquer professor depara-se com a realidade em que, boa parte de seus alunos possuem algum instrumento tecnológico, desde celulares, calculadoras científicas, tabletes, notebooks, ultrabooks, entre outros aparelhos que são considerados de última geração ou que estão no auge da produção de tecnologias dos mercados nacional e internacional. Percebe-se que, aos poucos, a sociedade está indicando certas mudanças que devem ocorrer em seu contexto e a universidade, como está inserida nessa sociedade, acaba recebendo impactos oriundos desses acontecimentos.

Levemos em consideração que estamos vivendo na sociedade do conhecimento, conforme o descrito por Valente (2002, p. 29): “essas mudanças implicam profundas alterações em praticamente todos os segmentos da nossa sociedade, afetando a maneira como atuamos e pensamos. Elas demarcam a passagem para a sociedade do conhecimento […]”. Desse modo, as informações vão e vem com uma extrema facilidade e, às vezes, convive-se com a falta de tempo para debruçar-se sobre essa enorme quantidade de conteúdos que podem ser estudados e explorados nas diversas disciplinas, tanto nas escolas de Ensinos Fundamental e Médio como nas universidades.

Quando tratamos de tecnologias na sala de aula, relatamos que tanto o quadro-negro, o giz, o pincel, dentre outros, também representam materiais tecnológicos, ainda que Kenski (2008, p. 22-23) apresente uma visão muito mais global do termo tecnologia: “O conceito de tecnologias engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas implicações”.

Também ponderamos que a tecnologia engloba qualquer instrumento que pode ser usado para representar algum tipo de utilidade; o que nos interessa nesse momento, não é qualquer recurso, mas sim aquele que está ligado ou pode ser incorporado ao uso do computador. Percebe-se que, aos poucos, a sociedade está dispondo desse recurso e, portanto, o professor tem que pensar sobre essa realidade em que está inserido e em como associar elementos metodológicos diferenciados para o seu trabalho na sala de aula, pois é nela que acontece a construção do conhecimento.

Mesmo se tratando das aulas no Ensino Superior, nota-se que, em uma boa parte delas, alguns professores de Cálculo I referem-se quase sempre a um tipo de ensino, o tradicional, conforme a descrição de Reis (2009, p. 81): “Uma prática muito comum, entre os professores de Cálculo, é a de ministrar essa disciplina sempre da mesma forma (mesmos conteúdos, mesma metodologia, mesmos exemplos, mesmas aplicações, etc.), sem levar em consideração a natureza do curso”. Os professores de Cálculo I precisam traçar abordagens pedagógicas diferentes no ensino dessa disciplina, pois ainda é muito alto o índice de reprovação e de insatisfação dos alunos.

Existem alguns trabalhos que mereceram atenção, devido à sua importância / contribuição para a divulgação de pesquisas na área de Educação Matemática Superior. Refletindo a citação com a qual se inicia este capítulo, percebemos que o professor, em especial, o do Ensino Superior, deve está preocupado sobre algumas práticas que podem ser desenvolvidas durante suas aulas com o uso de tecnologias, já que ele também está formando outros professores para trabalhar nos Ensinos Fundamental e Médio ou alunos dos diferentes tipos de curso, dependendo de sua área de atuação.

Nota-se que, aos poucos, os computadores puderam entrar nas salas de aulas e estão ganhando mais espaço. Após algumas recomendações para o uso do computador na sala de aula a partir de 1980, conforme os relatos de Borrões (1998)[2], a escola tem se privilegiado dessa circunstância em poder incorporar o equipamento como recurso metodológico para as salas de aula. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou nos Estados Unidos da América uma “Agenda de ações” e “Recomendações para o Ensino de Matemática nos anos 80”. A partir desse período, começou o desenvolvimento de trabalhos com pesquisas no Brasil, em estudos direcionados ao ensino e aprendizagem da Matemática, tanto no desenvolvimento de professores como no de alunos em salas de aula, no que diz respeito ao uso dos computadores.

Nesse período, também estava acontecendo a reforma do ensino de Cálculo que ajudou a criar caminhos para tentar combater os altos índices de reprovação dessa disciplina em cursos superiores, tanto no Brasil quanto no exterior. Com a possibilidade de conciliar as aulas da disciplina de Cálculo com o uso de ferramentas computacionais, a reforma proporcionou o desenvolvimento de pesquisas como tentativa para minimizar o fracasso dos alunos durante os seus estudos dessa disciplina e de outras similares. Desse modo, a reforma proposta para o ensino de Cálculo teve como uma de suas características básicas a incorporação do computador durante as aulas, descrita assim por Rezende (2003):

> [...] o uso de tecnologia, isto é, software computacional e calculadoras gráficas, tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino via a “Regra dos Três”, isto é, todos os tópicos e todos os problemas devem ser abordados numérica, geométrica e analiticamente; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprindo essa falta com o treinamento no uso de Sistemas de Computação Algébrica. (REZENDE, 2003, p. 4)

Com esse instrumento de trabalho, os professores começaram a se articular com possibilidades de experimentação dessa ferramenta, pensando em como utilizá-la de maneira construtiva e, com isso, direcionando para um novo cenário, refletindo assim, em como

[2] Alguns aspectos da influência americana foram descritas no trabalho foram relatados de Borrões (1998, p. 4-5) este trabalho descreve alguns detalhes que indicaram algumas atividades aos professores, os possíveis recursos (o computador) utilizados pelos alunos na construção de conhecimentos Matemáticos, planejamentos, currículos, etc.; incorporando para as aulas de Matemática a aprendizagem por descoberta, resolução de problemas e modelação.

trabalhar as aulas de Cálculo usando o computador, permeados pelos *softwares* matemáticos, como requisito de explorações, dinâmicas de conteúdos e aprendizagens.

Não é de hoje que se fala em uso de tecnologias e mídias digitais na Educação. Existem alguns trabalhos que se destacaram ao relacionar esses elementos no interior da sala de aula, e como ocorreram iniciativas para tentar dinamizar algumas relações práticas que puderam iniciar um processo diferenciado no ensino com tecnologias. Lévy (1993, p. 132), em seu estudo sobre as tecnologias da inteligência e a interação entre elas, mencionou que: “Para inventar a cultura do amanhã, será preciso que nos apropriemos das interfaces digitais”. Conforme a própria evolução dos acontecimentos em todas as áreas e especialmente, na Educação, é imprescindível investigar cada vez mais, o uso das tecnologias dentro da sala de aula ou no laboratório de informática.

Como vivemos numa cultura acadêmica em que os conteúdos podem apresentar diferentes formas de serem trabalhados em sala de aulas, faz-se necessário repensar sobre aulas de Cálculo I, pois da forma como nossa cultura está nos indicando, os professores precisam incorporar novas práticas para saberem lidar com as reais situações dos alunos que utilizam os mais diversos e sofisticados tipos de equipamentos fora da universidade e dentro dela, muitas vezes, estes não são incentivados ao uso do laboratório ou aos recursos que podem ser utilizados momentaneamente pelos professores.

2.2. Um olhar sobre as pesquisas de Ensino de Cálculo e Tecnologias Digitais

Iniciamos nossa revisão teórico-bibliográfica, com o intuito de conhecer o que está sendo produzido no país em relação ao tema abordado, com base em um levantamento[3] feito no banco de dissertações e teses da CAPES. Procurando o que tem sido pesquisado no país acerca do ensino das Derivadas a partir da visualização com o uso do GeoGebra, ao todo, foram encontrados 111 trabalhos, dos quais fiz inicialmente a leitura do resumo, da introdução e da conclusão, para identificar se eles pertenciam aos temas de interesse. Muitos trabalhos falavam sobre Derivadas, outros sobre Cálculo com as Derivadas, porém a ênfase maior foi

[3] O levantamento foi iniciado em janeiro de 2013 e finalizado em agosto desse mesmo ano, utilizando um grupo de palavras-chave que combinavam dois termos: Derivadas (derivadas, ensino de derivadas, reta tangente, ensino de Cálculo com as derivadas, derivadas no Cálculo) e Visualização (GeoGebra, *softwares*, imagem, gráficos, TIC).

dada àqueles que tratavam de Derivadas no campo da Educação Matemática, priorizando o ensino a partir da visualização / representação gráfica com o *software* GeoGebra.

Das pesquisas que se encaixaram no interesse de nosso estudo, destacamos um total de 22, sendo 7 Teses de Doutorado e 15 Dissertações de Mestrado. Cabe salientar, que, no decorrer dessa pesquisa, também encontramos artigos que falavam a respeito do nosso tema de interesse e, desse modo, optamos por incluí-los em nossa revisão. A partir da realização de estudos, análises e reflexões sobre esses trabalhos encontrados, destacaremos somente alguns em nosso trabalho, objetivando facilitar a leitura e a compreensão. Aqui, então, foram abordadas 5 teses, 3 dissertações e 3 artigos. Caso ocorra o interesse em saber quais foram esses trabalhos encontrados consultar o Apêndice 1 desta dissertação que traz uma tabela com todas as teses e dissertações encontradas na CAPES durante o período da consulta.

A pesquisa de Villarreal (1999) tem sido uma das referências usadas em trabalhos do Ensino Superior. Ela escolheu a derivada pelo fato desse conteúdo apresentar algumas dificuldades para os alunos e, com isso, teve a expectativa de encontrar possíveis respostas para tais dificuldades. Inicialmente, apontou suas escolhas e suas opções pelo uso da informática e dos computadores, como uma janela que proporciona ter um alcance maior das informações e caracterizou como uma oportunidade para melhor desenvolver sua pesquisa em relação às dificuldades das alunas do curso de Biologia da Universidade Estadual Paulista – UNESP.

A autora explora um pouco das características da visualização ao ensino de Cálculo, a partir das potencialidades que as tecnologias podem oferecer à Educação Matemática:

> Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores. (VILLARREAL, 1999, p. 43)

Em relação ao trabalho do professor, a pesquisadora afirma que ele precisa explorar melhor as suas condições de trabalho, como tentativa para aprimorar as formas de ensinar no contexto das tecnologias nas aulas de Cálculo I: “Essa reorganização produzirá modificações na organização de conteúdos e nas atividades desenvolvidas em sala de aula; alterará papéis de professores e estudantes e, até, a relação com o próprio objeto de conhecimento" (VILLARREAL, 1999, p. 362).

A pesquisa de Souza Júnior (2000) foi desenvolvida com um coletivo associado entre professores, alunos e pesquisadores para observar a eficiência do *software* Mathematica e do trabalho pedagógico que foi desenvolvido durante o ensino de Cálculo na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP na década de 1990 e quais relações poderiam acontecer quando esse grupo se relacionava durante as aulas, destacando também os projetos e as atividades que foram desenvolvidas no laboratório de informática.

Ele notou que os professores, ao prepararem as atividades para os alunos, tinham que refletir sobre elas e acabaram notando que também fazia parte de seu trabalho, pensar nas possibilidades que permitissem aos alunos usar o *software* para construir conhecimento durante as aulas de Cálculo; consequentemente, os professores também desenvolviam uma aprendizagem para um melhor desempenho de suas atividades, pois eles "[...] aprendiam a trabalhar criticamente com o computador no processo em que os saberes singulares sobre como trabalhar criticamente com o computador eram socializados pelo grupo" (SOUZA JÚNIOR, 2000, p. 202).

Ainda sobre a utilização do computador no trabalho do professor de Cálculo, o autor relata sobre os saberes que os professores precisam ter na elaboração de propostas de atividades que serão desenvolvidas pelos alunos no laboratório ou na sala de aula:

> Em termos da presença do computador (novas tecnologias) no processo de ensino aprendizagem, verifica-se que o problema da separação entre conhecimento, processo pedagógico e professor não é determinado pela utilização desses recursos, mas sim pelo modo em que o processo de ensino-aprendizagem é concebido e desenvolvido. Quando se sabe o que fazer com as novas tecnologias e quando se sabe o que se pretende com o processo de ensinar e aprender, é possível tornar o computador um "instrumento" que facilita o trabalho pedagógico. (SOUZA JÚNIOR, 2000, p. 203)

No estudo de Catapani (2001), feito com alunos e professores da disciplina de Cálculo em um curso de Geologia da UNESP com o objetivo de analisar a relação de interesse / desinteresse e facilidades / dificuldades dos alunos em relação a essa disciplina, ficaram evidenciado alguns problemas que se tornaram corriqueiros, tais como: falta de conhecimentos básicos dos alunos; falta de aplicação dos conhecimentos de Cálculo pelos professores no curso, o que causou uma grande desmotivação aos alunos; mudança constante dos professores dessa disciplina; falta de relação mais próxima dos professores de Cálculo e dos professores das disciplinas especificas; falta de maturidade de alguns alunos quando entram no curso.

O trabalho apontou que essa disciplina ainda merece mais estudos e que os problemas estão ainda longe de serem resolvidos; todos têm parte na contribuição das melhorias a serem realizadas, bem como, nos problemas a serem resolvidos, sendo que os professores têm certa autoridade para iniciarem os processos de mudanças, já que dependem deles as iniciativas para a diferenciação de seu trabalho na sala de aula com os alunos nos cursos de Cálculo.

Dessa forma, o autor aponta algumas relações que podem ser importantes na investigação das causas desses problemas que vem ocorrendo:

> Diversas questões têm sido apontadas por estudiosos da área como causa do problema, desde a forma tradicional de ministrar a disciplina até a falta de motivação por parte de professores e alunos envolvidos com o Cálculo. Dessa forma, ao invés de desempenhar importante papel no desenvolvimento da sociedade científica e tecnológica em que vivemos, o Cálculo tem-se colocado como barreira ao acesso profissional a muitos estudantes que conseguiram ingressar nas universidades. (CATAPANI, 2001, p. 49)

Desse modo, ele aponta algumas pistas que os professores dão em relação ao papel da disciplina de Cálculo: “De acordo com esses professores, embora o aluno [...], não tenha consciência da importância e da necessidade da disciplina Cálculo [...], ela se faz muito importante como linguagem e como instrumento na resolução dos problemas da área” (CATAPANI, 2001, p. 53). Mesmo essa disciplina sendo indispensável para a maioria dos cursos superiores brasileiros, ainda se tem um índice alarmante de reprovação e insatisfação. Qual é o trabalho que o professor pode fazer para tentar mudar um pouco desse quadro?

Mesmo com a insatisfação por parte dos alunos e também por parte dos professores, o autor pondera que: “Os diversos problemas não deixam de refletir-se nos professores que ministram a disciplina, que, não raramente, ficam presos em conceitos básicos e não conseguem fazer com que os alunos se sintam estimulados em sala de aula” (CATAPANI, 2001, p. 60). Essas questões remetem à discussão para o trabalho do professor, que podem pensar em desenvolver processos de explorações e de investigações com os alunos não só no laboratório, mas também na sala de aula.

O autor finaliza as suas argumentações, discorrendo sobre as iniciativas que os professores podem e precisam tomar: “[...] é importante e preciso que haja um estímulo por parte dos professores, tanto daqueles que lecionam Cálculo quanto os que lecionam as disciplinas técnicas [...]” (CATAPANI, 2001, p. 60).

Meyer (2003) fez um estudo diagnóstico com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular de São Paulo que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II, fundamentando-se nas noções teóricas de imagem conceitual e definição conceitual de derivada, quando interpretada geometricamente, e distinguindo a Matemática como uma atividade mental da Matemática como um sistema formal; ela organiza as suas principais ideias em autores que trabalham com o Pensamento Matemático Avançado que proporciona uma melhor compreensão dos resultados para o ensino de derivada em seus aspectos cognitivos.

Essa pesquisadora afirma que existem muitas dificuldades dos alunos sobre a noção de derivada e que o ensino desse conteúdo ainda necessita de estudos mais detalhados sobre o tipo de pensamento matemático utilizado, buscando assim, uma melhor compreensão do processo de estabelecimento de conexões entre as diversas partes do conhecimento matemático, por meio de um diagnóstico sobre os elementos que compõem a imagem conceitual e a definição conceitual dos sujeitos pesquisados. Meyer (2003) sustenta que, quando esse conceito é interpretado geometricamente, esses aspectos podem ajudar a superar algumas dificuldades em sua aprendizagem. Em sua pesquisa, não foram utilizadas tecnologias computacionais, mas pelo fato do tema da pesquisa ser a derivada, interessa-nos o fato de podermos observar como outras pesquisas relacionadas a aprendizagem deste conteúdo, ainda que sem o uso de *softwares*. Ela conclui afirmando que:

> Dessa forma, acreditamos que apenas inserir estudantes em contextos capazes de motivá-los a mobilizar elementos conflitantes de sua *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, não seja o suficiente para promover aquisição de uma compressão conceitual, relativa ao conceito de derivada. (MEYER, 2003, p. 94-95, grifo da autora)

Ao longo do trabalho, percebemos que, para se trabalhar com as imagens conceituais e definições conceituais, o professor-pesquisador precisa estar embasado nas ideias / suportes do Pensamento Matemático Avançado e, mesmo assim, ainda trata-se de um campo restrito às pesquisas acadêmicas. Os procedimentos utilizados para a compreensão desses resultados, às vezes, podem não ser o suficiente para trazer um olhar mais expressivo em relação ao objetivo da pesquisa. Alguns dos alunos conseguiram fazer mobilizações, no que diz respeito ao conceito de derivada, pelo fato de compreenderem melhor e passando a construir uma imagem conceitual a partir das atividades propostas. Compreendemos, a partir da pesquisa, que não é suficiente somente colocar os alunos frente a problemas que envolvam imagens e definições conceituais, pois essas atividades necessitam de serem pensadas de modo que o professor-pesquisador ajude os alunos a mobilizar esses conceitos e a manipulá-los de uma forma mais significativa para proporcionar a construção de seu conhecimento em relação à derivada.

A pesquisa de Machado (2008) foi realizada na UNICAMP com 9 alunos da disciplina de Cálculo no curso de Química, no intuito de realizarem estudos com o uso de tecnologias, sendo a ferramenta computacional utilizada, o Mathematic Plotting Package (MPP), com os seguintes objetivos: analisar a contribuição de um aplicativo educacional na resolução de problemas que extrapolam o cálculo funcional na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; enfatizar a necessidade, a importância e o resultado da utilização dessa ferramenta, que não deve ser tratada apenas com lápis e papel; analisar, por meio de tarefas realizadas, o conhecimento matemático construído a partir da visualização e da representação visual descrita pelos estudantes.

Após as práticas desenvolvidas com os alunos ao manusearem o equipamento, a pesquisadora percebeu que, ao usar o recurso tecnológico nas aulas, ocorreu uma melhora significativa no processo de aprendizagem dos alunos por meio de conceitos e conclui que:

> Inegavelmente, as aulas de Matemática com o auxilio da ferramenta computacional provocam mudanças nos papéis e nas interações de professores e estudantes. Na sala de aula com a ferramenta computacional, não tem espaço para o saber pronto e acabado a ação educativa ocorre em lócus. A sala de aula ou laboratório é transformada em local de trabalho com o conhecimento, espaço de construção de habilidades e competências tanto do educando quanto do educador. O trabalho pedagógico deve pautar-se pela parceria, pela construção e condição do conhecimento construído. A ação acadêmica deve ser como coordenador e facilitador de múltiplas atividades na construção do conhecimento. (MACHADO, 2008, p. 193)

Pelas concepções adotadas nesse estudo, convém destacarmos as dificuldades de preparação dessas aulas e o quanto elas tornaram-se importantes para ajudar os alunos a ter um tipo de experiência diferente das aulas usuais, por terem priorizado a participação dos alunos na construção do conhecimento e a forma como o trabalho pedagógico pode ser decisivo em momentos como esses.

O trabalho de Marin (2009) foi realizado com 13 professores de Cálculo que fazem uso das Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC em suas aulas, propondo a seguinte questão de investigação: Como os professores de Matemática fazem uso das TIC na disciplina de Cálculo?

O autor relata que os professores do Ensino Superior que trabalham com a disciplina de Cálculo têm alguns motivos para usarem as TIC, possuindo um caráter pragmático, como sendo uma tentativa de manter o vínculo na instituição onde trabalham e, desse modo, tudo funciona como uma imposição devido às próprias circunstâncias dos meios onde eles se encontram, dentro da universidade. Outro olhar representaria um caráter conceitual, no qual o professor se percebe com uma necessidade de ampliar suas abordagens pedagógicas tentando equacionar / sintonizar o que acontece fora da escola, agindo de maneira a atender algumas das exigências do mercado de seu trabalho. Diante disso, o professor tende a repensar sua prática e começa a se mobilizar com elementos que podem ser indispensáveis tanto para o seu trabalho, como para a construção de conhecimentos de seus alunos.

Em se tratando das possibilidades de uso das tecnologias, podemos perceber algumas melhorias, mas isso não representa que o professor tem garantias de que tudo dará certo. Entretanto, com o intuito de assegurar pelo menos um suporte mediático da relação de aprendizagem, o professor de Cálculo deve construir características que podem ser indispensáveis na aprendizagem de seus alunos durante as aulas.

Com essas justificativas, verificamos que o professor acaba cercado de condições que o obrigam a pensar sobre e em sua prática. Desse modo, como relacionar a importância do uso das TIC nas aulas de Cálculo I? Nesse contexto do uso das TIC, sobre as atividades elaboradas, Marin (2009) afirma que:

> No que diz respeito ao desenvolvimento das aulas, identifica-se que as TIC permite realizar atividades que seriam impossíveis de serem feitas somente com o uso de lápis e de papel, proporcionando a organização de situações pedagógicas com maior potencial para aprendizagem. É claro que isso aumenta o tempo de dedicação do professor. (MARIN, 2009, p. 136)

Notamos que muitas aulas de Cálculo são demonstrativas e se gasta muito tempo com exemplos e soluções de exercícios. O uso de *softwares* tem como característica básica proporcionar o aumento do horizonte de realização de atividades e, desse modo, o professor pode direcioná-las de tal maneira que os alunos amadureçam determinados conteúdos, os explorem, os testem e cheguem a possíveis soluções de atividades nas quais o professor desenvolve o seu papel de mediador da aprendizagem de seus alunos. Esse momento é bastante delicado pelo fato de, talvez, o professor não possuir suporte tecnológico suficiente ou os recursos necessários para o desenvolvimento de suas aulas, sendo realizadas na sala ou no laboratório.

O trabalho de Rocha (2010) foi realizado com alunos no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, utilizando o *software* GeoGebra para implementação de atividades que foram realizadas no laboratório de Matemática. As atividades foram elaboradas mediante as dificuldades que os alunos possuíam quando o professor da disciplina apresentava os conteúdos e, desse modo, percebeu-se que ocorreram diferenças em relação à proposta das atividades investigativas, de acordo com o desenvolvido na sala de aula.

Os conteúdos dessas atividades contemplaram limites, derivadas e integrais. O pesquisador percebeu a relação que existia entre o ensino de Cálculo utilizando a informática e a visualização e como essas atividades puderam ser desenvolvidas pelos participantes, que apresentaram um crescimento qualitativo nos procedimentos usados no processo de aprendizagem destacadamente, uma maior mobilização de saberes, visualização e múltiplas representações.

O trabalho no laboratório feito com uma grande quantidade de alunos representou uma das dificuldades que o pesquisador encontrou no momento de implementar as atividades, às vezes, dificultando o diálogo e as explorações que poderiam ser feitas com facilidade. Tendo esse olhar para a sala de aula e para o papel do professor no Ensino Superior, ele menciona que é necessário refletir sempre sobre a prática que está sendo feita em sala de aula, e como fazer sempre para tentar dar uma forma mais atrativa às aulas de Cálculo, proporcionando a aprendizagem aos alunos por meio da visualização através do *software* GeoGebra, auxiliando, assim, na compreensão dos conceitos de Cálculo, durante a realização dessas atividades.

Outra dificuldade encontrada pelo pesquisador em relação ao trabalho, foi certa limitação do *software*, pois em algumas atividades, mesmo alterando ou ampliando as escalas e os padrões do programa, ele não conseguia fazer uma aproximação mais eficiente das funções estudadas. Desse modo, o autor afirma:

> Acreditamos que a presença do computador pode transformar a sala de aula de Cálculo em um ambiente educacional informatizado. Nesse ambiente, o ensino só faz sentido se contribui para a aprendizagem que incorpora uma comunicação efetiva entre os diferentes atores do cenário. O uso das TIC tem o papel de destaque por possibilitar a criação de novas explorações, aumentando a necessidade de uma relação dialógica entre os diferentes atores envolvidos. (ROCHA, 2010, p. 139-140)

A pesquisa de Amorim, Sousa e Salazar (2011) constitui-se de um estudo com alguns alunos de cursos superiores da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, tendo como principais participantes, alunos que já tinham sido reprovados ou que haviam desistido em semestres anteriores da disciplina de Cálculo I, usando como embasamento teórico, os princípios das Investigações Matemáticas, trazendo luz à abordagem qualitativa em Educação Matemática, para avaliar os dados pesquisados.

Eles afirmaram que os conteúdos de derivada são trabalhados em, praticamente, todos os cursos superiores do Brasil que possuem Cálculo em seu currículo e, com isso, eles elaboraram e aplicaram uma sequência de atividades que foram feitas pelos alunos, com o foco na introdução de ideias sobre a função derivada a partir da observação da variação dos coeficientes angulares de todas as retas tangentes ao gráfico de uma função principal. O objetivo principal foi testar a eficiência dessas atividades investigativas usando o *software* GeoGebra e, em seguida, observaram como os alunos discutiam as relações que existiam entre o gráfico da função derivada e o conceito em si de derivada de função em um ponto.

Os pesquisadores perceberam que os alunos, a partir das aulas desenvolvidas com essas características puderam notar diferenças com o uso de tecnologias; desse modo, eles concluíram que as atividades investigativas com o uso do GeoGebra permitiram um ambiente de exploração, visualização e manipulação, facilitando a sua dinâmica e também a sua sequência:

> [...] porque criamos atividades numa determinada sequência didática e conjecturamos na tentativa de clarificar a noção de derivadas. Além disso, com as conjecturas feitas podemos chegar a um amadurecimento das ideias de derivadas, mesmo que de maneira intuitiva, mas que facilitará na compreensão e aplicação dos conceitos inerentes ao assunto. Tais conjecturas aparecem, por exemplo, quando os alunos são questionados se a verificação investigada é ou não uma função e caso sim, qual a lei de formação? (AMORIM; SOUSA; SALAZAR, 2011, p. 8)

Os autores apresentaram algumas pistas interessantes em relação ao uso do GeoGebra, destacando que esse *software* permite fazer explorações, visualizações e manipulações, sendo que esses aspectos serão essenciais para a realização do nosso projeto de pesquisa.

Já o trabalho de Garzella (2013) teve por objetivo descrever e analisar as práticas pedagógicas no Ensino Superior, em turmas da disciplina de Cálculo I, suas repercussões nos processos de ensino e aprendizagem e seus impactos nos alunos e nos professores de uma Universidade Estadual do interior de São Paulo. Ela buscou identificar os aspectos que facilitavam ou dificultavam o processo de construção do conhecimento e seus impactos afetivos nos alunos. Esta autora realizou entrevistas com alguns professores da disciplina para tentar perceber suas opiniões em relação à aprendizagem dos alunos e aos motivos da alta reprovação nessa disciplina. Os dados foram analisados e organizados em núcleos temáticos de forma a identificar os aspectos das práticas pedagógicas que promovam o movimento de afastamento ou de aproximação, de caráter afetivo entre os alunos e os conteúdos desenvolvidos na disciplina, bem como as condições de ensino apresentadas em sala de aula.

Durante o desenvolvimento da pesquisa na disciplina de Cálculo I e ao fazer entrevistas com alguns alunos para saber algumas informações sobre o trabalho dos professores, ela notou que eles ainda tinham o perfil didático de copiar conteúdos do livro durante a realização das aulas teóricas e, desse modo, só existia a reprodução dos conhecimentos que o livro se propôs a tratar naquelas circunstâncias. A pesquisadora também observou que esse tipo de prática, a de reprodução do livro didático feito pelos professores nas aulas de Cálculo I, ainda contribui para um grande índice de insatisfação dos alunos, que apontaram a necessidade de mudança na prática pedagógica do professor.

Um aluno entrevistado detalha sobre alguns aspectos do professor em relação à utilização do livro e à forma como a disciplina era aplicada nos cursos com os alunos, como percebemos no seguinte fragmento:

> No livro tinha, então, como ele copiava o livro, tinha. Aí, por exemplo, você pode otimizar alguma coisa com um cálculo, ou achar o maior volume...essas coisas. Aí ele falava assim "ah", no livro falava assim: "Numa indústria, o cara quer construir a maior lata de refrigerante com o maior volume, usando a menor área". Sabe, umas coisas assim. Mas, isso se torna difícil, pois são vários cursos. Daí fica difícil. Por exemplo, Química que a gente tinha que fazer com o pessoal da Química Geral e o professor sabia que a gente era de Alimentos, daí ele dava um enfoque, tipo, "Ah, na indústria de alimentos isso, isso..." Era interessante. (GARZELLA, 2013, p. 125)

Observando esse tipo de aula somente com o uso do livro didático, o referido aluno demonstra a sua angústia em relação ao trabalho que o professor dessa disciplina estava fazendo e, no decorrer da entrevista, ele menciona que, se pudesse, assistiria aula com outro professor que tivesse uma prática mais diferenciada.

