Márcio Augusto Gama Ricaldoni

CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS COM O USO DE SOFTWARES NO ENSINO DE CÁLCULO: TRABALHANDO COM IMAGENS CONCEITUAIS RELACIONADAS A DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS

Ouro Preto

2014

Márcio Augusto Gama Ricaldoni

CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS COM O USO DE SOFTWARES NO ENSINO DE CÁLCULO: TRABALHANDO COM IMAGENS CONCEITUAIS RELACIONADAS A DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

OURO PRETO

2014

R488c Ricaldoni, Márcio Augusto Gama.
Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo [manuscrito] : trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais / Márcio Augusto Gama Ricaldoni – 2014.
112f.: il.; color.; graf.; tab.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

1. Cálculo - Teses. 2. Software de aplicação - Teses. 3. Matemática - Aplicações educacionais - Teses. I. Reis, Frederico da Silva. II.Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 51-3:37.011.3:004.4

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS COM O USO DE SOFTWARES NO ENSINO DE CÁLCULO: TRABALHANDO COM IMAGENS CONCEITUAIS RELACIONADAS A DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS

Autor: Márcio Augusto Gama Ricaldoni

Orientador: Frederico da Silva Reis

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Márcio Augusto Gama Ricaldoni e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 22/05/2014

Frederico da Silva Reis
....
Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Frederico da Silva Reis
____
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis (UFOP)

Orestes P. Filho
____
Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho (UFJF)

Dilhermando Ferreira Campos
____
Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos (UFOP)

2014

À minha esposa Patrícia, que esteve sempre ao meu lado em todos os momentos, especialmente nos mais difíceis, demonstrando amor e benevolência. Vencemos juntos mais um desafio. Te amo muito!

Às minhas filhas Luiza e Marina, são vocês que me dão força e me motivam a buscar algo melhor para nossas vidas. Vocês são meus maiores presentes. Agradeço à Deus por colocá-las em meu caminho! Nada é por acaso!

AGRADECIMENTOS

A Deus, por acolher minhas ideias e me sustentar em todos os momentos de minha caminhada, me dando condições físicas e mentais para vencer as dificuldades, sem nunca fraquejar.

A meus pais, José Lúcio Ricaldoni e Maria Terezinha Gama Ricaldoni, pelo amor incondicional e exemplo de vida, que sempre seguirei.

Ao Professor Dr. Frederico da Silva Reis, pela orientação, dedicação e grande ajuda em todo o desenvolvimento deste trabalho. Obrigado por me guiar!

Ao Professor Dr. Dilhermando Ferreira Campos e ao Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho, por participarem da Banca Examinadora e pelas valiosas colaborações que fizeram engrandecer esse trabalho.

À Professora Dra. Rute Cunha Figueiredo, eterna amiga, pela gentil acolhida e bons momentos de conversas.

A todos os professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da UFOP, por mostrar o caminho das pedras, incentivando sempre.

Aos alunos da turma MTM 212, participantes da pesquisa, pela dedicação e colaboração demonstrados em todas as atividades.

A todos os colegas do Mestrado – 2012, em Educação Matemática, da UFOP pelo apoio e parceria ao longo de 30 meses.

RESUMO

O presente trabalho objetiva discutir as contribuições da realização de atividades exploratórias com a utilização do *software* GeoGebra para a formação de imagens conceituais relacionadas a diversos conteúdos e aplicações de derivadas de funções reais, nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I. O trabalho fundamentou-se teoricamente em reflexões sobre o Ensino de Cálculo, particularmente o Ensino de Derivadas, Educação Matemática no Ensino Superior e Visualização proporcionada pelas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM. A pesquisa de campo foi realizada com alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, a partir do desenvolvimento de atividades de construção e interpretação de gráficos. Para a análise dos dados, foram utilizados os registros das resoluções das atividades feitas pelos alunos, as construções feitas no GeoGebra e um questionário de avaliação das atividades, aplicado aos alunos. Os resultados obtidos apontam que as atividades contribuíram para a formação e lapidação de imagens conceituais relacionadas aos conceitos, às propriedades e às aplicações de derivadas de funções reais que são fundamentais na perspectiva de um ensino que valorize a visualização como um processo essencial à formação de imagens mentais que ressignificam a aprendizagem dos alunos.

.

Palavras-Chave: Ensino de Cálculo e Derivadas. Visualização. Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática.

ABSTRACT

This paper aims at discussing the contributions of the exploratory activities carried out using the GeoGebra software to form conceptual images related to various contents and applications of real function derivates in the process of teaching and learning Calculus I. The work was theoretically based on reflections about Teaching Calculus, specifically the teaching of Derivates, Mathematical Education and Visualization in the Education in Graduation courses through the Technologies of Information in Mathematical Education - TICEM. The field research was done with the Mathematics Degree students of The Federal University of Ouro Preto, from the development of graphic building and interpretation activities. To analyze the data, the records of the solutions of the activities done by the students, the constructions done in the GeoGebra and a questionnaire to evaluate the activities answered by the students, were used. The achieved results show that the activities contributed to the formation and improvement of conceptual images related to the concepts, the properties and application of derivates from real functions which are fundamental in the perspective of a teaching that values the visualization as an essential process in the mental images formation that gives more meaning to the student's learning

Keywords: Teaching of Calculus and Derivates. Visualization. Technologies of Information in Mathematical Education

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Capítulo 1

INICIANDO A DISCUSSÃO

> O Cálculo foi a primeira conquista da Matemática moderna... Creio que só ele define, de modo inequívoco, o começo da Matemática moderna.
>
> John von Neuman

1.1. Motivação para a Pesquisa

A Educação Matemática como campo de pesquisa tem por objeto de investigação a atividade matemática, suas particularidades e aplicações. Inicialmente, na década de 1960, seu foco principal era a Educação Básica; em seguida, o Ensino Médio e a formação de Professores.

Há pouco mais de trinta anos, surgiu uma nova linha de pesquisa com um olhar voltado para a Educação Matemática Superior (IGLIORI, 2009). Assim outras temáticas surgiram, trazendo várias ênfases importantes, tais como: Raciocínio Matemático Avançado, Processos de Ensino e Aprendizagem da Matemática no Ensino Superior, Ensino de Cálculo, Ensino de Análise, além das teorias consagradas da Educação Matemática que, em geral, se aplicam ao Ensino Superior (IGLIORI, 2009). Deste leque de possibilidades voltadas para o Ensino Superior que a Educação Matemática oferece, o Cálculo ocupa lugar de destaque, como retrata a pesquisadora:

> No que tange às especificidades das áreas da Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado parte significativa das pesquisas. Isso se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática (IGLIORI, 2009, p. 13).

Com isso, abriu-se uma nova perspectiva para profissionais, que trabalham na Educação, principalmente para aqueles que lecionam em graduações que têm as disciplinas da área de Matemática, pois é de conhecimento geral que tais disciplinas são verdadeiros entraves em vários cursos da área de exatas. Portanto, faz-se necessário investigar, entender e procurar soluções para melhoria no ensino destas disciplinas.

Surgiram assim novos grupos de pesquisa, com pesquisadores de diferentes centros acadêmicos, dos quais podemos destacar: o GT-4 – Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior, criado durante o I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM, realizado na cidade de Serra Negra – SP, em novembro de 2000, sob a coordenação inicial da Profª. Dra. Lílian Nasser (FROTA e NASSER, 2009) e o GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas da UNESP – Rio Claro, sob a coordenação Profª. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic (ONUCHIC e ALLEVATO, 2009).

Com a expansão das linhas de pesquisa em Educação, e em particular em Educação Matemática, surge, na década de 1990, uma nova e promissora linha de pesquisa que utiliza tecnologias de informação e comunicação nas aulas de Matemática. O GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática) influenciado pelas atividades de extensão do PIE (Projeto de Informática na Educação) foi criado na UNESP-Rio Claro e se consolidou também na década de 1990. (BORBA, 2000, p. 47)

Temos hoje computadores e calculadoras avançados que são capazes de desenvolver atividades refinadas de Matemática, com *softwares* modernos que possibilitam o desenvolvimento de cálculos, construção de gráficos e trabalhos de Geometria com extrema habilidade. Portanto, o professor de Matemática tem, com essas ferramentas, recursos pedagógicos e novas opções para incrementar suas aulas, visando um ensino significativo dos conceitos trabalhados. Van de Walle (2001) diz que:

> [...] se pode aprender a fazer o gráfico da equação de uma parábola simplesmente seguindo regras e plotando pontos, o que, com disponibilidade, hoje, das calculadoras, fica tão fácil de fazer e com uma velocidade e precisão nunca antes imaginadas. Mas, entender porque certas formas de equações sempre produzem gráficos parabólicos envolve uma busca por padrões no modo como os números se comportam, pois, nas equações polinomiais do segundo grau, seus coeficientes numéricos determinam as raízes, o vértice, a concavidade, etc, e, portanto, o gráfico da função. Além disso, descobrir que tipos de relações do mundo real são representados por gráficos parabólicos é mesmo mais interessante e científico, e até mais valioso, do que ter habilidade em plotar a curva quando se dá a equação (VAN DE WALLE, 2001, apud. Onuchic e Allevato, 2009, p. 170).

Esse pensamento é reforçado e complementado por Borba e Penteado (2005), ao afirmarem que os computadores não substituem / complementam os seres humanos:

> Os computadores [...] reorganizam o pensamento. A visão de pensamento aqui adotada inclui a formulação e resolução de problemas e o julgamento de valor de como se usa um dado conhecimento. Entendemos que não há apenas uma justaposição de técnica e seres humanos, como se a primeira apenas se juntasse aos últimos. Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra (BORBA e PENTEADO, 2007, p. 49).

Os pesquisadores também exemplificam tal discussão com o traçado do gráfico da função $y = x^2$, afirmando que pode-se tratar de um problema em um coletivo no qual não haja mídias informáticas e outro onde houver um software que permita o traçado de gráficos. Segundo eles, o nosso trabalho como educadores matemáticos deve ser o de ver como a Matemática se constitui quando novos atores se fazem presentes em sua investigação. A partir daí, estamos diante de novos desafios. O que ensinar? Como ensinar? Que metodologia é mais apropriada? Como a nova geração aprende Matemática? Qual é a importância da Matemática? Apoiada nessas e em outras questões, a pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior tem se desenvolvido (FROTA e NASSER, 2009).

1.2. Justificativa da Pesquisa

No desenvolvimento das atividades docentes de Cálculo, Reis (2001) afirma que, no contexto da sala de aula e na prática dos professores, existe um predomínio de aulas com abordagens formais de conteúdos e ênfases em processos repetitivos de resolução de listas de exercícios, sem levar em consideração o verdadeiro papel desta disciplina para os alunos do curso em que esteja lecionando. Cursos de naturezas distintas apresentam demandas distintas em relação ao Cálculo, mas alguns professores, segundo o pesquisador, trabalham a mesma aula, com as mesmas metodologias e os mesmos cronogramas para todos os cursos.

Em geral, a prática docente privilegia o estabelecimento de definições formais e demonstrações refinadas ao trabalho com ideias intuitivas e demonstrações práticas; trabalha-se exaustivamente métodos repetitivos, empurrando para um segundo plano algumas questões relevantes da disciplina. Como destaca Fischbein (1994):

> É uma mera ilusão acreditar que o conhecimento de axiomas, teoremas, provas e definições, como eles são expostos formalmente em livros textos, torna capaz alguém de resolver problemas. [...] Há uma concepção enganosa difundida, segundo a qual, se você entende a matemática como um sistema de conceitos, espontaneamente você se torna capaz de usá-los resolvendo uma classe correspondente de problemas (FISCHBEIN, 1994. apud IGLIORI, 2009, p. 14).

Com isso, pode-se conjecturar que ocorra certo desinteresse por parte dos alunos em aprender ou procurar entender os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, sendo que também acabam não percebendo a importância do pensamento avançado desenvolvido nesse curso e não enxergam nessa disciplina uma real utilidade ou relevância para o curso escolhido.

Temos também outra questão interessante que é a não utilização de ferramentas eletrônicas no desenvolvimento do curso e, principalmente, na resolução de questões. Poucos professores estão preparados e utilizam esses recursos em suas práticas docentes.

Esta constatação serviu de motivação para a opção por nossa pesquisa, com base na procura por respostas ou mesmo propostas interessantes que possam modificar e melhorar o ensino de Cálculo. Nos levando a algumas indagações. Como os alunos aprendem Cálculo? Quais processos cognitivos são relevantes na aprendizagem desta disciplina? Como e em que momento introduzir a utilização de *softwares* matemáticos? Qual ementa é mais adequada? Qual recurso eletrônico é mais apropriado? Questões como estas, tendo como pano de fundo as teorias do Pensamento Matemático Avançado, que tem Dreyfus, Tall e Vinner como referências, serão discutidas ao longo deste trabalho.

1.3. Apresentação da Pesquisa

Os trabalhos desenvolvidos em Ensino de Cálculo, com várias teses e dissertações em bancos de pesquisa, além dos trabalhos sobre a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM, serviram de motivações iniciais de investigação para a pesquisa aqui inicialmente apresentada.

1.3.1. Questão de Investigação

A partir das discussões realizadas até aqui, propomos a seguinte questão de investigação:

Quais são as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra para a formação de imagens conceituais relacionadas ao conceito de Derivadas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção de gráficos?

Nossa questão de investigação se enquadra na linha de pesquisa de Educação Matemática no Ensino Superior desenvolvida no Mestrado Profissional de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – Linha de Pesquisa 1: Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática.

1.3.2. Objeto de Estudo

O objeto de estudo do trabalho a ser desenvolvido delimita-se em uma perspectiva desafiadora: uma análise do processo de formação de imagens conceituais relacionadas às derivadas, por meio da construção do gráfico de funções, com o auxílio de ferramentas eletrônicas, mais especificamente, do software GeoGebra, de livre utilização.

1.3.3. Objetivo Geral

Em nossa pesquisa, assumiremos como hipótese de trabalho que a utilização de *softwares* matemáticos pode contribuir para a construção de imagens e definições conceituais significativas relacionadas a derivadas de funções reais.

Com nossa pesquisa, pretendemos identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de gráficos. Pretendemos, também, fazer um levantamento histórico sobre o Ensino de Cálculo no Brasil, além de discutir o Ensino de Cálculo e as Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM.

1.3.4. Objetivos Específicos

Em nossa pesquisa, configuram-se os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar / discutir o Ensino de Cálculo na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior;

- Elaborar, implementar e avaliar atividades exploratórias utilizando TICEM relacionadas a diversos conteúdos de derivadas trabalhados em Cálculo I;

- Identificar as contribuições das atividades para a formação de Imagens Conceituais relacionadas ao conceito de Derivadas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I;

- Apresentar uma proposta de ensino de “Derivadas de Funções Reais” com atividades exploratórias utilizando TICEM, para disciplinas de Cálculo I em cursos de Licenciatura em Matemática.

1.3.5. Metodologia de Pesquisa

- Pesquisa Teórico-bibliográfica sobre Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática, Ensino de Cálculo, Pensamento Matemático Avançado, Visualização e Educação Matemática no Ensino Superior;

- Pesquisa de Campo realizada em sala de aula e no laboratório de informática, com 17 alunos de Licenciatura em Matemática da UFOP, matriculados na disciplina MTM 212 – Cálculo I, no 2º semestre letivo de 2012, a partir da elaboração e desenvolvimento de atividades exploratórias utilizando o GeoGebra, relacionadas a diversos conteúdos de derivadas.

1.4. Estrutura da Dissertação

Após a presente introdução, passaremos ao Capítulo 2, no qual destacaremos os referenciais teóricos que embasam / sustentam nosso trabalho: Educação Matemática no Ensino Superior, Pensamento Matemático Avançado, Tecnologias da Informação e Comunicação e Educação Matemática, Visualização em Educação Matemática e Visualização no Ensino de Cálculo com o uso das TICEM.

No Capítulo 3 trataremos da metodologia de pesquisa, destacando os instrumentos de coleta de dados e, principalmente, as atividades exploratórias utilizando o GeoGebra, relacionadas a diversos conteúdos de derivadas.

No Capítulo 4, descreveremos e analisaremos nossas atividades, com vistas ao estabelecimento de categorias / eixos de análise.

Nas Considerações Finais, trazemos um conjunto de respostas à nossa questão de investigação.

Capítulo 2

REFERENCIANDO TEORICAMENTE NOSSA PESQUISA

> Arquimedes será lembrado, quando Ésquilo já tiver sido esquecido, porque as línguas morrem, mas as ideias matemáticas não. A “imortalidade” pode ser uma palavra tola, mas, provavelmente, será um matemático a ter a melhor oportunidade para mostrar o que ela poderá significar.
>
> G. H. Hardy

> Tomando a Matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu, o que ele fez foi, em grande escala, a metade melhor.
>
> Leibniz

Neste capítulo, iniciaremos destacando, dentro da Educação Matemática no Ensino Superior, o Ensino de Cálculo. Faremos inicialmente uma breve descrição da chegada e difusão do Cálculo no Brasil. A partir daí, destacaremos a evolução do seu ensino, sua importância, os problemas apresentados em seus processos de ensino e aprendizagem, a criação de grupos de pesquisa no Brasil e, consequentemente, sua afirmação enquanto campo de pesquisa.

2.1. Sobre o Cálculo Diferencial e Integral

O foco principal do nosso trabalho é o ensino do Cálculo Diferencial e Integral; portanto, estudar a evolução histórica do Cálculo ajuda a entender certos aspectos do seu desenvolvimento e na compreensão das dificuldades apresentadas no ensino da Matemática Superior.

Os conceitos fundamentais do Cálculo surgiram na Grécia, principalmente com os trabalhos de Arquimedes, e tiveram sua consolidação no século XVII. Cabe ressaltar que não nos interessa, nesse trabalho, entrar nos detalhes da polêmica envolvendo os dois grandes matemáticos, Newton e Leibniz, a respeito da primazia da criação do Cálculo.

Vemos o Cálculo como fruto do esforço intelectual de inúmeras gerações de matemáticos, de Arquimedes a Cantor, como destaca Contador (2008):

> Afirmar que Newton e/ou Leibniz são os autores do Teorema Fundamental do Cálculo, é bem plausível, mas numa opinião particular, atribuir exclusivamente a eles a criação do Cálculo Diferencial e Integral é um erro. É claro que questões sobre a razão de variação e cálculo de áreas foram generalizadas e muitas dessas questões hoje são respondidas de forma rotineira, graças à essa ferramenta. Num sentido mais formal, o Cálculo nas mãos de Newton e, principalmente, nas de Leibniz, devido à sua simbologia, atingiu o auge, mas devemos lembrar que, desde os primórdios de nossa era, problemas envolvendo retificação, quadratura de curvas e volumes, fizeram parte dos problemas matemáticos de muitas civilizações (CONTADOR, 2008, p. 310).

O período que se segue à consolidação do Cálculo é de exploração, uma verdadeira revolução científica tendo como ferramenta o Cálculo Diferencial e Integral, apoiado pela Geometria Analítica. Com esse poderoso e eficiente instrumento em mãos, a maioria dos matemáticos do século XVIII foi atraída pela ampla aplicabilidade.

Perto do fim do século XVIII, a comunidade matemática sentiu a necessidade de reforçar as bases teóricas dessa linha de pensamento, em busca de uma fundamentação lógica rigorosa. Com esse objetivo, a geração de matemáticos do século XIX dedicou-se arduamente à tarefa de construir uma nova base lógica, uma forma de dar rigor aos processos matemáticos, o que foi conseguido com o desenvolvimento da Análise, a partir dos trabalhos de Cantor (1845 – 1918) e Dedekind (1831 – 1916).

Para o prosseguimento da nossa pesquisa teórico-bibliográfica, será necessário, a partir de agora, investigarmos como essa área denominada Cálculo Diferencial e Integral se desenvolveu enquanto disciplina matemática, especialmente no Brasil. A partir daí, intentamos voltar nosso foco para seus processos de ensino e aprendizagem, suas mudanças e tendências, suas linhas de pesquisa e, não menos importante, seu papel como disciplina de formação matemática nos dias atuais.

2.2. O Cálculo no Brasil

Enquanto o Cálculo era desenvolvido e consolidado na Europa, o Brasil era uma colônia extrativista; não tínhamos universidades nem tampouco um sistema de ensino desenvolvido. Nessa época, a educação aqui estava a cargo dos jesuítas. Com a chegada da corte em 1808, fez-se necessário estabelecer na colônia uma infraestrutura para a sua permanência; criou-se então, a Academia Militar, juntamente com a Imprensa Régia, o Jardim Botânico, a Biblioteca Real, o Museu Real e o Observatório Astronômico, dentre outras inúmeras instituições para o funcionamento da metrópole. Na Academia Militar, criada em 1810 e que começou a funcionar em 1811, foi inaugurado o curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de quatro anos. Por muito tempo, essa foi a principal instituição de ensino de Matemática do Brasil, com várias modificações em seu nome, como relata D'Ambrósio (2008):

> Em 1839, em plena regência, a Real Academia Militar foi transformada em Escola Militar da Corte; em 1858 passou a ser chamada Escola Central; em 1875, Escola Politécnica; e, em 1896, Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Nessas escolas é que se ensinava e se pesquisava Matemática. De muita importância foi instituir, em 1842, o grau de Doutor em Ciências Matemáticas (D'AMBRÓSIO, 2008, p. 48).

De acordo com Lima (2008, p. 2), "o ensino de Cálculo Diferencial e Integral nessa instituição baseava-se no livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1736-1843), [...] traduzido para o português por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim". A partir da criação do grau de Doutor, vários trabalhos foram apresentados ao longo do século XIX, inclusive na área do Cálculo; a maioria desses trabalhos estão listados no livro de Clóvis Pereira da Silva, intitulado *A Matemática no Brasil; História de seu Desenvolvimento*.

Em 1840, Pedro de Alcântara é coroado Imperador Pedro II e inicia-se o Segundo Império, período de grande progresso econômico e intelectual. Em 1876, foi inaugurada a Escola de Minas de Ouro Preto, mais um centro que tinha a Matemática como um de seus pilares. De acordo com D'Ambrósio (2008):

> A Escola de Minas de Ouro Preto foi organizada pelo físico, matemático e geólogo francês Claude-Henri Gorceix (1842-919), nos moldes da *École de Mines de Saint-Étiène*, e desde seu início enfatizava a Matemática como uma disciplina básica. Gorceix foi responsável pela contratação, em 1878, de Arthur Thiré (1852-1924), matemático francês que, em Ouro Preto, assumiu cadeiras de Matemática (D'AMBRÓSIO, 2008, p. 58).

Em 1893, foi criada a Escola Politécnica de São Paulo que, em 1934, faria parte da Universidade de São Paulo. Segundo Lima (2008, p. 6), "a Escola Politécnica de São Paulo foi criada em 1893, nos moldes da *Eidgenössische Technische Hochschule* de Zurique, mas na prática, seguia as concepções e técnicas estabelecidas pela *École Polytechnique* de Paris." Ainda segundo Lima (2008, p. 6), "o Cálculo ensinado na Escola Politécnica de São Paulo tomava como referência o livro *Premiers Élements du Calcul Infinitesimal* de Hippolite Sonnet, que trata o Cálculo na concepção de Leibniz e Newton, dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite".

Pesquisas mostram que o Cálculo ensinado no Brasil, até o início do século XX, estava apoiado nos conceitos gerados antes do século XVIII, privilegiando os conceitos básicos de derivada e integral e suas aplicações, sem levar em conta e sem abordar o rigor dos fundamentos dos conceitos matemáticos. Lima (2008, p. 12) afirma que: "Esses cursos não visavam à construção rigorosa dos fundamentos dos conceitos matemáticos estudados; a Matemática ensinada priorizava a formação de militares e engenheiros". Oliveira (2004), afirma que:

> A Matemática, em particular o Cálculo Infinitesimal, exerceu o seu papel de disciplina de serviço na educação dos estudantes de engenharia. Tinha a finalidade de atender às necessidades dos estudantes em seu Curso, capacitando-os para o exercício de suas futuras funções (OLIVEIRA, 2004, P. 22, apud. Lima, 2008, p. 12).

Após esse período e a partir das décadas de 1920 e 1930, as primeiras universidades do Brasil começam a ser inauguradas: Universidade de São Paulo (1934), Universidade Federal de Minas Gerais (1927) e Universidade Federal do Rio de Janeiro (1920), que era a antiga Real Academia de 1792. Esse número é verdadeiramente expandido no período pós-guerra.

Retomaremos essa discussão sobre a questão da construção rigorosa dos conceitos do Cálculo oportunamente, quando discutirmos a questão das definições conceituais e sua relação com as definições formais. Agora, tentaremos situar o movimento da Educação Matemática no Brasil e, dentro dele, buscaremos focar o Ensino Superior de Matemática.

2.3. A Educação Matemática no Ensino Superior

2.3.1. Primeiros passos da Educação Matemática no Brasil

O contexto apresentado acima, como já mencionamos, focou o desenvolvimento do ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil, que estava concentrado na Escola Militar no Rio de Janeiro. A escola básica brasileira ficou por mais de duzentos anos quase que exclusivamente nas mãos da Companhia de Jesus; o ensino praticado pelos jesuítas apresentava uma proposta clássico-humanista, voltada para o desenvolvimento da retórica, das humanidades e da gramática. Mesmo após a expulsão dos jesuítas do Brasil, o ensino básico ficou a cargo de algumas ordens religiosas, mas a Matemática continuava sem fazer parte do escopo das disciplinas ministradas.

O Colégio Pedro II do Rio de Janeiro, fundado em 1837, significou um grande avanço na direção de mudanças do ensino básico brasileiro, como destaca Miorim (1998):

> Pela primeira vez, foi apresentado um plano gradual e integral de estudos para o ensino secundário, no qual os alunos eram promovidos por série, e não mais por disciplinas, e obtinham, ao final do curso, um título de bacharel em Letras, que lhes garantia a matrícula em qualquer escola superior, sem a necessidade de prestar exames. Nesse plano de estudos, nos moldes dos colégios franceses, predominaram as disciplinas clássico-humanistas. Apesar disso, as matemáticas, as línguas modernas, as ciências naturais e físicas e a história seriam também contempladas, mostrando uma tentativa de conciliação entre o ensino clássico e as modernas; um reflexo das discussões entre *anciens* e *modernes* que aconteciam na Europa. As matemáticas – aritmética, geometria e álgebra – tiveram, assim, seu lugar garantido e apareceram em todas as oito séries do curso (MIORIM, 1998, p. 87).

Com a Proclamação da República, em 1889, foi criado o Ministério da Instrução, Correios e Telégrafos, e o primeiro ministro que assumiu esta pasta, Benjamin Constant, promoveu uma profunda reforma em todo o sistema educacional brasileiro. Essa reforma ficou conhecida por Reforma Benjamin Constant. Miorim (1998) comenta que:

> A Reforma, elaborada segundo a filosofia de Augusto Comte, representou uma ruptura com a tradição clássico-humanista existente até então no ensino secundário. Era uma tentativa de introduzir uma formação científica – nos moldes positivistas – em substituição à formação literária existente (MIORIM, 1998, p. 87).

A segunda grande reforma ocorreu em 1931, com o primeiro ministro do recém criado Ministério da Educação e Saúde Pública. Nessa nova reforma, vê-se claramente explicitados os princípios defendidos pelo Movimento Internacional para Modernização do Ensino da Matemática. Com relação a esse movimento, Miorim (1998) nos traz:

> O Primeiro Movimento Internacional para a Modernização representou a primeira tentativa, organizada e envolvendo vários países, de reformular um ensino de Matemática existente havia séculos. Mesmo não existindo uma intenção inicial nesse sentido e, também, uma proposta única, algumas diretrizes que foram por ele estabelecidas influenciaram as futuras discussões sobre a Educação Matemática em diferentes países. Apesar disso, as mudanças ocorridas durante as primeiras décadas de nosso século não chegaram a produzir os efeitos esperados. O descompasso existente entre os últimos avanços científicos e tecnológicos e a Matemática ensinada nas escolas de nível médio seria intensificado e este seria novamente um dos mais fortes argumentos utilizados pelos defensores do Movimento de Matemática Moderna para justificar a necessidade de "modernização dos conteúdos matemáticos" (MIORIM, 1998, p. 107, grifo do autor).

Esse movimento, promovido em sua maior parte por grandes matemáticos, tinha a intenção de minorar a distância entre a Matemática ensinada nas escolas básicas e aquela produzida nos centros acadêmicos; portanto, a proposta era introduzir alguns elementos da Matemática desenvolvida nos séculos XVII e XVIII. De acordo com Miorim (1998, p. 106), "a introdução do conceito de função, elemento unificador dos vários ramos da Matemática, já representava uma tentativa de adequação aos estudos mais recentes que tinham como uma de suas características fundamentais o rompimento da barreira existente entre os campos matemáticos".

Toda essa movimentação também provocou mudanças radicais no ensino mundial de Matemática, culminando em uma Conferência Internacional em Royaumont, em 1959, promovida pela Organização Europeia de Cooperação Econômica – OECE. Nessa conferência, foram estabelecidas as bases do Movimento da Matemática Moderna, cujo desenvolvimento teve como ponto alto os trabalhos de Nicolas Bourbaki (nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos, em sua maioria, franceses), que propunha uma reformulação de toda a Matemática com uma nova axiomática, em que os elementos essenciais eram os conjuntos, as relações e as estruturas.

Segundo Miorim (1998, p. 111), "no Brasil, as questões relativas ao ensino de Matemática começaram a ser discutidas com maior intensidade pelos professores durante a década de 50, devido especialmente à realização dos primeiros Congressos Nacionais de Ensino de Matemática." Naquele momento, a Educação Matemática começava a dar os primeiros passos em solo brasileiro. O primeiro desses congressos foi realizado, em 1955, em Salvador – BA. Outros quatro congressos foram realizados até 1966 e grupos de pesquisa em Educação Matemática foram criados. Dentre eles podemos destacar o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática – GEEM / SP, o Grupo de Estudos de Ensino de Matemática de Porto Alegre – GEEMPA / RS, o Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática de Curitiba– NEDEM / PR, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Rio de Janeiro – GEPEM / RJ e um grupo coordenado pelo professor Omar Catunda na Bahia.

Essa Educação Matemática ficou, em seus anos iniciais, exclusivamente voltada para as questões do Ensino Básico, hoje denominado Ensinos Fundamental e Médio, focalizando inúmeros aspectos. Dentre eles, podemos destacar: formação de professores, currículo, processos de ensino e aprendizagem, avaliação e outros. Essa concentração se deve, em primeiro lugar, à demanda de necessidades desse nível, pois até poucas décadas antes do início dessas pesquisas, a Matemática trabalhada nas escolas básicas tinha suas bases na Matemática Clássica Grega e, nas universidades, desenvolvia-se uma Matemática moderna, fundamentada nos conceitos refinados nos séculos XVII, XVIII e XIX. A partir da década de 1980, começam a surgir as primeiras pesquisas na área da Educação Matemática no Ensino Superior.

2.3.2. A Educação Matemática no Ensino Superior

A Educação Matemática no Ensino Superior começou a se desenvolver a partir da década de 1980 no cenário mundial, de acordo com Pinto (2002):

> Internacionalmente, a pesquisa nesse nível de ensino também se consolidou mais tarde, a partir da década de 80 com a do grupo (Advanced Mathematical Thinking Group) durante encontro anual do International Group for the Psychology of Mathematics Education. Os trabalhos desenvolvidos no início se fundamentaram principalmente na Psicologia da Educação; em especial nos trabalhos de Jean Piaget e Lev Vigotsky, um esforço visando estender suas ideias para explicar questões relativas ao ensino/aprendizagem da matemática por indivíduos adultos (PINTO, 2002, p. 334).

Em relação à pesquisa brasileira em Educação Matemática no Ensino Superior, a pesquisadora afirma que:

> Em nosso país, o primeiro encontro de pesquisadores nessa área aconteceu em 2000, durante o I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, em Serra Negra, São Paulo, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Nessa oportunidade, constituiu-se o primeiro Grupo de Trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior, coordenado pela Dra. Lilian Nasser, do Instituto de Matemática – UFRJ (PINTO, 2002, p. 334).

A partir de então, é verificada uma evolução nas pesquisas nessa área, que tem se consolidado enquanto campo de pesquisa dentro das principais universidades do Brasil. Várias são as questões motivadoras para a pesquisa nesse segmento de ensino; dentre eles, podemos destacar o uso de novas tecnologias no ensino, as questões da evasão e do alto índice de reprovação nas disciplinas, em particular, nas disciplinas de Cálculo, a dificuldade dos alunos ingressantes em cursos que ofertam disciplinas da Matemática em seus ciclos básicos, a problemática da avaliação, a análise de livros didáticos, a Modelagem Matemática Superior, a transição da Matemática Elementar para a Matemática Avançada, o Pensamento Matemático Avançado, dentre outras.

A evolução de oferta de vagas para docentes no Ensino Superior fomentou a pesquisa, implicando em um número crescente de doutores nessa área. A quantidade de trabalhos e pesquisas na área tem acompanhado de perto a explosão de vagas ofertadas em cursos da área de exatas, em particular, nas Engenharias. Um estudo realizado pelo Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre a Formação e Exercício Profissional em Engenharia da UFJF, em 2010, destacou que o número de cursos de Engenharia no Brasil saltou de, aproximadamente, 400 em 1990 para 2566 em 2009 e, de acordo com esse relatório, essa evolução se deve a dois acontecimentos: a flexibilização da legislação referente à abertura de novos cursos e ao advento da globalização, que insere o país num contexto social, econômico e político de alta competitividade. Essa flexibilização da legislação é melhor explicada por Campos (2012):

> O abrandamento no rigor de normas legais que regulamentavam a criação de novos cursos e centros de ensino superior permitiu a essas instituições darem uma resposta rápida ao problema. Houve, também, suporte governamental ao sistema privado de ensino, através de transferências de recursos, sobretudo, pelo Programa de Financiamento Estudantil (FIES), lançado em 1999, e do Programa Universidade para Todos (PROUNI), de 2005, que permitiram o acesso a estudantes de baixa renda através do subsídio nas mensalidades, fato que possibilitou a essas instituições expandirem sua oferta de cursos e ocuparem suas vagas ociosas. Com isso, o surgimento de cursos, ou ampliação dos já existentes, e a criação de

> novas faculdades e centros universitários deram início a um processo de expansão acelerada da oferta de vagas nessas instituições e uma busca não menos veloz dos novos estudantes por uma formação universitária (CAMPOS, 2012, p. 17).

Com a expansão de novos cursos e novos Centros Universitários, com vários deles tendo a Matemática em suas formações iniciais, vêm à tona problemas relacionados ao ensino e aprendizagem das disciplinas de conteúdo matemático, particularmente e em grande proporção, o Cálculo Diferencial e Integral, com altos índices de reprovação e, consequentemente, um número considerável de evasão. Isso traz à luz da pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior, um objeto rico em nuances e dados para serem examinados e dissecados, sob vários focos e pontos de vista, levantando, então, questionamentos importantes para busca de soluções. Será que o aluno carrega toda a culpa em seu fracasso na aprendizagem dessa Matemática Avançada, por conta de sua "defasagem" de conteúdos trazida da escola básica? Ou será que professores com seus métodos conservadores não são capazes de repensar suas práticas pedagógicas? Novas tecnologias contribuem para amenizar essas dificuldades e contribuem positivamente nos processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina? Quais mudanças nos currículos dos cursos de exatas devem ser efetivadas para minorar as reprovações e evasões?