É importante ressaltar que não estamos aqui, defendendo que os livros didáticos têm que ser retirados da sala de aula e que devemos substituí-los pelos *softwares* matemáticos. Cada recurso tem as suas contribuições e seu uso depende das propostas que os professores podem fazer durante a sua prática, no momento de preparação das aulas, e no resultado que é gerado pelos alunos depois do processo de avaliação.

Durante as investigações realizadas nesse e em outros trabalhos, notamos que alguns deles traziam considerações sobre os livros didáticos para o ensino de Cálculo. Analisando esse aspecto no trabalho de Souza Júnior (2000), percebemos a influência de alguns livros didáticos, ao apresentarem propostas direcionadas para o uso de computadores em suas atividades e observamos que os professores tinham oportunidades para incorporá-las em suas aulas.

Continuando ainda essa discussão a respeito do uso dos livros, quando Barufi (1999, p. 147) analisou 24 livros didáticos empregados no ensino para essa disciplina, apontou algumas recomendações, dando ênfase a sua utilização na sala de aula, onde "os livros selecionados apresentam todos, propostas que são válidas e que podem ser apreciadas dentro de determinado contexto". Concordamos com Garzella (2013) ao destacar que o livro didático é um dos recursos para o trabalho do professor, mas não é somente ele que deve ser levado em consideração para o ensino e, consequentemente, para a aprendizagem dos alunos.

Retomando nosso olhar sobre as pesquisas, o trabalho de Miquelino e Resende (2013) teve como objetivo analisar como as TIC influenciavam o desenvolvimento profissional de professores de Cálculo de Instituições de Ensino Superior da cidade de Uberaba – MG. A pesquisa, de caráter qualitativo, foi realizada com 14 professores que trabalhavam com essa disciplina. Eles perceberam a importância das TIC na dimensão pedagógica dos professores, permitindo a exploração dos aspectos fundamentais do Cálculo, especialmente seus aspectos demonstrativos e ainda notaram que elas também conseguiam estimular a aprendizagem docente.

Os autores também descreveram que a utilização dos *softwares* permite a visualização de funções e amplia as dimensões da compreensão dos conteúdos, proporcionando um melhor ensino: “Essa ênfase na visualização encontra explicação na própria natureza do Cálculo que tem forte apelo geométrico. Desse modo, os recursos tecnológicos permitem que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada” (MIQUELINO; RESENDE, 2013, p. 11).

Nessa pesquisa, durante a coleta de dados com os professores, os *softwares* mais citados para desenvolvimento de suas atividades foram: Winplot, Matlab, Maple, Mathematica, Scilab e o GeoGebra, sendo que este ainda está ganhando aceitação pelos professores de Matemática naquela cidade.

Os pesquisadores também comentaram sobre o papel indicativo de utilidades das TIC no trabalho dos professores e argumentaram sobre a sua importância afirmando que: “Há indícios de que estimulam a capacidade reflexiva e crítica, pois o professor se vê impelido a buscar outras formas de atuação e de recursos para atender ao perfil dos alunos [...]” (MIQUELINO; RESENDE, 2013, p. 14).

A partir das observações lançadas para as pesquisas descritas brevemente aqui, buscaremos, agora, tecer nossas considerações sobre algumas discussões aqui suscitadas.

2.3. Um novo olhar sobre nossa prática e nossa pesquisa

Reconhecemos que o trabalho na sala de aula nunca foi e nunca será uma coisa tão simples assim. Os suportes tecnológicos usados nas aulas de Cálculo são ferramentas de apoio para o desenvolvimento pedagógico do professor, mas onde e como a sua postura crítica entra nessa história? Mesmo que a maioria das aulas priorizem as demonstrações, o que impede um professor de elaborar atividades exploratórias, investigativas ou de resolução de problemas para serem realizadas com seus alunos? Talvez, porque nossas aulas de Cálculo ainda estão, essencialmente, enraizadas nas demonstrações e certamente, no rigor matemático (REIS, 2001, 2009).

Trazendo um pouco de reflexão sobre a situação do professor durante a realização de seu trabalho, também não podemos esquecer os pensamentos de Freire (2006) sobre a prática do professor:

> Por isso é que, na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática. É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática. O próprio discurso teórico, necessário à reflexão crítica, tem de ser de tal modo concreto que quase se confunda com a prática. (FREIRE, 2006, p. 39)

Refletindo sobre essa questão da possibilidade de, em nossa prática, elaborarmos e desenvolvermos propostas de atividades diferenciadas, notamos que o trabalho, quando é mobilizado para que haja a participação dos alunos no processo de ensinar e aprender Cálculo, tal processo torna-se mais significativo e, consequentemente, acaba contribuindo para a aprendizagem, coadunando com alguns pesquisadores anteriormente destacados (VILLARREAL, 1999; MEYER, 2003; BARBOSA, 2004; ALLEVATO, 2005; COUY, 2008; MACHADO, 2008; BARBOSA, 2009; MARIN, 2009; ROCHA, 2010) e com alguns outros de nossa autoria (MARTINS JÚNIOR, 2013; REIS, RICALDONI e MARTINS JÚNIOR, 2013).

Pensando sobre esses trabalhos, observamos que muitos professores têm manifestado iniciativas em modificar as suas práticas pedagógicas. Ao começarem, muitos deles também acabam, inconscientemente, retornando ao estado de origem, no qual os alunos conviviam com as aulas tradicionais. Ao se tratar do processo de ensino que é conduzido pelo professor, entendemos que, talvez, muitos prefiram ficar em sua "zona de conforto", vendo tudo acontecer talvez como um tipo de expectador dos fenômenos da sala de aula, mesmo ao transferir seus procedimentos tradicionais para as aulas em um ambiente informático, como destaca Borba (2000):

> Após um primeiro momento de fascínio e medo no contato com as novas mídias, tende-se a reproduzir uma seqüência de atividades que mantém as rotinas conhecidas. Tais resultados representam momentos de transição de quem não foi socializado no uso da informática mas tenta incorporá-la a sua prática profissional. (BORBA, 2000, p. 62)

Mesmo parecendo que tais práticas estão enraizadas em muitos professores, eles preferem optar por esse tipo de aula. Alterar o estilo da aula e tentar propor situações nas quais os professores podem e devem atuar, consiste em uma oportunidade de sugerir condições de riscos.

Pensar na prática do professor e em seu trabalho pode propiciar oportunidades para o dinamismo e possíveis transformações, mas quantos estão dispostos a sair da zona de conforto e mudar a sua prática pedagógica? Quais os pré-requisitos que os professores possuem para lidar com uma situação de ensino usando tecnologias em sua prática nas aulas de Cálculo? Como eles estão sendo capacitados para preparar essas aulas na universidade? Muitas dessas perguntas ficarão em aberto, mesmo depois da realização de pesquisas acadêmicas, pois em nossa concepção, a prática ainda é algo que merece muitos estudos, mesmo com as diversas tentativas de descrever modelos de propostas que sejam válidas para facilitar a caminhada dos professores com seus alunos na disciplina de Cálculo I.

A realidade em sala de aula ainda depende do que o professor faz. Desse modo, olhando para a trajetória de muitas aulas de Cálculo em nossa graduação, ousamos dizer que, talvez, a realidade atual ainda não seja muito diferente. Assim, o que o professor faz é o que o identifica como sua característica básica e, desse modo, temos oportunidades para levar em consideração uma mudança na rotina e na prática das aulas dessa disciplina.

Portanto, quanto ao trabalho que pode ser aqui desenvolvido, notamos em experiências realizadas por Penteado (2000, p. 23), que “[...] a pesquisa nesta área indica que o potencial da tecnologia informática para o ensino na escola será pouco utilizado se o professor não for estimulado a atuar nesse cenário de mudanças constantes”.

Assim, nosso intuito é desenvolver uma pesquisa que se configure numa proposta de contribuição para uma formação docente; nesse sentido, notamos que os professores são peças fundamentais na concretização de uma proposta de trabalho com o uso das tecnologias digitais que, mesmo sendo “de risco”, configura-se como uma oportunidade de possibilitar mudanças no cenário atual das aulas de Cálculo I.

Observamos uma condição favorável ao trabalho dos professores, porém, temos consciência de que as mudanças são lentas na prática docente. Novamente, apoiamo-nos em Penteado (2000), para quem:

> A formação na área de informática educativa é mais do que simplesmente proporcionar aos professores o contato com a tecnologia. É preciso que esta seja explorada no contexto de atuação docente. Se considerarmos um professor de Matemática, é preciso que ele conheça *softwares* a serem utilizados no ensino de diferentes tópicos e que seja capaz de reorganizar a sequência de conteúdos e metodologias apropriadas para o trabalho com a tecnologia informática em uso. (PENTEADO, 2000, p. 24, grifo da autora)

Com base nessa perspectiva, centra-se o nosso interesse de estudo e o foco de nossa pesquisa de campo: permitir a professores de Cálculo I uma discussão sobre formas de incorporar e implementar atividades exploratórias, com o uso de tecnologias digitais, construindo uma relação dialética entre ensino e aprendizagem, à luz da Educação Matemática no Ensino Superior.

2.4 A visualização e o seu papel na aprendizagem

O uso das tecnologias tem proporcionado muitas oportunidades para observar e experimentar o que está acontecendo com certos fenômenos, como a possibilidade de visualização e a múltipla representação das informações.

Neste trabalho, iremos tratar da visualização que é proporcionada pelo uso do computador. O processo de visualização tem sido muito pesquisado na Educação Matemática, contendo elementos que são necessários aos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos em todos os níveis. As pesquisas sobre esse assunto começaram a ganhar destaque a partir de trabalhos, como o de Presmeg (2006), que fez um mapeamento sobre os aspectos que foram desenvolvidos na visualização em sala de aula.

Ainda que seja importante nos processos de ensino e aprendizagem, a visualização ainda representa um assunto secundário em relação a muitos aspectos da Matemática, como por exemplo, os processos algébricos e geométricos; também a sua utilização tem se caracterizado como muitas oportunidades para o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática (TALL, 1991a, 1991b; VILLARREAL, 1999; COSTA, 2002, 2005; GUZMÁN, 2002; ARCAVI, 2003; PRESMEG, 2006).

Mesmo sendo um foco de pesquisas relativamente novo, na definição de visualização ainda podemos encontrar muitas divergências, devido ao significado de muitas palavras que são usadas para a sua variação, como imagem visual e pensamento visual, como aconteceu com Presmeg (2006) que preferiu chamar de "inscrição" ao invés de "representação" ou algo similar.

Observando algumas definições gerais sobre a visualização, notamos que, no dicionário virtual, ela é uma ação da visão que permite o reconhecimento de dados. Está, portanto, condicionada à cognição[4] humana. Outra definição semelhada aparece no dicionário Aurélio (FERREIRA, 2004, p. 2069): "Visualização é o ato ou efeito de visualizar; transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis; processo de visualizar".

Não temos como desatrelar a visualização de algo relacionado à cognição, pelo fato de possuir aspectos direcionados aos estudos de Psicologia e em especial, aos processos de ensino e aprendizagem. Desse modo, Presmeg (2006, p. 206, tradução nossa) afirma que: "Assim, a visualização inclui processos de construção e transformação, tanto imagem visual mental e todas as inscrições de natureza espacial, que podem ser implicadas no fazer Matemática" [5]. Nota-se que, no fazer Matemática, a visualização está diretamente ligada a esses processos e o que pode acontecer no cérebro humano é o que se justifica para usá-la com o uso das imagens que podem ser formadas durante a aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina.

Também como complementação a essas ideias, apresentamos a definição dada por Arcavi (2003), para quem:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados [6]. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa)

---

[4] Para completar a definição geral, cognição é o ato ou processo da aquisição do conhecimento que se dá através da percepção, da atenção, memória, raciocínio, juízo, imaginação, pensamento e linguagem. A palavra *Cognitione* tem origem nos escritos de Platão e Aristóteles. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Visualização>. Acesso em: 20 de abril de 2014.

[5] Thus visualization is taken to include processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics.

[6] Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

Nessa definição, nota-se uma abrangência de aplicação da visualização e de como ela pode beneficiar o ensino e a aprendizagem. Também aparecem elementos que são característicos para um melhor desenvolvimento dos processos mentais e de como essas ideias podem se tornar poderosas para a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Quando tais imagens são formadas no cérebro, oriundas de uma percepção ou abstração, elas começam a tomar forma na mente humana. Presmeg (2006) esclarece sobre a imagem visual e ainda caracteriza a pessoa que pode utilizá-la, da seguinte forma: "[...] uma *imagem visual* é tida como uma construção mental que representa a informação visual ou espacial, e um *visualizador* é uma pessoa que prefere usar métodos visuais quando existe essa opção" [7] (PRESMEG, 2006, p. 207, tradução nossa, grifo da autora).

Como o pensamento pode ocasionar a formação de imagens, ao realizar a formação destas, pode-se alcançar um pensamento visual. Desse modo, Costa (2002) trouxe algumas reflexões sobre o pensamento visual, discorrendo sobre sua importância e sobre como ele pode ser incorporado ao estudo dos Pensamentos Matemáticos Elementar e Avançado. Nos aspectos que caracterizaram a visualização, é destacado que não se trata somente de olhar para uma figura e perceber relações sobre ela, existe algo a mais que deve ser trabalhado.

A visualização está relacionada com o ato de ver e está diretamente ligada ao pensamento e a função cerebral. Mesmo que muitos professores não valorizem a visualização como uma oportunidade de aprendizagem para os alunos, é inegável que ela contribui para isso. Porém, essas oportunidades variam de acordo com as propostas que podem ser feitas para os alunos e quais pensamentos eles podem mobilizar. No uso da cognição, trabalhando com processos mentais, os professores e alunos desenvolvem o pensamento matemático e, dentro desse componente, temos o pensamento visual-espacial, definido por Costa (2002, p. 263) como "o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objectos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas".

Dessa forma, ao usar o pensamento visual, é possível fazer operações intelectuais sobre o material perceptivo-sensorial e de memória, relacionando-as com a manipulação e

[7] […] a *visual image* is taken to be a mental construct depicting visual or spatial information, and a *visualizer* is a person who prefers to use visual methods when there is a choice.

transformação de ideias, bem como na tradução e comunicação dos métodos e conceitos que foram utilizados para a exploração desse pensamento.

Sobre o pensamento visual-espacial, Costa (2002, p. 263) ainda faz uma classificação, detalhando algumas de suas principais características, como pode ser observado a seguir:

Modos de pensamento visual-espacial	Definição de cada modo de pensamento visual-espacial
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global.	**Operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial, de memória.**
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/ PVR), pensamento dinâmico.	**Operações intelectuais relacionadas com manipulação, transformações de ideias, conceitos e modelos.**
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE).	**Operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de ideias, conceitos e métodos.**

Tabela 1. Modos de pensamento visual-espacial e suas definições (COSTA, 2002).

Outra pesquisa a se destacar em relação à visualização foi a de Guzmán (2002), que estudou sobre a sua influência no ensino da disciplina Análise Matemática, percebendo que as múltiplas representações que poderiam ser feitas pela intuição direcionavam para uma melhor compreensão dos conceitos e definições, considerados como conhecimentos avançados para a aprendizagem dessa disciplina.

Desse modo, Guzmán (2002) esclareceu que:

> Os especialistas em um campo particular possuem uma variedade de imagens visuais, de formas intuitivas para perceber e manipular os conceitos e métodos mais usuais no assunto em que trabalham. Por meio destas, os especialistas são capazes de relacionar, de forma flexível as constelações de fatos e resultados da teoria que, frequentemente, são complexas para serem tratadas de uma forma mais analítica e lógica. De uma forma direta, semelhante à forma em que reconhecemos um rosto familiar, eles são capazes de selecionar, através do que para os outros parece ser uma confusão

> intrincada de fatos, as formas mais adequadas de atacar os problemas mais difíceis do sujeito [8]. (GUZMÁN, 2002, p. 2, tradução nossa)

A visualização aparece como um elemento natural, estando disposta nas imagens visuais que todos podem ter acesso e fazer a sua construção; aqui, ela representa um objeto de estudo da Matemática, mas pode ser trabalhada em qualquer disciplina nos diferentes níveis de ensino, pois funciona como uma ferramenta, que permite encontrar solução para os problemas mais difíceis com os quais uma pessoa pode se deparar ao tentar resolvê-los.

Quando Guzmán (2002) realizou alguns experimentos na disciplina Análise Matemática, conseguiu encontrar alguns tipos de visualização: Isomórfica, Homeomórfica Analógica e Diagramática, ainda relatou algumas dificuldades que podem surgir para que a visualização seja usada corretamente, em propostas, na sala de aula. Isto pode acontecer com ou sem o uso da tecnologia computacional. O primeiro tipo de visualização foi a isomórfica, nesta os objetos podem ter uma correspondência “exata” com as representações que fazemos deles. Assim, se for possível estabelecer um conjunto de regras que traduzam os elementos de nossa representação visual e as relações com os objetos matemáticos, as manipulações visuais podem ser transformadas em relações matemáticas abstratas.

Em seguida, o pesquisador relata a visualização homeomórfica, na qual:

> [...] alguns dos elementos têm certas relações mútuas que imitam suficientemente bem as relações entre os objetos abstratos e assim eles podem nos fornecer apoio, às vezes, muito importante, para guiar a nossa imaginação nos processos matemáticos de conjecturar, investigar, provar, [...] [9] (GUZMÁN, 2002, p. 5, tradução nossa)

Para ilustrar essa possibilidade de visualização, o autor utilizou os conhecimentos sobre os conjuntos numéricos para classificá-los a partir das setas de uma função injetora, em

[8] The experts in a particular field own a variety of visual images, of intuitive ways to perceive and manipulate the most usual concepts and methods in the subject on which they work. By means of them they are capable of relating, in a versatile manner the constellations of facts and results of the theory that are frequently too complex to be handled in a more analytic and logic manner. In a direct way, similar to the one in which we recognize a familiar face, they are able to select, through what to others seems to be an intricate mess of facts, the most appropriate ways of attacking the most difficult problems of the subject.

[9] […] some of the elements have certain mutual relations that imitate sufficiently well the relationships between the abstract objects and so they can provide us with support, sometimes very important, to guide our imagination in the mathematical processes of conjecturing, searching, proving, […].

que o esquema das setas deixou claro para os alunos as definições formais que tinham sido usadas no experimento.

Na sequência, Guzmán (2002) definiu a visualização analógica, tal visualização permite substituir mentalmente os objetos trabalhados por outros que se interrelacionam de modo análogo e cujo comportamento é mais conhecido ou mais fácil de manusear, devido a algumas de suas características já terem sido exploradas.

Finalizando, o pesquisador apresenta a visualização diagramática:

> Nesse tipo de visualização, nossos objetos mentais e suas relações mútuas em matéria de aspectos que são de interesse para nós, são apenas representados por diagramas que constituem um instrumento útil para a nossos processos de pensamento. Pode-se dizer que, em muitos casos, tais diagramas são semelhantes às regras mnemotécnicas [10]. (GUZMÁN, 2002, p. 7, tradução nossa)

Como se refere às regras mnemotécnicas, que representam a memorização por meio dos símbolos ou diagramas, para algumas pessoas esses elementos podem não facilitar a aprendizagem pelo fato de que memorizar representa uma dificuldade e, por vezes, estas pessoas não ficam atentas sobre o que realmente interessa, que é a justificação formal para os argumentos visualizados e não a sua memorização.

Já sobre a importância da visualização no estudo de Matemática, na disciplina Cálculo I, observamos o que afirma Tall (1991a):

> No entanto, negar a visualização é negar as raízes de muitas das nossas mais profundas ideias matemáticas. Nos estágios iniciais do desenvolvimento da teoria das funções, limites, continuidade, etc, a visualização provou ser uma fonte fundamental de ideias. Negar essas ideias aos alunos é como cortá-las das raízes históricas da disciplina [11]. (TALL, 1991a, p. 105, tradução nossa)

A visualização está interligada com a Matemática e a literatura a tem sido apontada como uma possibilidade para vencer dificuldades que os alunos possuem na compreensão de

[10] In this kind of visualization our mental objects and their mutual relationships concerning the aspects which are of interest for us are merely represented by diagrams that constitute a useful help in our thinking processes. One could say that in many cases such diagrams are similar to mnemotechnic rules.

[11] Yet to deny visualization is to deny the roots of many of our most profound mathematical ideas. In the early stages of development of the theory of functions, limits, continuity &c, visualization proved to be a fundamental source of ideas. To deny these ideas to students is to cut them off from the historical roots of the subject.

muitos conceitos trabalhados pelos professores. Conforme diagnosticado nas pesquisas dos seguintes autores em Educação Matemática, a visualização é apresentada como uma ferramenta facilitadora; entretanto, pode se tornar uma vilã ao trabalho dos professores e na aprendizagem dos alunos se for usada incorretamente (TALL, 1991a; VILLARREAL, 1999; GUZMÁN, 2002; ARCAVI, 2003; PRESMEG, 2006).

Não existe um tipo específico de tecnologia para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos da disciplina de Cálculo. As possibilidades podem variar de acordo com o que o professor dispõe, ou pelos tipos de conhecimentos que ele pretende trabalhar para que os alunos consolidem sua aprendizagem, sendo indispensável o seu papel na elaboração das atividades que os alunos irão realizar. Desse modo, o pensamento visual ocupa um lugar de destaque nas representações gráficas, nos processos algébricos, geométricos e numéricos, utilizando alguns tipos de representações do conhecimento para caracterizar o processo de aprendizagem (DUVAL, 2011).

Em relação ao trabalho do professor, o papel da visualização ocupa uma valorização significativa, como destacado por Frota (2013):

> Analisados do ponto de vista da formação de professores, os resultados indicam mudanças na prática docente dos pesquisadores que desenvolveram cada uma das investigações. Ao desenharem e conduzirem na própria sala de aula atividades com um foco na utilização dos processos de visualização, de forma que se envolvessem com os seus alunos na exploração de ideias do Cálculo, esses professores e pesquisadores incorporaram tecnologias como ferramentas cognitivas para pensar Matemática. (FROTA, 2013, p. 83-84)

Assim, a visualização tem grande utilidade na formação e no trabalho dos professores de Cálculo. Percebemos uma relação muito próxima entre a atividade docente e o trabalho de pesquisa, neste, os envolvidos constroem situações de ensino e de aprendizagem das mais variadas formas, usando para alcançar seus objetivos, os pensamentos visuais.

Os professores de Cálculo I que pretendem trabalhar com a possibilidade de utilização de tecnologias coadunadas com a visualização, precisam saber que devem refletir sobre o novo papel do professor de Matemática, sendo este um profissional que:

> Reflete sobre a sua própria prática e desenvolve esforços para alterar o foco das tarefas que propõe; cria ambientes de aprendizagem que possibilitam a troca de experiências e a sua construção ou a reconstrução de ideias

> matemáticas, utilizando tecnologias que podem ser consumidas e incorporadas, aos poucos, como ferramentas cognitivas; está consciente de que a utilização de determinada tecnologia em sala de aula depende de seu esforço pessoal para conhecer as potencialidades e as limitações do recurso tecnológico adotado, ou seja, depende de seu esforço pessoal em consumir e incorporar tecnologias, para empregá-las de maneira que mudem as formas de pensar e fazer Matemática com seus alunos. (FROTA, 2013, p. 84)

Refletir sobre tais possibilidades não é uma tarefa fácil, pois temos que repensar e modificar muitas de nossas práticas que acontecem principalmente na sala de aula, e também em como administrar esse novo ator nas aulas de Matemática em tempos modernos (BORBA, 2000; PENTEADO, 2000; BORBA; PENTEADO, 2001).

No caso da presente pesquisa, é necessário pensarmos em atividades investigativas que serão construídas sobre as derivadas e que, na medida do possível, possibilitem oportunidades para nas quais o aspecto da visualização possa ser contemplado de maneira significativa nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos. O *software* será usado no sentido de permear a possibilidade de uma melhor compreensão de como a dinâmica realizada com a visualização é capaz de proporcionar aprendizagem, a partir de gráficos de funções reais de uma variável real e suas derivadas.

A utilização dos computadores para possibilitar a oportunidade de construção de conhecimento remete-nos à visualização computacional, pois a partir dos recursos tecnológicos, temos condições de aprimorar e aprofundar os conceitos e fazer relações que tornam possíveis os conhecimentos sobre as funções que são trabalhadas na disciplina Cálculo I. Essa ideia foi também relatada por Machado (2008, p. 111), mostrando que “A visualização computacional é uma ferramenta matemática e científica para favorecer a compreensão, análise e predizer um pensamento visual”.

Mesmo pensando em uma função qualquer, relativamente simples, como uma função polinomial do primeiro ou do segundo grau e supondo que ela seja de uma determinada forma, ao digitar sua expressão algébrica em um *software*, por exemplo, o GeoGebra, aquela função torna-se uma imagem que passa a ser concreta no desenvolvimento do pensamento visual. Dessa forma, torna-se possível que os olhos captem algo que é processado na parte cognitiva e em seguida, ocorrem as articulações, pensamentos, ideias, relações, formalizações, conjecturas, demonstrações e definições.

Nosso objetivo ao usar o *software* GeoGebra para a visualização é tentar oportunizar um melhor entendimento na construção do conhecimento de funções das propriedades que envolvem suas derivadas. Assim, a partir da dinâmica que o *software* pode proporcionar, iremos construir atividades que orientem a prática de professores para uma oportunidade de aprendizagem para seus alunos.

Desse modo, recorrendo aos estudos investigativos com o uso de tecnologias que foram sugeridos por Gravina e Santarosa (1998), para quem os objetos matemáticos podem proporcionar a construção de conhecimento através de suas múltiplas representações, acreditamos que o *software* GeoGebra, que será utilizado nessa pesquisa, possibilita as manipulações algébrica e geométrica e, com isso, proporciona a visualização durante as investigações.

Como as derivadas trabalham com funções e representações gráficas, as pesquisadoras ainda destacam que:

> [...] a uma função, pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou uma representação matricial numérica que evidencia variações quantitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 11)

Portanto, neste trabalho, a visualização será usada como uma ferramenta para evidenciar as variações qualitativas das funções em operações com os gráficos das derivadas, para auxiliar na compreensão de conhecimentos sobre esses conteúdos. A visualização, assim, será aqui concebida como o ato de fazer percepções de informações visuais mediadas por objetos matemáticos que, a partir de conexões feitas sobre eles, possam permitir uma reflexão coerente sobre os assuntos abordados e quais caminhos foram mais favoráveis para a construção das definições.

Assim, finalizamos esse capítulo afirmando que a visualização representa um componente indispensável para o trabalho com os gráficos das funções e suas derivadas, pois representa um método que pode ser usado para perceber informações de desenvolvimento de um Pensamento Matemático Avançado por meio de funções manipuláveis e por tecnologias que proporcionem a sua construção.

Capítulo 3

O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

> Cada indivíduo tem a sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo – aqueles indivíduos que são considerados "o professor nato". Mas sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que a vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre teoria e prática é o que chamamos pesquisa. (D'AMBROSIO, 1998, p. 91)

3.1. Fazendo uma opção metodológica

Este capítulo tem por finalidade descrever, dentre outros, a forma como foram coletados os dados dessa pesquisa e também detalhar os procedimentos durante a sua realização. Não foi fácil estabelecer essa caminhada, pois qualquer pesquisador passa pelos momentos de se pensar em uma melhor forma de fazer a sua coleta, análise e interpretação dos dados e saber se o que está fazendo é necessário e suficiente para conseguir respostas para a sua questão de pesquisa ou para o seu problema, que se tornou um item a ser melhor compreendido.

Para a obtenção dos dados, a metodologia utilizada foi a da pesquisa qualitativa, que tem sido um eixo que está norteando trabalhos dentro da Educação e, consequentemente, em Educação Matemática (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; ALVES, 1991; BOGDAN; BIKLEN, 1994; ALVES-MAZZOTTI, 1998; DUARTE, 2002; GOLDENBERG, 2004; BICUDO, 2012; BORBA; ARAÚJO, 2012; FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

A pesquisa qualitativa tem sido um procedimento científico usado para encontrar resultados; desse modo, apresentaremos alguns significados e características básicas que foram usadas para poder relacioná-la ao contexto da sala de aula do professor de Cálculo I. Relatamos, inicialmente, a concepção de Bicudo (2012) sobre esse tipo de pesquisa:

> O *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, [...] Entende-se que a noção de rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores. (BICUDO, 2012, p. 116, grifo da autora)

Entre as principais características que são fundamentais para a realização de uma pesquisa / investigação qualitativa, observamos o que foi apontado por Bogdan e Biklen (1994):

> 1. Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...] 2. A investigação qualitativa é descritiva. [...] 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. [...] 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. [...] 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-50)

Dessa maneira, Lüdke e André (1986, p. 1) relatam que "para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele". Assim, para promover tal confronto, foram necessárias leituras de artigos, livros, dissertações e teses, bem como de todos os materiais complementares das disciplinas do nosso curso de Mestrado, que proporcionaram a ampliação de "olhares" mais profundos para a análise dos resultados dessa pesquisa. Logo, tornam-se mais claras nossas argumentações compreendendo que "o resultado da pesquisa é associado ao objetivo e à abordagem metodológica utilizada" (BORBA; ARAÚJO, 2012, p. 24).

A seguir, retomamos nossa questão de investigação e os objetivos propostos, visando abrir mais diálogos sobre o processo metodológico para a construção dessa Dissertação.

3.2. Retomando a questão de investigação e os objetivos

No capítulo anterior, foram discutidos os fundamentos teóricos usados para pensar e elaborar as atividades desenvolvidas para se perceber a visualização de derivadas com o uso de tecnologias. Ainda com base nessa fundamentação teórica, no próximo capítulo, iniciaremos a descrição e a forma como os instrumentos de análise foram eficazes para pensar e aplicar essas atividades, na tentativa de responder a seguinte questão de investigação:

Que contribuições a realização de atividades exploratórias com o uso do GeoGebra pode trazer à aprendizagem de Derivadas a partir da visualização?

Com a elaboração dessa questão de investigação foi possível construir alguns objetivos para se iniciar a pesquisa, conforme já descritos anteriormente, mas que precisam ser retomados, por fazer parte das discussões sobre as opções metodológicas feitas pelo pesquisador.

Segundo o descrito por Borba e Araújo (2012), a pesquisa em Educação Matemática, no que diz respeito aos seus resultados, sendo interconectados pela questão de investigação e pelos objetivos construídos pelo pesquisador e na sua elaboração teórica, em muitos casos, representa oportunidades de perceber o crescimento e o amadurecimento de seus olhares ao encontrar as respostas para o problema proposto.

A partir do objetivo central, surgem os objetivos específicos que proporcionam momentos para esclarecer fatos, por vezes, inerentes às práticas docentes. Conforme abordado no capítulo inicial, foram eles: Investigar o ensino de Cálculo no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior e das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM; Elaborar, testar e avaliar atividades exploratórias com o *software* GeoGebra, relacionadas à análise de gráficos utilizando derivadas de uma função real de uma variável real; Apresentar um conjunto de atividades exploratórias relacionadas às Aplicações de Derivadas: análise de gráficos com a utilização de *softwares*, para disciplinas de Cálculo I em cursos de Licenciatura em Matemática ou da área de ciências exatas, como Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Retomaremos novamente esses objetivos, com o intuito de verificar sua realização / validação, nas considerações finais.

3.3. Discutindo sobre a pesquisa no Ensino Superior

Foi na realização do trabalho em sala de aula de Cálculo I com nossos alunos, que percebemos que a visualização de derivadas com o uso de tecnologias precisava de mais estudos e, desse modo, optamos por uma abordagem investigativa na qual pudéssemos encontrar os meios necessários para compreendê-la.

Como as relações existentes em sala de aula podem originar pesquisas, optamos por pesquisar o professor de Matemática do Ensino Superior, como faço parte dessa classe, buscamos alguns resultados sobre as atividades desenvolvidas, com o intuito de contribuir para um redirecionamento da prática pedagógica de professores de Cálculo I, no Ensino Superior. Com essas expectativas, observamos o que foi apontado por Lüdke e André (1986) em relação ao propósito do desenvolvimento da pesquisa nas diversas áreas, direcionando-a também para a Educação:

> O que queremos é aproximá-la da vida diária do educador, em qualquer âmbito em que ele atue, tornando-a um instrumento de enriquecimento do seu trabalho. Para isso, é necessário desmistificar o conceito que a encara como privilégio de alguns seres dotados de poderes especiais, assim como é preciso entendê-la como atividade que requer habilidades e conhecimentos específicos. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 2-3)

Aqui, os dados foram coletados apoiando-nos em algumas ferramentas que foram coerentes, decisivas e dinâmicas no direcionamento das respostas que foram encontradas, proporcionando assim, um melhor entendimento do problema pesquisado.

Temos consciência de que fazer pesquisas no Ensino Superior não tem sido uma tarefa fácil. Algumas dificuldades foram apontadas por Igliori (2009), que alerta sobre o desenvolvimento de investigações nesse nível de ensino e, especialmente, em Cálculo:

> A nosso ver, o debate sobre o processo de ensino e aprendizagem, no nível superior, é especialmente intricado por haver, da parte de muitos professores, algumas expectativas, em geral não correspondidas, sobre os conhecimentos prévios dos estudantes. É fato indiscutível que é alto o percentual de estudantes do nível superior cujo desempenho na aprendizagem da Matemática, em especial de Cálculo, tem deixado muito a desejar. A nosso ver, a pesquisa tem papel fundamental no levantamento de causas e na indicação de caminhos a serem trilhados na busca de melhorias. (IGLIORI, 2009, p. 12)

Desse modo, o campo de pesquisas nesse nível ainda continua fértil, necessitando de mais estudos, como proposto nesse trabalho, no qual buscamos o levantamento de causas e a indicação de possíveis caminhos a serem trilhados.

Suscitamos tal discussão, pois os sujeitos de nossa pesquisa foram 4 (quatro) Professores do Ensino Superior (cuja formação e atuação serão detalhados posteriormente), com experiência docente em Cálculo. Desse modo, trabalhar com esses professores foi uma oportunidade para tentarmos encontrar contribuições relevantes à investigação proposta no presente trabalho.

3.4. Reafirmando a opção metodológica

Retomando a questão da opção metodológica, observamos nas características da pesquisa qualitativa apontadas por Bogdan e Biklen (1994), que o pesquisador precisa tomar algumas posturas durante a sua realização, sendo que o ambiente natural, em nosso caso, foi composto pelo laboratório de informática, no qual os professores de Cálculo I, tentaram enxergar a contribuição da visualização das derivadas em atividades exploratórias com o uso do *software* GeoGebra. O processo compreendeu a etapa em que os professores exploraram as atividades e, com isso, teceram considerações sobre o papel da visualização nos processos de ensino e aprendizagem. A forma como a pesquisa foi conduzida, à luz do processo de construção de significados, buscou direcioná-la para uma eficiência do método utilizado. O uso da indução nos permitiu fazer o planejamento usando os conhecimentos construídos ao longo da pesquisa, para notar quais seriam as questões mais importantes a serem trabalhadas durante a elaboração e realização das atividades exploratórias com o uso da tecnologia. Tentamos observar o modo como os professores trouxeram sentido para a visualização das derivadas e como isso poderia se tornar um diferencial para as aulas de Cálculo I, implicando na construção das definições e significados dos conceitos relacionados às derivadas.

Permanecendo no contexto da pesquisa qualitativa, percebemos que, enquanto pesquisador, buscamos interagir, relacionar, discutir e, na maioria das vezes, participar do processo de realização da pesquisa. Apoiando, nesse sentido, nas ideias de Alves (1991), para quem:

> [...] a realidade é uma construção social da qual o investigador participa e, portanto, os fenômenos só podem ser compreendidos dentro de uma perspectiva holística, que leve em consideração os componentes de uma dada situação em suas interações e influências recíprocas, o que exclui a possibilidade de se identificar relações lineares de causa e efeito e de se fazer generalizações de tipo estatístico. [...] conhecedor e conhecido estão sempre em interação e a influência dos valores é inerente ao processo de investigação. Partindo desse pressuposto, não se pode, no processo de investigação, deixar de valorizar a imersão do pesquisador no contexto, em interação com os participantes, procurando apreender o significado por eles atribuído aos fenômenos estudados. É também compreensível que o foco do estudo vá sendo progressivamente ajustado durante a investigação e que os dados dela resultantes sejam predominantemente descritivos e expressos através de palavras. (ALVES, 1991, p. 55)

Desse modo, compreendemos a importância de, enquanto pesquisador, participarmos do ambiente natural da pesquisa, mesmo parecendo que ele pode ter influenciado ou indicado certos resultados da pesquisa. Nessa investigação, permanecemos sem influenciar nas respostas dos professores, os quais puderam fornecer suportes para as construções de nossas interpretações a partir de suas respostas coerentemente analisadas. Assim, consideramos que, enquanto pesquisador, utilizamos a abordagem de investigação qualitativa, o que nos exigiu um constante repensar, para que o "[...] mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49).

Podemos avaliar que durante a realização das atividades adotamos um tipo de observação participante, isso representa um elemento indispensável para perceber o que os professores falavam, como agiam, sobre o que era mais importante a ser abstraído com a visualização dos gráficos das derivadas. Assim, nosso objetivo foi tentar chegar mais perto das perspectivas dos participantes, tendo uma compreensão e interpretação mais coerente, possibilitando o acompanhamento com a observação dessas atividades no ambiente em que foram desenvolvidas, pois "na medida em que o observador acompanha *in loco* as experiências diárias dos sujeitos, pode tentar apreender a sua visão de mundo, isto é, o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 26, grifo das autoras).

3.5. Delineando os instrumentos para a coleta de dados

Sabemos que os instrumentos de pesquisa podem variar de pesquisador para pesquisador e de trabalho para trabalho; nesta investigação, eles ocuparam um lugar privilegiado nas discussões, argumentações, justificações e nas evidências para a defesa dos resultados encontrados pela pesquisa.

Nessa pesquisa, os instrumentos consistem nas ferramentas dispostas e selecionadas pelo pesquisador, desde a sua caminhada inicial com a escolha do seu problema, para permitir encontrar as alternativas que determinarão as possíveis respostas à sua questão de investigação, até as suas últimas etapas: a elaboração das análises e conclusões, a partir dos resultados, tratados de uma forma hermenêutica.

Para escolher os instrumentos que auxiliaram na coleta dos dados, alguns autores de metodologia nos ajudaram a direcionar como esses elementos poderiam ser utilizados de forma efetiva para que essa pesquisa pudesse ter os dados coletados e analisados com a margem de segurança esperada.

Os dados coletados foram oriundos de: diário de campo do pesquisador, atividades exploratórias com o uso do *software* GeoGebra, gravador em áudio e questionário. No decorrer das atividades, percebemos algumas ocorrências que precisavam ser anotadas e que apareceram de forma repentina, proporcionando a expansão de ideias e abstrações sobre as questões que iam surgindo. Assim, fizemos tais registros em nosso diário de campo, que é "[...] o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 150).

Por fim, nosso instrumento mais valioso para a coleta de dados com os professores, após a realização das atividades exploratórias, foi o questionário. Goldenberg (2004) apresenta algumas vantagens em relação ao seu uso:

> 1. É menos dispendioso; 2. Exige menor habilidade para a aplicação; 3. Pode ser enviado pelo correio ou entregue em mão; 4. Pode ser aplicado a um grande número de pessoas ao mesmo tempo; 5. As frases padronizadas garantem maior uniformidade para a mensuração; 6. Os pesquisados se sentem mais livres para exprimir opiniões que temem ser desaprovadas ou que poderiam colocá-los em dificuldades; 7. Menor pressão para uma

> resposta imediata, o pesquisado pode pensar com calma. (GOLDENBERG, 2004, p. 87-88)

A mesma autora ainda destaca algumas desvantagens do questionário, pois ele pode apresentar um baixo índice de respostas detalhadas pelos participantes e ainda exigir a habilidade para ler e disponibilidade para escrever. Cientes dessas desvantagens, ainda assim optamos pelo questionário, pelo fato de nossos participantes serem Professores de Matemática do Ensino Superior, muito comprometidos com sua participação em nossa pesquisa desde o início dos contatos que realizamos.

3.6. Apresentando o Questionário de Avaliação das Atividades

Optamos por elaborar um questionário com 5 (cinco) questões abertas, relacionadas à nossa problemática de investigação. As questões seguem abaixo:

1) Como você, enquanto Professor de Matemática do Ensino Superior, avalia sua participação na realização dessas atividades exploratórias envolvendo Aplicações de Derivadas com o uso do GeoGebra?
Descreva:

2) Você considerou que essas atividades contribuíram, de alguma forma, para sua experiência docente de Cálculo?
Justifique:

3) Essa estratégia de trabalho, na qual apresentamos as atividades exploratórias de forma guiada, contribui para a visualização e conjecturação sobre os conteúdos estudados?
Comente:

4) Dentre os tópicos de Aplicações de Derivadas explorados nas atividades, em quais e em que aspectos a utilização do GeoGebra contribuiu para uma aprendizagem de forma mais significativa?
Detalhe:

5) Você faria alguma sugestão de mudança ou acréscimo nas atividades ou na sua forma de realização?
Fique à vontade:

A análise dos questionários será feita no próximo capítulo e norteará a escolha dos eixos de análise.

3.7. Apresentando o *software* GeoGebra

O *software* GeoGebra[12] foi um outro instrumento utilizado para capturar os dados durante a realização das atividades propostas aos professores, sendo um recurso tecnológico computacional; a interface usada foi a do plano bidimensional ou $\mathbb{R}^2$. Como as atividades são de derivadas de funções de uma variável real, ele se enquadrou adequadamente para auxiliar no estudo das funções pretendidas. Para se desenvolver pesquisas ou estudar as derivadas no plano tridimensional ou no $\mathbb{R}^3$, já existe uma versão que foi criada recentemente e que também pode ter os seus arquivos baixados para Smartphones, Tablets, etc. Esse *software* foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em um ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universidade de Salzburg, localizada na Áustria e tem dado continuidade ao seu desenvolvimento e aperfeiçoamento na Florida Atlantic University, localizada nos Estados Unidos da América.

Ressaltamos que o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivadas e integrais de funções, e ainda oferece comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Desse modo, o programa reúne as ferramentas tradicionais de Geometria com outras mais adequadas à Álgebra e ao Cálculo, permitindo a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Notamos que a principal característica do *software* GeoGebra é possibilitar uma interação dinâmica entre áreas da Matemática, em que os conteúdos de derivadas de funções se enquadram, tendo assim uma oportunidade para serem melhor compreendidos. Com isso, a

---

[12] Essas informações foram consultadas na biblioteca virtual: <http://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Acesso em: 12 de novembro de 2014.

sua escolha foi feita pela opção de proporcionar um dinamismo ao usuário, assim, o *software* se adapta de maneira coerente para realizar pesquisas no Ensino Superior por meio da visualização de gráficos de derivadas de funções.

3.8. Discutindo sobre as atividades exploratórias

Inicialmente, podemos enquadrar o conjunto de nossas atividades exploratórias como uma sequência didática que, segundo Zabala (1998, p. 18) são um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

As sequências didáticas se mostram necessárias ao trabalho de todo professor e são elas que também orientam a sua prática e permitem consolidar os objetivos educacionais que foram propostos para determinados conteúdos pedagógicos. Shulman (1986), ao estudar os conhecimentos de professores, apresentou categorias que trouxeram um melhor entendimento do que é o conhecimento pedagógico do conteúdo, assim definido pelo pesquisador:

> [...] é o conhecimento pedagógico, que vai além do conhecimento do domínio do assunto por ser o domínio da dimensão do conhecimento do assunto para o ensino. Eu falo ainda de conhecimento de conteúdo aqui, mas em particular da forma de conhecimento do conteúdo que incorpora os aspectos do conteúdo mais pertinente para a sua habilidade de ensino. Dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo incluo, para os tópicos que são mais regularmente ensinados em uma área específica, a maioria usam formas de representações dessas ideias, as mais influentes são: analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. Em uma palavra, as formas de representar e formular um assunto para torná-lo compreensível aos outros. Desse modo, não são as únicas formas eficientes de representações, o professor deve ter em mãos um verdadeiro armamento de formas alternativas de representações, alguns dos quais derivam de pesquisa enquanto outros se originam no saber da prática[13]. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa)

[13] […] is pedagogical knowledge, which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching. I still speak of content knowledge here, but of the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability. Within the category of pedagogical content knowledge I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations - in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others. Since there are no single most powerful forms of representation, the teacher must have at hand a veritable armamentarium of alternative forms of representation, some of which derive from research whereas others originate in the wisdom of practice.

Para esse autor, não é necessário somente o conhecimento do conteúdo para se trabalhar na sala de aula, mas também é fundamental o domínio pedagógico do conteúdo, que não representa simplesmente uma lista de estratégias, mas uma percepção de como e quando utilizá-las para proporcionar aos alunos uma melhor compreensão e construção do conhecimento.

À luz dessa discussão, a ênfase maior de nossas atividades exploratórias é permitir a exploração dos gráficos que serão construídos no *software* GeoGebra com possibilidades para detectar contribuições para o ensino e a aprendizagem de gráficos de derivadas, por meio da visualização. Durante o processo de exploração, temos a oportunidade de fazer conjecturas, rever definições, conceitos, propriedades e exemplos. Utilizando esse caminho, os professores terão a oportunidade de avaliar as funções propostas ficando atentos ao seu potencial e aos pontos mais relevantes, bem como as suas contribuições para o ensino por meio da visualização de gráficos de derivadas na disciplina de Cálculo I. Concordamos que "as seqüências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir" (ZABALA, 1998, p. 20).

Neste trabalho, especificamente, nos apoiaremos na ideia de uma atividade exploratória com características apropriadas ao contexto de investigação matemática, trazendo possibilidades de experimentação e exploração que podem ocorrer durante a sua realização. Nessa perspectiva, Pimentel e Paula (2007), em um estudo que abordou a dinâmica dos processos de aprendizagem, apontam que:

> As explorações propostas, livres ou guiadas, levavam os alunos a tecerem intuições, inferências e conjecturas que ao serem sistematizadas produziam novas inferências e conjecturas em outro nível de elaboração, que necessitavam de novas sistematizações mais sofisticadas que, por sua vez, levavam a novas inferências..., num processo recorrente. Uma multiplicidade de situações, criações e aprendizagem emergiram desse processo. (PIMENTEL; PAULA, 2007, p. 2)

Assim, nossas atividades exploratórias representam um conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem.

3.9. Apresentando as atividades exploratórias

Atividade Exploratória 1A

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o **domínio** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a **imagem** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as **raízes** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os **pontos críticos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de **extremos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de **crescimento e decrescimento** da função:

Sugestão:

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a **concavidade** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de **pontos de inflexão** da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os **limites no infinito** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de **assíntotas**:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

Atividade Exploratória 1B

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$\mathrm{f}\,(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se: (Idem Atividade 1A).

Atividade Exploratória 2A

* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{4+x^2}{4-x^2}$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se: (Idem Atividade 1A).

Atividade Exploratória 2B

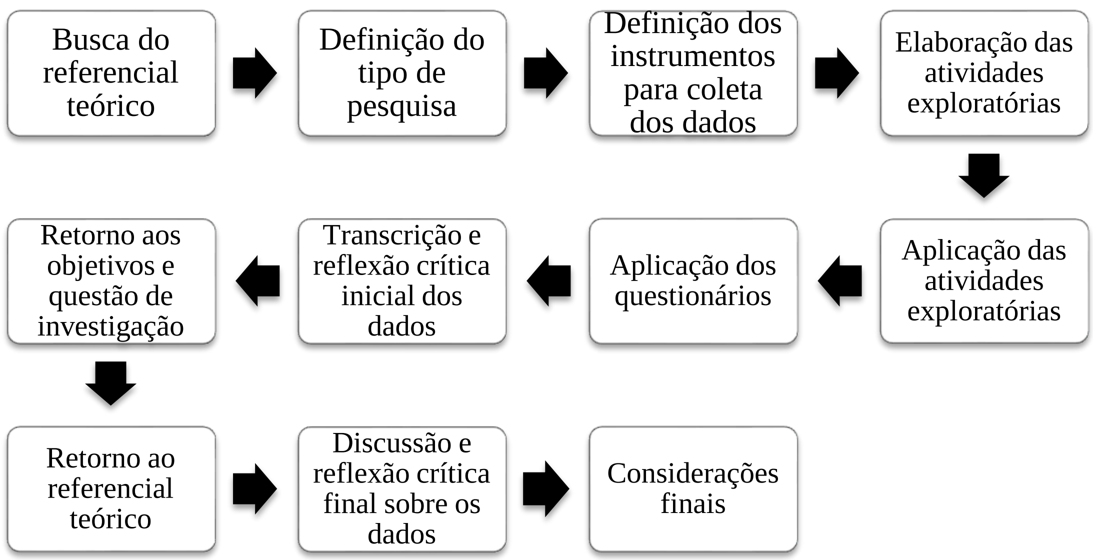
* Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{x^2+7x+3}{x^2}$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se: (Idem Atividade 1A).

3.10. Resumindo nosso percurso metodológico

De forma sintética, apresentamos a tabela a seguir, que reflete um pouco do nosso esforço para a elaboração e realização do percurso metodológico.



Esquema 1. Síntese do percurso metodológico. Fonte: Autor.

Capítulo 4

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

> Deve-se analisar comparativamente as diferentes respostas, as ideias novas que aparecem, o que confirma e o que rejeita as hipóteses iniciais, o que estes dados levam a pensar de maneira mais ampla. Este momento exige muito tempo de reflexão e dedicação para se tirar o máximo de ideias de cada resposta conseguida. É o ponto em que se percebe com mais nitidez o estilo do pesquisador: seu conhecimento teórico acumulado durante anos, sua criatividade para analisar cada dado e seu bom senso. (GOLDENBERG, 2004, p. 94)

4.1. Os caminhos para encontrar os atores da pesquisa e alguns entraves

Os critérios utilizados para a escolha dos professores que participaram de nossa pesquisa foram: trabalhar com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; possuir Mestrado na área de Matemática Pura ou de Educação Matemática; ser professor em uma Instituição de Ensino Superior Pública ou Privada; e disponibilizar-se a participar da pesquisa no Laboratório de Educação Matemática da UFOP para realizar as atividades exploratórias.

Assim, iniciamos o contato com alguns professores com esse perfil enviando um e-mail, falando a respeito do nosso projeto de pesquisa e de como seria a sua participação, devendo retornar o e-mail com sua resposta, caso esta fosse negativa para a participação, entraríamos em contato com outro professor de mesmo perfil até conseguirmos todos os professores para a investigação. Felizmente, os 4 professores contatados inicialmente aceitaram prontamente participar da pesquisa.

Conforme já foi apontado por Igliori (2009) no capítulo anterior, sobre algumas dificuldades no desenvolvimento de pesquisas no Ensino Superior, relataremos algumas delas encontradas nessa investigação para que possíveis investigadores fiquem atentos e se organizem quanto aos entraves que, eventualmente, possam ocorrer durante o processo de coleta de dados com Professores de Matemática do Ensino Superior.

Cabe salientar que o pesquisador que pretender realizar investigações com Professores de Matemática do Ensino Superior deve fazer um planejamento a longo prazo, para tentar amenizar alguns problemas que podem acontecer, pois tentar reunir um corpo docente desse nível de ensino, em um único local e horário, é muito complicado, sendo que, em nossa experiência, as principais dificuldades encontradas foram seus encargos de trabalho, tais como: aulas na graduação, atendimento aos alunos, horários destinados a projetos de pesquisa, reuniões departamentais, reuniões de colegiado, viagens para congressos, além de outras tradicionalmente típicas da carreira docente.

4.2. Identificando os participantes da pesquisa

As atividades foram realizadas no dia 3 de outubro de 2014, no turno vespertino; para realizá-las, foram selecionados 4 professores que serão descritos abaixo. Dessa forma, os professores foram divididos em duplas que chamaremos de dupla A e de dupla B, cada dupla foi formada por um professor com mais experiência docente e outro iniciante na carreira docente superior. Assim, dividimos as atividades exploratórias da seguinte forma: a Dupla A realizou as atividades 1A e 2A no horário das 14:00 às 15:30 h, enquanto a Dupla B realizou as atividades 1B e 2B no horário das 16:00 às 17:30 h.

Durante a descrição dos dados, optamos por identificar os professores por nomes fictícios para manter o seu anonimato; assim, os professores da dupla A receberam as iniciais de sua dupla (A_1 e A_2), o mesmo critério foi adotado para os professores da dupla B (B_1e B_2). Também nos apresentaremos nessa descrição como pesquisador e orientador.

Descreveremos algumas informações gerais a respeito dos professores que foram selecionados para essa pesquisa, tais informações foram consultadas na página da Plataforma Lattes[14] que, quando atualizada, descreve um pouco de sua vida profissional e acadêmica.

O professor A_1 trabalha numa universidade privada chamada Centro Universitário de Belo Horizonte – UNIBH; possui Licenciatura em Matemática e especialização em Análise de Sistemas por essa mesma instituição e Mestrado Profissional em Educação Matemática pela UFOP, tem pesquisado algumas relações existentes entre a imagem conceitual e a definição conceitual no ensino de Limites e Continuidade no Cálculo Diferencial e Integral I; possui 15 anos de experiência docente no Ensino Superior, ministrando as disciplinas de Cálculo I, II e III; já lecionou também outras disciplinas como: Geometria Analítica, Equações Diferenciais

[14] As informações foram coletadas na página da Plataforma Lattes do CNPq: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/busca.do?metodo=apresentar>. Acesso em: 10 de outubro de 2014.

Ordinárias, Álgebra Linear, Lógica da Matemática, Estruturas Algébricas, Estágio Supervisionado, Matemática e Informática; também já foi professor em uma escola estadual de Belo Horizonte; foi coordenador do curso de Licenciatura em Matemática e orienta trabalhos de conclusão de curso; é revisor de uma revista especializada em Belo Horizonte; atualmente, orienta projetos de Iniciação Científica na área de imagem conceitual e definição conceitual no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Equações Diferenciais Ordinárias.

Já a professora A_2 é efetiva na categoria de Assistente em um dos *campi* da UFOP, possui Licenciatura em Matemática pela UFOP e Mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, fez pesquisa na área de Topologia, estuda os Sistemas Dinâmicos em Bilhares Convexos; trabalha no Ensino Superior com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, possui 4 anos de experiência com essa disciplina; já trabalhou também com outras disciplinas como: Equações Diferenciais Ordinárias, Álgebra Elementar, Matemática Aplicada, Álgebra Vetorial, Geometria Analítica; foi professora substituta do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET e também trabalhou na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUCMinas; atualmente, orienta projetos de Iniciação Científica na área de Topologia e Sistemas Dinâmicos.

O professor B_1 é efetivo da área de Matemática em um dos *campi* do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET, este professor possui Licenciatura em Matemática pela UFMG, Especialização em Matemática na área de Geometria Plana também pela UFMG e Mestrado Profissional em Educação Matemática pela UFOP, tendo pesquisado o conceito de Derivadas no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral com o uso de *softwares* matemáticos; trabalha no Ensino Superior com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, possui 14 anos de experiência com essa disciplina; também ministrou: Geometria Analítica, Equações Diferenciais Ordinárias, Álgebra Linear e Metodologia do Ensino da Matemática; já trabalhou como professor de Matemática da rede municipal de Belo Horizonte e também foi professor do Centro Universitário Instituto Metodista Izabela Hendrix – IMIH e da PUCMinas. Trabalhou como professor substituto em um dos *campi* da UFOP; atualmente orienta projetos de Iniciação Científica com imagens conceituais de Derivadas e o uso de *softwares* no ensino de Cálculo.

O professor B_2 é professor efetivo na categoria de Assistente em um dos *campi* da UFOP, possui Bacharelado em Matemática pela UFOP e Mestrado em Matemática Pura pela UFMG, sua pesquisa foi na área de Equações Diferenciais Parciais, estudando soluções da equação do calor por meio do grupo de renormalização; trabalha no Ensino Superior com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, possui 3 anos de experiência com essa disciplina; já ministrou também outras disciplinas, tais como: Álgebra Linear, Geometria Analítica, Análise Real I, Equações Diferenciais Ordinárias; foi professor em uma escola estadual de Belo Horizonte e também na PUCMinas; foi substituto em um dos *campi* da UFOP e tutor do curso de Matemática – EAD pela UFMG; desenvolve a função de professor orientador do Programa de Iniciação Científica promovido pela OBMEP; atualmente, orienta projetos de Iniciação Científica na área de análise de soluções de Equações Diferenciais Parciais por meio do grupo de renormalização.

4.3. Descrevendo as atividades exploratórias

Optamos por descrever as atividades separadamente, ainda que a análise que encerra o capítulo tenha sido feito com base no conjunto de todas as atividades.

4.3.1. Descrevendo a Atividade 1A

A Dupla A recebeu as Atividades 1A e 2A que foram pensadas a partir de exemplos adaptados do livro de Cálculo (FLEMMING e GONÇALVES, 2006), envolvendo alguns conteúdos tais como: domínio, imagem, raízes, pontos críticos, extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas. Também receberam um notebook com o *software* GeoGebra instalado e pronto para realizar as atividades. Eles decidiram que um deles ficaria manipulando o *software* e outro ficaria preenchendo as folhas das atividades. Segundo o relato dos professores o ambiente estava agradável e propício para o desenvolvimento das atividades.

Durante a realização dessas atividades, foi utilizado um gravador de áudio para registrar o diálogo entre os professores e ainda o diário de campo do pesquisador para fazer as anotações que fossem necessárias e importantes naquele momento. Todos os dados construídos pelos professores no *software* GeoGebra foram gravados em dispositivo de armazenamento no computador, como solicitado pelo pesquisador. Eles receberam as atividades enumeradas e foram informados que receberiam, posteriormente, o questionário de avaliação das atividades por e-mail, proporcionando assim, um maior dinamismo para coletar os dados.

Destacamos que a transcrição literal total do áudio (das duas duplas) durou 3 h e originou 60 páginas de texto, cujos pontos interessantes serão aqui evidenciados. Para facilitar o trabalho com a análise, utilizaremos uma sequência para os diálogos, como por exemplo, o primeiro diálogo D_1, o segundo diálogo D_2, etc.