De fato, o Ensino de Cálculo tem despertado o interesse de pesquisadores e grupos de pesquisa na área, desde os anos de 1990, como relata Resende (2004):

> É notório o crescimento, em termos nacionais, do número de pesquisas em Educação Matemática no ensino superior. A razão para este crescimento, conforme nos revela Nasser (2001), deve-se a vários fatores: a introdução do uso de novas tecnologias no ensino, o aumento do número de pesquisadores em Educação Matemática nas instituições de ensino superior e as recentes reformas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática. Levantamento estatístico realizado recentemente, tendo como base o universo das pesquisas realizadas e apresentadas em forma de comunicações científicas no VII Encontro Nacional de Educação Matemática – realizado na UFRJ, em julho de 2001 - nos dá evidência do significativo volume de pesquisas no âmbito do ensino superior: este representa quase um quarto do universo total (RESENDE, 2004, p. 21).

Os problemas apresentados pelos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo não são novos; vários são os motivos apresentados para justificar o fracasso em se alcançar, por parte dos discentes, uma aprendizagem significativa dos conceitos básicos dessa disciplina. Além disso, inúmeras propostas são apresentadas pelas instituições de ensino para solucionar o problema do alto índice de reprovação, como aponta o relatório de Mello (2001):

> A alta reprovação em Cálculo I, que se agravou a partir do final da década de 1970, constitui um dos maiores problemas dos cursos de Engenharia. Apesar de muitos professores atribuírem o problema à falta de preparo dos alunos, isso não impede de as várias mudanças curriculares proporem alterações para "melhorar" o Cálculo I. Por outro lado, alguns professores tentam adequar a sua forma de ensinar essa disciplina, levando em conta a realidade dos alunos que ingressam hoje em dia nas Escolas de Engenharia (MELLO, 2001, p. 1).

Esse artigo, elaborado por professores da UFF e apresentado no Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia – COBENGE, em 2001, apresenta várias propostas de mudanças que visam melhorar a qualidade no ensino de Cálculo, desde 1970 a 2000. De acordo com o documento, durante esse período, várias tentativas foram planejadas e implantadas, tais como: alteração no sistema de avaliação com provas unificadas, reforma curricular, mudança de metodologias de ensino, alteração nos vestibulares e implantação, em 1998, de turmas que utilizavam computadores em suas seis aulas semanais. Ao abordarmos um artigo externo à produção da Educação Matemática, buscamos evidenciar que o problema em destaque, tem sido um verdadeiro entrave na grade curricular dos cursos da área de exatas.

Diversos estudos e relatórios mostram, numericamente, os dados da reprovação do Cálculo dentro das universidades. Resende (2004) apresenta dados em que o percentual de reprovação em Cálculo em duas instituições de Ensino Superior, a UFF e a USP, ultrapassa 50%, chegando a 95% em alguns cursos e, surpreendentemente, a 65% no caso do curso de Matemática. Esse problema não é exclusivo dessas instituições de ensino, citadas por Resende, nem muito menos da época em que o artigo foi publicado, Rocha (2010) apresenta outros dados relativos a outros centros acadêmicos, como UFOP e PUC-MG, em que os índices se assemelham aos valores evidenciados.

Diante do fato, incontestável, que o ensino de Cálculo tem gerado grandes discussões e inúmeras pesquisas, múltiplos olhares sobre o tema geraram linhas distintas de trabalho, como destaca Reis (2009):

> O ensino de Cálculo tem sido foco de diversas discussões/ investigações sob a perspectiva da Educação Superior, tanto sobre questões curriculares quanto sobre questões metodológicas. Entretanto, uma questão que precede à elaboração de currículos e ementas, à escolha de bibliografias e

> livros-textos e à opção por uma determinada metodologia ou recursos metodológicos é que a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão sobre que papel o Cálculo Diferencial e Integral representa pela formação matemática dos estudantes (REIS, 2009, p. 81).

O Cálculo Diferencial e Integral é parte integrante dos ciclos básicos de diversos cursos superiores, tanto na área das ciências exatas, como administrativas, econômicas e sociais; em alguns desses cursos, ele é trabalhado de forma mais conceitual e, em outros, de forma mais procedimental. Um dos conceitos centrais trabalhados no Cálculo, independentemente da forma de trabalho, certamente é o conceito de função. Igliori (2009) afirma que:

> O Cálculo Diferencial e Integral tem seu desenvolvimento confundido com o desenvolvimento da própria Matemática, já que os grandes problemas da Matemática necessitaram do instrumental do Cálculo para serem enfrentados. Os três grandes problemas clássicos quadratura do círculo, trissecção do ângulo e duplicação do cubo não nos deixam mentir. Além disso, as noções de número real, infinito, continuidade, limite e função constituem o cerne da Matemática (IGLIORI, 2009, p. 13).

Nessa perspectiva, a derivada de uma função real ganha importância por trabalhar com todos esses elementos integrantes do cerne destacado pela pesquisadora. Assim, como intentamos, em nossa pesquisa, discutir o ensino de derivadas de funções reais, buscaremos fundamentá-la também numa teoria muito relevante e que tem sido bastante explorada na Educação Matemática no Ensino Superior: o Pensamento Matemático Avançado.

2.4. Pensamento Matemático Avançado

2.4.1. Concepções acerca do Pensamento Matemático Avançado

A linha de pesquisa denominada Pensamento Matemático Avançado ou, no original em inglês, *Advanced Mathematical Thinking*, ganhou destaque desde a época em que pesquisadores da Educação Matemática voltaram suas atenções para o Ensino Superior, na década de 1980, como já citado por Pinto (2002). De acordo com Almeida (2013, p. 3): "No cenário internacional, esse campo surgiu, na década de 80, durante o encontro anual do *International Group for the Psycology of the Mathematical Education* – PME, com a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group*."

Esse nome é também atribuído ao grupo de estudos formado por professores destacados que tem como líder o Professor David Tall, que organizou em forma de livro os principais resultados de pesquisas realizadas pelo grupo, como destaca Almeida (2013):

> Outro ponto importante da biografia desse brilhante autor é a organização do livro *Advanced Mathematical Thinking* (TALL, 1991). Esse livro trouxe o resultado das discussões do grupo de trabalho criado no ano de 1985, o Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (IGPME, comumente abreviado como PME). Esse livro, que se constituiu como um estado da arte das pesquisas na área até então, contou com a participação de pesquisadores como Ed Dubinsky, Michèle Artigue, Sholmo Vinner, Bernard Cornu, Tommy Dreyfus, dentre outros (ALMEIDA, 2013, p. 5).

Pesquisadores diferentes têm concepções distintas acerca do Pensamento Matemático Avançado, mesmo autores de artigos que compõem o livro acima citado. Todos esses autores se referem ao pensamento desenvolvido em disciplinas de cursos superiores; portanto, para todos eles, os conceitos de função, limite, infinito e derivada têm lugar de destaque dentro dessa teoria.

Faremos, a partir de agora, uma síntese sobre o que é o Pensamento Matemático Avançado, quais são os seus pontos mais importantes e quais são as similaridades e diferenças entre Pensamento Matemático Elementar e Pensamento Matemático Avançado, nas perspectivas de alguns dos seus principais pesquisadores. Dentre eles, revisitaremos Tommy Dreyfus, Eddie Gray, Shlomo Vinner e David Tall, destacando o trabalho de Tall, com ênfase nas suas teorias sobre imagem conceitual e definição conceitual, conceitos centrais na construção de nosso referencial teórico.

Para Dreyfus (1991) o Pensamento Matemático Avançado consiste em uma grande série de processos que interagem entre si, como o processo de representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar e formalizar, tendo como processos principais, a representação e a abstração. No entanto, para ele, esses processos aparecem também no Pensamento Matemático Elementar, pois existem tópicos de Matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há tópicos de Matemática avançada com tratamento elementar. A diferença está na complexidade como esses tópicos são abordados e conduzidos, como afirma o próprio Dreyfus (1991):

> Uma característica distintiva entre o pensamento avançado e o pensamento elementar é a complexidade e como ela é tratada. Conceitos avançados, tais como anéis, é provável que sejam muito complexos. A distinção está na forma como essa complexidade é gerenciada. Os processos poderosos são aqueles que permitem fazer isso, em especial abstração e representação. Por meio de abstração e representação, pode-se passar de um nível de detalhe para o outro e, assim, gerenciar a complexidade (DREYFUS, 1991, p 26, tradução nossa).

O processo de representação, segundo Dreyfus (1991), pode ser decomposto em outros três processos: representar; mudança de representação e tradução entre elas; e modelação. Gereti (2013) descreve esses três processos da seguinte forma:

> O primeiro processo, representar, é constituído por dois tipos de representações: as simbólicas e as mentais. Como as representações são pessoais, cada indivíduo pode ter um tipo de representação para um mesmo conceito, ou possuir diversas representações de maneira complementar e integrá-las quando possível. O resultado disso, segundo Dreyfus (1991), será que o indivíduo terá várias representações ligadas, permitindo utilizá-las simultaneamente o alterná-las de forma eficiente. Este processo se refere à mudança de representações e tradução entre elas. Outro processo de representação é a modelação, que é a formulação de uma representação matemática para um objeto não-matemático (GERETI, 2013, p. 4).

O outro processo de destaque é o processo de abstração que, para Dreyfus (1991), é o mais importante no desenvolvimento das habilidades em certos conteúdos matemáticos e, sem dúvidas, é o que caracteriza mais fortemente o Pensamento Matemático Avançado. Para Dreyfus (1991):

> Se um aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático. Atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada (DREYFUS, 1991, p. 34, tradução nossa).

O processo de abstração, por sua vez, está associado aos processos de generalização e sintetização. Para Dreyfus (1991), generalizar quer dizer derivar ou induzir a partir de determinadas particularidades, identificando semelhanças para expandir o domínio de validade. Já a sintetização é o ato de combinar partes com o intuito de formar o todo. Dreyfus (1991) afirma que:

> Abstrair é primeiramente um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, isto é, a partir de propriedades e de relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento de propriedades e relações apropriadas. Requer a habilidade de trocar atenção dos objetos em si para a estrutura de suas propriedades e relações. Essa atividade construtiva mental por parte de um aluno é fortemente dependente da atenção do aluno, devendo enfocar nas estruturas que formarão parte do conceito abstrato, desviando-se daqueles que são irrelevantes no contexto pretendidos; a estrutura se torna importante, enquanto detalhes irrelevantes estão sendo omitidos, deste modo reduzindo a complexidade da situação (DREYFUS, 1991, p. 37, tradução nossa).

Os dois principais processos de representação e abstração se complementam e estão envolvidos no Pensamento Matemático Avançado, pois um conceito é abstraído de diversas representações e, outras vezes, as representações vêm de um conceito mais abstrato.

Já para Gray (1999), o Pensamento Matemático Avançado está relacionado com o pensar e fazer de matemáticos profissionais criativos, quando estes imaginam, conjecturam e provam teoremas para estudantes que trabalham com definições e teoremas para construção de um conceito. Essas atividades podem ser diferentes de um indivíduo para outro, conforme destaca Costa (2002):

> As atividades cognitivas envolvidas no pensamento matemático avançado, diz Gray, podem diferir grandemente de um indivíduo para outro, incluindo aqueles que constroem de imagens e intuições à maneira de um Poincaré e aqueles outros, tal como um Hermite, mais logicamente orientados para a dedução simbólica. Os conhecimentos matemáticos obtidos, para estes estilos diferentes de pensamento matemático avançado, são muito diferentes e enfrentam sequências diferentes de reconstrução cognitiva, embora ambos acabem na prova formal (COSTA, 2002, p. 258).

Para Gray (1999), o principal modo de entender o Pensamento Matemático Avançado é que em Matemática Avançada, as definições dos conceitos são formuladas e os conceitos formais são construídos por dedução, ou seja, são dadas propriedades como definições axiomáticas e a natureza do próprio conceito é construída estabelecendo as propriedades por dedução lógica.

A transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado envolve uma inversão na forma como a estrutura do conhecimento foi concebida, pois enquanto no pensamento elementar a construção do conhecimento se dá do objeto e suas propriedades para a definição, no pensamento avançado o caminho é inverso, partindo de definições para a construção do objeto e dedução de suas propriedades.

Destacaremos, a partir da agora, essas questões que envolvem o Pensamento Matemático Avançado na concepção de David Tall, pois como argumenta Almeida (2013):

> Dentre os pesquisadores que se debruçam sobre os problemas e especificidades da Educação Matemática no Ensino Superior, é destacado o trabalho do pesquisador inglês David Tall. Desde 1970, esse pesquisador é um dos principais articuladores da área de pesquisa que se tornou conhecida como Pensamento Matemático Avançado (ALMEIDA, 2013, p. 4).

Tall (1992) destaca que o Pensamento Matemático Avançado caracteriza-se por duas componentes: *definições matemáticas precisas* e *dedução lógica* de teoremas a partir das mesmas. No entanto, as palavras em itálico representam apenas a "ponta do iceberg". Já como destaca Costa (2002):

> Tall (1995) expressa que o Pensamento Matemático Avançado, hoje, envolve usar estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas para construir novas ideias que continuam a construir e alargar um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados (COSTA, 2002, p. 258).

Para ele, o ponto principal da Educação Matemática em níveis superiores é o iniciar do aluno no mundo do matemático profissional, não apenas com relação ao rigor exigido, mas também com relação às estruturas que fundamentam os conceitos. Caminhar em direção a um pensamento mais avançado requer uma transição difícil, partindo de uma estrutura com conceitos basicamente intuitivos para uma nova estrutura que parte de definições formais para construção de propriedades através de deduções lógicas.

Com relação às questões cognitivas, Tall (1991) considera que existem diferentes formas de se pensar matematicamente, com base no trabalho de Poincaré (1913), que definiu em suas análises, dois tipos de mentes matemáticas: os que pensam analiticamente e os que pensam geometricamente. Das diversas formas de se raciocinar em Matemática, Tall (1991), de acordo com Amorim, destaca:

> Para Tall (1991), não existem apenas dois tipos de mentes matemáticas, mas muitas; e essas maneiras distintas de ver a Matemática levaram ao desenvolvimento de várias e diferentes vertentes da filosofia matemática, no início do século XX. [...] No entanto, ele destaca que prevaleceu, no final do século XX, uma mistura da visão formalista e lógica, com a criação de um grande número de sistemas formais baseados em deduções lógicas, formulados a partir de definições e axiomas formais, que prevalecem até os dias de hoje (AMORIM, 2011, p. 49).

Pela dificuldade de entendimento e procurando respostas para os problemas de aprendizagem no Ensino Superior, o pesquisador recorreu às considerações psicológicas para o estudo do Pensamento Matemático Avançado, sem desconsiderar as concepções dos matemáticos experientes. Assim, questões cognitivas entram em cena, na busca de um melhor entendimento acerca do desenvolvimento do pensamento avançado, suas similaridades com o pensamento elementar e suas particularidades. Para Amorim (2011), há que se considerar as seguintes diferenças no entendimento de algumas teorias:

> O psicólogo procura estender as teorias psicológicas ligadas aos processos de pensamento, na tentativa de uma compreensão, de forma mais complexa, acerca do domínio do conhecimento, enquanto o matemático busca soluções para o processo de pensamento criativo, na tentativa, talvez, de contribuir para um avanço na qualidade do ensino ou da pesquisa (AMORIM, 2011, p 48).

Tall preferiu a Teoria Construtivista de Jean Piaget à Behaviorista pois, para ele, essa segunda teoria tem aplicação limitada para a Matemática, por tratar de pensamentos matemáticos mecanizados. A Teoria Construtivista discute como as ideias são desenvolvidas na mente da pessoa, pois Piaget estudou o desenvolvimento cognitivo da criança até tornar-se adulta, destacando quatro etapas: a sensório-motora, a pré-operacional, a das operações concretas e a das operações formais. Amorim (2011) descreve que:

> Conforme Tall (1991), a teoria dos estágios de Jean Piaget foi estendida para níveis mais elevados, para abranger o Pensamento Matemático Avançado. No entanto, há dificuldades para estender a teoria para níveis mais elevados de aprendizagem pois, muito provavelmente, a maioria dos estudantes universitários não é capaz de chegar ao nível abstrato das operações formais. Tall salienta ainda que a teoria do estágio pode ser apenas uma visão simplicista, linear, de um sistema muito mais complexo de mudança, quando se trata da transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado (AMORIM, 2011, p. 50).

Mesmo admitindo problemas para utilização da Teoria Piagetiana, Tall destacou aspectos positivos na teoria de estágios, especialmente na transição mental entre os estágios e os possíveis conflitos entre a experiência anterior e as novas teorias: “Essas transições ocorrem frequentemente na Matemática Avançada quando o indivíduo se esforça com a estrutura do novo conhecimento. Conflito é um fenômeno bem conhecido para a mente matemática” (TALL, 1991, p. 9, tradução nossa).

Vários aspectos cognitivos e processos de aprendizagem, alguns já destacados por outros autores, são também considerados por Tall, como os processos de abstração e generalização que, para ele, são fatores que dificultam a aprendizagem da Matemática Avançada. Amorim (2011, p. 51) acrescenta que, para Tall, “a abstração é um objeto mental muito distinto, que é definido por uma lista de axiomas. Enquanto a generalização simplesmente envolve uma extensão dos processos conhecidos, a abstração requer uma reorganização mental volumosa”.

Outra questão interessante se relaciona ao ciclo de atividade no Pensamento Matemática Avançado, assim observado por Costa (2002):

> Relativamente ao ciclo completo de atividade em Pensamento Matemático Avançado, Tall (1991) identifica-o desde o ato criativo de considerar um contexto problema em pesquisa matemática que conduz à formulação criativa de conjecturas, até ao estágio final de refinamento e prova. Tall apela também para uma clara compreensão deste ciclo onde realça a necessidade para começar com conjecturas e debate, a necessidade para construir significado, para refletir sobre definições formais, construir objeto abstrato cujas propriedades são aquelas e só aquelas que podem ser deduzidas da definição (COSTA, 2002, p. 260).

Diante dessa perspectiva, Tall considera duas questões fundamentais na abordagem do Pensamento Matemático Avançado, que são as noções de imagem conceitual e definição conceitual, às quais daremos um tratamento mais detalhado a seguir.

2.4.2. Imagem Conceitual e Definição Conceitual

O objeto central de nossa pesquisa é uma análise do processo de formação de imagens conceituais relacionadas às derivadas, por meio da construção do gráfico de funções. Assim, dentre as teorias cognitivas acerca da aprendizagem matemática no Ensino Superior, utilizaremos os trabalhos de Tall e Vinner (1991) que tratam das noções de imagem conceitual e definição conceitual.

Muitas discussões e debates têm ocorrido a respeito das teorias da aprendizagem em Matemática Superior e também sobre teorias do conhecimento desenvolvido em Matemática. De acordo com Hiebert (1986, p. 1), "a Matemática, com seu conteúdo amarradamente estruturado e claramente definido, tem oferecido um campo de debate para muita discussão sobre conhecimento procedimental e conceitual".

Em seu trabalho, Hiebert (1986) traça um paralelo sobre as considerações desses dois tipos de conhecimento matemático em duas épocas distintas: as concepções psicológicas desenvolvidas no século XX e também as do século anterior.

Daremos atenção especial às ideias de Hiebert (1986) acerca do conhecimento conceitual por ter semelhanças e interseções com as teorias cognitivas da aprendizagem matemática de Tall e Vinner, já mencionadas. Para Hiebert (1986), o conhecimento conceitual se caracteriza pela riqueza de relações, como uma rede de fatos e proposições que se relacionam e interagem. Hiebert (1986) ainda destaca:

> O desenvolvimento de conhecimento conceitual é alcançado pela construção de relações entre partes de informação. Este processo de ligação pode ocorrer entre dois pedaços de informação que já tenham sido guardados na memória ou entre um pedaço de informação já existente e outro recentemente aprendido. Considerar um desses fenômenos de cada vez pode ajudar a entendê-los. A literatura da psicologia e da educação é cheia de relatos de *insights* conseguidos quando itens não relacionados previamente são subitamente vistos como relacionados de algum modo. Tais *insights* são base para a aprendizagem por descoberta (Brunner, 1961). Nós caracterizamos isto como um acréscimo no conhecimento conceitual (HIEBERT, 1986, p. 5).

Essas ideias são semelhantes às desenvolvidas por Tall e Vinner sobre os conflitos mentais na aquisição de definições que se sobrepõem, às vezes, contradizendo-se e em outras vezes, complementando-se para formar ou modificar a imagem conceitual de um determinado objeto. A seguir, descreveremos mais detalhadamente tais ideias.

O ensino de Matemática no nível superior está totalmente estruturado a partir do estabelecimento de definições (axiomas) e de deduções lógicas de propriedades (teoremas), a partir dessas definições. Essa estrutura formal é extremamente complicada e rigorosa para o aluno. As provas e demonstrações de propriedades e teoremas, que são consequências das definições formais, exigem habilidades lógicas.

As provas matemáticas que validam determinadas proposições tem também gerado reflexões por parte dos educadores, os quais têm colocado grande ênfase no papel que elas desempenham na aquisição de novos conceitos e na sua importância para a construção do conhecimento. Alguns educadores têm apresentado propostas de reformulação de currículos, apresentando alterações no tipo de validação desses teoremas e proposições, por meio de provas mais significativas que as provas tradicionalmente apresentadas aos alunos. Com relação a essa questão, Hanna (1989) apresenta, em seu marcante trabalho “Provas que provam e provas que explicam”, a seguinte argumentação:

> A tendência de afastar as provas formais dos currículos, resultando na busca por modos alternativos de demonstrar a validade de um resultado matemático na sala de aula, tem motivado inúmeros estudos abordando o problema de ensinar provas. Leron (1983), refletindo sobre o faro de que o modo com que a maioria das provas formais está apresentada nos livros textos é pobre em referência ao aspecto de comunicar ideias matemáticas, sugere que tais apresentações matemáticas seriam mais compreensíveis se a prova fosse estruturada em uma sequência de pequenos módulos, explorando as ideias que referenciam cada um deles (HANNA, 1989, p. 1).

Para Hanna (1989, p. 2), sempre que possível, deveríamos priorizar provas que explicam em detrimento às provas que apenas provam pois, dessa forma, teríamos um enorme ganho em relação à aceitação de uma verdade matemática, contribuindo para a construção do conhecimento matemático. Em suas palavras: “Tanto as provas que provam como as provas que explicam são provas legítimas. Assim dizendo, reafirmo que ambas preenchem todas as exigências de uma prova matemática.”

Entretanto, em sua concepção a respeito dos dois tipos de prova matemática, ela argumenta que a prova que prova apenas mostra que um teorema é verdade, enquanto a outra prova, a que explica, mostra também porque é verdade.

A aprendizagem matemática em nível superior envolve várias questões cognitivas, além das peculiaridades próprias desse nível de ensino. A definição ocupa o ponto central dentro da estrutura matemática superior. Para Vinner (1991, p. 1): “Definição cria um problema sério na aprendizagem da Matemática. Ela representa talvez mais do que qualquer coisa, o conflito entre a estrutura da Matemática, como concebida pelo matemático profissional, e os processos cognitivos de aquisição de conceito”.

Com relação à real importância que as definições formais desempenham na construção dos conceitos por parte dos aprendizes, Vinner (1991) conclui:

> Em contextos técnicos, espera-se que as pessoas consultem definições dos termos técnicos envolvidos. Por outro lado, conhecendo o enorme impacto que a vida cotidiana tem em qualquer situação, seria razoável predizer que as definições serão ignoradas pela maioria das pessoas também em contextos técnicos. Isso realmente acontece, como nós vamos mostrar a seguir. Então, o que é que as pessoas consultam quando lidando com termos técnicos em situações técnicas? (VINNER, 1991, p. 5).

A Matemática está envolvida nesses contextos técnicos juntamente com suas definições formais, propriedades, teoremas e demonstrações; enfim, as ideias apresentadas por Vinner (1991) estão diretamente relacionadas à estrutura matemática.

A resposta para a questão lançada por Vinner (1991), em destaque na citação acima, são as noções de imagem conceitual e definição conceitual, que são estruturas mentais construídas a partir do estudo de definições matemáticas formais. Cabe ressaltar que outros pesquisadores, tais como Giraldo (2002), traduzem os termos *concept image* e *concept definition* como imagem de conceito e definição de conceito ou ainda conceito imagem e conceito definição. Apoiados nessas concepções, faremos fazer a análise do material produzido em nossa pesquisa de campo.

Assim, Cornu (1981) destaca:

> Numa atividade matemática, noções matemáticas não são apenas usadas de acordo com suas definições formais, mas também o são por meio de representações mentais que podem divergir de pessoa para pessoa. Estes modelos individuais são elaborados a partir de modelos espontâneos (modelos que existam antes da aprendizagem da matemática, e que se originam, por exemplo, na experiência cotidiana) que interferem com a definição matemática. Nós observamos que a noção de limite frequentemente denota uma fronteira que você não pode cruzar, que pode ou não ser aproximada. Algumas vezes é vista como atingível, em outras, como não atingível (CORNU, 1981, apud TALL, 1992).

De acordo com Tall (1992), os termos imagem conceitual e definição conceitual foram introduzidos em Vinner e Hershkowitz (1980) e mais tarde, definidos por Tall e Vinner em 1981, segundo TALL (1992):

> Nós usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. [...] À medida que a imagem conceitual se desenvolve, ela não precisa ser coerente durante todo o tempo. [...] Nós nos referimos à porção da imagem conceitual que é

> ativada num tempo particular como imagem conceitual evocada. Somente quando aspectos conflituosos são evocados simultaneamente é que poderá ocorrer um sentimento de conflito ou confusão. A definição conceitual é a forma de palavras usadas para especificar o conceito (TALL e VINNER, 1981, apud. TALL, 1992, p. 3).

Posteriormente, Vinner (1991) nos apresenta uma definição mais simples sobre imagem conceitual, relacionada à representação imaginária evocada pelo indivíduo após ver ou ouvir o nome do conceito. Ele afirma:

> A imagem conceitual é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. Mas é importante lembrar que essas formas verbais não são a primeira coisa evocada em nossa memória. Elas acontecem em estágio posterior. (VINNER, 1991, p. 6).

A partir de agora, descreveremos detalhadamente o trabalho de Vinner (1991) acerca dos conceitos de imagem e definição conceituais, mais precisamente, como essas duas estruturas mentais se interagem, a importância de cada uma delas e como os alunos as utilizam durante a resolução de atividades técnicas. Para Vinner (1991), essas duas estruturas cognitivas são duas células, podendo haver interação entre elas ou mesmo acontecer delas serem formadas independentemente. O pesquisador destaca que: “A célula da imagem conceitual é considerada vazia se nenhum significado é associado ao nome do conceito. Isso pode acontecer em muitas situações nas quais a definição conceitual é memorizada de um modo não significativo” (VINNER, 1991, p. 8).

Em algumas situações, a imagem conceitual pode ser alterada para incluir um novo conceito ou até mesmo uma reconstrução do conceito a ela associado. Vinner (1991, p. 9) afirma que, quando um conceito é introduzido pela primeira vez por meio de uma definição, a célula da imagem conceitual está vazia e, após vários exemplos e explicações, essa célula é preenchida, entretanto “ela não reflete, necessariamente, todos os aspectos da definição conceitual”.

Outra questão, além do processo de formação do conceito, são os processos de resolução de problemas. Quando uma situação problema é apresentada a um aluno, espera-se que as células da imagem conceitual e da definição conceitual sejam ativadas. Vinner (1991, p. 10) destaca que: “Muitos professores esperam que os processos intelectuais envolvidos na performance de uma dada tarefa intelectual deveriam ser esquematicamente expressos por uma das três figuras seguintes".

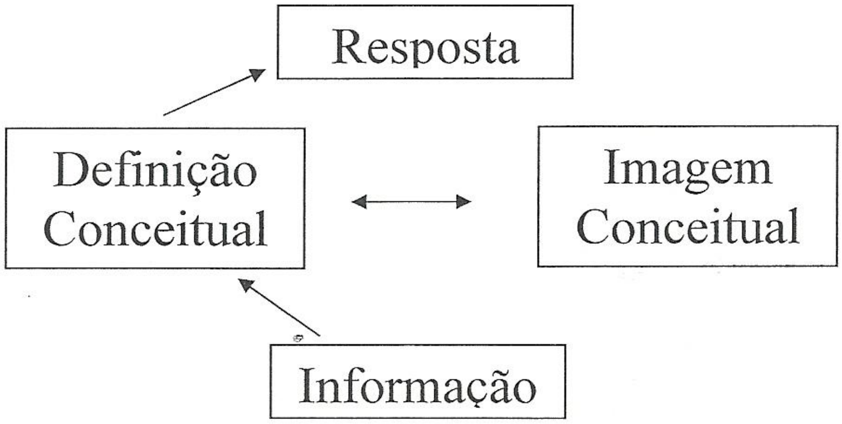


Figura 1. Intercâmbio entre Definição e Imagem

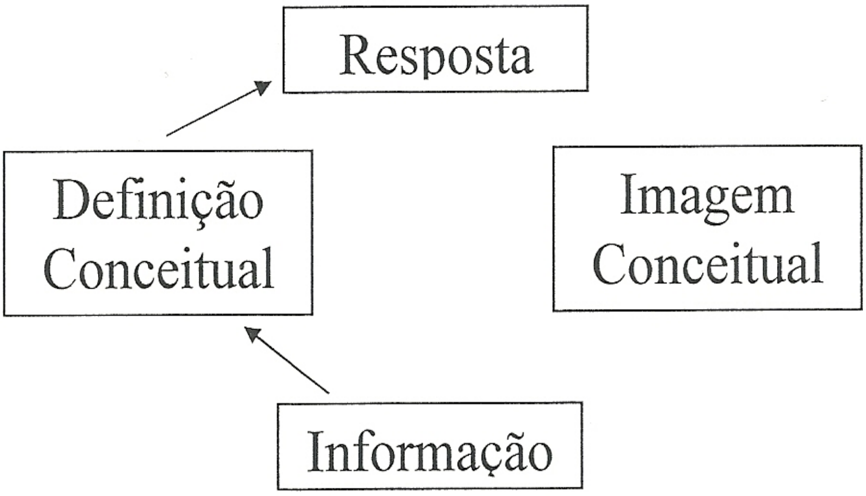


Figura 2. Dedução puramente formal

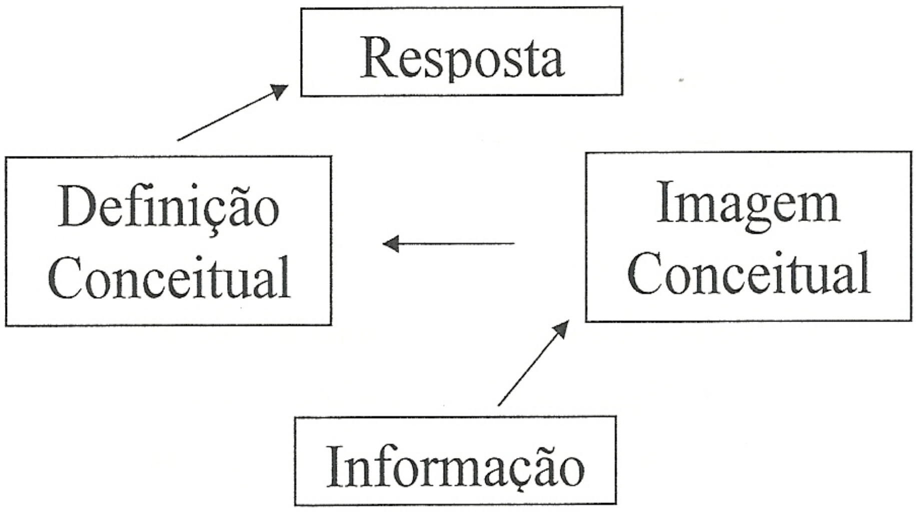


Figura 3. Dedução seguindo pensamento intuitivo

Esses três esquemas apresentam uma característica comum, que é o fato de que, nas situações em que um problema é proposto em um contexto técnico, a imagem conceitual sempre será consultada. Para Vinner (1991):

> Isso é, naturalmente, o processo desejável. Infelizmente, a prática é diferente. É duro treinar um sistema cognitivo de modo que ele aja contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições quando constituindo uma imagem conceitual ou quando trabalhando em uma atividade cognitiva (VINNER, 1991, p. 11).

Então, concordamos com o pesquisador que o modelo mais adequado para expressar, de forma geral, o que realmente acontece é o seguinte:

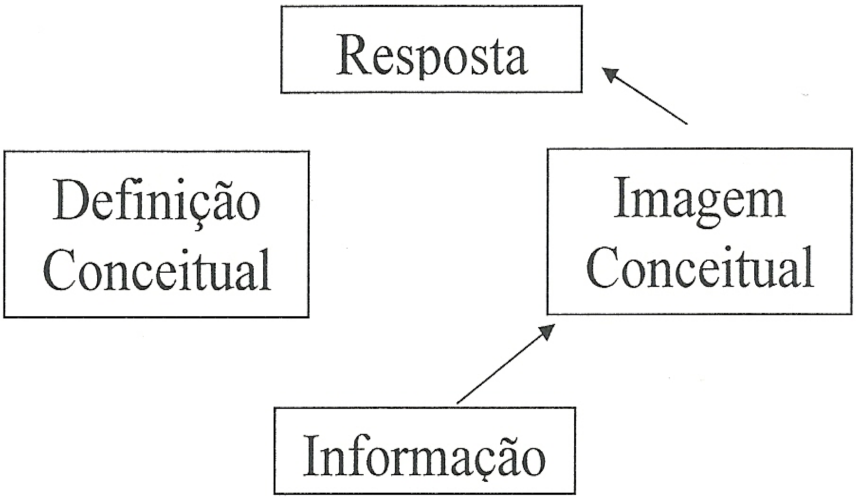


Figura 4. Resposta intuitiva

Nesse esquema, a definição conceitual não foi consultada para a resolução do problema; isso não quer dizer que o problema não será resolvido, mas de acordo com Vinner (1991), isso significa que os hábitos cotidianos de pensamento não levam o estudante a consultar a definição conceitual. Somente em situações não rotineiras, em que as imagens conceituais forem incompletas ou insatisfatórias, as pessoas serão encorajadas a recorrerem às definições. Assim, Vinner (1991, p. 12) completa: "Em nossa discussão, nós não avaliamos o sistema cognitivo de alguém. Nossa análise se relaciona apenas à parte do sistema cognitivo que foi ativada quando trabalhando em uma dada tarefa cognitiva".

Então, para o pesquisador, o estudante não recorre às definições para resolver problemas técnicos; ele continua utilizando os hábitos cotidianos de pensamento, ou seja, buscando em suas imagens conceituais subsídios para o desenvolvimento e resolução de tarefas propostas. Logo, a resolução de problemas é a forma mais adequada para investigar e verificar quais imagens conceituais uma pessoa possui acerca de um determinado conceito. Nas palavras de Vinner (1991):

> Um método natural de aprender sobre a definição conceitual de alguém é questionando diretamente (O que é função? O que é uma tangente? etc) Isso é porque definições são verbais e explícitas. Por outro lado, para aprender sobre a imagem conceitual de alguém, normalmente, questões indiretas devem ser colocadas, uma vez que a imagem conceitual é não verbal e implícita. Então, a tarefa principal do pesquisador é a de inventar questões que têm o potencial de expor a imagem conceitual do respondente (VINNER, 1991, p. 13).

Dessa forma, a resolução de atividades e/ou situações problemas que envolvem o conceito de derivada é o melhor caminho para averiguar quais imagens conceituais os alunos constroem em suas mentes. Portanto, para nosso trabalho, elaboraremos uma sequência de atividades, abordando diretamente o conceito de derivada como inclinação da reta tangente à uma curva e como taxa de variação, além de questões de aplicações da derivada. Já para verificar a definição conceitual, utilizaremos instrumentos metodológicos descritos no próximo capítulo.