Para a atividade 1A foi apresentada a seguinte função polinomial:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$$

Conforme o que se pedia na questão, os professores plotaram o gráfico da função no *software* GeoGebra e, depois de alguns instantes, ao aparecer o gráfico na tela do computador, perceberam que a escala precisava ser alterada para proporcionar uma melhor interpretação dos dados da questão; desse modo, o pesquisador os auxiliou e eles utilizaram o recurso apropriado (EixoX:EixoY), escolhendo a escala mais conveniente, que foi a 1:10 que representa 1 em x e 10 em y, conforme mostra a figura abaixo :

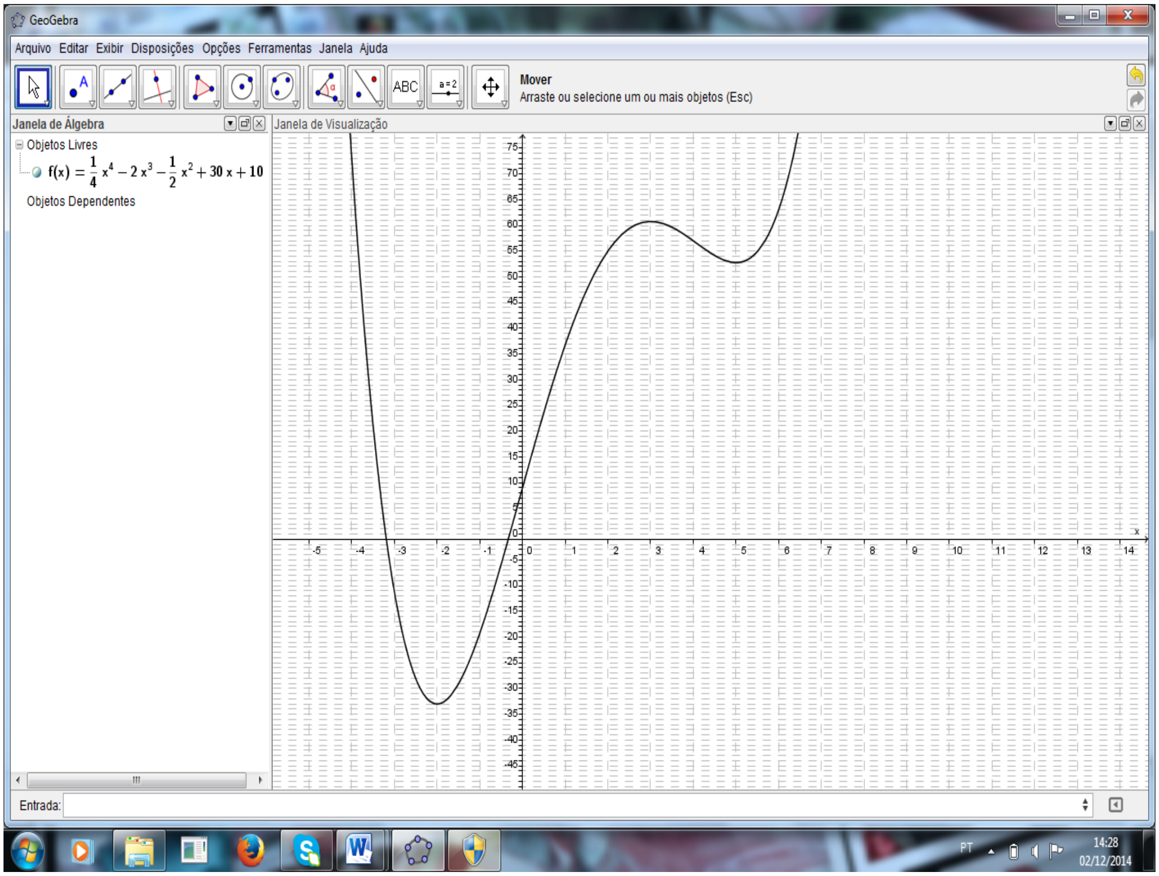


Figura 1. Gráfico de f (x) na Atividade 1A.

O item 1 da atividade pedia para encontrar o domínio da função. Depois de plotar o gráfico da função, os professores passearam ao longo do eixo x para verificar seu domínio, constatando que o domínio dessa função polinomial corresponde a todos os valores reais. Em um fragmento do diálogo entre eles para essa resposta, temos:

> Notamos que existe uma tendência dos alunos para olharem o gráfico nas proximidades de sua origem e esquecem que existem infinitos pontos que podem ser percorridos pela função para tentar verificar se tem algum problema e, talvez devido aos exemplos construídos em anos anteriores onde os professores ao construírem o gráfico de uma função mais simples no quadro trabalhavam as informações mais próximas de sua origem ou simplesmente, como é polinomial então $x \in \mathbb{R}$ e isso ainda acontece até hoje, assim, temos como ver um pouco que $x \in \mathbb{R}$ e, desse modo, o *software* está ajudando a dar uma melhor dinâmica para saber o que está acontecendo com a função no decorrer das mudanças dos valores de x. Você concorda, colega? Sim, o *software* GeoGebra está dando uma melhorada nisso aí. Entretanto, iremos passear até quando para saber que o domínio são os reais? Podemos perder muito tempo só com esse item da questão e nesse momento é

> necessário fazer menção do algébrico que também é muito importante. Perguntamos aos alunos: vocês conseguiram ver o domínio completo da função? Então, é por isso que vamos usar a Álgebra para completar o nosso entendimento. (D_1 da Dupla A)

Em seguida, eles passaram para o item 2 da atividade, que pedia para encontrar a imagem da função. Passearam pela função na direção do eixo y para tentar encontrar pontos distintos para a imagem e não encontraram mais nada abaixo de $y = -32$. Assim, o intervalo para a imagem da função conforme foi detectado pelo gráfico construído, que o *software* permitiu enxergar, foi o intervalo $[-32, +\infty)$.

Continuando, no item 3 da atividade que solicitava encontrar as raízes da função, os professores destacaram que a função era polinomial do 4° grau e possuía 4 raízes, sendo 2 delas reais e as outras duas, complexas; depois fixaram a atenção no gráfico da função e perceberam que as raízes reais estavam sendo mostradas no *software* e, com isso, puderam aproximá-las, sendo uma delas entre -4 e -3 e a outra entre -1 e 0. Mas eles não se contentaram com essa aproximação e mencionaram o seguinte:

> A nossa aproximação ficou muito distante do valor que é esperado, apesar da questão só pedir para aproximar. Estamos tentando passar o cursor, mas os números que estão aparecendo ficam difíceis de serem distinguidos, pois a escala deixa os números próximos demais e não está dando para ver direito quem são esses valores. Vamos então colocar dois pontos diferentes e chegar o mais próximo de $y = 0$ que teremos uma resposta mais legal, pois essa daqui não faz muito o nosso estilo. Criando agora o ponto A e o ponto B, vamos aproximá-los com o cursor até o local pretendido. Agora sim! Deu um resultado mais coerente para os valores das raízes e, assim, com uma casa decimal a resposta ficou sendo o ponto A = $(-3{,}1;\ 0)$ e B = $(-0{,}3;\ 0)$. Esses são os pontos da nossa aproximação usando o GeoGebra. Sim, agora sim! Com esse procedimento, ficou legal. (D_2 da Dupla A)

Prosseguindo agora para o item 4 da atividade que solicitava analisar os pontos críticos da função, os professores apagaram o ponto B da resposta anterior e construíram a reta tangente, fixando nela o ponto A e ficaram explorando a função, subindo ou descendo, tentando perceber o que acontecia ao deslocá-la. Fizeram isso no *software* e dava para ver que existiam três pontos críticos; a respeito do que aconteceu, afirmaram:

> Conseguimos ver quando a reta tangente está em cima dos pontos críticos, ela fica praticamente horizontal ao eixo x e é essa a definição que usamos para

> mostrar aos alunos que existem os pontos críticos, sendo eles máximos ou mínimos, podendo ainda ser locais ou absolutos. Ao verificar a posição quando a reta fica em cima deles, temos os seguintes pontos encontrados: temos um ponto de mínimo que é absoluto e está localizado em $(-2, -32)$, depois um máximo relativo em $(3;\ 61{,}75)$ e, por último, um mínimo relativo em $(5; 53{,}75)$. Desse modo, conseguimos verificar algebricamente quando derivamos a função e igualamos a zero, ou seja, $\mathrm{f}'(x) = 0$. Isso fica interessante quando podemos fazer uma conexão daquilo que o GeoGebra mostra com aquilo que pode ser construído na sala de aula com os alunos: as definições e a visão que o *software* proporciona que são os dois aspectos que precisam ser levados em consideração e associados na hora de se utilizar algum *software* de Matemática nas aulas de Cálculo. (D_3 da Dupla A)

Depois desse momento, os professores passaram para a questão 5 que abriu uma discussão para a existência de extremos. O gráfico da função $\mathrm{f}(x)$ já estava plotado no computador e usando-a, eles construíram a função derivada primeira, ou seja, $\mathrm{f}'(x)$ para localizar as suas raízes, colocaram três pontos em x para saber esses valores. O gráfico construído seguido do diálogo dessa questão confirmam os resultados encontrados:

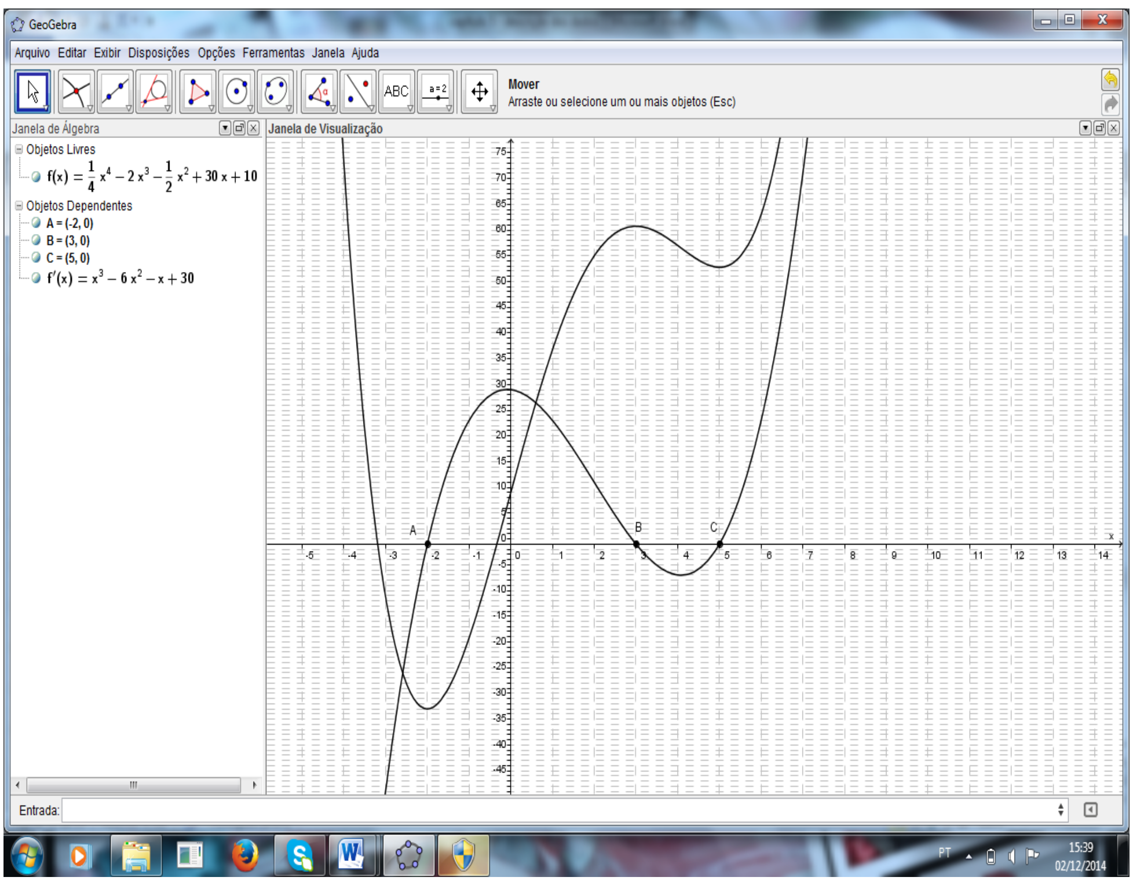


Figura 2. Gráfico de $\mathrm{f}\ (x)$ e de $\mathrm{f}\ '(x)$ na Atividade 1A.

> Quando fazemos a derivada primeira dessa função os valores das raízes ficam em cima do eixo x e essa dinâmica do *software* ajuda a ver quem são esses pontos que direcionam para as definições que trabalhamos com os alunos; tudo fica mais nítido e conseguimos encontrar as repostas com mais facilidade, sendo as raízes mostradas em $\mathrm{A} = (-2, 0)$, em $\mathrm{B} = (3, 0)$ e em $\mathrm{C} = (5, 0)$. Notamos que esse é um dos pontos positivos do *software* GeoGebra. (D_4 da Dupla A)

Avançando agora para a questão 6 que pediu para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função, os professores minimizaram a função derivada primeira e reconstruíram a reta tangente para ver o que acontecia quando ela se deslocava pela função. Desse modo, eles passearam pela função, subindo ou descendo, e viram certa regularidade quando ela passava em certos pontos da função; em um trecho do diálogo, conseguimos perceber esses fatos:

> O *software* GeoGebra nos mostra através da janela de Álgebra quando a reta está com o coeficiente angular positivo a função é crescente, exatamente, nos intervalos de $(-2, 3)$ e $(5, +\infty)$; quando o coeficiente angular é negativo ela é decrescente em $(-\infty, -2)$ e $(3, 5)$; assim ele contribui para reforçar as definições que trabalhamos com os alunos durante as aulas e o bom é que fica tão simples e fácil de ser comprovado. (D_5 da Dupla A)

Na sequência, o item 7 solicitou analisar a concavidade da função. Para auxiliar na análise, os professores construíram o gráfico da segunda derivada no *software* e, durante as interpretações das respostas com os gráficos, ocorreu um momento de confusão sobre qual o gráfico que seria analisado, pois os gráficos estavam com a mesma cor e eles não conseguiam diferenciar a curva correta; eles optaram por mudar a coloração dos gráficos obtendo para a função normal a cor preta, para a função primeira derivada a vermelha e para a segunda derivada, a cor azul; eles ainda minimizaram na janela de Álgebra, as curvas que não seriam usadas naquele momento, conforme a figura abaixo:

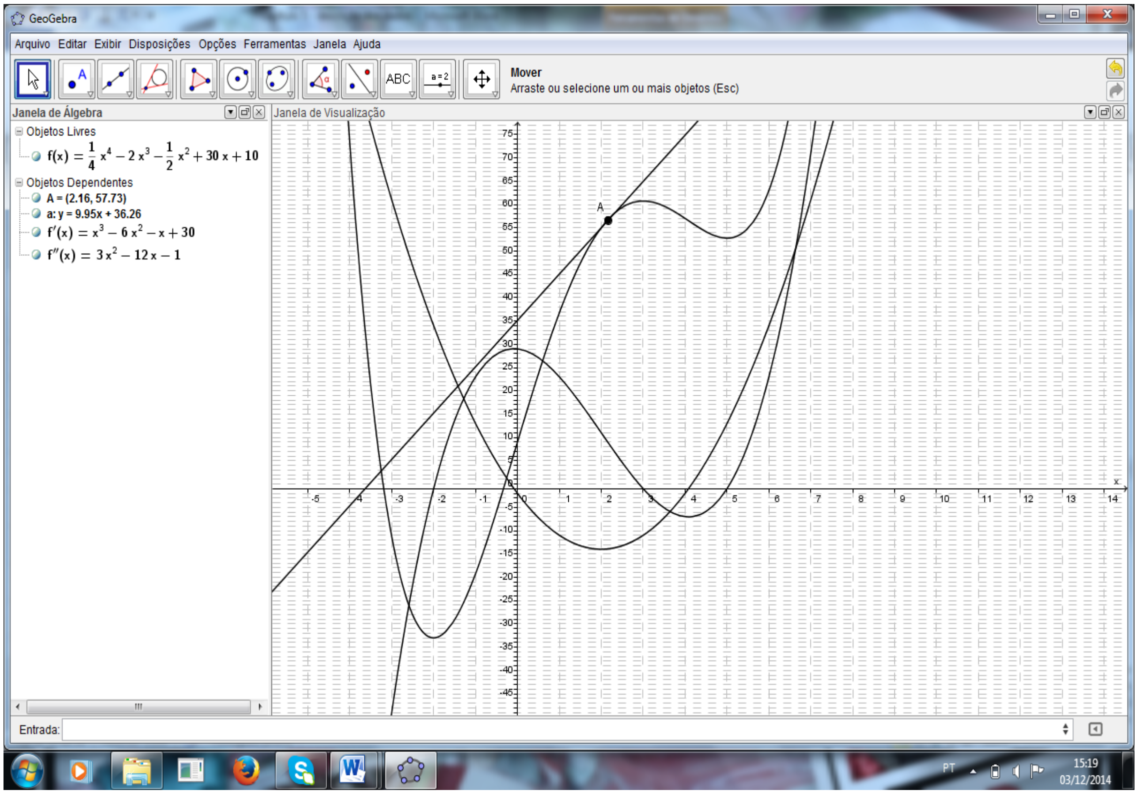


Figura 3. Gráfico com as curvas da mesma cor que dificultaram a visualização e a interpretação de algumas respostas na Atividade 1A.

Após o diálogo para a distinção das cores das curvas, os professores retornaram para a solução das questões olhando para a curva azul plotada no *software* GeoGebra e, movendo a reta tangente, perceberam que as raízes se localizavam próximas de 0 e 4 e, ao mover a reta proximamente a esses locais, a função mudava a sua concavidade, obtendo desse modo, dois pontos em que a função f (x) faz a mudança de sua concavidade.

Partindo agora para o item 8 que almejou saber sobre os pontos de inflexão, os professores utilizaram o *software* GeoGebra para encontrar as raízes da função derivada segunda, conforme o item anterior que sinalizou que elas estavam próximos de 0 e 4; desse modo, eles construíram mais dois pontos para serem colocados em cima do eixo x onde pudessem gerar as raízes, como ocorreu nos itens 3 e 5 da atividade e obtiveram os pontos por aproximação com uma casa decimal, conforme descrito no diálogo abaixo:

> Olha só, aqui vamos colocar mais dois pontos que temos como saber quais são esses de inflexão que estamos procurando, já conseguimos ter uma noção de suas localizações utilizando o *software* e colocando os pontos no eixo,

> temos um em $\mathrm{B} = (0, 0)$ e o outro em $\mathrm{C} = (4, 0)$. Com esse procedimento usado, a atividade fica mais dinâmica em uma aula e torna possível uma interação com as respostas dos alunos que podem ser questionados quanto a esses valores encontrados e as definições que já foram demonstradas. (D_6 da Dupla A)

Partiram, então, para o item 9 que demandou analisar os limites da função no infinito. Durante a solução, os professores ficaram dialogando a respeito do tempo de passeio na função quando x tende para o infinito, para saber se ela vai ou não para o infinito, pois esse procedimento pode ser substituído pela parte da Álgebra sem prejuízo de ensino e de aprendizagem, conforme o relato abaixo que mostra um ponto importante destacado pelos professores em relação a uma limitação do *software* GeoGebra para a atividade:

> Aqui que é complicado! Como o crescimento dela é muito acentuado, o aluno pode concluir que ela tem uma assíntota e ele vai ter que passear pelo eixo x por muito tempo e, talvez isso, geometricamente não seja muito útil, mas algebricamente podemos simplesmente tomando o limite quando x tende ao infinito e resolver logo, considerando o maior dos expoentes o que cresce mais rápido para o infinito apesar de que, tem outros menores na função, mas todos vão para o infinito. Esse é um ponto em que *software* não ajuda tanto, perdemos muito tempo e não conseguimos encontrar uma solução concreta, porém usamos o algébrico que ficou mais claro e preciso, encontramos a solução e os alunos também compreendem com facilidade. (D_7 da Dupla A)

No item 10 da atividade que debateu sobre a existência de assíntotas, os professores relataram que a função $\mathrm{f}\,(x)$ não possuía assíntotas, pois, em primeiro lugar, ela não possuía pontos de descontinuidades e também porque para calcular as assíntotas, precisamos saber para onde a função está indo quando x tende para o infinito e, como não encontraram nada de destaque no item anterior, eles concluíram que a função não possuía assíntotas.

4.3.2. Descrevendo a Atividade 2A

Após da realização da primeira atividade pela Dupla A, o pesquisador salvou os seus registros no *notebook* com a permissão dos professores e percebeu que eles já estavam mais à vontade quanto ao manuseio dos ícones do *software* GeoGebra. Desse modo, iniciaram a Atividade 2A permanecendo cada um com a mesma função da Atividade 1A. Assim, a função que passaram a trabalhar nessa atividade foi uma função racional (quociente entre dois polinômios):

$$f\,(x) \;=\; \frac{4+x^2}{4-x^2}$$

Os professores plotaram o gráfico da função no *software* GeoGebra e não foi necessária uma alteração na escala, pois sua imagem no computador ficou assim:

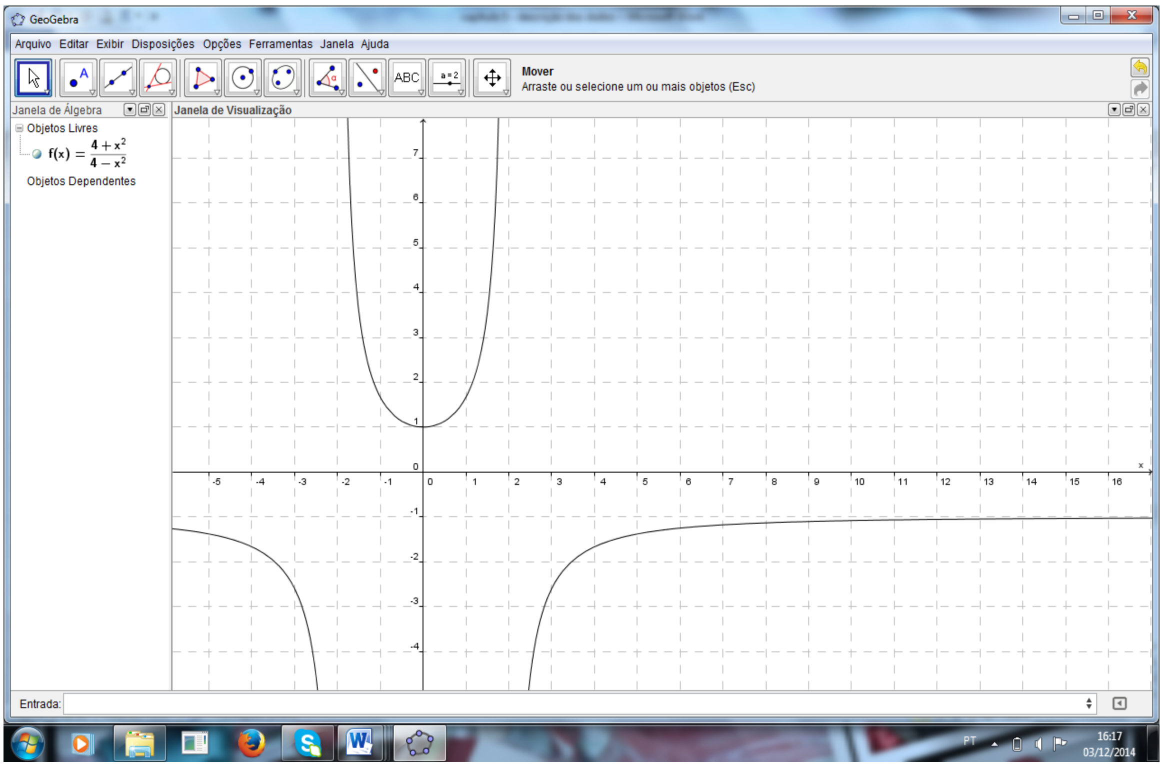


Figura 4. Gráfico de f (x) na Atividade 2A.

Após esse momento, eles começaram a responder o item 1 sobre o domínio da função. Inicialmente, eles começaram a passear nos valores de x tanto para a direita como para a esquerda, procurando alguma informação, quando ocorreu algo que deixou os professores apreensivos quanto à associação do *software* aos conhecimentos de Álgebra usados por professores, durante as aulas de Cálculo I, conforme retrata o seguinte fragmento de diálogo:

> Temos aqui mais uma ideia sobre o passear pela função no *software*, estamos passeando por ela, mas ela não está sugerindo nenhum problema quando olhamos para a tela do computador, tudo está bonitinho e sem apresentar dificuldades. Digitamos a função e ficou tudo beleza e agora, o domínio são os reais? Se ele conseguiu construir todo o gráfico perfeito. Por isso, é interessante associar os conhecimentos de Álgebra para confrontar isso, tudo parece bonitinho, mas se questionamos com os alunos podemos induzí-los a pensar em como o *software* GeoGebra pode nos ajudar e só olhar, não faz muito sentido, no entanto, quando associamos aos valores de $x = -2$ e $x = 2$ encontrados nas operações algébricas, a visão que o *software* nos proporciona acaba sendo bem diferente agora, pode ter certeza disso e o que pode ser feito é: como fazer para pensar usando a tecnologia? O *software* e o conhecimento algébrico precisam caminhar juntos, podemos perceber aqui que um acaba complementando o outro. (D_8 da Dupla A)

O diálogo a respeito do algebrísmo e da tecnologia ainda causou uma intensa discussão e o orientador do projeto finalizou esse momento com o seguinte relato:

> A ideia é conjecturar a partir do *software* GeoGebra e isso mostra que a sua utilização não garante, por si só, o conhecimento; o professor tem que estar firme no conhecimento algébrico, o *software* ajuda a conjecturar e é por isso que a gente pede: verifique algebricamente, verifique algebricamente. Ele tem que demonstrar e não pode acreditar em tudo que o *software* mostra e, com isso, os alunos precisam ser induzidos a utilizar a tecnologia como um apoio para a sua aprendizagem e os professores, como um apoio para as suas aulas. (Orientador)

Partindo para o item 2, que pediu para encontrar a imagem da função, os professores falaram que não havia tanta dificuldade em encontrá-la, olhando para a imagem da função que é fornecida pelo *software*, podendo ser representada por: Im (f) $= (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

Continuando no item 3 sobre as raízes da função, eles mencionaram que, quando olhamos para o gráfico da função e não conseguimos enxergar os valores que tocam no eixo x, concluímos que a função não possui raízes reais.

Em seguida, apareceu o item 4 sobre a análise dos pontos críticos da função. Os professores construíram o ponto A e a reta tangente, conectaram o ponto nela e fizeram o deslocamento no decorrer da curva, visualizando um ponto onde a reta consegue tangente é totalmente horizontal ($x = 0$), comprovando os teoremas de derivadas para as retas tangentes, sendo $f'(x) = 0$ e passeando no gráfico, onde a reta tangente cada vez mais se aproxima da horizontal. Depois, apagaram o ponto e a reta.

Prosseguindo, o item 5 pediu para discutir a existência de extremos. Eles digitaram a função derivada primeira na caixa de entrada do *software* e fizeram a modificação de sua cor para evitar possíveis imprevistos na hora da interpretação dos pontos que poderiam tocar o eixo x, mudando da cor preta para a vermelha. A seguir, marcaram um mínimo local, o ponto $A = (0, 0)$que foi a única raiz de $f'(x) = 0$. Olhando ainda para o *software*, eles comentaram que muitos alunos ficam tentados a dizer que tanto pela direita como pela esquerda de $f'(x)$ irão existir outras raízes e nem tudo que se visualiza é o que realmente é e, por isso, temos que usar a Álgebra para provar, conforme a imagem do gráfico a seguir:

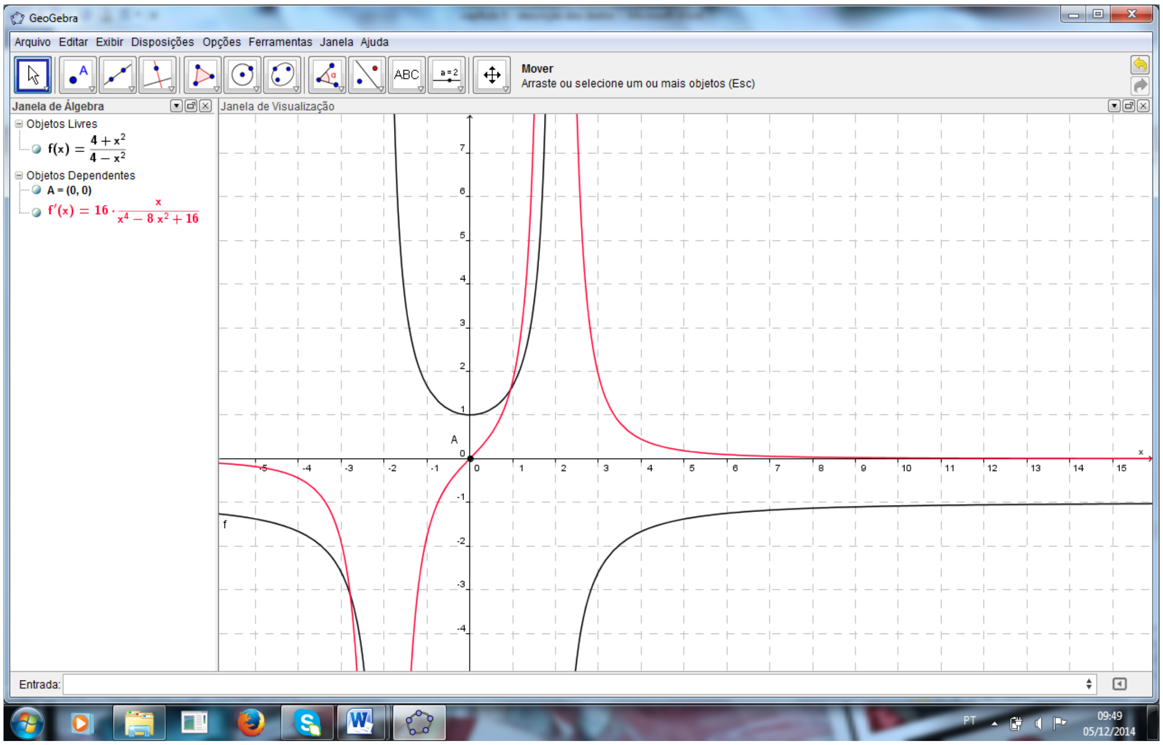


Figura 5. Gráfico que mostra uma dificuldade de interpretação na visualização das raízes de $f'(x)$ na Atividade 2A.

Já no item 6 foi solicitada a análise dos intervalos de crescimento e decrescimento da função. Os professores reconstruíram a reta tangente e o ponto A na curva e começaram a passear pelo gráfico, olhando para a tela e tentando encontrar regularidades durante o deslocamento, como vemos abaixo:

> Vamos deslocar a reta tangente mais uma vez com esse ponto A sobre a curva principal para tentar encontrar algum intervalo de crescimento ou decrescimento. Com o auxílio do coeficiente angular da reta tangente, na janela de Álgebra do *software* GeoGebra, podemos ter uma ideia intuitiva do local onde acontece a mudança do seu sinal. Pelo deslocamento realizado na função, conseguimos visualizar, começando pela esquerda um decrescimento em $(-\infty,\ -2)$ e $(-2, 0)$, depois indo para a direita temos um crescimento em $(0, 2)$ e em $(2, +\infty)$. Aqui, fica mais fácil porque tem uma dinâmica que acontece e só no quadro fica tudo estático e nem sempre temos como ensinar e solucionar essas questões com tanta facilidade assim. (D_9 da Dupla A)

No item 7, pediu-se a concavidade da função. Os professores minimizaram a função derivada primeira, construíram a função derivada segunda e mudaram a sua cor para azul, para não ocorrer confusão na interpretação das informações, fizeram o estudo do seu sinal e encontraram os locais em que os valores seriam positivos ou negativos. Eles destacaram o intervalo de $(-2, 2)$ onde a função é côncava para cima e depois, os intervalos de $(-\infty,\ -2)$ e $(2, +\infty)$ em que ela é côncava para baixo, relataram que a função faz a sua mudança de concavidade "em cima" dos pontos que não estão no domínio.

Seguindo para o item 8, que solicitou a discussão da existência dos pontos de inflexão, os professores olharam para o gráfico da derivada segunda da função, tentaram identificar onde estariam as suas raízes e, no *software*, as informações visuais não ficaram tão claras. Assim, eles começaram novamente a dialogar sobre o papel da visualização com o GeoGebra e a questão da Álgebra como elemento essencial para o trabalho de qualquer professor da disciplina de Cálculo I, como lemos no diálogo e vemos na representação gráfica:

> Digitamos a função derivada segunda no *software* GeoGebra, mas o que sai na tela do computador para visualizar não está fazendo tanto sentido assim. Ela é a de cor azul, mas quem é $f''(x) = 0$? Estamos olhando para a curva azul de um lado para o outro onde toca no x e essas imagens não estão falando quase nada e quando derivamos algebricamente e provamos para os alunos que esses pontos não irão existir na derivada segunda e, com isso, a Álgebra pode tornar a nossa vida mais fácil e se a gente agora pegar os resultados algébricos que foram encontrados, mesmo que de forma mecânica ou tradicional, e confrontar com os resultados visuais construídos pelo *software* GeoGebra, conseguimos dar uma relevância maior para as aulas. O negócio aqui não é só ver, entretanto, você consegue verificar e provar o que está vendo? Isso é o ideal. (D_{10} da Dupla A)

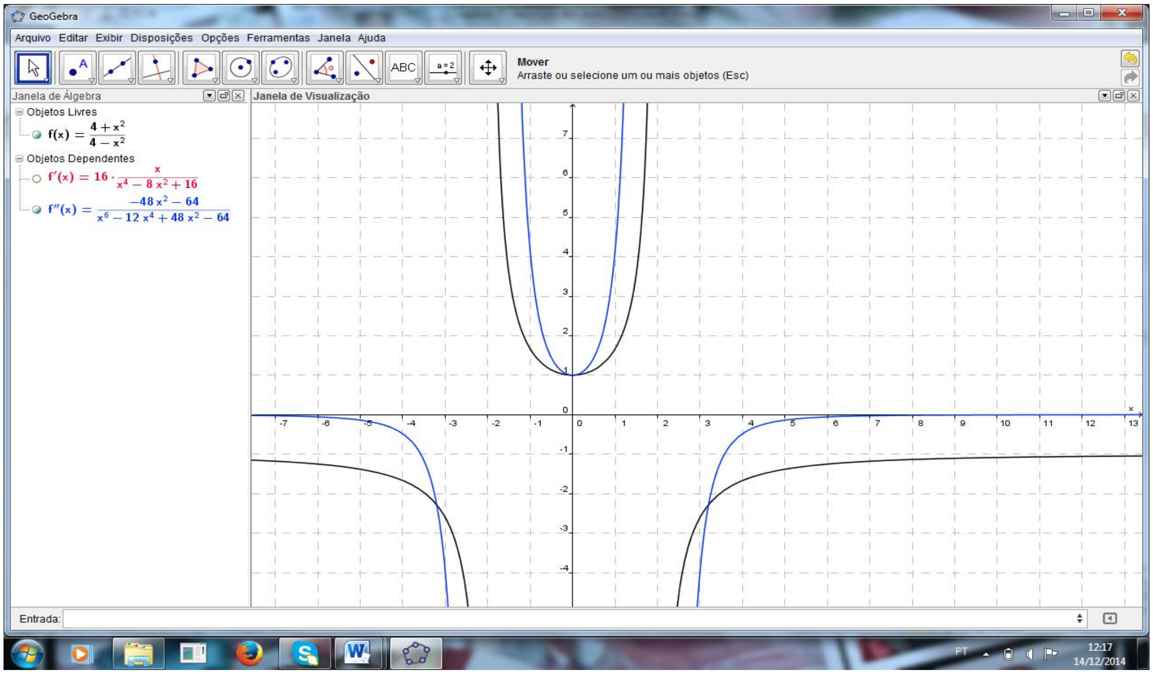


Figura 6. Gráfico que mostra uma dificuldade para visualizar e identificar onde estão as raízes de f $''(x) = 0$ na Atividade 2A.

No item 9 sobre a análise dos limites no infinito, os professores voltaram a questionar sobre até quando devem passear na função para saber o seu limite no infinito. Mencionaram que os aspectos gráficos estão mostrando evidências que, quando se aproxima de alguns pontos, a função tende para o infinito e, durante o passeio, puderam detectar que os valores estão em $x = -2$ e em $x = 2$ e um caso interessante se encontra em $y = -1$. Quando solucionaram algebricamente o valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{4 + x^2}{4 - x^2} = -1$ e também no procedimento quando encontraram os pontos do domínio, sendo que D (f) $= \{x \in \mathbb{R} \, / \, x \neq \pm 2\}$ e concluíram que isso acontecia com a função nos seus pontos de descontinuidade.

O item 10 finalizou a atividade, demandando a discussão da existência de assíntotas. Os professores relataram que esse item agora seria mais fácil, pois já haviam sido encontrados os pontos que permitem saber quem são as assíntotas no item anterior. Eles comentaram que, só passeando pelo gráfico da função, não seria o ideal para enxergar esses resultados, apesar do passeio ajudar a construir uma ideia intuitiva para os limites infinitos e no infinito.

Os professores afirmaram que só os processos algébricos realizados ficam um pouco sem sentido, mas os aspectos visuais, nesse item, ficam bem mais agradáveis de serem visualizados e explorados pelos professores. Apesar de não ter sido solicitado, eles plotaram as retas que representam as assíntotas da função e, com isso, disseram que a visualização ficou ideal, pois mostrou como as definições usadas nessa questão podem ser conjecturadas com os alunos por meio do *software* GeoGebra, conforme mostra o gráfico abaixo:

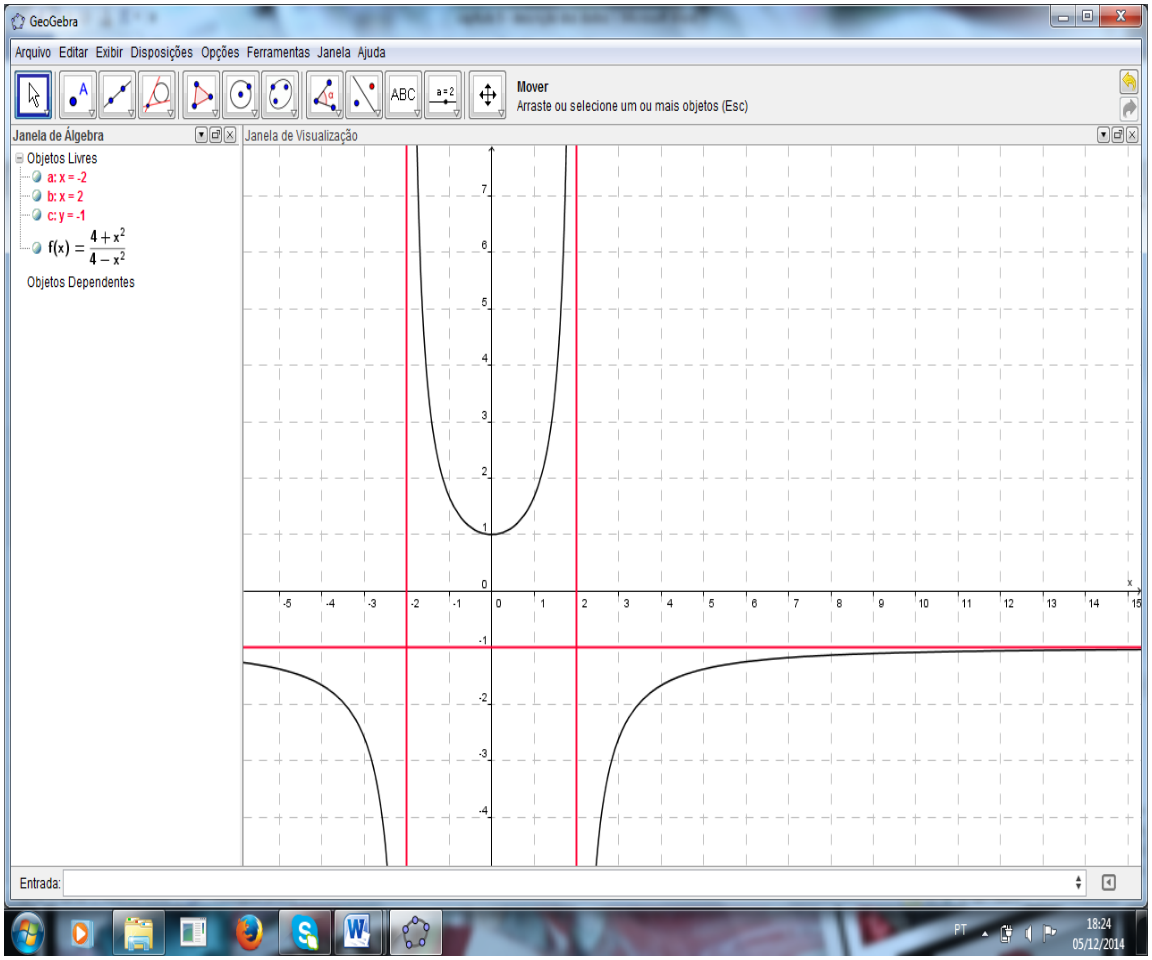


Figura 7. Gráfico que visualiza as assíntotas de f (x) com possibilidades para a realização de conjecturas com os alunos na Atividade 2A.

Com esse último item, os professores finalizaram as atividades que tinham sido propostas a eles; desse modo, o pesquisador fez a seguinte pergunta: na opinião de vocês, essas atividades exploratórias contribuem para o ensino e para a aprendizagem de gráficos de derivadas a partir da visualização? Eis uma parte do diálogo gerado:

> Para mim, contribuem sim. Elas permitem ver o que está acontecendo com a função, conseguimos ver o seu deslocamento ou o movimento do ponto, da

> reta e das derivadas encontradas, os motivos para compreender o que representa aquele ponto de máximo ou de mínimo, onde a função muda a sua concavidade, o porquê da função ir para o infinito, podendo entender os motivos de aproximação das assíntotas e nunca tocá-las e essa é a oportunidade de justificar as definições já realizadas e tudo em tempo real, em que a mídia tradicional seria difícil para se trabalhar nas aulas de Cálculo I. Já para mim, a principal contribuição é justamente a facilidade para se trabalhar esses conteúdos que, para os alunos iniciantes ou repetentes são difíceis, as coisas são mais dinâmicas e, mesmo se errar ou coisa parecida, dá para você rever as definições e colocar outros exemplos mais simples ou complexos, tentando associá-los à intuição que os alunos precisam ter para aprender. Podemos aproveitar aquilo que os alunos estão enxergando para inserir as definições e os exemplos. Essas atividades favorecem a aprendizagem, mas antes disso o professor precisa trabalhar as definições e as demonstrações que também são necessárias e suficientes. (D_{11} da Dupla A)

Em seguida, agradecemos à participação dos professores e passamos à próxima dupla.

4.3.3. Descrevendo a Atividade 1B

A Dupla B recebeu as Atividades 1B e 2B que também foram pensadas a partir de exemplos adaptados do livro de Cálculo (STEWART, 2014) com as mesmas propostas de conteúdos que as atividades anteriores, com o mesmo *notebook* com o *software* GeoGebra instalado e equipamento de áudio para a gravação. Eles decidiram que um deles ficaria manipulando o *software* e outro ficaria preenchendo as folhas das atividades, como a dupla anterior. Eles também relataram que o ambiente estava agradável e propício para o desenvolvimento do projeto de pesquisa.

Para a Atividade 1B foi fornecida a seguinte função polinomial:

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$$

Os professores, ao olharem o gráfico gerado na tela do *notebook*, perceberam que a escala não estava coerente para as interpretações. Como um dos professores já estava acostumado a utilizar o GeoGebra, ele manipulou o ícone mover janela de visualização (12ª janela) que auxilia o usuário a modificar os valores dos eixos x ou y de acordo com a necessidade que a função impõe. De acordo com os procedimentos utilizados por ele, o gráfico da função ficou conforme a figura abaixo:

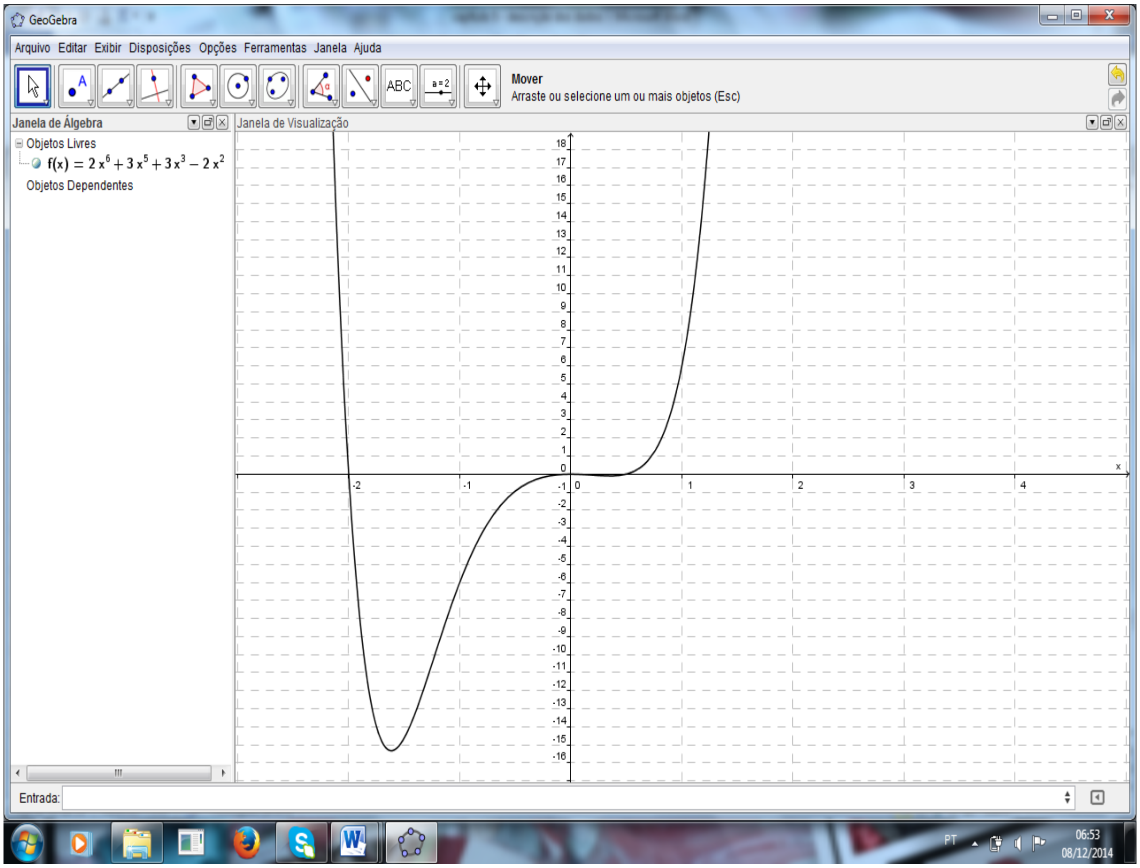


Figura 8. Gráfico de f (x) na Atividade 1B.

O item 1 da atividade pediu para encontrar o domínio da função. Conforme a nossa sugestão, os professores ficaram passeando pela curva nos valores de x para tentar encontrar algum "problema" nesses valores, mas não encontraram e como ela é uma função polinomial, concluíram que seu domínio era formado por todos os $x \in \mathbb{R}$. No entanto, eles relataram o fato dos alunos geralmente trocarem ou confundirem os eixos na hora da interpretação das respostas que são apresentadas nas imagens do *software*, como observamos a seguir:

> Alguns alunos depois de terem estudado funções, pelo menos as elementares, olham para essa função e falam assim: Aqui não tem nenhum problema! Eles olham e vêem que é ilimitado, ficam passeando pela função e quando retornam à questão inicial para ser respondida acabam confundindo os valores do domínio com os da imagem e vice-versa. Os alunos tendem a dar uma justificativa algébrica procurando por algum problema na continuidade dos valores de x e, se eles não encontram, acabam concluindo que são os

> reais. O *software* proporcionou uma compreensão visual de como pode ocorrer intuição no processo algébrico com os alunos. (D_1 da Dupla B)

Seguindo para o item 2 que pediu a imagem da função, eles observaram o que acontecia com os valores de y, subiam e desciam no eixo para ver o que a curva indicava e diagnosticaram que o conjunto imagem da função resultou em um intervalo aproximado de $[-15,3;\ +\infty)$, conforme o que foi sugerido pelo passeio no *software* GeoGebra.

Dando continuidade agora no item 3 sobre a estimação das raízes, os professores argumentaram que essa função polinomial possuía 6 raízes e para saber quem são elas, precisariam do auxílio do Cálculo Numérico, mas como estavam usando o GeoGebra, ele dispõe de um recurso que ajuda na determinação desses pontos, que é a interseção de dois objetos e, com isso, teríamos como saber a quantidade de raízes reais. A questão pedia a natureza e quando eles clicaram na interseção, surgiram 4 raízes reais e, consequentemente, relataram que as outras 2 que não apareceram na imagem do *software* são complexas.

Notamos os seguintes fatos registrados:

> Quando olhamos no *software*, temos a ideia de que possui uma raiz e as outras duas ficam emboladas próximas da origem dos eixos e com o atalho da interseção de dois objetos, conseguimos encontrar exatamente que são os pontos que as representam e só olhando aparece uma dificuldade para saber se tem ou não raízes naquele local e, quando ampliamos a escala e clicamos na interseção a visão desses pontos fica mais clara de ser interpretada, sendo eles em $x = -2$, $x = 0$ e $x = 0{,}5$. Agora, encontrar essas raízes algebricamente no quadro ficaria muito difícil para ensinar fora da disciplina de Cálculo Numérico, perderíamos muito tempo e os alunos iriam perguntar se uma questão dessas cairia na prova e se não, perderiam todo o interesse na sua solução. Quase sempre ficamos com os exemplos mais clássicos de serem trabalhados durante as aulas. (D_2 da Dupla B)

A seguir, trazemos a imagem que foi fornecida pelo *software* GeoGebra e que suscitou a discussão travada acima, a respeito das possibilidades do cálculo exato de todas as raízes da função:

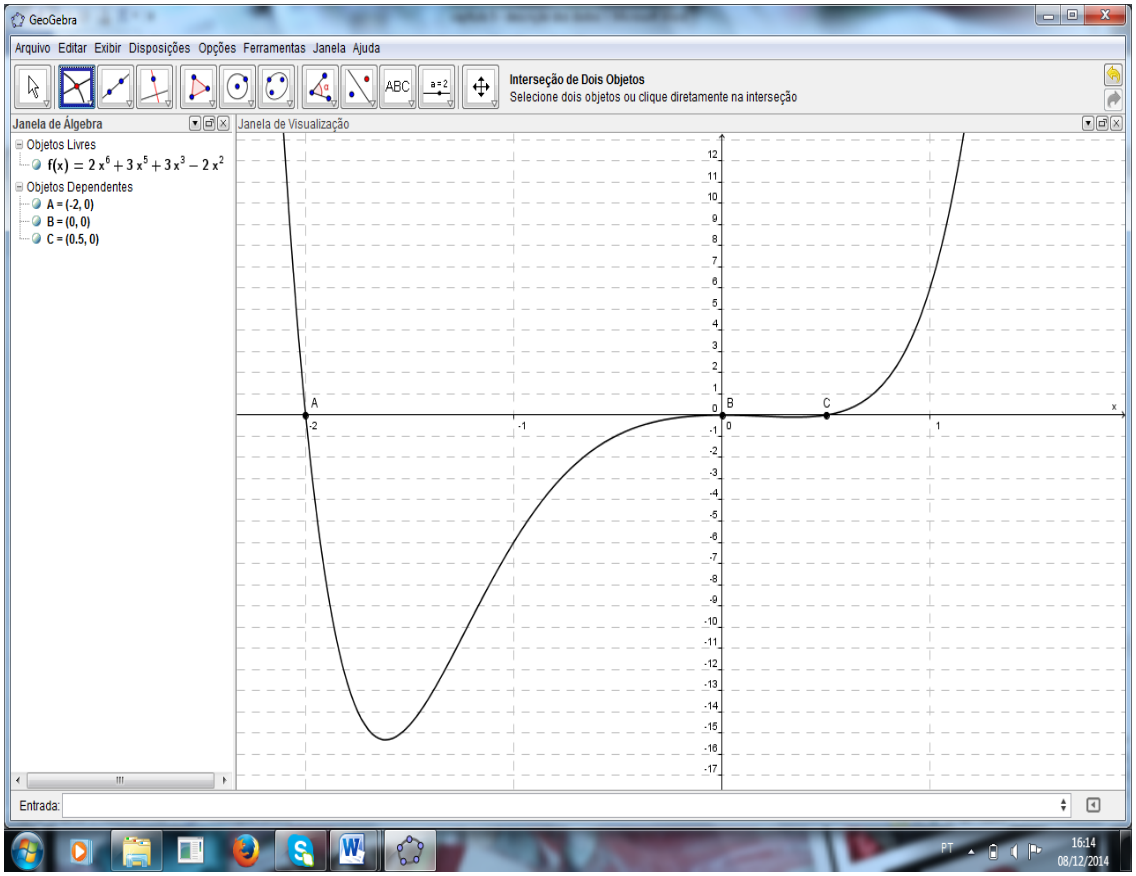


Figura 9. Gráfico de f (x) e os valores exatos de suas raízes na Atividade 1B.

O item 4 solicitou a análise dos pontos críticos da função. Os professores construíram um ponto A e a reta tangente e, em seguida, começaram a passear pela curva tentando verificar a inclinação da reta. Eles afirmaram que a definição da inclinação da reta tangente na curva, sendo ela horizontal, garante a existência dos pontos críticos e, depois de um tempo, conseguiram encontrar os pontos: começando da esquerda para a direita, um mínimo absoluto em $(-1{,}62;\ -15{,}33)$, um máximo local em $(0, 0)$ e um mínimo local em $(0{,}35;\ -0{,}1)$. Comentaram ainda que, se não tivessem ampliado a malha do *software* GeoGebra, esses valores teriam sua visualização dificultada.

Passando agora para o item 5 sobre a discussão de existência dos extremos, os professores apagaram o ponto A e a reta tangente, em seguida, plotaram o gráfico da derivada primeira, a curva de $f'(x)$, fazendo a interseção de dois objetos: o da curva de $f'(x)$ com o eixo x, fornecendo os pontos das raízes quando $f'(x) = 0$. Argumentaram que a janela de

Álgebra do *software* auxilia na confirmação desses valores encontrados, conforme a seguinte ilustração da curva plotada:

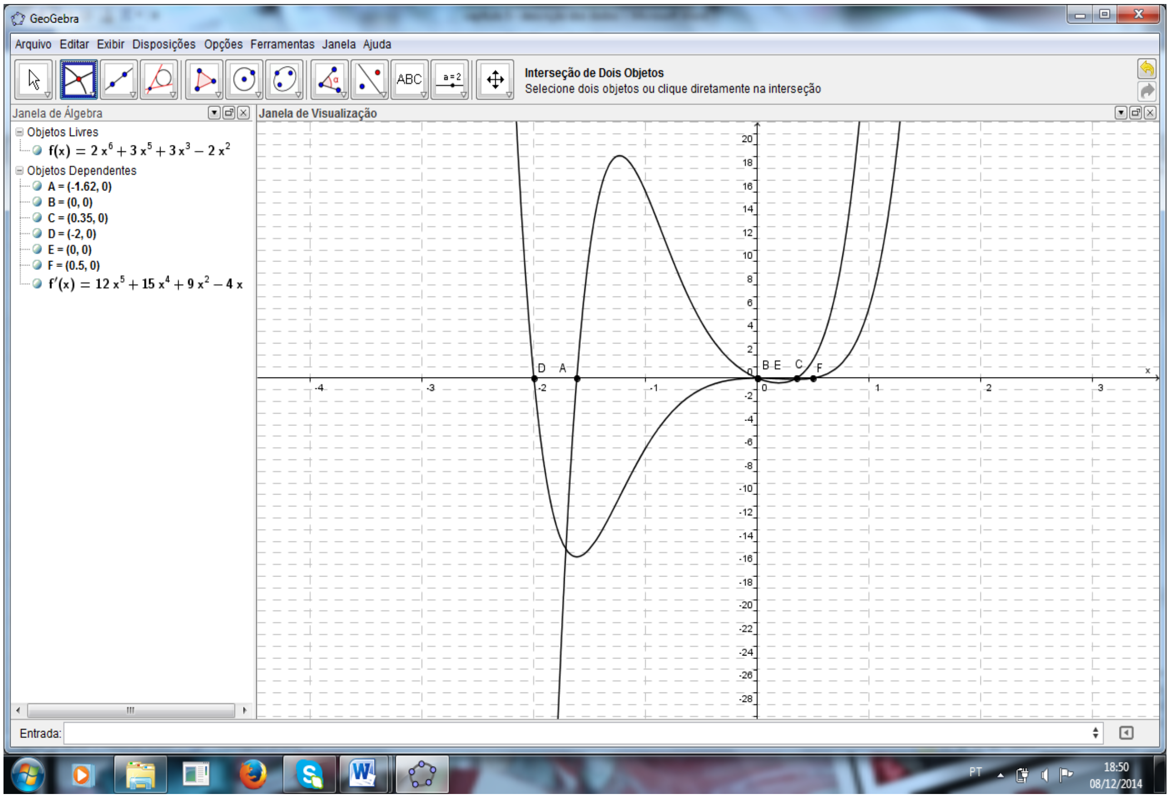


Figura 10. Gráfico de f (x) e f $'(x)$ com as suas raízes destacadas na janela de Álgebra na Atividade 1B.

A seguir, o item 6 pediu para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Nessa etapa, os professores construíram o ponto G, depois a reta tangente e passearam pelo gráfico, vendo o que acontecia com o sinal do coeficiente angular da reta; mencionaram que era esse detalhe que caracterizava os intervalos de crescimento ou decrescimento e, após dialogarem sobre as mudanças do sinal do coeficiente, encontraram os seguintes intervalos que puderam ser visualizados pelo *software* GeoGebra: crescimento em $(-1{,}62;\ 0)$ e $(0{,}35;\ +\infty)$ e decrescimento em $(-\infty;\ -1{,}62)$ e $(0;\ 0{,}35)$.