2.5. Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM

Estamos vivendo na era digital. Cada vez mais, questões importantes são resolvidas em um clique; comunicação, informação e serviços são efetuados através de novas mídias. Na Educação e, particularmente, na Educação Matemática, não poderia ser diferente. As Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM fazem parte das investigações há pelo menos duas décadas no Brasil e, há mais tempo, em outros centros mundo a fora. Para Marin (2011):

> A tecnologia de informação e comunicação (TIC) incorporada às práticas sociais, transforma a forma de viver do ser humano porque oferece outras maneiras de comunicação, produção e comercialização de bens e mercadorias, divertimento e educação. [...] A capacidade técnica das máquinas possibilita planejar atividades de ensino antes impensáveis com o uso de lousa e giz. Para o ensino de Matemática, por exemplo, há vários softwares que permitem explorar os conceitos de Matemática de uma forma mais dinâmica e detalhada (MARIN, 2011, p. 527).

Questões importantes envolvendo o uso dessas novas tecnologias estão presentes nas novas propostas educacionais e nas pesquisas desenvolvidas na área da Educação Matemática. Algumas questões importantes são levantadas: Como o computador e outras mídias eletrônicas podem contribuir positivamente nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática? A sua utilização pode ser negativa quanto ao desenvolvimento de habilidades matemáticas? Em que momento e como aproveitar essas ferramentas para promover uma aprendizagem significativa? De acordo com Borba, (2007):

> Talvez ainda seja possível lembrar dos discursos sobre o perigo que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos. Um deles era o de que o aluno iria só apertar teclas e obedecer a orientação

> dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas. Na verdade, ainda hoje essa preocupação sempre surge nos diversos cursos, palestras e aulas que temos ministrado. Tal argumento está presente quando consideramos a educação de modo geral, mas é ainda mais poderoso dentro de parte da comunidade de educação matemática. Em especial para aqueles que concebem a matemática como a matriz do pensamento lógico. Nesse sentido, se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência. Por outro lado, tem havido, mais recentemente, argumentos que apontam "o computador" como a solução para os problemas educacionais (BORBA, 2007, p. 11).

Portanto, cabe à comunidade escolar repensar suas práticas pedagógicas, incorporando esses novos instrumentos, e o professor é peça fundamental na mudança de atitude para que as TICEM façam, de fato, parte dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Penteado (1997, p. 23) afirma: "Para explorar o potencial educacional das Tecnologias Informáticas (TI), é preciso haver mudanças na organização da escola e, particularmente, no trabalho do professor".

A escola precisa investir em mudanças no currículo e também em infraestrutura. Quanto ao professor, além de investimento em formação, sua ação pedagógica deve ser repensada, abandonando práticas tradicionais e verticalizadas e adotando uma nova postura de mediador e coordenador das atividades na construção do conhecimento.

Tecnologias da Informação e Comunicação fazem parte do mundo atual e também já fazem parte do dia a dia escolar. Além disso, essas ferramentas tecnológicas estão em um processo acelerado de evolução e modernização, fazendo com que educadores e pesquisadores da área educacional busquem formas corretas e eficazes do seu uso, como destaca Zuchi (2009):

> A evolução dos instrumentos tecnológicos, cada vez mais sofisticados, tem estimulado um número considerável de pesquisas, em nível internacional, sobre a interação desses instrumentos no contexto de ensino de matemática. Entretanto, a questão da integração das TICE's (Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação) no ambiente escolar não é uma tarefa fácil. Várias pesquisas mostram a complexidade dessa integração (ZUCHI, 2009, p. 239).

Uma das dificuldades que surgem com a sofisticação das novas tecnologias é a organização de uma sequência didática, capaz de auxiliar o professor em suas aulas. O computador, em particular, deve ser utilizado como uma ferramenta na construção do conhecimento matemático, um facilitador no entendimento e construção de conceitos. Então, cabe ao professor, a sua própria formação na área e, certamente, o desenvolvimento de novas habilidades, além do conhecimento de *softwares* que possibilitem uma boa utilização das TICEM. Segundo Villarreal (1999):

> Se seu uso não é adequado, o computador pode trazer dificuldades adicionais tanto no ensino quanto na aprendizagem matemática. A pergunta é: o que significa "uso adequado"? Se um *software* calcula derivadas e integrais de funções, ensinar técnicas de derivação e integração, tal como é feito em um ambiente sem computador, perde sentido. Mas, por outro lado, há sempre quem afirme a necessidade de conhecer as técnicas, já que nem sempre se tem acesso ao computador para fazer cálculos. Inversamente, se as atividades planejadas para realizar em um ambiente computacional podem realizar-se sem dificuldades com lápis e papel, o uso do computador pode atrapalhar a tarefa porque não é decisivo ou indispensável para a realização da mesma, e a demanda de tempo no aprendizado dos comandos não justifica seu emprego. A obsolescência de alguns conteúdos e a necessidade de novas atividades surgem como resultado da introdução do computador no âmbito educativo. [...] A presença do computador oferece a possibilidade de observar processos de construção de conhecimento matemático que não apareceriam em outros ambientes e que vão além do simples uso do computador para resolver um determinado problema matemático (VILLARREAL, 1999, p. 27).

Em particular, o ensino de Cálculo com TICEM tem se revelado um promissor campo de pesquisa, pelos vários motivos já citados e também pelo especial fato dessa disciplina apresentar em sua problemática fundamental, o estudo de funções e, consequentemente, a exploração de suas representações gráficas que, em diversos casos, apresentam um elevado grau de complexidade. Nesse sentido, o computador e os novos *softwares* de geometria dinâmica podem contribuir de forma excepcional na construção e interpretação de gráficos, auxiliando na resolução de problemas.

2.5.1. As TICEM e o Ensino de Cálculo

Como já exposto neste trabalho, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem provocado um movimento dentro da Educação Matemática Superior, promovendo pesquisa e incentivando a formação de grupos de pesquisa, principalmente na busca e desenvolvimento de propostas para a melhoria no ensino dessa disciplina. E dessa forma, elaborar novas propostas que visam à melhoria no ensino e aprendizagem do Cálculo. As

TICEM, em particular, as calculadoras gráficas e o computador, têm proporcionado pesquisas e boas propostas como solução para tal problema. Com relação a essas mídias, Villarreal (1999), destaca quatro aspectos relacionados ao uso do computador:

> 1) ilustra e reforça conceitos básicos; 2) reduz a preocupação com as técnicas de cálculo e permite concentrar-se nas ideias centrais do Cálculo, abordando aplicações mais realistas; 3) comunica novas ideias visual e experimentalmente antes de passar a uma explicação através de palavras; 4) oferece imagens que, de outra forma, seriam inacessíveis para os estudantes (VILLARREAL, 1999, p. 30).

De acordo com Marin (2011), o uso de TICEM tem sido recomendado pelos especialistas pelo fato delas favorecerem o trabalho com “diferentes representações, tais como uma tabela, gráficos e expressões algébricas de forma rápida e articulada. Isso é especialmente recomendado para a disciplina do Cálculo”. Sobre as implicações do uso dessas tecnologias no trabalho docente, ele argumenta:

> A literatura aponta que com a presença da TIC no cenário educacional o professor é desafiado a rever e ampliar seus conhecimentos para enfrentar novas situações. A inserção deste tipo de tecnologia na prática docente provoca demandas que vão além da organização e da rotina de sala de aula. [...] algumas delas: mudanças na organização do espaço físico, na carga de trabalho, nas relações entre professores e alunos, nas emoções, no papel do professor, na organização do currículo, entre outras (MARIN, 2011, p. 533).

Em seu trabalho, Marin (2011) apresenta um levantamento de como professores do Ensino Superior têm utilizado TICEM em suas aulas de Cálculo. Com base em dados obtidos em entrevistas com professores, ele aborda como o trabalho com tecnologias é considerado, na avaliação da aprendizagem, como uma das questões abordadas. Em suas considerações finais, o pesquisador destaca:

> Percebe-se que não há uma maneira única de se desenvolver a aula com a estrutura oferecida pelas Universidades, sendo que cada professor tem a sua forma de trabalhar. Mas são unânimes ao recomendar a importância de se estabelecerem ligações entre o que está sendo desenvolvido com o uso de TIC e o que está sendo estudado com o uso de outra tecnologia, por exemplo, nas aulas em que o professor escreve na lousa. No que diz respeito ao desenvolvimento das aulas, identifica-se que a TIC permite realizar atividades que seriam impossíveis de serem feitas somente com o uso de lápis e papel, proporcionando a organização de situações

> pedagógicas com maior potencial para aprendizagem (MARIN, 2011, p. 542).

Com relação a quais conteúdos as TICEM foram utilizadas não há uma uniformidade, Marin (2011) relata:

> A maneira de explorar esses conteúdos varia e está muito ligada à experiência de vida de cada um, da relação que se tem com a disciplina para perceber em qual tópico pode-se lucrar com o uso do computador, e qual aquele que não se deve fazer o uso. Os dados mostram, também, que os professores usam a TIC no estudo de conteúdos que seriam de abordagem quase impossível sem ela (MARIN, 2011, p. 543).

Estudos recentes evidenciam que o uso das TICEM contribui de forma significativa nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo, favorecendo a compreensão dos conceitos em detrimento das habilidades algorítmicas. Essas evidências são descritas em Villarreal (1999), em uma rica revisão de literatura, incluindo autores de outros países que realizaram pesquisas em ensino de Cálculo com uso de TICEM. Ela ainda resume:

> Uma das vantagens assinaladas por vários autores (Schoenfeld, 1995; Heid & Baylor, 1993; Hillel et al., 1992; Heid, 1988) é a possibilidade de atingir uma maior compreensão conceitual, já que o computador dispensaria ou diminuiria o tempo dedicado à aprendizagem de técnicas e algoritmos. Outros autores (Borba, 1995c; Capuzzo Dolcetta et al., 1988) enfatizam que os ambientes computacionais favorecem abordagens matemáticas mais experimentais, caracterizadas pela formulação rejeição/verificação e reformulação de hipóteses, geração de padrões e antecipação de resultados. Vários autores (Borba, 1995c; Schoenfeld, 1995; Smith, 1995; Capuzzo Dolcetta et al., 1988) referem-se à visualização como um aspecto favorecido pelo computador, seja pela possibilidade de gerar representações gráficas com facilidade seja pelo tipo de abordagem matemática, mais visual, que ele permite (VILLARREAL, 1999, p. 35).

Das vantagens da utilização das TICEM no ensino de Cálculo apresentadas pelos diversos textos que tratam o assunto, a visualização é um dos aspectos favorecidos pela utilização de TICEM nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo, como argumenta Frota (2013): “A importância dos processos de visualização e de comunicação de ideias matemáticas tem sido destaque na pesquisa em educação matemática” (p. 61).

Villarreal ainda destaca Borba (1993, p. 42), ao argumentar que “a mídia tradicional no âmbito matemático, o lápis e o papel, favorece a abordagem algébrica de questões matemáticas. Já a mídia computacional privilegia abordagens onde a visualização tem papel fundamental".

Dedicaremos o próximo tópico à revisão de trabalhos que tratam da visualização, abordando sua origem dentro da Educação Matemática e sua importância para o ensino de Cálculo, que será fundamental para a análise dos nossos dados coletados.

2.5.2. A Visualização e o Ensino de Cálculo

As nossas leituras dos referenciais teóricos em ensino de Cálculo nos conduziram ao conceito de visualização e, consequentemente, a pesquisar novos trabalhos que abordam esse assunto.

Inicialmente, destacamos do dicionário Michaelis, a seguinte definição do termo visualização que é pertinente aos nossos estudos: "Transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis." Questões ligadas à visão de imagens para construção e apreensão de conhecimento estão diretamente relacionadas à nossa pesquisa e casam perfeitamente com as ideias já descritas das Imagens Conceituais.

Segundo Flores (2012, p. 32), "o termo visualização provém da psicologia e, inicialmente, era associado às habilidades visuais que os indivíduos tinham e podiam desenvolver para interpretar imagens". Na década de 1980, as pesquisas em Educação Matemática começaram a se apropriar do termo, apoiadas em uma perspectiva cognitivista, como a autora nos relata:

> Segundo Presmeg (2006), somente nos anos 1980, com a ascensão do construtivismo e a ênfase no meio social e cultural na educação, é que a importância do visual e suas manifestações nas transformações dos conhecimentos matemáticos passa a ser cada vez mais reconhecida. Contudo, somente nos anos 1990, com o reconhecimento da visualização na educação matemática, as pesquisas passam a problematizar aspectos antes não considerados, tais como, o desenvolvimento curricular; a eficácia da visualização para a aprendizagem matemática; a imagem e a representação (FLORES, 2012, p. 36).

Estes fatos são também apresentados por Villarreal (1999), quando ela argumenta sobre qual o *status* da visualização na Educação Matemática:

> No ano de 1989, a revista *Focus on Learning Problems in Mathematics* publica os números 1 e 2 do volume 11 sob o título *Visualization and*

> *Mathematics Education*. O objetivo do volume é enfatizar alguns efeitos positivos da visualização na formação de conceitos matemáticos e mostrar como a visualização pode ser usada como meio para atingir a compreensão matemática. [...] Em 1991, o *Committee on Computers in Mathematics Educacion da Mathematical Association of America* publica um volume intitulado *Visualization on Teaching and Learning Mathematics*. Neste volume sugere-se a renascença do interesse na visualização devido, principalmente, ao desenvolvimento tecnológico e às possibilidades que ela oferece em diferentes campos científicos. A visualização é considerada como uma ferramenta para a compreensão matemática (VILLARREAL, 1999, p. 40).

Muitas pesquisas em Educação Matemática enfatizam a importância da visualização para o ensino e a aprendizagem matemática. Portanto, inúmeros trabalhos e linhas de pesquisa abordam e conceituam o termo. Villarreal (1999) detalha algumas das principais definições associadas à visualização:

> A pesquisa sobre visualização em Educação Matemática é extensa e tem sido associada à habilidade espacial, ao conceito de *imagery* (refere-se a imagens mentais), às representações gráficas e também à intuição. [...] Se analisadas e comparadas as diferentes definições, pode-se salientar a existência de algumas semelhanças. Parece claro, nas colocações de Gutiérrez (1996), Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996), Zimmermann & Cunningham (1991), Bem-Chaim, Lappan & Houang (1989) e Bishop (1989) que a visualização na Educação Matemática é considerada como um processo que percorre caminhos de mão dupla que relacionam a compreensão do estudante e a mídia externa. Por outro lado, as afirmações de Presmeg (1986a, 1986b) e Eisenberg & Dreyfus (1989) enfatizam só uma das direções destes caminhos. No caso de Presmeg, o processo de formar imagens tem seu ponto de partida no ambiente externo, enquanto que para Eisenberg & Dreyfus, a partir das compreensões matemáticas, geram-se representações externas (VILLARREAL, 1999, p. 35 e 39).

Das definições do termo visualização destacadas por Villarreal (1999), destacamos as mais relevantes para o desenvolvimento de nossas atividades:

> Gutiérrez (1996): segundo este autor, a visualização está integrada por quatro elementos principais:
> 1. Imagens mentais: “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais.”
> 2. Representações externas: “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades incluindo quadros, desenhos, diagramas, etc., que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual.”
> 3. Processos de visualização: “ação mental ou física onde imagens mentais estão envolvidas.” Existem dois tipos de processos de visualização:

> interpretação visual de informação, para formar imagens mentais e interpretação de imagens mentais, para gerar informação. Estes processos também são mencionados por Bishop (1989) sob a denominação de habilidade para o processamento visual e habilidade para interpretar informação figural.
> 4. Habilidades de visualização: podem-se mencionar e reconhecer as propriedades de um objeto (real ou conformando uma imagem visual) independente de tamanho, cor, posição; produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento; relacionar objetos, desenhos ou imagens mentais, entre si; relacionar vários objetos, desenhos e/ou imagens mentais; comparar vários objetos, desenhos e/ou imagens mentais identificando semelhanças e diferenças (VILLARREAL, 1999, p. 38).

Também nesse trabalho, apoiaremo-nos no entendimento do termo visualização explicitado por Frota (2013):

> A visualização é aqui entendida como um processo que consiste em interpretar e/ou criar imagens para comunicar ideias, lançando mão de diferentes formas para expressar essas ideias (Frota e Coury 2009). Visualizar é interpretar informações, construindo representações visuais para situações ainda não visuais (Dreyfus 1991), o que demanda, por vezes, traduzir uma informação apresentada apenas verbalmente em informação visual, utilizando desenhos, tabelas e gráficos (FROTA, 2013, p. 64).

Flores (2012) fez um interessante levantamento das principais definições do conceito de visualização, presentes nos trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática – ENEM's, realizados de 1987 a 2010, e os classificou em sete tipos. Assim, ela concluiu:

> As definições que aparecem com maior ênfase nos trabalhos tratam visualização como: processo de construção e transformação de imagens visuais mentais; uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica; processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática; forma de pensamento que torna visível aquilo que se vê, extraindo padrões das representações (FLORES, 2012, p. 40).

A autora ainda observa que essas definições entendem visualização como "um raciocínio baseado no uso de imagens mentais" e que, "normalmente, as etapas metodológicas são: construção da imagem mental, representação externa e, por fim, o processamento propriamente dito da visualização".

A expansão das pesquisas em visualização na Educação Matemática, e principalmente as discussões dos conceitos desse termo, favoreceram e ampliaram as pesquisas em Ensino de Cálculo; e ainda são mais fortes e evidentes quando se trata de Ensino de Cálculo com o auxílio das TICEM. A visualização tem uma grande importância para o Cálculo, como já argumentava Tall (1991):

> Negar a visualização é negar as raízes de muitas de nossas mais profundas ideias matemáticas. Em estágios iniciais do desenvolvimento da teoria de funções, limites, continuidade e coisas do tipo, a visualização foi uma fonte fundamental de ideias. Negar estas ideias aos estudantes é cortá-las das raízes históricas da disciplina. (TALL, 1991, p. 105).

Outra faceta da relação entre computadores e visualização nos é oferecida por Villarreal (1999) ao destacar que:

> Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador comum nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLARREAL, 1999, p. 43).

As definições de visualização aqui abordadas, juntamente com a teoria de Tall e Dreyfus sobre definição conceitual e imagem conceitual, já mencionadas nesse texto, serão os principais aportes teóricos para a análise e interpretação do material elaborado e desenvolvido em nossa pesquisa de campo.

Acreditamos que o panorama exposto sobre o Cálculo Diferencial e Integral, desde seus primórdios, acompanhado da evolução da Educação Matemática, o desenvolvimento de teorias e pesquisas na área da Educação Matemática no Ensino Superior, aqui analisadas e discutidas, formam a base teórica para podermos, a partir daí, elaborar e desenvolver as nossas atividades. Esperamos que com esse material possamos alcançar, de forma consistente, os objetivos de nossa dissertação, respondendo, à luz das teorias aqui estudadas, a questão central desse estudo, que retomaremos a seguir.

Capítulo 3

REFERENCIANDO METODOLOGICAMENTE NOSSA PESQUISA

> Os grandes educadores atraem não só pelas suas ideias, mas pelo contato pessoal. Dentro ou fora da aula chamam a atenção. Há sempre algo surpreendente, diferente no que dizem, nas relações que

estabelecem, na sua forma de olhar, na forma de comunicar-se, de agir. São um poço inesgotável de descobertas.

J. M. Moran

Neste capítulo, descrevemos os procedimentos desenvolvidos em nossa pesquisa que foram realizados em uma turma da disciplina MTM 212 – Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, no 2º semestre letivo de 2012. Inicialmente, retomaremos alguns pontos essenciais de nossa pesquisa, tais como: questão de investigação, objetivos e metodologia de pesquisa.

Apresentaremos também, ao longo do capítulo, a sequência de atividades propostas e trabalhadas, detalhando os ambientes e momentos em que cada uma dessas atividades foi aplicada, justificando cada atividade como instrumento metodológico.

3.1. Retomando a Questão de Investigação

No capítulo anterior, apresentamos os referenciais teóricos que nos deram o suporte necessário para que pudéssemos pensar e elaborar cada uma das atividades que serão apresentadas nesse capítulo. Também com base nesses aportes teóricos, no próximo capítulo, procederemos a descrição e análise desses instrumentos, que foram pensados e aplicados na tentativa de responder a seguinte questão investigação:

Quais são as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra para a formação de imagens conceituais relacionadas ao conceito de Derivadas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção de gráficos?

A partir da elaboração dessa questão de investigação, foi possível elaborar alguns objetivos para nossa pesquisa, que serão relembrados a seguir.

3.2. Retomando os Objetivos

O objetivo principal de nossa pesquisa está diretamente ligado à questão de investigação; assim, possíveis respostas a nossa indagação é nosso objetivo maior, ou seja, com nossa pesquisa pretendemos identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de gráficos.

Subjacentes a esse objetivo central, apresentamos outros objetivos específicos, também importantes para a nossa pesquisa e muito relevantes às nossas práticas docentes. Resgataremos alguns desses objetivos, já apresentados no Capítulo I, que são necessários ao desenvolvimento do presente capítulo, tais como: elaborar, implementar e avaliar atividades exploratórias utilizando TICEM relacionadas a diversos conteúdos de derivadas trabalhados em Cálculo I; identificar as contribuições dessas atividades para a formação de imagens conceituais relacionadas ao conceito de Derivadas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I; apresentar uma proposta de ensino de “Derivadas de Funções Reais” com atividades exploratórias utilizando TICEM, para disciplinas de Cálculo I em cursos de Licenciatura em Matemática.

Retomaremos, ainda, tais objetivos em nossas Considerações Finais.

3.3. Detalhando a Metodologia de Pesquisa

Nossa pesquisa se enquadra no modelo de investigação qualitativa, pela forma como ela foi pensada, pela metodologia utilizada e, principalmente, por sua condução e pela maneira como os dados coletados serão analisados.

Alguns aspectos de nossa pesquisa nos permitem classificá-la como qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) enumeram cinco características fundamentais das pesquisas qualitativas e, segundo os autores, não é necessário que a pesquisa atenda a todas as características, ou mesmo, a maioria delas. Segundo os autores, tais características fundamentais são:

> 1. Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.
> (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47).

Como já relatado, nossa pesquisa foi realizada, em uma turma da disciplina MTM 212 – Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, no 2º semestre letivo de 2012, formada basicamente por alunos do 2º período do curso. Portanto, como o pesquisador participou de algumas aulas da turma, aplicando atividades e interagindo com os participantes da pesquisa, o pesquisador não foi um elemento neutro no processo de pesquisa, justificando, desta forma, a primeira característica enumerada pelos autores, para quem:

> Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 48).

Podemos também destacar outras características que reforçam a classificação de nossa pesquisa como qualitativa. O nosso principal objetivo foi investigar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, e, em particular, no processo de formação de imagens conceituais relacionadas às derivadas, adquiridas pelo aluno. Portanto, podemos dizer que estivemos todo o tempo, muito interessados no processo que conduziu a alguns resultados interessantes.

Também ao aplicarmos as atividades, estivemos interessados em analisar e descrever as interpretações dos alunos acerca de um conceito e de que forma o uso da tecnologia influenciou o processo de construção das imagens conceituais. Assim, também de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 49), “os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos”.

A questão que queremos responder juntamente com os objetivos que almejamos alcançar, a metodologia escolhida, a forma como foi conduzida a aplicação das atividades na pesquisa de campo e a maneira como essas atividades e também o questionário serão analisados, dão-nos respaldo e, de certa forma, justificam a classificação da pesquisa de qualitativa. Nas palavras de Bogdan e Biklen (1994):

> Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber “aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências

> e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem" (Psathas, 1973). Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 51).

Apresentaremos, no próximo tópico, as cinco atividades e o questionário de nossa pesquisa, relatando suas aplicações na turma escolhida e destacando alguns pontos relevantes dessas aplicações, que foram apontados em nosso diário de campo.

3.4. Apresentando o Contexto da Pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada no 2º semestre letivo de 2012, em uma turma de MTM 212 – Cálculo Diferencial e Integral I, que integra a estrutura curricular do 2º período do curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Esta disciplina é obrigatória e foi ministrada pelo Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, orientador de nossa pesquisa. Como a instituição estava em período de acerto do calendário, por conta da greve dos docentes que ocorreu em 2012, as atividades foram aplicadas em janeiro e fevereiro de 2013 e foram pontuadas com um valor total correspondente a 20% da nota final da disciplina.

Cabe ressaltar que, na estrutura curricular do curso de Matemática da UFOP, no 1º período os alunos devem cursar a disciplina Introdução ao Cálculo, com carga horária de 60 horas/aula, cuja ementa contempla o estudo de Funções, Limites e Continuidade. Assim, a ementa da disciplina Cálculo I contempla: Derivada; Aplicações das Derivadas; Integrais; Técnicas de Integração; Áreas.

Essa ementa foi desenvolvida de acordo com o seguinte conteúdo programático:

1. Derivada: tangentes, velocidades e outras taxas de variação;
2. Funções Deriváveis: derivação implícita, taxas relacionadas e derivada da função inversa;
3. Aplicações da Derivada: máximos e mínimos de funções, Teorema do Valor Médio, Regras de L'Hospital, crescimento e concavidade de funções, gráficos de funções, problemas de otimização;
4. Integral: a integral indefinida e suas propriedades, a integral definida e suas propriedades, área de regiões planas, Teorema Fundamental do Cálculo, áreas.

A carga horária total da disciplina é de 60 horas/aula, que foram assim distribuídas:

1. 50 (cinquenta) horas/aula em sala de aula, consistindo de aulas expositivas e de resolução de exercícios, ministrados pelo professor responsável pela disciplina, sendo que algumas delas foram observadas pelo pesquisador;
2. 10 (dez) horas/aula em Laboratório de Informática, nas quais as 5 (cinco) atividades exploratórias foram implementadas pelo pesquisador, sendo todas acompanhadas pelo professor responsável.

A bibliografia básica utilizada foi:

1. Cálculo A – FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B. São Paulo: Makron Books, 2010;
2. Cálculo – STEWART, J., Volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

A turma era constituída por 17 alunos regularmente matriculados no curso de Matemática, sendo 15 alunos do 2º período e 2 alunos (repetentes) do 4º período. Apresentamos a eles os instrumentos e os objetivos de nosso trabalho e os convidamos a participar da pesquisa, sendo que todos aceitaram o convite. As 5 atividades elaboradas foram, então, desenvolvidas em dez aulas, todas ministradas no Laboratório de Informática.

O laboratório do Departamento de Matemática da UFOP havia sido recém inaugurado; seus equipamentos eram novos e existia mais de uma máquina por aluno, favorecendo a condução das atividades propostas. O *software* utilizado foi o GeoGebra, por várias razões já apresentadas, tais como a facilidade de manipulação, a dinamicidade, além de ser de livre utilização.

De acordo com Santos (2011), o GeoGebra é um programa livre de Geometria Dinâmica criado por Markus Hohenwalter, na Universidade de Salzburg, em 2001, “para ser utilizado em ambiente de sala de aula”. Com esse software, é possível construir o gráfico de uma função, a reta tangente à curva e, além dessas construções, podemos movimentar a reta tangente ao longo da curva, possibilitando uma manipulação dinâmica desse conjunto de entes geométricos.

Foram planejadas e implementadas 5 atividades exploratórias (que seguem nos Apêndices), que foram apresentadas e trabalhadas ao longo do período em que o professor responsável ministrava o conteúdo relacionado a derivadas de funções reais. Essas atividades foram elaboradas com a sugestão de serem trabalhadas em duplas, para favorecer a interação entre os alunos; algumas duplas utilizavam apenas um computador e outras utilizavam um computador por aluno, mas desenvolvendo em conjunto a mesma atividade.

Nem todos os alunos compareceram a todas as atividades, por questões diversas e pessoais, mas contamos com um percentual considerável de presença dos alunos em cada atividade, como explicitamos no quadro abaixo:

Atividade	Conteúdo	Data	Participantes
1	Construindo gráficos de funções e identificando seus principais elementos	18/01/2013	17
2	Construindo gráficos de funções polinomiais e das retas tangentes utilizando a Derivada	25/01/2013	13
3	Construindo gráficos de funções polinomiais e movimentando a Reta Tangente	08/01/2013	12
4	Construindo gráficos de Funções Contínuas e movimentando Retas Tangentes, relacionando com as Derivadas Laterais	22/02/2013	14
5	Problemas de Maximização e Minimização	08/03/2012	16

Tabela 1. Cronograma de Atividades Exploratórias

Como planejado, foi aplicado um Questionário Final (que segue nos Apêndices) como instrumento de coleta de dados, após a realização da Atividade 5, com o intuito de verificar se havia indícios da construção de imagens conceituais da definição de derivada. E também, para investigar com cada participante da pesquisa qual era sua definição conceitual a respeito do conceito de derivada, uma vez que esta definição conceitual pode ser explicitada através de palavras. Este questionário foi individual e 14 alunos se interessaram em respondê-lo.

Com base nos instrumentos de coleta de dados utilizados em nossa pesquisa, questionário, as cinco atividades exploratórias, as anotações do diário de campo e das observações feitas pelo pesquisador ao longo dos encontros, daremos início, no próximo capítulo, na descrição e análise desse material coletado.

Capítulo 4

DESCREVENDO ANALITICAMENTE NOSSA PESQUISA

> O que queremos é aproximar a pesquisa da vida diária do educador, em qualquer âmbito em que ele atue, tornando-a um instrumento de enriquecimento do seu trabalho. Para isso é necessário desmistificar o conceito que a encara como privilégio de alguns seres dotados de poder especiais, assim como é preciso entendê-la como atividade que requer habilidades e conhecimentos específicos.
>
> M. André & M. Lüdke

Ao longo de nosso trabalho, adotamos uma estratégia de pesquisa que, esperamos, permita-nos responder à nossa questão de investigação, tendo por base as referências teóricas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática, da Visualização e do Pensamento Matemático Avançado. Então, procuramos elaborar atividades exploratórias que nos auxiliassem na busca de tais respostas, para que assim pudéssemos verificar quais as possíveis contribuições do uso do GeoGebra à construção de imagens conceituais.

Passaremos, a partir de agora, à descrição / análise das cinco atividades exploratórias e do questionário final, sempre dialogando com os textos que utilizamos em nossa pesquisa teórico-bibliográfica. Buscamos verificar conexões entre as ideias de pesquisadores da área de Educação Matemática Superior, discutidas no Capítulo 2, e os dados obtidos nas resoluções apresentadas e/ou discutidas pelos participantes em nossa pesquisa de campo.

Para findar o capítulo, elaboraremos categorias / eixos de análise, apoiados em nossos instrumentos metodológicos e nas observações realizadas nas análises das atividades exploratórias e do questionário.

4.1. Descrevendo as atividades exploratórias

O nosso objetivo central é verificar as possíveis contribuições na formação de imagens conceituais que a utilização do *software* GeoGebra, pode proporcionar. De acordo com Giraldo (2002), "uma imagem conceitual rica provém da construção de uma ampla gama de correlações e conexões entre unidades cognitivas", reafirmando a teoria proposta por Tall e Vinner, os quais propõem que a abordagem do conceito de derivada deve incluir representações múltiplas. Portanto, propusemos cinco atividades exploratórias, abordando em quatro delas, conceitos e aplicações das derivadas; a primeira atividade abordou apenas questões relacionadas ao conceito de função e seus elementos e propriedades.

Acreditamos, também, que a utilização de tecnologias contribui de forma significativa para a aprendizagem em Matemática e, em particular, na formação de uma imagem conceitual rica, desde que a sequência de atividades propostas explore as diversas representações do conceito de derivada. De acordo com Giraldo (2002):

> O computador pode ser um instrumento poderoso para o processo de enriquecimento das ligações entre unidades cognitivas, pois processa algoritmos com rapidez e eficiência e pode fornecer resultados sob uma gama de diferentes representações. [...] Portanto, experiências computacionais podem ser usadas para complementar a atividade da mente humana, no sentido de contribuir para a formação de imagens conceituais (GIRALDO, 2002, p. 104).

Sabendo das limitações pedagógicas e de alguns efeitos negativos do uso de computadores no ensino de Matemática, tentamos evitá-los ou mesmo minimizá-los, pois Giraldo (2002) afirma que: “Cada representação põe em evidência certos aspectos do conceito, mas ao mesmo tempo oculta outros”. Isso poderia levar a uma atrofia dos aspectos negligenciados. Assim, um dos possíveis efeitos negativos em nosso trabalho poderia ser a ênfase na representação geométrica, uma vez que o *software* utilizado é de geometria dinâmica, porém esse *software* apresenta uma janela algébrica, paralela à janela geométrica, que pretendemos explorar bem, além de provocar discussões de pontos conflituosos do conteúdo proposto.

De acordo com Giraldo (2002), os pontos de conflitos teórico-computacionais não devem ser evitados e sim enfatizados. Um dos pontos negativos que os recursos computacionais apresentam para os “conceitos matemáticos são decorrentes da estrutura finita dos algoritmos empregados.” O autor afirma que:

> O uso inadequado de ambientes computacionais – especialmente se não confrontados com outras formas de representação – pode contribuir para a cristalização da concepção de que as limitações da representação são na verdade características do próprio objeto considerado, levando à formação de imagens conceituais restritas. [...] Nossa hipótese é de que, se conflitos teórico-computacionais são enfatizados, em lugar de evitados, o papel pedagógico das características inerentes a cada forma de representação podem sofrer uma reversão positiva: elas podem contribuir não para o estreitamento, mas para o enriquecimento de imagens conceituais (GIRALDO, 2002, p. 4).

Faremos, agora, a análise da primeira atividade, que trata dos conceitos de função e limites infinitos, e que serviu também para uma verificação do grau de conhecimento / intimidade dos participantes com o *software* GeoGebra, escolhido por nós para o desenvolvimento das atividades.

4.1.1. Atividade 1: Construindo gráficos de funções elementares e interpretando domínio, imagem, raízes, continuidade e limites infinitos.

Essa atividade foi pensada para, em primeiro lugar, verificar o grau de domínio dos participantes em relação ao GeoGebra e, se necessário, explorar alguns recursos e ferramentas do *software*. O objetivo principal foi verificar e explorar características e conceitos fundamentais de funções elementares, como conjuntos domínio e imagem, raízes, continuidade e limites infinitos.

O primeiro passo foi fazer com o aluno tivesse contato e se familiarizasse com o ambiente informatizado. Todos os participantes já haviam desenvolvido alguma atividade no laboratório de informática e também conheciam o GeoGebra. Alguns tinham pouco domínio das ferramentas disponíveis e outros apresentavam mais habilidade no manuseio do *software*, inclusive um dos alunos era o responsável por um laboratório do Departamento de Matemática e dominava muito o GeoGebra.

A atividade foi desenvolvida por 7 duplas e um trio, que doravante serão denominados grupos, numerados de 1 a 8. A partir da plotagem do gráfico, esses grupos deveriam responder a 6 itens: domínio, imagem e raízes da função, se esta apresenta pontos de descontinuidade e analisar seus limites infinitos. Foram trabalhadas 10 funções elementares, na seguinte ordem:

1) $f(x) = x$
2) $f(x) = x^2$
3) $f(x) = x^3$
4) $f(x) = \frac{1}{x}$
5) $f(x) = \sqrt{x}$
6) $f(x) = |x|$
7) $f(x) = e^x$
8) $f(x) = \ln x$
9) $f(x) = sen\ x$
10) $f(x) = tg\ x$

Foi entregue a cada grupo a atividade e, como já foi dito, eles tinham à sua disposição, um número de máquinas superior ao número de participantes, todas novas e em perfeitas condições de uso. Para essa atividade, os grupos responderam às questões sem nossa intervenção (autor e orientador dessa dissertação). Após a conclusão da atividade e sua entrega, discutimos os pontos polêmicos.