Na sequência, o item **7** pediu para analisar a concavidade da função. Os professores plotaram a função derivada segunda no *software* e surgiu um amontoado de curvas em um mesmo gráfico, causando dificuldade para interpretar os valores que poderiam ser usados para encontrar as respostas para esse item. A seguir, conseguimos ter uma ideia do que aconteceu pelo diálogo com base no gráfico gerado, logo abaixo:

> Estamos respondendo esse item, mas quando passamos o *mouse* em um ponto da curva, perdemos o foco depois de alguns instantes e não conseguimos saber se estamos analisamos a curva da função original ou da derivada primeira ou da derivada segunda. Esse excesso de curvas está prejudicando aquilo que queremos ver e confirmar como resposta correta; assim, temos que mudar a cor dessas curvas e minimizar as que não estão sendo úteis nesse momento. Vamos deixar só a curva da função normal com a cor preta e a de sua derivada segunda com a cor rosa, em comemoração ao outubro rosa e, sim, agora sim! Encontramos: côncava para cima em $(-\infty;\ -1{,}23)$ e côncava para baixo em $(-1{,}23;\ 0{,}19)$ e $(0{,}19;\ +\infty)$. (D_3 da Dupla B)

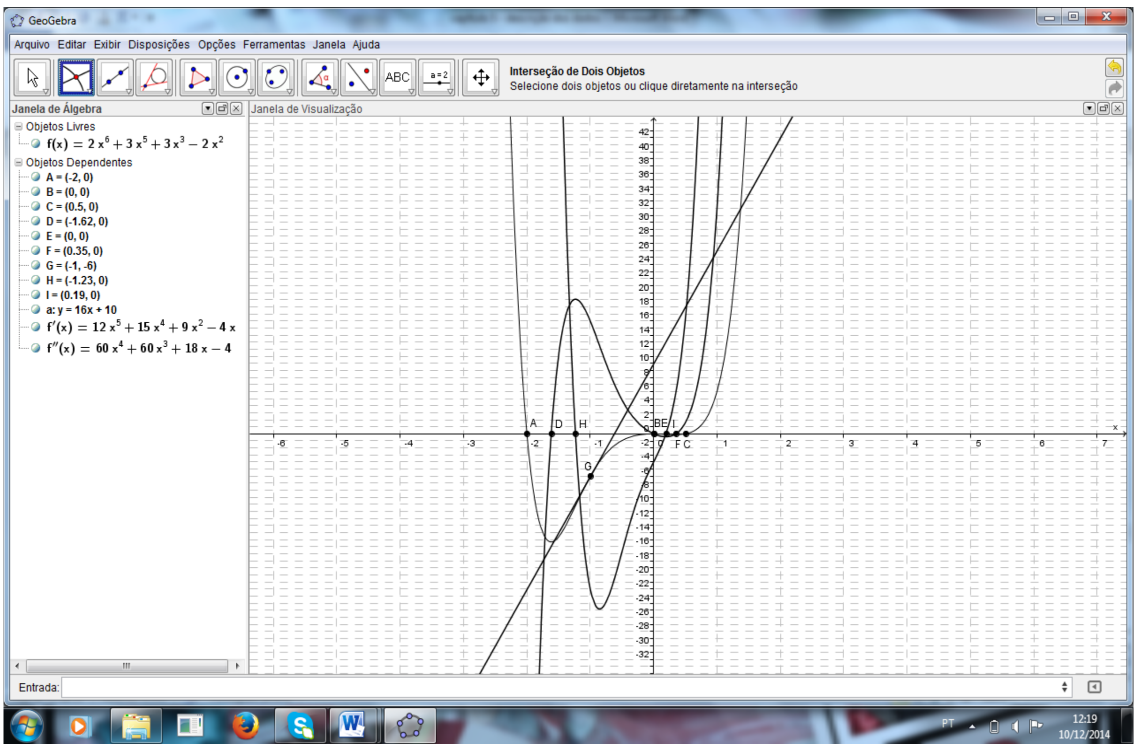


Figura 11. Gráfico que mostra a dificuldade de visualizar os intervalos de crescimento e decrescimento de f (x) devido ao excesso de curvas na Atividade 1B.

Em seguida, o item 8 solicitava a discussão dos pontos de inflexão. Durante a solução, os professores já haviam encontrado as raízes da função derivada segunda no item anterior, mencionaram que, para saber onde ela é côncava para cima ou para baixo, era necessário identificar os pontos que limitam a concavidade, que são os pontos de inflexão. Desse modo, utilizaram o recurso da interseção de dois objetos e encontraram dois pontos: um em $\mathrm{H} = (-1{,}23;\ 0)$ e outro em $\mathrm{I} = (0{,}19;\ 0)$ que podem ser visualizados na curva plotada de $\mathrm{f}''(x)$ em cima do eixo x ou pela janela de Álgebra do *software* GeoGebra.

Continuando no item 9 sobre a análise dos limites no infinito da função, os professores minimizaram as funções, deixaram só a curva de $\mathrm{f}\,(x)$ e reconstruíram a reta tangente com o ponto, deslocando-os ao longo do gráfico da função. Em seguida, questionaram a respeito da limitação do *software*, pois a função cresce e a imagem que é gerada pelo computador está parecendo limitada, como mostra o diálogo abaixo:

> Algebricamente é mais simples tanto para os alunos aprenderem como para o professor ensinar essa questão e, se nós pegamos o ponto que está conectado com a reta e subimos ou descemos na função, de repente não sabemos onde eles foram parar, os perdemos em muito pouco tempo; podemos gastar muito tempo e o que é difícil de visualizar aqui é que o x está indo para o $-\infty$ ou $+\infty$ e para o y, você percebe que ele está subindo ou crescendo, mas não conseguimos visualizar o seu crescimento depois de alguns instantes porque a tela do computador limita o que nós estamos vendo. (D_4 da Dupla B)

O último item foi o item 10 que solicitou a discussão das assíntotas. Como os professores não acharam nenhum ponto de descontinuidade ou limites específicos no infinito da função, concluíram que ela não possuía assíntotas.

4.3.4. Descrevendo a Atividade 2B

Para a realização dessa atividade, foi fornecida a seguinte função racional:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

Os professores receberam a folha com a Atividade 2B, leram as informações iniciais, depois plotaram a função no *software* e ficaram atentos à imagem que seria gerada, para começarem a estudá-la com mais particularidade. Assim, a imagem que foi fornecida pela função no *software* GeoGebra pode ser representa como vemos na figura abaixo:

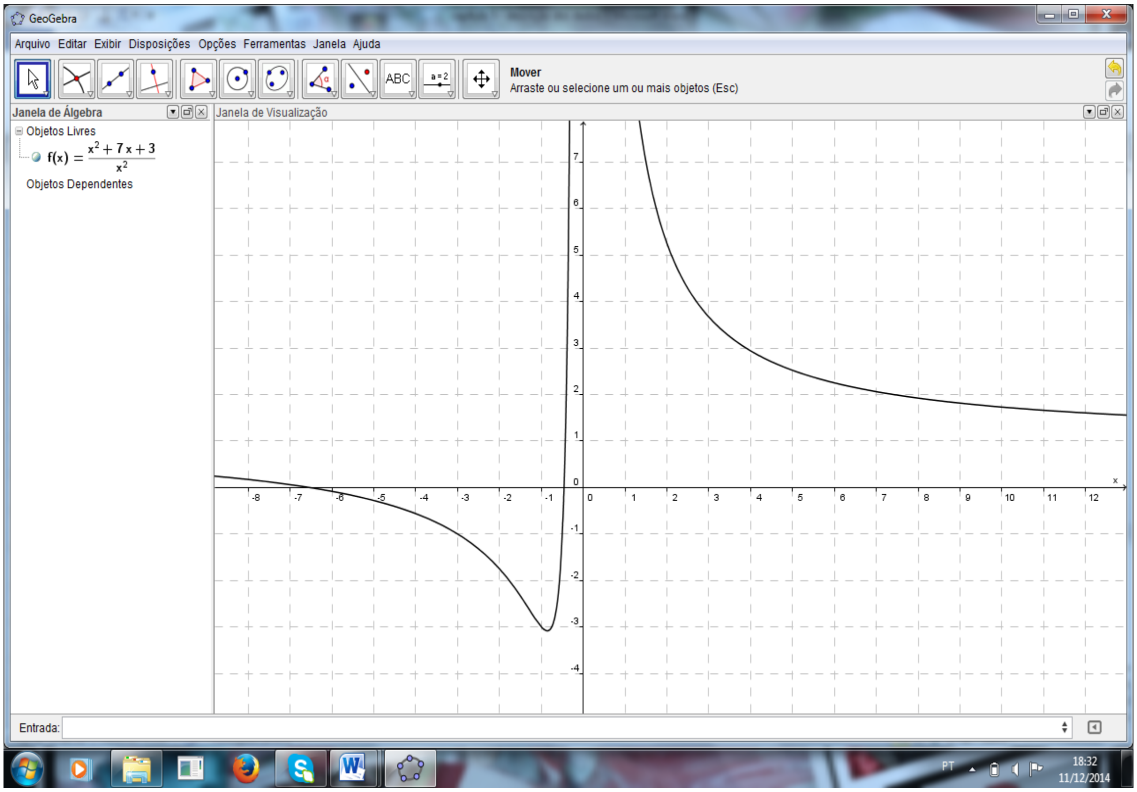


Figura 12. Gráfico de f (x) na Atividade 2B.

O item **1** pediu para encontrar o domínio da função. Os professores fizeram algebricamente na folha de rascunho e encontraram o domínio sendo representado por $\mathrm{D(f)} = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\}$. Com isso, eles passearam pelos valores das abscissas e ficaram olhando para o comportamento de f (x), destacando que a imagem gerada pela curva ajuda a compreender que os valores da função próximos de $x = 0$ não irão existir, ficando claro assim, a não continuidade da função nesse ponto.

Em seguida, ao passarem para o item 2 sobre a determinação da imagem da função, eles passearam pelos valores de y tentando ver o que acontecia com os valores da imagem; relataram que existia um ponto de mínimo que era absoluto. Conforme a visão do gráfico da curva conseguiram identificar que a imagem dessa função resultava em: Im (f) $= [-3, +\infty)$.

Continuando no item 3 a respeito das raízes da função, eles mencionaram que durante o passeio por f (x) nos valores do eixo x, permitiu-se visualizar duas raízes que são reais e, pela intersecção dos objetos, encontraram uma em $\mathrm{A} = (-0{,}46;\ 0)$ e a outra em

B $= (-6{,}54;\ 0)$. Assim, a visualização dessas informações pode ser conferida na figura a seguir:

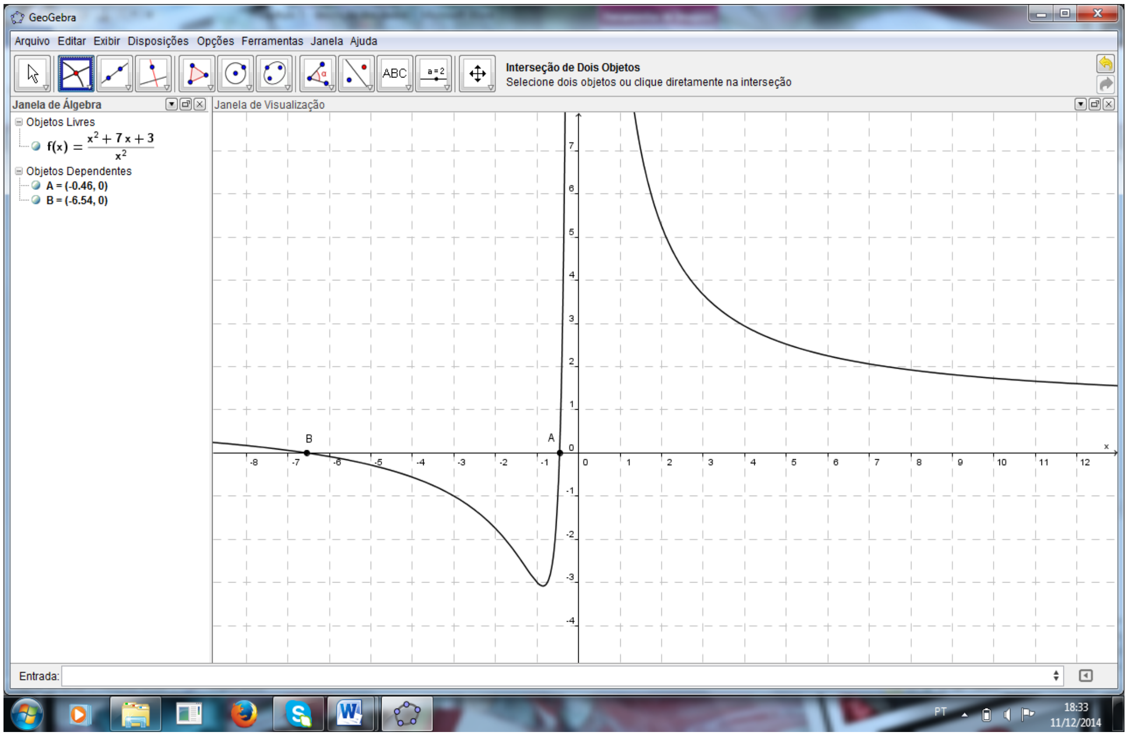


Figura 13. Gráfico que destaca as raízes de f (x) na Atividade 2B.

No item 4, que pediu para analisar os pontos críticos da função, os professores minimizaram os pontos A e B da questão anterior, construíram um ponto C e uma reta tangente mudando a sua cor para vermelha e os conectaram à curva de f (x), tentando ver o local em que a reta fica horizontal para determinar os pontos críticos, pois essa era a definição usada com os alunos durante as aulas, para encontrá-los. Procuraram pelos pontos e conseguiram achar somente um ponto, conforme evidencia o diálogo abaixo:

> Já procuramos e tem somente esse ponto aqui e a visão dele ficou legal. Podemos mostrar para os alunos que as definições podem ser evidenciadas quando usamos algebricamente a primeira derivada e igualamos a zero, ou seja, f $'(x) = 0$ e aqui, irão ser gerados os pontos de máximos ou de mínimos dependendo do tipo de função que é usada. Quando passamos em $x = -0{,}86$ a reta ficou horizontal e em nenhum outro lugar conseguimos essa mesma inclinação; notamos que a visualização nos auxiliou na exploração e na confirmação dessa definição. (D_5 da Dupla B)

As evidências das afirmações feitas nesse diálogo podem ser confirmadas no registro a seguir:

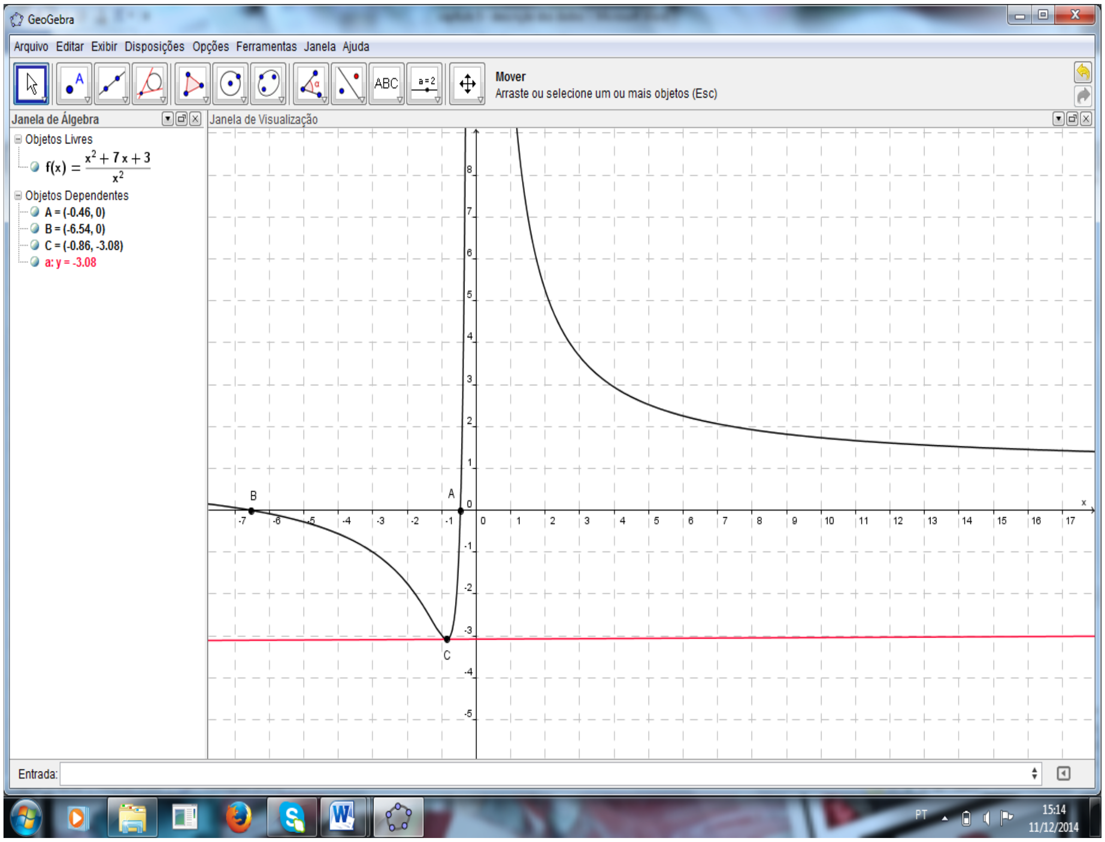


Figura 14. Gráfico que visualiza a reta tangente horizontal usada para evidenciar a definição dos pontos críticos na Atividade 2B.

Partindo agora para o item 5 sobre a existência dos extremos, os professores construíram o gráfico da derivada primeira, mudaram a cor da reta tangente para preto e a minimizaram; em seguida, trocaram a cor da curva da derivada primeira para vermelho, para não correr o risco de confundir as funções na hora da interpretação e elaboração das respostas. Desse modo, chegaram à conclusão que o valor encontrado para a solução quando $f'(x) = 0$ estava em $x = -0{,}86$; assim, esse valor foi visualizado no *software* GeoGebra quando plotaram a interseção de dois objetos entre $f'(x)$ e o eixo x.

Na continuação, o item 6 pediu para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Os professores começaram a dialogar, falando que existiam dois procedimentos para essa solução e que eles são válidos, dependendo apenas da habilidade de quem irá usá-los, como mostra o relato a seguir:

> Nessa questão, podemos responder de dois modos diferentes: o primeiro pode ser usando a reta tangente em $\mathrm{f}\,(x)$ ficando atentos quando o sinal do coeficiente angular muda e o outro é quando utilizamos a definição quando ela é positiva para os intervalos de crescimento, ou negativa para os de decrescimento. Qualquer um desses métodos pode ser usado, pois podemos acompanhar o que acontece na janela de álgebra ou na manipulação da curva de $\mathrm{f}\,'(x)$ que são fornecidos quando olhamos no *software* GeoGebra. Baseado em qualquer um desses procedimentos, concluímos que ela tem intervalo de decrescimento em $(-\infty;\ -0{,}86)$ e $(0,+\infty)$ enquanto o de crescimento em $(-0{,}86;\ 0)$. (D_6 da Dupla B)

Chegando agora ao item 7 sobre a análise da concavidade da função, os professores plotaram o gráfico da derivada segunda, mudaram a sua cor para rosa, minimizaram a função da derivada primeira e apagaram os pontos das interseções que estavam na janela de álgebra, deixando apenas as curvas de $\mathrm{f}\,(x)$ e $\mathrm{f}\,''(x)$. Desse modo, eles fizeram a interseção entre a curva de $\mathrm{f}\,''(x)$ e o eixo x encontrando o ponto representado por $A = (-1{,}29;\ 0)$ e concluíram que ela é côncava para cima em $(-1{,}29;\ 0)$ e $(0,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty,-1{,}29)$, o que pode ser constatado na figura abaixo:

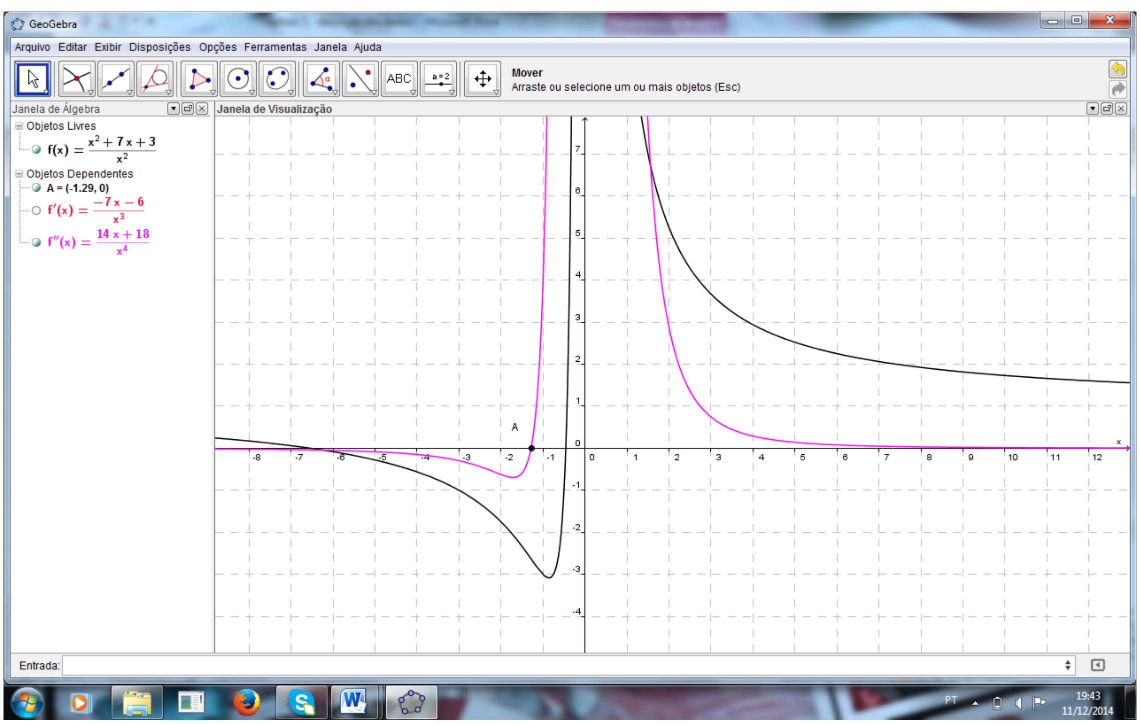


Figura 15. Gráfico que visualiza $\mathrm{f}\,(x)$ e as raízes de $\mathrm{f}\,''(x)$ na Atividade 2B.

O item 8 discutia a existência dos pontos de inflexão. No relato dos professores, quando se achava o valor da raiz da derivada segunda, esse ponto representava o ponto de inflexão, que foi encontrado em $(-1{,}29;\ -2,63)$.

Passando para o item 9 sobre a análise dos limites no infinito da função, os professores apagaram as funções derivadas e os pontos de interseções. Em seguida, reconstruíram a reta tangente e um ponto A, fixando-os à curva de f (x) para ver o que aconteceria com eles durante o deslocamento, conforme o relato abaixo:

> Quando estamos passeando pelo *software*, existem dois trechos em que a função vai para o infinito, um é no lugar próximo da origem quando $x = 0$, encontramos esse ponto de descontinuidade durante os cálculos para o domínio e o outro, pela realização dos procedimentos algébricos do limite quando x está tendendo para o infinito, resultando $y = 1$ e, com o auxílio do *software* GeoGebra, temos uma visão privilegiada do comportamento da função em relação às suas assíntotas e, com isso, podemos passar uma ideia mais significativa e dinâmica para os alunos. Assim, o ideal é demonstrar, encontrar os valores algebricamente e só depois partir para a construção com a exploração no *software* e isso pode ser alternado mediante a percepção que o professor tenha da evolução dos alunos durante a construção do conhecimento. (D_7 da Dupla B)

O último ponto da atividade foi o item 10 que discutia a existência de assíntotas. Durante a solução desse item, os professores argumentaram que a resposta já havia sido encontrada anteriormente no cálculo dos limites infinitos e no infinito da função. No entanto, eles também ressaltaram que a imagem fornecida pelo *software* proporcionou um entendimento mais rápido e eficiente das definições envolvidas / relacionadas à existência de assíntotas horizontais e verticais, como podemos observar no gráfico abaixo:

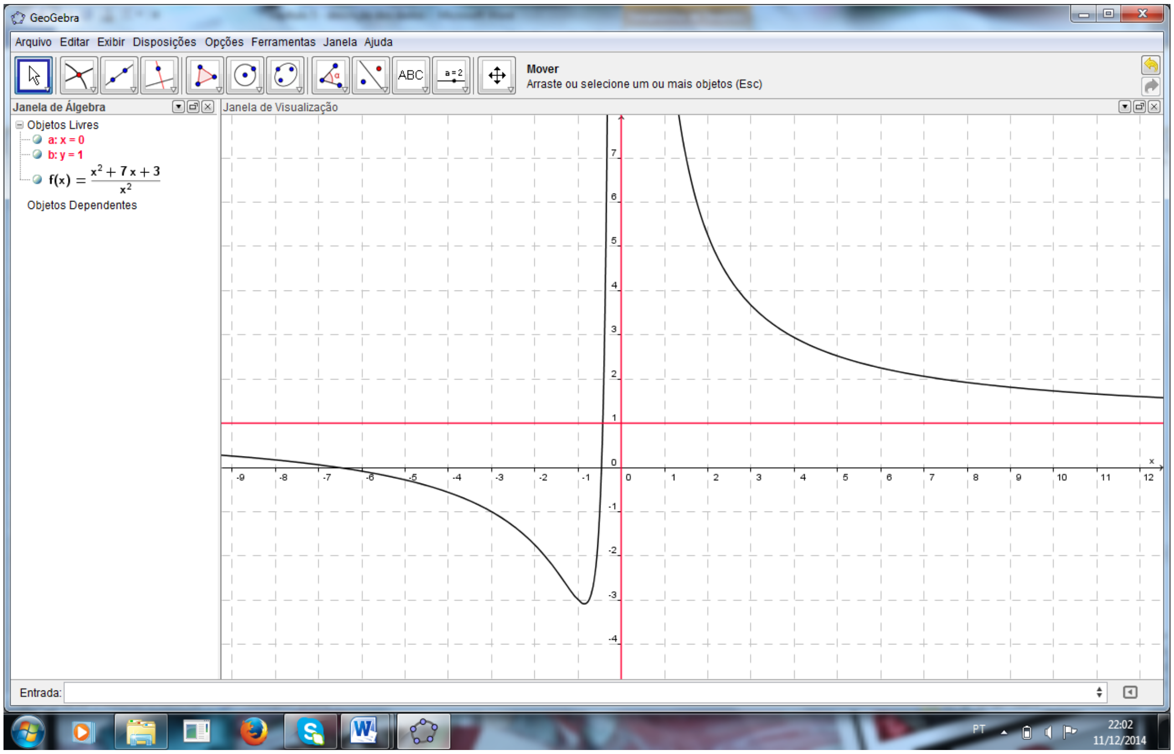


Figura 16. Gráfico que visualiza as assíntotas de f (x) na Atividade 2B.

Com isso, os professores finalizaram as atividades e como aconteceu com a outra dupla, o pesquisador solicitou a opinião deles a respeito da contribuição para o ensino e para a aprendizagem de gráficos de derivadas a partir da visualização das atividades exploratórias realizadas. Eis a resposta da dupla:

> Essas atividades conseguiram proporcionar a interação entre as curvas e as definições de seus pontos mais importantes. Antigamente, ninguém trabalhava essas questões numa aula normal em que a maioria de suas raízes exigiriam a participação do Cálculo Numérico e o professor que fizesse isso, talvez, passava por causa de algum trabalho complementar ou lista extra para os alunos que estavam com imensa dificuldade na disciplina ou correndo o risco de reprovação. Elas ajudam a pensar em algo diferente para as aulas e, pelo que percebi, exigiu um gasto de tempo para a sua elaboração e também para a sua execução. Hoje, as turmas ainda são muito cheias, temos muitos alunos reprovados e os laboratórios têm poucos computadores e fica difícil de proporcionar aprendizagem com eles; não é só levá-los e trabalhar as questões, temos que questioná-los e permitir que explorem as atividades e construam o conhecimento. Já para mim, elas permitem confrontar as definições com mais facilidades, a situação fica mais dinâmica e permite a oportunidade de esclarecer possíveis dúvidas durante as demonstrações que

> fazemos. Quando trabalhamos os exemplos mais simples, nem sempre eles conseguem contemplar todas as definições e os alunos ficam questionando: naquela função, entendemos o motivo do ponto de inflexão e essa daqui não possui por qual motivo? Desse modo, essas atividades conseguem aproveitar melhor o tempo para a compreensão e proporcionam o entendimento mais dinâmico das principais definições que utilizamos nas derivadas. (D_8 da Dupla B)

Com o fim das atividades, agradecemos a participação dos professores que, conforme já relatamos, após alguns dias da realização das atividades, responderam a um questionário, o qual será utilizado na análise a seguir.

4.4. Analisando o conjunto de dados a partir de eixos de análise

Optamos por dialogar com a literatura a partir de algumas evidências que encontramos durante a transcrição e as várias leituras de nossos dados. Salientamos que algumas anotações no diário de campo nos auxiliaram a confirmar e a elaborar algumas ideias no momento em ficamos atentos às palavras que se tornaram chaves importantes, as mais repetidas, o discurso mais comum, as principais dificuldades encontradas, os tópicos mais discutidos, as principais ideias que os professores debateram e, desse modo, conseguimos detectar três eixos de análise que julgamos importantes para uma melhor compreensão da investigação aqui realizada.

4.4.1. O papel da visualização no ensino e na aprendizagem

Esse eixo nos despertou interesse pelo fato dos professores sinalizarem, de várias formas que, por meio da visualização, ocorre aprendizagem a partir do ensino.