Todos os participantes demonstraram habilidade e domínio das ferramentas elementares do GeoGebra; nenhum grupo apresentou dificuldade em plotar os gráficos das funções propostas e souberam observar as correlações entre as janelas algébrica e gráfica.

Os grupos responderam corretamente as questões (1), (2) e (3), portanto não tivemos, para essas três primeiras funções, nenhum destaque importante. Um ponto interessante foi evidenciado na interpretação da função (4) e uma discussão importante acerca do conceito de continuidade pôde ser levantada.

Apresentamos uma construção gráfica da situação:

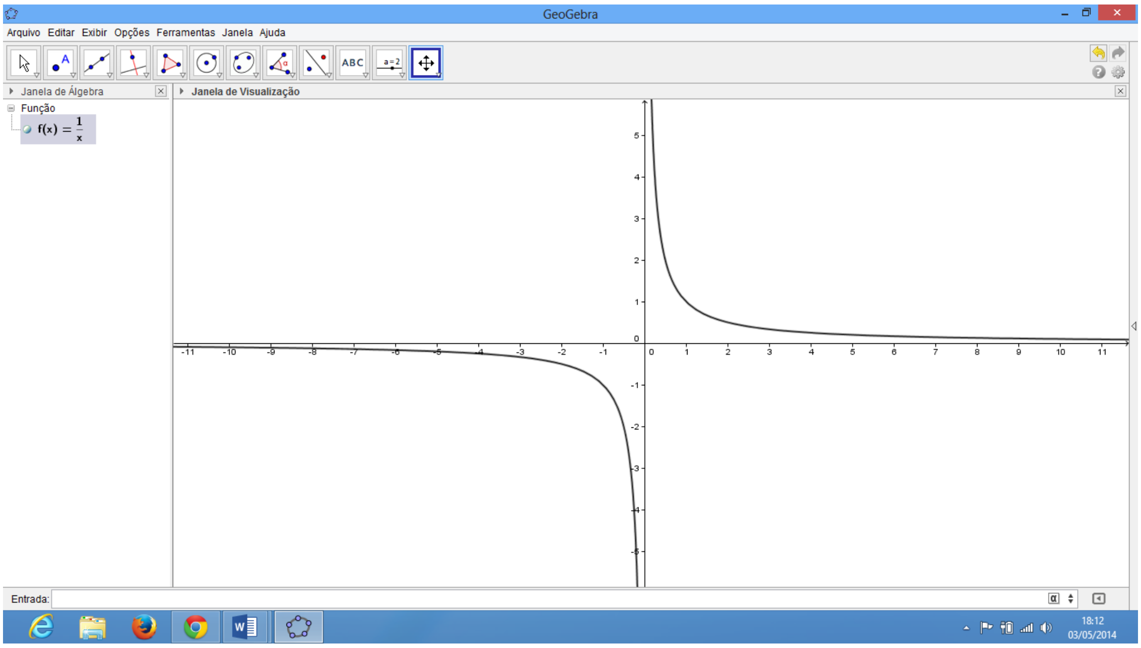
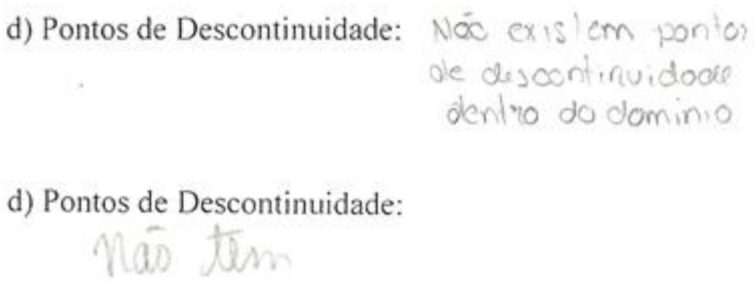


Figura 5. Questão 4 – Atividade 1

Com relação ao domínio, à imagem e às raízes, nenhum problema foi apresentado; todos os grupos responderam corretamente, um grupo errou o item dos limites, mas foi apenas uma distração. O ponto polêmico ficou para a questão da descontinuidade, pois dois grupos afirmaram que esta função, $f(x) = \frac{1}{x}$, não apresenta ponto de descontinuidade. Como podemos observar a seguir:


d) Pontos de Descontinuidade: Não existem pontos de descontinuidade dentro do domínio

d) Pontos de Descontinuidade: Não tem

Figura 6. Descontinuidade da Questão 4 – Atividade 1

A primeira resposta apresentada na figura, dada pelo grupo 2, é mais completa que a do grupo 4, mas ambas foram dadas com base no mesmo raciocínio, que evidencia uma falha na imagem conceitual do conceito de continuidade de uma função em um ponto. Esta falha é proveniente de uma interpretação errônea da definição formal de continuidade, apresentada pelos grupos 2 e 5, que argumentam:

> A definição de continuidade é: estar definida em *a* e o limite de f(x) ser igual a f(*a*), quando x tende a *a*. Como a função não está definida em *a*, não tem sentido analisar continuidade neste ponto. (Grupo 2)
>
> É exatamente por conta desta definição que a função é descontínua em x = 0, pois para ser contínua, em primeiro lugar ela deve estar definida no ponto. (Grupo 5)

Abordamos novamente o gráfico da função e fizemos uma análise, à luz da definição trazida pelos participantes do grupo 2, juntamente com os demais itens, como o principal deles, o domínio da função. Aproveitamos para discutir, também, os limites laterais em torno do ponto polêmico.

O fato descrito demonstra que a definição conceitual não estava correta e que as imagens conceituais, que estavam em formação, estavam se apropriando de uma interpretação errada da definição formal. Naquele momento, os alunos participantes da nossa pesquisa tinham estudado o tema em sala de aula com o professor regente e muitos deles ainda não tinham feito sequer um exercício.

Portanto, acreditamos que o momento foi propício para ambas as partes: para nós, pela oportunidade de já no primeiro encontro estar frente a frente com um bom exemplo que ilustra nossa teoria e para os participantes da pesquisa, por se tratar de um exemplo rico do conteúdo trabalhado em sala, visto de uma forma interessante.

Não verificamos pontos relevantes nas questões (5), (6), (7) e (8) para desenvolver uma discussão mais aprofundada, pois todos os grupos fizeram inferências corretas nestas questões, com apenas alguns erros que não se traduzem em um não entendimento conceitual; assim, passaremos aos dois últimos itens da atividade proposta.

Discutiremos as questões (9) e (10) conjuntamente por acharmos que os tipos de erros apresentados são de mesma natureza e também pelo fato da discussão desenvolvida em sala de aula ter abarcado as duas em torno do mesmo conceito.

Apresentaremos, a seguir, as representações gráficas das questões (9) e (10):

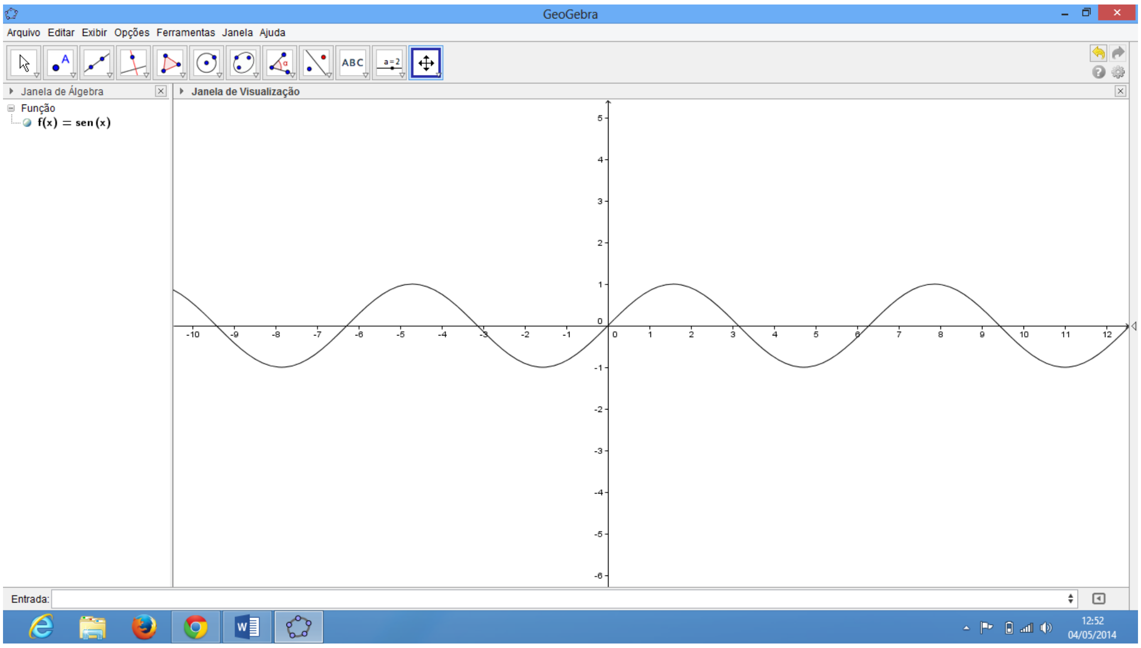


Figura 7. Questão 9 – Atividade 1

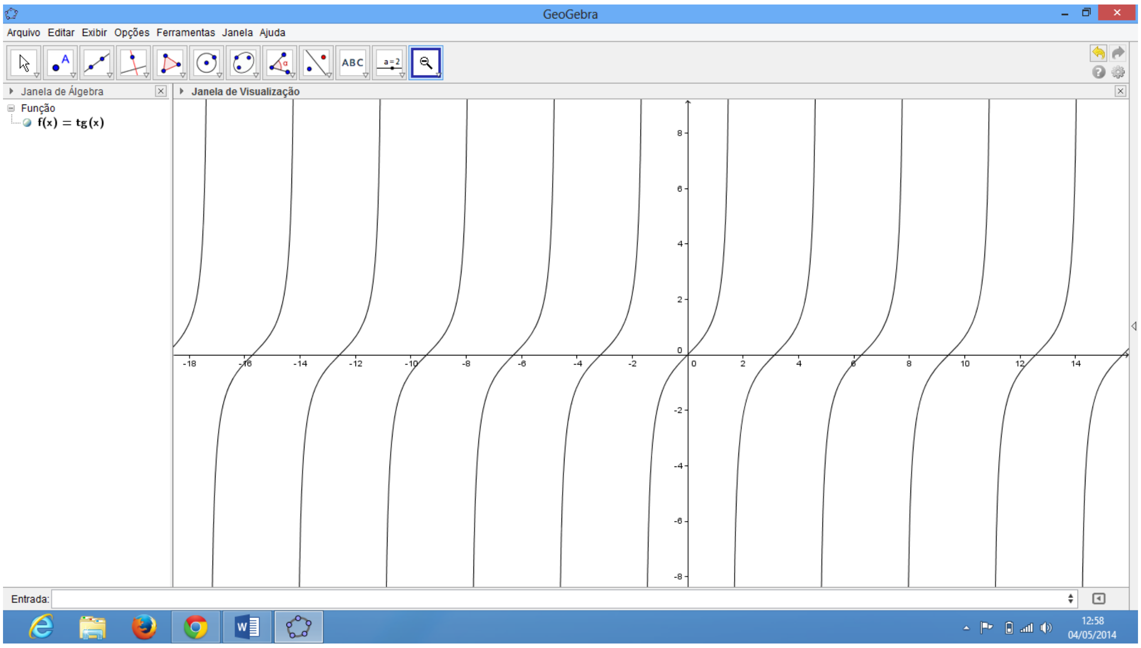
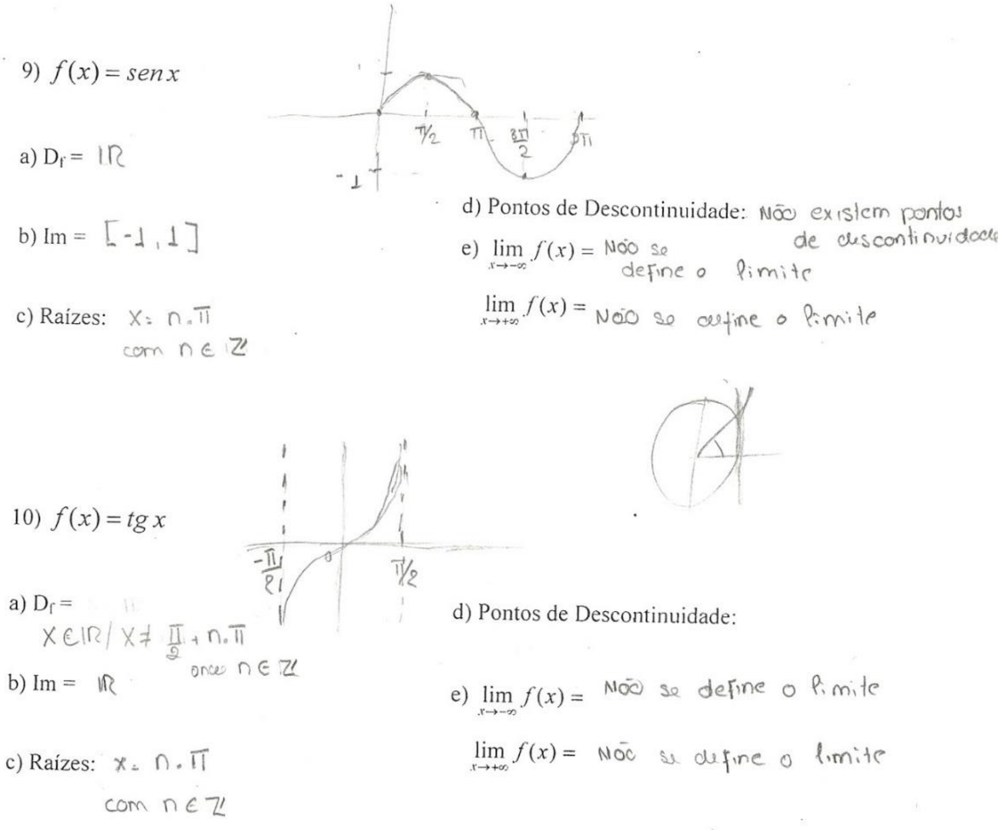


Figura 8. Questão 10 – Atividade 1

Os grupos foram unânimes em afirmar que a função $f(x) = sen\ x$ não possui pontos de descontinuidade, porém, para a função $f(x) = tg\ x$ o mesmo erro cometido no item (4) a respeito dos pontos de descontinuidade reapareceu, discussão que foi rapidamente esclarecida, por se tratar de erros da mesma natureza.

O ponto forte nessas duas questões ficou por conta dos limites infinitos: 6 dos 8 grupos erraram esses limites e boa parte dos participantes responderam que essas funções tendem ao infinito quando x tende ao infinito, sendo que 2 desses grupos disseram que esses limites não estão definidos. Destacaremos duas dessas respostas e trechos da discussão em torno da problemática:


9) $f(x) = sen\,x$

a) $D_f =$ IR

b) Im = [-1 , 1]

c) Raízes: x = n.π com n ∈ Z

d) Pontos de Descontinuidade: Não existem pontos de descontinuidade

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ Não se define o limite

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ Não se define o limite

10) $f(x) = tg\,x$

a) $D_f =$ x ∈ IR / x ≠ π/2 + n.π onde n ∈ Z

b) Im = IR

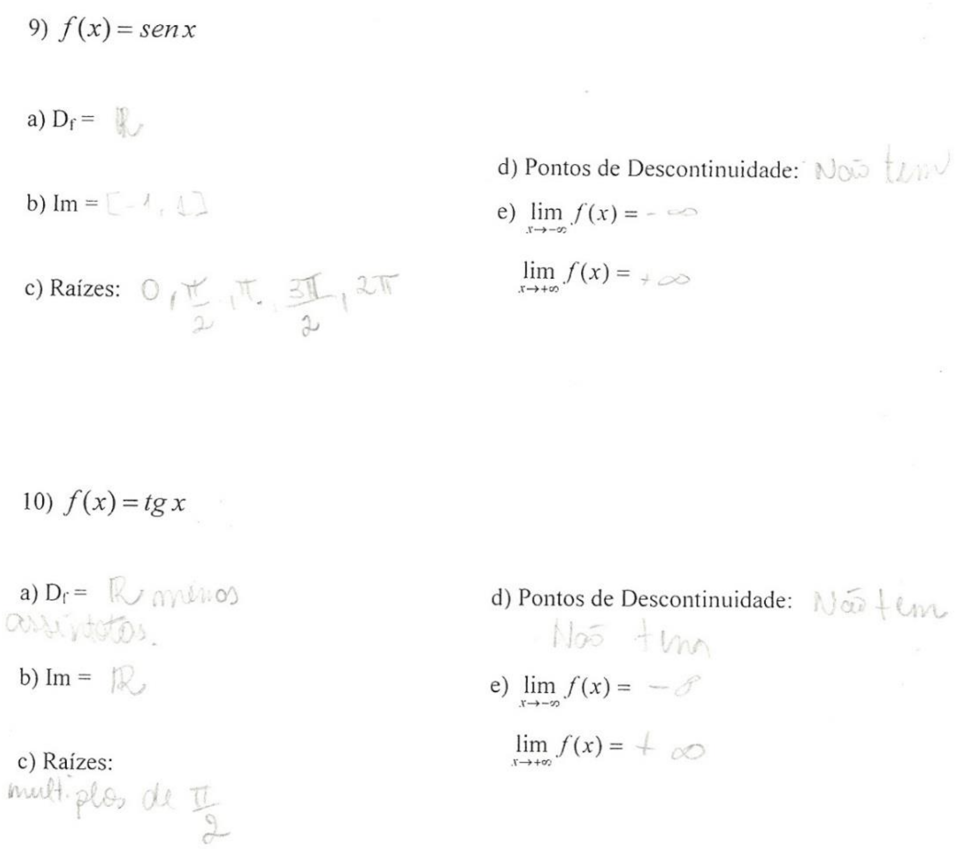
c) Raízes: x = n . π com n ∈ Z

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ Não se define o limite

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ Não se define o limite

Figura 9. Resolução do Grupo 2 – Atividade 1



9) $f(x) = sen\,x$

a) $D_f =$ $\mathbb{R}$

b) Im = $[-1, 1]$

c) Raízes: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

d) Pontos de Descontinuidade: Não tem

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

10) $f(x) = tg\,x$

a) $D_f =$ $\mathbb{R}$ menos assíntotos.

b) Im = $\mathbb{R}$

c) Raízes: multiplos de $\frac{\pi}{2}$

d) Pontos de Descontinuidade: Não tem
Não tem

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Figura 10. Resolução do Grupo 4 – Atividade 1

Estes tipos de erros foram uma constante nas resoluções dos grupos. Para os grupos que responderam que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, inferimos que eles estavam, na verdade, interpretando de forma errada a definição de limite. Assim, conduzimos a discussão, no caso da função seno, em torno do seu conjunto imagem, uma vez que todos responderam corretamente a essa questão. Ao fim da conversa, estavam todos de acordo e com uma ideia bem formada a respeito do conceito de limites infinitos.