Mencionamos que a aprendizagem de alunos já foi investigada em diversos trabalhos relacionados ao papel da visualização (VILLARREAL, 1999; COSTA 2002; GUZMÁN, 2002; ARCAVI, 2003; PRESMEG, 2006), entretanto esses trabalhos se desenvolveram metodologicamente contando, principalmente, com a participação de alunos.

Quando Villarreal (1999) pesquisou com alunas a construção de conhecimentos de conteúdos de Cálculo, notou que a visualização proporcionada pelo computador influencia até certo ponto na aprendizagem e isso dependeu do tipo de abordagem que elas utilizaram para responder às diferentes questões. A autora apontou que essa influência era determinada pela comunicação que professores e pesquisadores faziam para ensinar os conteúdos de Cálculo e, com isso, constatou nesse experimento de ensino que algumas das alunas utilizaram a abordagem visual nos processos de pensamentos para auxiliar na determinação de respostas.

Já Guzmán (2002), por exemplo, utilizou a visualização na disciplina de Análise Matemática para auxiliar no ensino e na aprendizagem. Notamos que a disciplina de Cálculo antecede a Análise e essas duas disciplinas possuem uma forte conexão. O autor relatou que até matemáticos experientes utilizam abordagens visuais para auxiliar no entendimento de conceitos e definições matemáticas. Essas abordagens proporcionam um desenvolvimento intuitivo para estabelecer conexões com os conteúdos que, muitas vezes, são complexos e abstratos e que necessitam ser compreendidos de uma maneira diferenciada de como se faz rigorosamente. Essa pesquisa foi feita com o intuito de saber como a visualização pode ajudar no processo de matematização ou de demonstrações matemáticas, que são os focos da Análise Matemática. Com isso, Guzmán (2002) utilizou a construção de gráficos para observar a continuidade de uma função em um determinado ponto, explorou a noção do conceito com os alunos durante as aproximações da função e afirmou que a prova visual, ou seja, a forma como a função estava se comportando, indicava a existência de uma lei, que se tornou um elemento importante ao auxiliar na compreensão para a construção dos conceitos matemáticos abstratos.

Olhando para os nossos dados coletados, percebemos evidências que se tornaram possíveis de estabelecer conexões que relacionam aspectos sobre a visualização no ensino e na aprendizagem. O nosso trabalho diferenciou-se dos demais pelo fato de estarmos estabelecendo a participação de professores de Cálculo em um ambiente de exploração. As suas impressões são válidas pelo fato de terem contato com os alunos e, ao estabelecer a conexão entre o ensino e a aprendizagem pudemos comparar os seus relatos para tentar extrair o que é realmente essencial para essa pesquisa, como vemos nas respostas, abaixo, à Questão 3 do Questionário de Avaliação das Atividades Exploratórias, na qual perguntamos se as atividades exploratórias apresentadas de forma guiada contribuíram para a visualização e conjecturação sobre os conteúdos estudados:

> Sim. De qualquer forma é sempre importante salientar que o GeoGebra (ou qualquer outro *software*) não pode substituir aspectos conceituais que o aluno (e professor) deve dominar. As conjecturas devem ser trabalhadas CONCEITUALMENTE e, posteriormente, visualizadas/interpretadas. (Professor A_1)

> Sim, as atividades auxiliam a compreender melhor algumas propriedades e definições, que talvez não fiquem tão claras para alguns alunos somente com as definições e ilustrações no quadro. Para as definições envolvendo o infinito, a atividade dá uma ideia do que acontece, mas ela deve ser justificada algebricamente. (Professor A_2)

> Sim, a visualização dos conceitos é proporcionada a partir da exploração das ferramentas geométricas e da relação entre os elementos obtidos graficamente. Há aqui uma inversão de ordem, pois o caminho natural é construir o gráfico de uma função a partir das derivadas de primeira e segunda ordem, calculadas algebricamente. Nesta proposta a visualização ganha muita importância, na verdade ela é a ferramenta que liga os pontos principais do gráfico aos conceitos trabalhados na aula teórica. A construção dos gráficos das derivadas de primeira e segunda ordem, contribui para a conjecturação da relação que existe entre as derivadas de primeira e segunda ordem e a função. (Professor B_1)

> Com certeza. Às vezes, apenas os cálculos não são suficientes para que o aluno tenha um bom entendimento do assunto. Dessa forma, a visualização de gráficos através do *software*, a meu ver, fornece ao aluno a possibilidade de entender geometricamente os resultados algébricos. Além disso, as figuras produzidas pelo GeoGebra são bem mais próximas da realidade do que as desenhadas pelos professores em sala de aula. (Professor B_2)

De fato, Tall (1991a) menciona que trabalhamos a visualização como um processo de intuição, mas nem sempre o que a intuição é para o professor pode ser uma intuição para os alunos. Mesmo sabendo que a intuição é oriunda de aspectos cognitivos e depende de experiências anteriores, não podemos esperar que os alunos possuam a mesma evolução de intuição com a visualização que os professores de Cálculo, no entanto, é necessário que haja um trabalho com a intuição dos alunos para que eles possam chegar a utilizá-la como um recurso para a sua aprendizagem. Existe uma forma de se trabalhar em que a intuição pode ser privilegiada, quando buscamos as regularidades com os alunos, permitindo que estes extraiam a essência de gráficos que estão sendo estudados, traçando funções diferentes das tradicionais propostas, pelos professores, para a interpretação, tentando permitir, assim, uma representação distinta para os dados em questão. É importante observar esses detalhes, pois sinalizam oportunidades para o professor rever o que está acontecendo durante a aula e como ele pode tentar fazer algo diferenciado para que haja construção de conhecimento por parte dos alunos.

Foi verificado em nossa pesquisa que as representações gráficas sugerem a participação da intuição e das conjecturas. Lembramos que a visualização e a intuição não irão resolver os problemas de gráficos com as derivadas, no entanto, indicam caminhos que trazem um melhor entendimento para abordar esses conteúdos na sala de aula e oferecem ao professor a utilização de propostas que ajudem não só no seu trabalho, mas também na aprendizagem dos alunos.

4.4.2. O papel do *software* GeoGebra na aprendizagem

Em pesquisa realizada por Tall (1991b), quando estudou a influência dos ambientes computacionais no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo, nesta pesquisa ele relatou que os ambientes computacionais facilitam e dinamizam tais processos, porém, os resultados dependem das propostas que são elaboradas pelos professores-pesquisadores.

Nesse sentido, nossa pesquisa revelou que o *software* GeoGebra consiste em um recurso que facilita o ensino de gráficos de derivadas na visão de professores de Cálculo e que, durante a realização de atividades didáticas com os alunos, são indispensáveis tanto o conhecimento específico do conteúdo como o conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986), para perceber o que está acontecendo em relação à aprendizagem dos alunos durante a realização das atividades e, dessa maneira, o desenvolvimento das atividades seja capaz de proporcionar um ambiente de aprendizagem.

Ao longo da realização das atividades exploratórias, ocorreram possibilidades de intuição, conjeturas e exploração das definições ou demonstração que os professores geralmente fazem durante as aulas e, que se fossem realizadas na sala, como relataram os participantes, dariam ótima mobilidade para as provas e demonstrações matemáticas que são esperadas para a disciplina de Cálculo. Desse modo, evidenciamos as características que o *software* GeoGebra apresentou em nossa pesquisa, em uma proposta de ambientes informatizados dinâmicos, acreditamos ter acontecido o que foi previsto por Tall (1991b), ao afirmar que: "a maior importância no *software* será o desenvolvimento de ambientes flexíveis que facilitem unir numérico, simbólico e o gráfico" [15] (TALL, 1991b, p. 24, tradução nossa).

[15] Of greater importance in the software will be the development of flexible environments that unite numerical, symbolic and graphical facilities.

Foi demonstrada em nossa pesquisa uma consonância com algumas ideias de Tall (1991b) pelo fato de incorporar possibilidades de mudança em aspectos que são extremamente delicados para se trabalhar na sala de aula, pois o uso da tecnologia no ensino de Cálculo se tornou favorável pelo fato de trazer um dinamismo que fecundou situações de exploração, criando um ambiente de exploração por possibilitar uma interação com as informações e um diálogo, no qual ocorreu a mobilidade de definições e a construção de conhecimentos matemáticos, como mostram as respostas dadas à Questão 4 do Questionário de Avaliação das Atividades Exploratórias, nesta perguntamos em quais aspectos a utilização do GeoGebra contribuiu para uma aprendizagem de forma mais significativa dos tópicos de Aplicações de Derivadas explorados nas atividades:

> Comportamento do gráfico de uma função. Aplicar aspectos conceituais da derivada (pontos críticos e concavidade, por exemplo) e ter a oportunidade de plotar o gráfico em tempo real (cruzando as informações) contribui para a aprendizagem de forma significativa. (Professor A_1)

> A análise dos pontos críticos, verificando que a reta tangente é horizontal, ajuda a verificar a definição; Crescimento e decrescimento da função, movendo a reta tangente ao longo do gráfico, justifica porque fazemos o estudo do sinal da 1ª derivada; Concavidade da função, comparando o sinal da 2ª derivada com o gráfico da função, justifica porque fazemos o estudo do sinal da 2ª derivada. (Professor A_2)

> O ponto mais importante é a visualização dos conceitos de derivadas, e a relação entre estas derivadas e o gráfico da função. Além disso, é possível perceber a importância dos conhecimentos algébricos, pois analisando o gráfico da função (Atividade 2B) é muito fácil errar o limite da função quando x tende ao infinito, limite simples de calcular algebricamente, evidenciando que os conceitos algébrico e geométrico se completam. Desta forma, fica claro que questões como a trabalhada na Atividade 1B fica quase impossível de ser resolvida algebricamente, sendo muito útil a visualização gráfica proporcionada pelo GeoGebra. E a questão da Atividade 2B, se resolvida apenas com a utilização do *software* pode induzir a um erro, de um conceito algebricamente simples. (Professor B_1)

> Quando se falou de pontos críticos (máximos, mínimos e de inflexão), o *software* possibilitou verificar “visualmente” se existem (e onde existem) os pontos críticos, bem como, suas peculiaridades. O mesmo aconteceu no estudo das concavidades, crescimento, decrescimento e assíntotas da função. (Professor B_2)

Aqui, chamamos a atenção para a possibilidade de "verificação visual" do *software* que nos remete a aspectos da imagem visual, retomando algumas ideias de Arcavi (2003), que conseguiu relacionar tais aspectos aos processos algébricos e, estes por sua vez, estão intrínsecos na relação dos conteúdos de Cálculo I. Ele conseguiu permear a possibilidade de visualização usando representações algébricas ou algorítmicas, sendo que essa relação é bastante importante no ensino para completar o entendimento e proporcionar uma compreensão necessária para entender a formação e a construção de alguns conceitos matemáticos. Nesse sentido, Arcavi (2003) aponta que a "visualização pode acompanhar um desenvolvimento simbólico, desde que uma imagem visual, mostre o seu valor concreto [...]" [16] (ARCAVI, 2003, p. 220, tradução nossa).

Notamos que o entendimento necessário para esses fatos estão dispostos quando os professores relataram que os aspectos algébricos necessitariam ser confrontados e comparados durante o ensino com os alunos. Desse modo, não é somente "eu vejo e acabou". Aqui, faz necessário entrar em cena o professor que conecta as informações visuais e tenta mostrar aos alunos como os seus procedimentos podem ser usados para oferecerem subsídios indispensáveis aos conteúdos que exigem a participação do Pensamento Matemático Avançado, e venham ter sentido real para cada aluno que tiver contato com esses conteúdos. Lembramos que a visualização depende de uma experiência anterior e se aprimora conforme as etapas que vão sendo construídas, tanto para professores como para os alunos, ao alcançarem um nível cognitivo mais avançado. Ao professor cabe, portanto, a responsabilidade de se pensar em condições que proporcionem tal fato no ensino de derivadas em Cálculo I.

4.4.2.1 Uma dificuldade emergente relacionada ao *software* GeoGebra

Ainda que não se configure exatamente como um eixo de análise (como os anteriores), achamos por bem destacar, nesse momento, uma dificuldade que emergiu ao longo da realização das atividades exploratórias, relacionada ao *software* GeoGebra, tal dificuldade consiste no excesso de curvas que dificultou a visualização, segundo relato dos professores participantes. Entretanto, cabe ressaltar que, apesar da dificuldade relatada no item anterior,

[16] Visualization can accompany a symbolic development, since a visual image, by virtue of its concreteness […].

quando fizemos a descrição das atividades exploratórias, nenhum professor sugeriu mudanças ou acréscimos nas atividades ou na sua forma de realização, como solicitamos na Questão 5 do Questionário de Avaliação das Atividades Exploratórias, assim observamos pelas suas respostas:

> Dentro da proposta, achei a atividade extremamente bem fundamentada e significativa. Creio que tenha atingido bem seu objetivo. Nenhuma mudança ou acréscimo. (Professor A_1)
>
> Não, a atividade envolve todos os conceitos relacionados a esboço de gráficos, está ótima. (Professor A_2)
>
> Não. (Professor B_1)
>
> Não. (Professor B_2)

Essa questão já havia sido levantada na pesquisa realizada por Barbosa (2009), que relatou a mesma dificuldade em relação ao excesso de curvas em gráficos de derivadas com o uso do *software* Winplot, quando fez experimentos com alunos do curso de Matemática a respeito de função composta e regra da cadeia, sendo que nas atividades elaboradas, já era sugerido a mudança de cores. Os gráficos visualizados já apareciam com cores distintas para que os alunos desenvolvessem as operações necessárias. Na pesquisa, os alunos tiveram um curso inicial sobre o *software* Winplot, no entanto, em gráficos que utilizavam as derivada da função composta, os alunos também sentiram dificuldades de interpretação, pois o excesso de curvas estava atrapalhando e foi necessário esconder alguns gráficos para evitar equívocos nas respostas. Assim Barbosa (2009) relatou a realização de uma atividade por alguns participantes:

> [...] inseriu as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ e suas respectivas derivadas, $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 3$ e, a partir do comando de combinações para a composição, obteve o gráfico da função $f(g(x))$. Posteriormente, com o comando derivar, a dupla plotou o gráfico da função $(f(g(x)))'$ e, em seguida, o gráfico da função $f'(g(x))$, em um mesmo plano cartesiano; porém, como o plano cartesiano obtido ficou muito confuso, devido à variedade de gráficos, os alunos deixaram à mostra somente os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, escondendo os demais, [...] (BARBOSA, 2009, p. 126)

Notamos que a visualização pode ser comprometida se as imagens que forem visualizadas proporcionarem “distorções de interpretação”. As dificuldades podem ocorrerem no momento de se distinguir qual curva deve ser analisada. Isso aconteceu tanto no trabalho de Barbosa (2009), que foi realizado com alunos de Cálculo, como no nosso, que foi realizado com professores de Cálculo. Desse modo, podemos afirmar que o excesso de curvas pode ocasionar prejuízo na aprendizagem com a visualização de gráficos, sendo necessária a exploração adequada de recursos do *software* como mudança nas cores das curvas ou minimização das funções que não estão sendo interpretadas.

Dentro dessa mesma perspectiva, destacamos agora o trabalho de Almeida e Viseu (2002) que pesquisaram um ambiente de aprendizagem com professores estagiários do curso de Matemática em Portugal, para observar o desempenho deles no traçado de gráficos de derivadas usando algumas representações, tais como: numérica, analítica e gráfica. Os professores estagiários receberam as atividades com questões abertas para responder individualmente e não tinham auxílio de tecnologia computacional. Pelas propostas elaboradas, os professores estagiários apresentaram dificuldades na interpretação com os gráficos de derivadas, desse modo, os autores mostraram algumas evidências:

> Verificou-se assim, mais uma vez, que os estagiários manifestaram dificuldades em interpretar o gráfico de uma função e, principalmente em relacioná-lo com a informação explícita nos das suas derivadas. Neste caso particular, os gráficos das derivadas parecem ter contribuído para dificultar a interpretação do gráfico da função. (ALMEIDA; VISEU, 2002, p. 215)

Segundo os autores, foi constatado que a visualização com certa quantidade de funções e suas derivadas causou dificuldades de relacionar os intervalos de monotonia da derivada primeira com o sinal da derivada segunda ou ao considerar os pontos de inflexão do gráfico da derivada primeira como extremos locais da derivada segunda e ainda, ao considerar os pontos angulosos do gráfico de uma função como os pontos que não pertenciam ao domínio de sua derivada.

Constatamos que existem dificuldades que podem “bloquear o desenvolvimento” cognitivo de professores e alunos que usam a visualização como apoio para o ensino e a aprendizagem de gráficos de derivadas, seja em ambientes informatizados ou não.

Acreditamos, portanto, que para termos uma melhor atuação na sala de aula com a visualização de derivadas é necessário estabelecer etapas que sejam coerentes com a aprendizagem dos alunos. No entanto, existem alunos que precisam de um acompanhamento mais próximo, e que o seu desenvolvimento cognitivo depende de tempo para que isso realmente aconteça. Precisamos considerar as próprias dificuldades epistemológicas no ensino de Cálculo que conseguem explicar esses e outros fatos relacionados à aprendizagem (SAD, 1998; REZENDE, 2003) e à transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991a; COSTA, 2002).

4.4.3. O equilíbrio entre a abordagem algébrica e a abordagem visual no ambiente computacional

Villarreal (1999) já havia realizado experimentos de ensino com o olhar no desenvolvimento visual e algébrico de alunas em relação ao manuseio de *softwares* empregados para a aprendizagem de conteúdos de derivadas. Entretanto, se destacaram em nossa pesquisa, os vários relatos dos professores participantes sobre a importância dos aspectos algébricos para completar as ideias suscitadas pelas atividades, em relação a definições e propriedades matemáticas no ensino de derivadas.

Temos o entendimento de Arcavi (2003) sobre esses fatos em que as oportunidades das relações com o uso algébrico mantem uma estreita relação com a visualização e, com isso, o autor esclarece que “visualização aqui (e em muitos casos semelhantes) serve para ajustar as nossas intuições ‘erradas’ e harmonizá-las com a correção do confuso e ‘indiferente’ no argumento simbólico” [17] (ARCAVI, 2003, p. 222, tradução nossa).

A necessidade de se achar um ponto de equilíbrio entre o aspecto algébrico e o aspecto visual foi mencionada várias vezes pelos participantes de nossa pesquisa. Encontramos isso inicialmente no diálogo D_1 da Dupla A, quando os professores questionaram sobre o tempo que deveriam gastar para passear no *software* GeoGebra, e como os aspectos algébricos poderiam facilitar certas etapas da elaboração da solução da questão. Assim, afirmamos que o

[17] Visualization here (and in many similar instances) serves to adjust our ‘wrong’ intuitions and harmonize them with the opaque and ‘icy’ correctness of the symbolic argument.

software permitiu-nos estabelecer uma possibilidade para se pensar em condicionar um ajuste entre o que pode ser feito com a imagem e com o aspecto algébrico.

Outra situação que destacamos é o diálogo D_3 da Dupla A em relação às definições e demonstrações que são feitas nas aulas de Cálculo I, ressaltando que a parte algébrica também se faz necessária para auxiliar na estruturação de conhecimentos algébricos e mencionando que ela também é importante durante as etapas de construção de conhecimento, pois a preparação algébrica combinada com uma preparação visual acaba sendo ideal para os professores motivarem os alunos.

Em outro ponto do diálogo D_7 da Dupla A, notamos que os professores não conseguem concluir a questão somente com a visualização proporcionada pelo *software* e, após não encontrarem uma resposta que poderia ser convincente aos alunos, eles relataram que o aspecto algébrico se tornaria mais eficiente naquele momento. No entanto, argumentamos que só foi iniciado o processo algébrico depois do que foi visualizado no *software* GeoGebra, e o interessante ali era notar que a decisão de optar por um ou pelo outro aconteceu justamente a partir do momento de uma reflexão com base na visualização.

Também destacamos o que ocorreu quando os professores não puderam utilizar uma solução algébrica para encontrar as raízes nas Atividades 1A e 1B, pois necessitariam de ajuda do Cálculo Numérico e gastariam muito tempo para resolver essa questão. Situação semelhante foi constatada na Atividade 2A em relação às raízes da derivada, quando aconteceu uma limitação do *software* na aproximação dos valores, desse modo, o visual não dava tanta consistência à solução e uma possibilidade de solucionar esse impasse seria a utilização de recursos algébricos.

Analisando outro fragmento que se encontra no diálogo D_7 da Dupla B, em relação ao uso de definições e demonstrações de assíntotas e limites no infinito, os professores destacaram que, para esse item, o ideal seria apresentar as figuras aos alunos e, em seguida, explorar os aspectos algébricos que completariam a compreensão dos conteúdos, sendo essa relação indispensável durante as aulas.

Para finalizarmos essa parte, trazemos o diálogo do orientador sobre a discussão do uso da tecnologia e do algebrísmo, quando mencionou que os professores não seriam substituídos pelos *softwares* e que eles tinham que apresentar para seus alunos um domínio mais consistente dos conteúdos ou de seus aspectos algébricos e de como usá-los na sala de aula, articulados com a tecnologia. Esclarecemos que o intuito de justificar algebricamente alguns itens nas atividades exploratórias era permitir aos professores possibilidades de também utilizar os aspectos algébricos para construir conhecimento com os alunos, indicando certa tendência de que isso ainda é necessário em muitas aulas, mas talvez não seja totalmente suficiente para abranger todas as possibilidades de construção de conhecimento com os alunos.

Desse modo, o *software* é indicado como um componente favorável para o ensino e para a aprendizagem, ocorrendo a necessidade de saber usá-lo em tempo oportuno, priorizando a determinação do ponto de equilíbrio entre o visual e o algébrico para haver uma construção de conhecimento mais eficiente e dinâmica.

4.5. Um novo olhar sobre nossas atividades e sobre a questão da visualização a partir dos eixos de análise

A maneira como a visualização vai acontecer em sala de aula ou em laboratório depende dos professores e também dos seus argumentos algébricos utilizados para fazer demonstrações e provas matemáticas com os alunos. Essas relações dificilmente deixarão de acontecer, pois o ensino de Cálculo I foi constituído com metodologias tradicionais que usavam a escrita e a fala para comunicar as ideias matemáticas que foram construídas. Não estamos dizendo que isso seja errado, mas estamos querendo questionar: até que ponto trabalhar pura e simplesmente com algoritmos e recursos algébricos no ensino de Cálculo I é o suficiente para proporcionar a compreensão dos conteúdos pelos alunos?

Nossas atividades mostraram um caminho mais dinâmico para acontecer a intuição, conjecturação e a visualização das principais definições e propriedades usadas em gráficos de derivadas: domínio e imagem, raízes, máximos e mínimos, pontos críticos, extremos, crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas.

Essas atividades não envolveram todos os exemplos que esses conteúdos possuem, no entanto, trazem uma visão geral de como possibilitar uma interação dinâmica mediada pela participação do professor de Cálculo I relacionando o uso do *software* GeoGebra, coadunando com a visualização e parte algébrica, procedimentos que também são importantes para auxiliar no ensino com o uso de tecnologias. Com isso, o ponto de equilíbrio da relação que existe entre o ensino de Cálculo, que utiliza aspectos algébricos, e aspectos visuais em um ambiente computacional se faz necessário pelo fato de permitir uma relação maior com a aprendizagem e cada um vai ser usado na medida em que condicionar uma compreensão maior e significativa para o conhecimento. Seria formidável se todos os alunos aprendessem gráficos de derivadas apenas com o ensino algébrico ou só com a visualização e, se essas condições fossem realmente verdadeiras, o ensino de Cálculo I não teria apresentado, há tantas décadas, altos índices de reprovação, não só nas universidades do Brasil, mas também nas melhores do mundo.

Essas atividades foram propostas visando melhorar a exploração de alguns conteúdos que envolvem gráficos de derivadas e, para trabalhá-los, é necessário o conhecimento dos aspectos algébricos aliados com o conhecimento dos aspectos visuais para que haja a construção de conhecimento matemático. O mais importante para o professor de Cálculo I não é usar somente álgebra ou somente a visualização no ensino de gráficos de derivadas, mas sim tentar fazer uma intermediação de ambos para que o seu trabalho seja consistente e se adeque às situações para se tornar um trabalho diferenciado e que integre um ensino mais eficiente.

Arcavi (2003) garante que a visualização pode ter um papel complementar ao proporcionar um apoio para: ilustração de processos simbólicos; resolução de conflitos entre soluções simbólicas e intuições; e ajuda com o nosso empenho a recuperar bases conceituais que são justificadas por soluções formais. Notamos que não temos como “extirpar” a Álgebra do ensino de Cálculo, mas podemos apenas aliar seus processos com características de propostas mediadas pela visualização para garantir um ensino mais eficiente (ARCAVI, 2003). Precisamos compreender que não podemos abandonar o ensino algébrico das aulas de Cálculo I, nem negligenciar as possibilidades de incorporar a tecnologia para a aprendizagem; o ponto de equilíbrio é quem vai fornecer a ponte necessária para que essa relação a cada dia possa convergir para o mesmo ponto: garantir a elaboração de propostas para um ensino com qualidade pelos professores de Cálculo I, atribuindo caminhos que sejam realmente significativos para a construção de conhecimento por parte dos alunos.

Dessa forma, com as ideias de Arcavi (2003) entendemos que a visualização não funciona sozinha e também não irá existir sozinha. Existe uma relação bastante próxima do ensino de Cálculo com o ensino algébrico e isso vai durar para sempre. Entretanto, com a finalidade de entender melhor, alternativas de pesquisa e de trabalho com professores de

Cálculo, os dados apontam que existem relações bem próximas e que um ensino é dependente do outro. Pelos dados analisados, notamos que, para as demonstrações, a visualização exerce um papel complementar e não um papel total, fecundando oportunidades para que os professores consigam dar um melhor entendimento para o que estão fazendo e tragam uma compreensão melhor para os alunos durante as aulas.

Notamos que essa relação é compreendida quando o ponto de equilíbrio estiver satisfazendo a sua real condição, aproximando a participação no trabalho do professor com as possibilidades de extrair disso, a aprendizagem dos alunos. Pelo que os dados apontaram concordamos "[...] que a visualização como um processo não é intencionada para excluir a verbalização (ou símbolos, ou qualquer outra coisa), muito pelo contrário, ela pode apropriadamente complementá-los" [18] (ARCAVI, 2003, 227, tradução nossa). Conseguimos notar que o professor pode ter algumas pistas sobre a direção dos exercícios por seus alunos e pelos seus questionamentos, se eles estão no caminho certo ou não de uma solução apropriada e, mediante essa possibilidade, ele pode indicar caminhos que os orientem para que a visualização aconteça, a partir do raciocínio lógico ou de processos algébricos ou de demonstrações, etc. O que for realmente usado para realmente auxiliar a visualização no melhor entendimento para que aconteça a aprendizagem, é justamente o que irá garantir a aproximação para o ponto de equilíbrio que deve existir entre os aspectos algébricos e os aspectos visuais nas aulas de Cálculo I com o uso de *softwares* matemáticos.

Mencionamos também que a visualização não é algo tão simples e fácil de ser trabalhada. O professor que intenta trabalhar com a visualização, deve ter conhecimento sobre alguns de seus aspectos teóricos, de forma que esses o ajudem a perceber as dificuldades que podem surgir durante a realização de atividades que explorem aspectos gráficos, por exemplo. Em muitos casos, nem sempre quando uma pessoa visualiza um objeto significa que as ideias, os conceitos e definições irão ser apreendidos e aprendidos da mesma maneira e com a mesma intensidade. Cada um tem a sua experiência, tem o seu modo de aprender, de ensinar e de construir aspectos cognitivos. Afinal de contas, "em contextos diferentes, os 'mesmos' objetos visuais podem ter significados diferentes, mesmo para os especialistas" [19] (ARCAVI, 2003, p. 232, tradução nossa).

---

[18] […] that visualization as a process is not intended to exclude verbalization (or symbols, or anything else), quite the contrary, it may well complement it.

[19] In different contexts, the 'same' visual objects may have different meanings even for experts.

Desse modo, finalizamos com algumas ideias de Arcavi (2003) que são compatíveis com nosso trabalho:

> Assim, a visualização não foi apenas uma forma de trabalhar com os produtos pré-estabelecidos, mas também foi em si mesma o objeto de análise. Quando uma sala de aula é considerada como um pequeno mundo, como uma comunidade de prática, a aprendizagem não é mais vista apenas como instrução e exercício, mas também se torna uma forma de participação em uma prática disciplinar [20]. (ARCAVI, 2003, p. 237, tradução nossa)

[20]Thus visualization was forthem not only a way to work with pre-established products, but also wasin itself the object of analysis.When a classroom is considered as a micro-cosmos, as a community ofpractice, learning is no longer viewed only as instruction and exercising,but also becomes a form of participation in a disciplinary practice.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> A importância atribuída à revisão crítica de teorias e pesquisas no processo de produção de novos conhecimentos não é apenas mais uma exigência formalista e burocrática da academia. É um aspecto essencial à construção do objeto de pesquisa e como tal deve ser tratado, se quisermos produzir conhecimentos capazes de contribuir para o desenvolvimento teórico-metodológico na área e para a mudança de práticas que já se evidenciaram inadequadas ao trato dos problemas sociais. [...] Consequentemente, o que se exige é apenas um esforço de atualização e integração desses conhecimentos. (ALVES-MAZZOTTI, 1998, p. 187-188)

À guisa de conclusão, trazemos algumas considerações como forma de elaborarmos um conjunto de respostas à questão de investigação que delineou a presente pesquisa:

Que contribuições a realização de atividades exploratórias com o uso do GeoGebra pode trazer à aprendizagem de Derivadas a partir da visualização?

Inicialmente, descreveremos alguns aspectos relacionados aos objetivos que traçamos como forma detalharmos tal questão, esses objetivos já foram descritos anteriormente e agora os retomados:

- Investigar o ensino de Cálculo no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior e das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM.

Investigamos o ensino de Cálculo e nos deparamos, nos vários contextos, com o fato de que o uso de tecnologias no ensino tem se tornado, cada vez mais, uma tendência no Ensino Superior, devido à possibilidade de adaptação e incorporação no ensino, de aspectos mais significativos e aplicados com o uso de *softwares* matemáticos.

Detectamos que os trabalhos analisados destacaram aspectos relevantes por proporcionar aulas diferenciadas e conseguir melhorar a qualidade de aprendizagem dos alunos em ambientes informatizados. Não estamos com isso, querendo dizer que se não utilizarmos *softwares* nas aulas de Cálculo I, não ocorrerá um ensino voltado para a aprendizagem, mas devemos sim, diversificar o ensino nesses ambientes, para incorporar aulas com atividades mediadas por *softwares* como tentativa de construir algo mais dinâmico durante a nossa *práxis*.

Durante essa pesquisa compreendemos que é necessário aos professores de Matemática do Ensino Superior, em especial aos de Cálculo I, refletir a respeito da qualidade de seu ensino e da possibilidade de se criar oportunidades para que os seus alunos tenham experiências reais e dinâmicas com os conteúdos que envolvem os gráficos de derivadas de uma função de variável real. Afirmamos que é indispensável tecermos reflexões rotineiras a respeito do que estamos fazendo durante as aulas com os gráficos das derivadas e, com isso, desenvolvermos uma postura de mudança em nosso ensino que precisa ser continuamente redefinido pelos seus mediadores nas situações onde ele acontece, precisa ser adequado aos mais diversos locais, aos mais diferentes indivíduos, com o objetivo de proporcionar uma real aprendizagem para os nossos alunos.

O ensino em Cálculo I exige do professor mediador a teoria, a prática, a pesquisa, a leitura reflexiva da realidade, a confrontação de ideias, as explorações, as descobertas, as possibilidades de aprendizagem, a preparação para as avaliações, os acertos e os erros e, principalmente, a humildade para admitir e aceitar que somos humanos, em constante processo de aprendizagem e que, em todos os momentos, temos a oportunidade para tentar reconstruir o que é significativo, para o melhor desempenho daquilo que fazemos durante o ensino, pesquisa e extensão. A partir dessas ideias, entendemos que "aprender para nós é *construir*, reconstruir, *constatar para mudar*, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito" (FREIRE, 2006, p. 69, grifo do autor).

- Elaborar, testar e avaliar atividades exploratórias com o *software* GeoGebra, relacionadas à análise de gráficos utilizando derivadas de uma função real de uma variável real.

Para a elaboração das atividades exploratórias usamos livros considerados "clássicos", consagrados como referências bibliográficas em diversas Universidades brasileiras

(FLEMMING; GONÇALVES, 2006 e STEWART, 2014). Existem vários livros utilizados em cursos superiores no Brasil que sugerem atividades com o uso de tecnologias e, a partir disso, optamos por selecionar esses dois para extrair e adaptar as nossas atividades. Salientamos que os livros didáticos provavelmente ainda serão adotados por mais alguns anos nas Universidades brasileiras e não estamos afirmando que eles devem ser rejeitados ou trocados por tecnologias computacionais; nosso intuito é mostrar que, mesmo com a utilização de livros tradicionais, é possível uma ampliação na forma com que eles são trabalhados na sala de aula, articulando uma aprendizagem mais dinâmica com o uso de tecnologias que proporcionem isso.

As atividades exploratórias foram testadas e avaliadas por professores da disciplina Cálculo I que tiveram a oportunidade de verificar o que pode acontecer durante a sua aplicação em sala de aula. Como são eles que permitem fazer uma aula diferenciada, afirmaram que essas atividades podem ser utilizadas no ensino para a aprendizagem de gráficos de derivadas durante suas aulas, como destacamos em algumas respostas dadas às Questões 1 e 2 do Questionário de Avaliação das Atividades Exploratórias, quando solicitamos que eles avaliassem sua participação na realização das atividades exploratórias e de que forma essas contribuíram para sua experiência docente de Cálculo, vejamos as respostas:

> A atividade se mostrou extremamente rica em significado e possibilidades exploratórias. O GeoGebra se mostrou uma ferramenta de auxílio que, se bem trabalhada, possibilita ao aluno ampliar definições e conceitos. Qualquer recurso didático, quando bem explorado, "amplia" o ambiente de sala de aula. Temos os recursos computacionais (*software* e aplicativos) como aliados que não podem ser desprezados. (Professor $\mathbf{A_1}$)

> Não tive dificuldades em responder nenhuma questão, tanto algebricamente quanto visualmente conforme foi proposto. Sim, conheci uma atividade que pode complementar as minhas aulas de Cálculo, que pode ajudar os alunos a fixarem algumas definições e propriedades. Não tinha muito conhecimento sobre o *software*, e a atividade me mostrou ferramentas bastante interessantes do mesmo. (Professor $\mathbf{A_2}$)

> Ao realizar a Atividade 1B, temos a sensação, ou melhor, a constatação que em nossa prática deixamos de trabalhar com nossos alunos questões não previsíveis, ou seja, que não podem ser exploradas pelos processos algébricos. É bom lembrar que essa é uma prática constante no exercício profissional, pois raramente alunos do 9º ano resolvem equações quadráticas

> com raízes irracionais. Na Atividade 2B, talvez por força do hábito, os cálculos obtidos reforçaram os valores observados, enfraquecendo o poder da visualização. Centrando na questão, acho que a atividade resolvida no GeoGebra proporciona uma busca pelos conceitos de derivadas aplicadas à construção do gráfico da função, uma vez que as respostas foram obtidas a partir do gráfico, por manipulação geométrica e não através das funções existentes no GeoGebra, como limite, derivada e assíntotas. Sem dúvida, tenho o hábito de usar novas tecnologias no ensino, e essa proposta fará parte de minha prática, principalmente a Atividade 1B. (Professor B_1)

> Por já estarmos familiarizados com o assunto (eu e o outro professor), não tivemos dificuldades. Além de achar a atividade interessante, acredito que a utilização da tecnologia junto à metodologia tradicional (quadro e giz) é muito útil no ensino-aprendizagem da Matemática de uma forma geral. Assim, quando for lecionar novamente a disciplina de Cálculo I, pretendo tentar, na medida do possível, fazer atividades semelhantes a essas com meus alunos. (Professor B_2)

Pelos relatos acima, entendemos que as atividades exploratórias ajudam na melhoria da qualidade de ensino nas aulas de gráficos de funções reais em aspectos como a visualização de definições e demonstrações, além da verificação de propriedades e exemplos. Um de seus principais objetivos foi despertar o interesse de professores de Cálculo para o fato de que o livro didático pode oferecer recursos que possibilitam conexões entre o algébrico e o visual a serem trabalhadas com seus alunos durante as aulas de Cálculo I, seja em sala ou em laboratório de informática.

- Apresentar um conjunto de atividades exploratórias relacionadas às Aplicações de Derivadas: análise de gráficos com a utilização de *softwares*, para disciplinas de Cálculo I em cursos de Licenciatura em Matemática ou da área de ciências exatas, como Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Após a análise dos dados e os relatos dos professores a respeito das possibilidades de exploração dos conceitos por meio de *softwares*, elaboramos um Produto Educacional que estará disponível na página do Mestrado Profissional em Educação Matemática, para utilização por professores de Cálculo I.

Aos professores de Cálculo I, apontamos que é necessária a incorporação de *softwares* matemáticos que auxiliem no trabalho pedagógico e na melhoria de um ensino que garanta oportunidades para despertar nos alunos, momentos de criatividade, exploração e dinâmica. As atividades exploratórias que sugerimos em nosso Produto Educacional mostraram ser um diferencial que, se incorporado à prática docente, pode acrescentar resultados significativos na compreensão de conjecturas e definições dos principais conceitos utilizados no estudo de gráficos de funções reais de uma variável real e suas derivadas.

5.1 As contribuições da visualização à aprendizagem de Derivadas a partir da realização de atividades exploratórias com o uso do *software* GeoGebra

Acreditamos que a visualização é adequada à aprendizagem, especialmente a partir do momento em que os professores que optarem pelo seu uso, tenham um conhecimento mínimo de como ela acontece e de quais estratégias podem ser desenvolvidas em sala de aula para garantir que tal ferramenta realmente seja uma colaboradora na aprendizagem de conteúdos em sala de aula. O que trouxe a visualização para nossa pesquisa foi a oportunidade de constatar que ela "é uma influência estimulante para o surgimento de problemas interessantes em diferentes maneiras" [21] (GUZMÁN, 2002, p. 10) e a busca por um entendimento mínimo a respeito desse assunto, que nos fez experimentar novos caminhos e também ousar indicar novos rumos para o desenvolvimento de pesquisas na área de Educação Matemática no Ensino Superior. Em nossa pesquisa, a visualização se tornou um componente indispensável para ajudar a dinamizar o ensino e direcioná-lo para a construção e ressignificação de conhecimentos matemáticos relacionados à construção de gráficos como Aplicações de Derivadas.

Compreendemos que os professores precisam de conhecimentos específicos, pedagógicos e de um saber para manuseá-los (SHULMAN, 1986; NÓVOA, 1999; SCHÖN, 2008; TARDIF, 2013), para assim, tentar garantir uma melhor eficiência das estratégias durante o ensino com atividades exploratórias de gráficos de derivadas a partir da visualização. Cabe mencionar que não basta "deixar os alunos com atividades em um ambiente informatizado, manuseando um *software* matemático". Entendemos que o professor dever agir, estando atento ao fato de que "*conhecer* sugere a qualidade dinâmica de conhecer-

[21] It is a stimulating influence for the rise of interesting problems in different ways.

na-ação, tal expressão quando descrita é convertida em *conhecimento*-na-ação” (SCHÖN, 2008, p. 32, grifo do autor).

Destacamos que se faz necessária a participação do professor para mediar a construção dos conceitos e definições, estabelecer os parâmetros que são indispensáveis para a compreensão dos exemplos e a busca de regularidades durante as explorações realizadas no *software* GeoGebra. Mesmo assim, isso não garante um ensino e uma aprendizagem em sua totalidade, no entanto, favorece uma melhor compreensão dos conceitos e definições que a maioria dos professores trabalha durante a realização de suas aulas.

Entendemos que o nosso estudo apresenta algumas limitações relacionadas ao fato de que as atividades exploratórias foram testadas por professores de Cálculo I fora do seu ambiente cotidiano de ensino e sem a presença de seus alunos, pois o ideal seria se tivéssemos feito um acompanhamento passo a passo no desenvolvimento das atividades pelos professores, no decorrer de um semestre, nas aulas com seus alunos. Relembramos também que nossa proposta foi identificar algumas percepções que os professores de Cálculo I tiveram a respeito de nossas atividades exploratórias, entretanto, não foi planejado pesquisar com eles *in lócus*. Deste modo, entendemos que é importante o desenvolvimento dessa proposta de atividades exploratórias a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra por outros professores, para possibilitar a ampliação e o aprofundamento de novas pesquisas, com diferentes ângulos e novos olhares.

À vista disso, esperamos que nossa pesquisa abra um leque para o desenvolvimento de novos estudos tais como: Investigações Matemáticas com gráficos de funções derivadas; criação de ambientes de aprendizagem com Modelagem Matemática a partir de temas com as derivadas e suas construções gráficas; mapeamento da transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado dos alunos com a utilização de gráficos de derivadas a partir do uso de *softwares* matemáticos; criação de parâmetros para a aprendizagem a partir de definições formais utilizando gráficos de funções derivadas mediadas pela visualização em relação às diferenças que ocorrem entre os ambientes tradicionais e os ambientes computacionais.

Destacamos que essa pesquisa evidenciou que, durante a realização de atividades exploratórias com gráficos de funções, ocorreu a necessidade de um ponto de equilíbrio entre o ensino algébrico e o ensino visual no ensino. Notamos que ocorre tal necessidade, pois a realização de conjecturas a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra e a retomada de propriedades, definições e exemplos é indispensável surgindo naturalmente durante as explorações das atividades.

Salientamos que alguns indivíduos podem apresentar algumas características de “serem visuais ou não visuais” (PRESMEG, 2006) e não podemos esperar que todos tenham uma única forma de utilizar a visualização no ensino ou na aprendizagem, pois dentro do campo cognitivo, cada pessoa possui e constrói as suas próprias experiências com os conteúdos de Matemática. Entendemos que o professor de Cálculo I, utilizando seus conhecimentos específicos, pedagógicos e de sua realidade profissional, deve sugerir o manuseio de algum *software* matemático para o desenvolvimento de atividades exploratórias com o aspecto visual e, na medida do que for acontecendo, possibilitar a incorporação do aspecto algébrico ou vice-versa. Por outro lado, os alunos não são obrigados a usar os *softwares* matemáticos, no entanto, seria proveitosa a existência de alguma ferramenta tecnológica em um ambiente computacional que facilite o processo de exploração e descoberta para ajudar na composição de sua aprendizagem com certos conteúdos que, muitas vezes, não são construídos de maneira tão fácil explorando apenas os aspectos algébricos.

É exatamente o ponto de equilíbrio que irá ajustar o processo de ensino para a aprendizagem entre os aspectos algébricos e os aspectos visuais, nos quais os professores se tornam mediadores durante o processo de apresentação, reflexão e incorporação dos conteúdos planejados para os alunos. Desse modo, depois do planejamento, elaboração, realização e reflexão do que foi essencial para a aprendizagem dos alunos com as atividades exploratórias ou atividades semelhantes, os professores irão adquirir habilidades para saber os momentos corretos de se colocar “em prática” o ponto de equilíbrio que deve existir entre esses aspectos.

Uma utilização mais eficiente de *softwares* matemáticos também representa um desafio aos professores para auxiliá-los no Ensino Superior e, saber incorporar estratégias que realmente ajudam na aprendizagem dos alunos contribui para o aumento desse desafio. Mesmo com os acertos e com erros, no decorrer da prática, os professores poderão se aprimorar nas investigações dos principais conceitos relacionados à Matemática Superior, com o uso de tecnologias computacionais. Desse modo, compreendemos que “os processos de ensino e aprendizagem podem ser mais significativos e produtivos para o aluno com a inserção da tecnologia, porém não é algo trivial para o professor, e demanda um tempo para a sua incorporação nas aulas" (RICHIT et al., 2012, p. 91).

Ao lidar com conteúdos, ensino, aprendizagem e avaliações, os professores acabam sendo obrigados a pensarem em formas mais diversificadas para se trabalhar com os alunos. O uso de tecnologias computacionais tem se mostrado favorável a essas situações em pesquisas realizadas na disciplina de Cálculo I (MACHADO, 2008; BARBOSA, 2009; ROCHA, 2010; GONÇALVES, 2012; RICHIT et al., 2012) e, aos poucos, os professores estão incorporando mudanças nas aulas com o uso de tecnologias e perdendo práticas antigas de ensino, aquelas que usam apenas o quadro, pincel, papel e cópia dos conteúdos realizadas pelos professores no quadro e, depois, pelos alunos em seu caderno; com isso, não estamos querendo dizer que seja errado agir dessa forma, pois cada um escolhe os seus procedimentos de ensino, mas estamos sim questionando, até que ponto atuando somente com esses procedimentos, poderá ocorrer uma melhoria no ensino de Aplicações de Derivadas em Cálculo I. Assim, reafirmamos que o ensino com o auxílio de tecnologias computacionais, mediado pelo professor e, nesse caso, pelo *software* GeoGebra, demanda de uma preparação, entendimento, reflexão sobre a necessária articulação com a teoria que vai ser construída na realização das atividades com os alunos.

As tecnologias foram criadas para auxiliar a sociedade de um modo geral e, contextualizando, temos no Ensino Superior a construção de conhecimentos que favorecem o ensino para a aprendizagem; dessa maneira, ressaltamos que nossa investigação também apontou que "aliar o trabalho com *software*s educacionais e as atividades de natureza exploratório-investigativas, num curso de Cálculo, pode ser um caminho neste contexto da "nova educação", para alcançar e ampliar a compreensão dos conceitos" (RICHIT et al., 2012, p. 98, grifo do autor). As tecnologias se tornam cada vez mais significativas, mas em nossa pesquisa, o mais importante foi a oportunidade do professor testar e refletir a respeito dos possíveis resultados obtidos com os seus alunos, pois todo o processo a ser realizado na sala de aula é iniciado pelo professor e, é por meio dele, que encontramos as possibilidades para permitir as mudanças que as aulas de Cálculo I sempre almejaram, desde que o professor exercite o seu papel de mediador na construção dos conhecimentos facilitados pela visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra.

Constatamos assim que, as principais contribuições do *software* GeoGebra para o trabalho com gráficos de funções reais e suas derivadas para os professores de Cálculo I residem em: agilizar o tempo para um ensino significativo; permitir a realização de intuições, conjecturas e explorações de definições e exemplos; permitir uma dinâmica na exploração dos conceitos de derivadas; proporcionar um entendimento coerente e significativo das principais definições usadas nos conteúdos que envolvem esses conceitos; permitir uma interação entre as informações algébricas e as informações visuais, estabelecendo conectores para as definições e exemplos.

O ensino com o uso do *software* GeoGebra nessa pesquisa ainda se mostrou adequado ao trabalho dos professores, pois proporcionou uma facilidade para se trabalhar com questões complexas e de difícil compreensão, tornando possível estabelecer uma maior valorização do tempo com as definições e verificação de exemplos que esses conteúdos possuem e ainda permitindo aos docentes, a realização de questionamentos e reflexões que podem surgir do diálogo com os alunos, entre a teoria e a prática que é construída na sala de aula com a proposição de atividades elaboradas e adaptadas a partir de livros didáticos. Também acreditamos que nossa pesquisa trouxe uma possibilidade aos professores de Cálculo I de repensar o seu trabalho na sala de aula, com seus alunos, a respeito do que está sendo construído por esses atores, durante o estudo de gráficos de funções e suas derivadas ou conteúdos semelhantes.

As discussões sobre o uso de *softwares* matemáticos são essenciais para proporcionar uma redefinição do trabalho de professores de Cálculo I, em que sua prática deve direcionar seu aspecto profissional. Dessa forma, entendemos que, no fundo, "o que está em causa é a possibilidade de um *desenvolvimento profissional* (individual e colectivo), que crie as condições para que *cada um* defina os ritmos e os percursos da sua carreira e para que o *conjunto* dos professores projecte o futuro desta profissão [...]" (NÓVOA, 1999, p. 30, grifo do autor). O uso do *software* GeoGebra veio para ampliar a prática docente com os conteúdos que são considerados abstratos para muitos alunos e possibilitar uma forma mais eficiente de como esses conteúdos devem ser trabalhados para aprimorar a aprendizagem em sala de aula. A utilização dos *softwares* matemáticos para proporcionar uma real aprendizagem ainda representa uma das maiores dificuldades que precisam ser vencidas pelos professores no Ensino Superior.

Durante a análise dos dados e pelos relatos dos professores, percebemos que ainda existem algumas dificuldades para o ensino dessa disciplina e para o desenvolvimento de propostas com o uso de *softwares* matemáticos, tais como: saber se as estratégias usadas com os alunos estão realmente proporcionando aprendizagem; falta de conhecimentos específicos e pedagógicos dos conteúdos pelos professores para saber se os seus recursos utilizados estão sendo eficientes durante o ensino; enorme quantidade de alunos nas turmas de Cálculo o que, na maioria das vezes, dificulta o acesso ao laboratório; ementa da disciplina de Cálculo que, geralmente, é incompatível com a carga horária disponível; dificuldades na transição de conteúdos elementares para conteúdos avançados; dificuldades epistemológicas que estes conteúdos possuem tanto para o ensino como para a aprendizagem. Mesmo com esses entraves, o *software* GeoGebra consiste em uma ferramenta promissora para facilitar o trabalho dos professores, conduzindo para um ensino com melhor compreensão e construção de conteúdos complexos e/ou abstratos.

Por fim, acreditamos que o ensino de Cálculo mediado pelo uso de tecnologias computacionais cria um ambiente de ensino para a aprendizagem. As propostas de atividades exploratórias desenvolvidas nessa pesquisa, com o uso de um *software* matemático, apontam para a preparação do professor em conhecimento pedagógico e conhecimento específico, com um saber que oriente para um ensino em que a sua participação seja a de mediador na aprendizagem dos alunos, proporcionando a construção das etapas para a realização de experimentação, conjecturação e exploração.

É necessário, enquanto educadores matemáticos conscientes, diferenciar o trabalho nas aulas de Cálculo para melhor integrar o ensino que garanta um mínimo de incremento na aprendizagem dos alunos. Para isso, é necessário sempre rever as estratégias de ensino durante a *práxis* em relação aos aspectos tecnológicos, numéricos, geométricos, visuais e analíticos dos conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2005.

ALMEIDA, M. C.; VISEU, F. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, ano 15, n. 1, 2002, p. 193-219. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1822/493>. Acesso em: 05 de dezembro de 2013.

ALVES, A. J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas em Educação. *Cadernos de pesquisa*, São Paulo, v. 77, p. 53-61, maio, 1991.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Naturais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. (Orgs.). *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998, p. 107-188.

AMORIM, F. V.; SOUSA, G. C; SALAZAR, J. V. Experiência de atividade sobre derivada utilizando o *software* GeoGebra. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, *Anais*... Recife: EDUMATEC, p. 1-12, 2011.

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*, n. 52, p. 215-241, 2003. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.126.6579&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 23 de maio de 2014.

BARBOSA, M. A. *O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná: Curitiba, 2004.

BARBOSA, S. M. *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2009.

BARUFI, M. C. B. *A construção / negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo: São Paulo, 1999.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 111-124.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. GPIMEM E UNESP: Pesquisa, Extensão e Ensino em Informática e Educação Matemática. PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão.* São Paulo: Olho d'Água, 2000, p. 47-66.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 23-29.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática.* 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORRÕES, M. L. C. *O Computador na Educação Matemática.* 1998. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/borroes>. Acesso em: 05 de janeiro de 2014.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. *Bolema*, Rio Claro, ano 14, n. 16, p. 48-62, outubro, 2001.

COSTA, M. C. M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores.* João Pedro da Ponte (Org.). Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 257-274, 2002.

COSTA, M. C. M. *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Nova de Lisboa: Lisboa, 2005.

COUY, L. *Pensamento visual no estudo da variação de funções.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais: Belo Horizonte, 2008.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática da teoria à prática*. 4. ed. São Paulo: Papírus, 1998.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Org.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991, p. 25-41.

DUARTE, R. Pesquisa Qualitativa: reflexões sobre o trabalho de campo. *Cadernos de pesquisa*, Rio de Janeiro, n. 115, p. 139-154, março, 2002.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.* 8. ed. Campinas: Papírus, 2011, p. 11-33.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação Matemática: representação e construção em Geometria.* Porto Alegre: Artmed, 1999.

FERREIRA, A. B. *Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.* 3. ed. 2. impres. Curitiba: Positivo, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 34. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2006.

FROTA, M. C. R. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.* Campinas: Papírus, 2013, p. 61-88.

GARZELLA, F. A. C. *A disciplina de Cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2013.

GOLDENBERG, M. *A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. In: Rede Ibero-Americana de Informática na Educação, IV, Brasília, *Anais*... Brasília: RIBIE, p. 1-24, 1998.

GUIMARÃES, A. M.; DIAS, R. Ambientes de Aprendizagem: reengenharia da sala de aula. In: COSCARELLI, C. V. (Org.). *Novas tecnologias, novos textos, novas formas de pensar*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 23-42.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis. In: *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*, Hersonissos: University of Crete, p. 1-24, 2002. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf>. Acesso em: 21 de abril de 2014.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.* Recife: SBEM, 2009, p. 11-26.

KENSKI, V. M. *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação.* 4. ed. Campinas: Papírus, 2008.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática.* São Paulo: Editora 34, 1993.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, R. M. *A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2008.

MARIN, D. *Professores de Matemática que usam a Tecnologia de Informação e Comunicação no Ensino Superior*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2009.

MARTINS JÚNIOR, J. C. Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, XVII, Vitória, *Anais*... Vitória: SBEM, p. 1-12, 2013.

MEYER, C. *DERIVADA / RETA TANGENTE: imagem conceitual e definição conceitual.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2003.

MIQUELINO, L. H.; RESENDE, M. R. As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de Cálculo. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, Curitiba, *Anais*... Curitiba: SBEM, p. 1-16, 2013.

NÓVOA, A. O passado e o presente dos professores. In: NÓVOA, A. (Org.). *Profissão Professor*. 2. ed. Porto Alegre: Porto Editora, 1999, p. 13-34.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de Matemática. PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão.* São Paulo: Olho d'Água, 2000, p. 23-34.

PIMENTEL, R. A.; PAULA, M. J. A dinâmica dos processos de aprendizagem em uma atividade de investigação. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, Belo Horizonte, 2007, *Anais*... Belo Horizonte: SBEM, p. 1-16, 2007.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: BOERO, P.; GUTIÉRREZ, A. (Orgs.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Roterdã: Sense Publishers, p. 205-235, 2006. Disponível em: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

RICHIT, A.; BENITES, V. C.; ESCHER, M. A.; MISKULIN, R. G. S. Contribuições do *software* GeoGebra no estudo de Cálculo Diferencial e Integral: uma experiência com alunos do curso de Geologia. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 90-99, 2012.

REIS, F. S. *A tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2001.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.* Recife: SBEM, 2009, p. 81-97.

REIS, F. S.; RICALDONI, M. A; MARTINS JÚNIOR, J. C. Tendências da pesquisa sobre o ensino de Cálculo utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: um olhar sobre a Educação Matemática no Ensino Superior brasileiro. In: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, XXVII, Buenos Aires, *Anais*... Buenos Aires: CLAME, p. 1-2, 2013.

ROCHA, M. D. *Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.* Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto**:** Ouro Preto, 2010.

SAD, L. A. Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1998.

SCHÖN, D. A. *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.* 1. reimp. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SHULMAN, L. S. Those who understand: the knowledge growths in teaching. *Educational Researcher*, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, February, 1986. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1175860>. Acesso em: 03 de março de 2014.

SOUZA JÚNIOR, A. J. *Trabalho Coletivo na Universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2000.

STEWART, J. *Cálculo.* Vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TALL, D. Intuition e rigor: the role of visualization in the Calculus. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs.). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, p. 105-119, 1991a. Disponível em: <http:www.davidtall.com>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

TALL, D. *Recent developments in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts*. Washington: The Laboratory Approach to Teaching Calculus, n. 20, 1991b, p. 15-25. Disponível em: <http:www.davidtall.com>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: *19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Recife / Brasil, vol. 1, p. 161-175, 1995. Disponível em: <http:www.davidtall.com>. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional.* 15. ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

VALENTE, J. A. Mudanças na sociedade, mudanças na educação: o fazer e o compreender. In: VALENTE, J. A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento.* 1. reimp. Campinas: Unicamp, 2002, p. 29-48.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1999.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE 1

Pesquisas encontradas na Revisão Bibliográfica

Alves, D. O.	Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao Cálculo.	Mest.	2010.
Amorim, F. V.	Experiência de atividades para o Cálculo Diferencial e Integral com o *software* GeoGebra.	Mest.	2011.
André, S. L. C.	Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio.	Mest.	2008.
Barbosa, M. A.	O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.	Mest.	2004.
Barbosa, S. M.	Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.	Dout.	2009.
Barufi, M. C. B.	A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.	Dout.	1999.
Couy, L.	Pensamento visual no estudo da variação de funções.	Mest.	2008.
Dall'Anese, C.	Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem.	Mest.	2000.
D'Avoglio, A. R.	Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito.	Mest.	2002.
Garzella, F. A. C.	A disciplina de Cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.	Dout.	2013.
Gonçalves, D. C.	Aplicações das Derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra.	Mest.	2012.
Guimarais, Y. P. B.Q.	Exploração de convergência em tópicos de Cálculo Diferencial, Integral e Numérico, usando os *softwares* VCN e GeoGebra.	Mest.	2010.
Lima, A. A. N.	Introduzindo o conceito de derivada a partir da ideia de variação.	Mest.	2012.
Machado, R. M.	A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP.	Dout.	2008.
Marin. D.	Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior.	Mest.	2009.
Meyer, C.	DERIVADA / RETA TANGENTE: Imagem Conceitual e Definição Conceitual.	Mest.	2003.
Olímpio Junior, A.	Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.	Dout.	2006.
Oliveira, D. G.	Explorando o conceito de derivada, em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica.	Mest.	2011.
Paranhos, M. M.	Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral.	Mest.	2009.
Rocha, M. D.	Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.	Mest.	2010.
Souza Júnior, A. J.	Trabalho coletivo na Universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral.	Dout.	2000.
Villarreal, M. E.	O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.	Dout.	1999.