Os grupos que responderam que os limites não estavam definidos, na verdade, estavam querendo dizer que esses limite não existiam; essas evidências foram comprovadas na discussão promovida ao fim da realização das atividades, como destacamos a seguir:

> Não tem como calcular esses limites, pois as imagens ficarão sempre oscilando, então a função não tende a lugar algum, à medida que x tende ao infinito, tanto negativo como positivo. (Grupo 2)

> E no caso particular da função tangente a função oscilará de menos a mais infinito, então não tem como defini-lo. (Grupo 4)

Ambas as falas comprovam que os grupos sabiam que os limites não existem, porém se equivocaram, matematicamente, em suas respostas. Isso demonstra uma imagem conceitual que se distancia da definição formal de limite de uma função real. Mais uma vez, tivemos a oportunidade de identificar uma falha na formação e construção de uma imagem conceitual importante para uma aprendizagem significativa dos conceitos do Cálculo.

Podemos afirmar que a Atividade 1 cumpriu seu papel com eficiência com relação à questão da verificação do conhecimento dos participantes em relação ao *software* e, indo além de nossas expectativas na questão teórica, principalmente na questão das imagens conceituais. Assim, essa atividade nos forneceu subsídios para elaboração das demais atividades.

4.1.2. Atividade 2: Construindo gráficos de Funções Polinomiais e de Retas Tangentes utilizando a derivada.

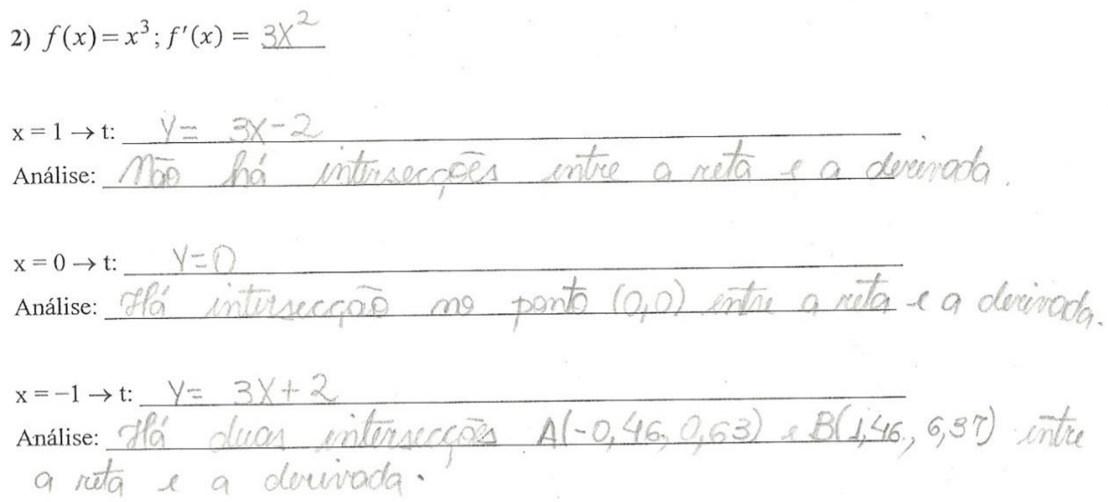
Como na Atividade 1, os participantes dessa atividade já haviam trabalhado o conteúdo em sala de aula com o professor regente, portanto, ao chegarem ao laboratório de informática, eles já sabiam derivar funções polinomiais e também determinar equação de retas tangentes.

Essa atividade foi realizada por 4 duplas e mais 4 alunos, que decidiram fazê-la sozinhos, portanto teremos nessa análise 8 grupos. A atividade consiste em verificar o caráter local da derivada de uma função, calculada algebricamente e sua relação com a reta tangente no ponto escolhido. Pensamos para a atividade 4 funções polinomiais, pois naquele momento, os alunos não possuíam habilidades necessárias para o cálculo de derivadas mais requintadas; inclusive um dos alunos calculou todas pela definição, utilizando limite, e não diretamente pelas regras de derivação.

O objetivo foi verificar graficamente que existe uma relação entre o coeficiente angular da reta tangente em um ponto da curva e a derivada nesse ponto. O procedimento apresentado na atividade consistia em: 1) calcular a derivada da função; 2) obter as equações das retas tangentes em três pontos específicos; 3) construir, no GeoGebra, os gráficos da função polinomial e das retas. A partir dos gráficos plotados, verificar as relações existentes entre esses gráficos e a derivada da função polinomial.

Inicialmente, essa atividade se mostrou fácil, pois os grupos resolveram algebricamente as questões propostas sem dificuldades, plotaram as curvas envolvidas em cada questão e verificaram o caráter local da derivada no ponto. Conseguiram fazer corretamente inferências a respeito da relação entre a derivada no ponto e a inclinação da reta tangente. Todos os grupos entregaram as atividades e fomos para o fechamento, quando cada função era projetada e iniciávamos uma conversa.

Verificamos, então, que um dos grupos havia plotado no mesmo plano os gráficos da função $f'(x)$ juntamente com os gráficos das retas tangentes, ao invés de plotar os gráficos da função e das retas tangentes, como proposto. Após essa construção, eles identificaram os pontos de interseção dessas duas curvas. Vejamos a resolução da questão (2):


2) $f(x)=x^3$; $f'(x) =$ $3X^2$

$x = 1 \rightarrow$ t: Y= 3X-2

Análise: Não há intersecções entre a reta e a derivada.

$x = 0 \rightarrow$ t: Y=0

Análise: Há intersecção no ponto (0,0) entre a reta e a derivada.

$x = -1 \rightarrow$ t: Y= 3X+2

Análise: Há duas intersecções A(-0,46, 0,63) e B(1,46, 6,37) entre a reta e a derivada.

Figura 11. Resolução do Grupo 3 – Atividade 2

Esta questão gerou a seguinte solução gráfica:

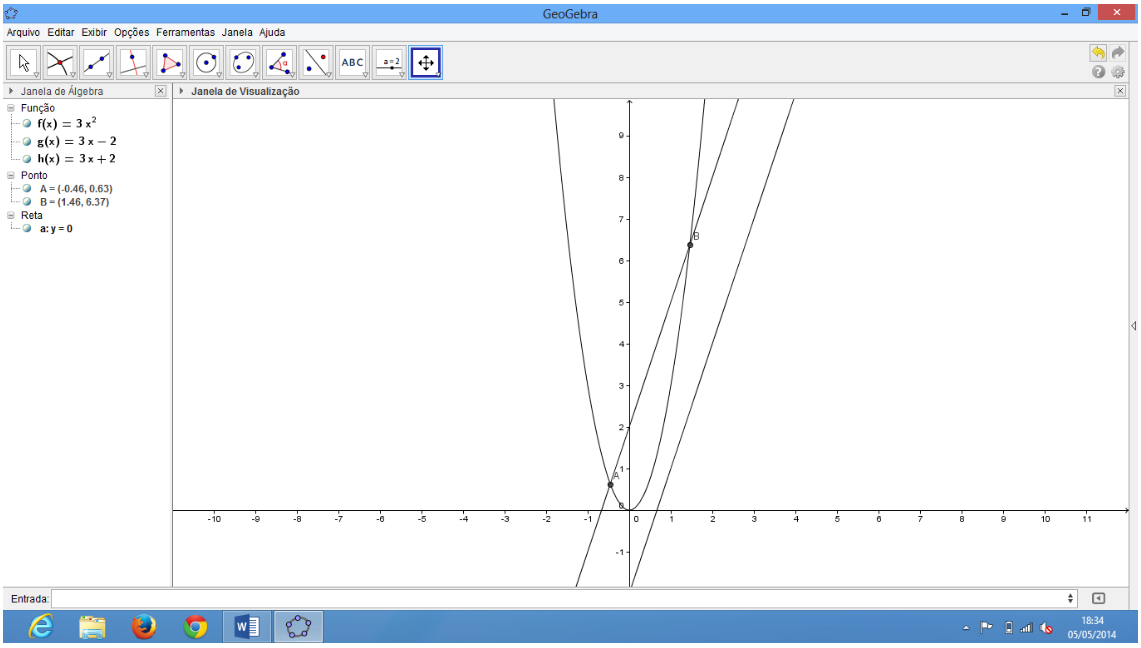


Figura 12. Gráfico da Questão 2 apresentada pelo Grupo 3

Pedimos a um dos alunos que demonstrasse o procedimento para determinar tal solução e ele disse:

> Construímos os gráficos das funções e utilizamos a ferramenta interseção de dois objetos, que fornece automaticamente esses pontos, graficamente e algebricamente; daí anotamos os valores na folha (Grupo 3).

Esse mesmo grupo havia determinado as equações das tangentes corretamente, como os demais grupos. Portanto, nenhum participante demonstrou inabilidade ou falta de entendimento com relação ao exercício proposto que envolvia a derivada e a reta tangente em um ponto.

Mais uma vez, a partir de um erro, promovemos uma discussão para o fechamento da atividade. O gráfico da derivada levantou uma inquietação e certa curiosidade em alguns participantes, alavancando boa discussão a respeito da função derivada, como destacado em algumas falas abaixo:

> Professor, o que o gráfico da função derivada, $f'(x)$, diz sobre a função dada, $f(x)$? E qual sua relação com a tangente? (Grupo 7)

> Ora, sabemos que o valor da derivada em um ponto do domínio, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função. Portanto a função, derivada fala do comportamento da

inclinação da reta tangente, que coincide com a inclinação da curva no ponto. (Pesquisador)

É possível encontrar a função $f(x)$ a partir da derivada dela? (Grupo 1)

Não exatamente. Por exemplo: $y = x^2 + 2x + 3$ e $y = x^2 + 2x - 20$ possuem a mesma derivada, $y' = 2x + 2$; mas a função derivada nos fornece informações importantes sobre o comportamento da função. Os intervalos onde a derivada é positiva significa que a função $f(x)$ é crescente, onde a derivada é negativa a função $f(x)$ é decrescente e as raízes da derivada são os pontos de máximo e mínimo de $f(x)$. Vamos ver graficamente. (Pesquisador)

Então, plotamos e projetamos os gráficos das funções citadas acima e com a ampliação adequada fizemos as inferências, mostrando que, pelo fato de as funções quadráticas possuírem a mesma derivada, elas apresentam o mesmo comportamento em intervalos iguais de seus domínios.

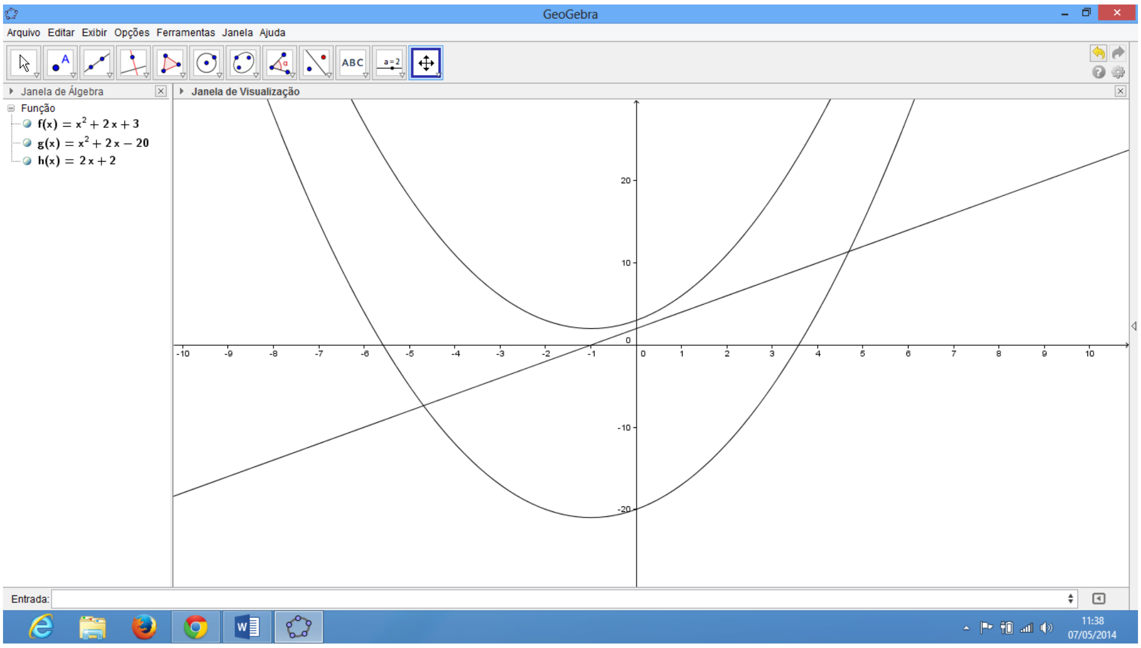


Figura 13. Gráficos das funções quadráticas e sua derivada

A oportunidade serviu para discutir estas questões e enriquecer ainda mais os conceitos de derivada, em suas várias representações, e também para mostrar a relação que existe entre a função derivada, exposta graficamente, e a função primitiva.

O procedimento adotado pelo grupo 3 serviu de modelo para analisarmos cada uma das questões; obtivemos as interseções das tangentes com o gráfico da função $f(x)$, utilizando a ferramenta interseção de dois objetos, como na questão (2) abaixo:

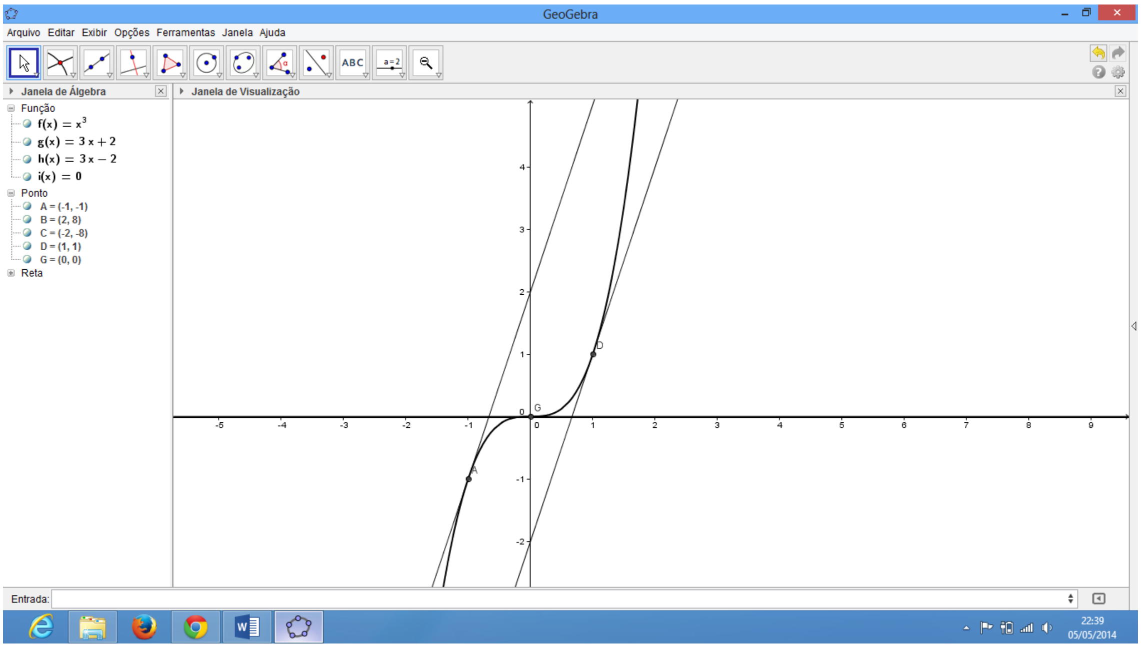


Figura 14. Solução da Questão 2 apresentada pelo pesquisador para discussão

Adotamos esse procedimento para todas as questões, dando uma ênfase gráfica maior aos elementos obtidos algebricamente pelos grupos, Acreditamos que, com essa atividade, tenhamos conseguido abordar o conceito de derivada em suas representações algébrica e geométrica, indo da primeira para a segunda.

4.1.3. Atividade 3: Construindo gráficos de Funções Polinomiais e movimentando Retas Tangentes.

Essa atividade foi pensada para reforçar os conceitos trabalhados e desenvolvidos na atividade anterior, porém, percorrendo o caminho inverso, ou seja, nessa atividade iríamos do geométrico para o algébrico. Foi também uma atividade de exploração das ferramentas que o *software* oferece para análise e construção de gráficos de funções.

A atividade foi realizada por 12 participantes, divididos em 5 duplas e mais 2 alunos que a fizeram individualmente mas discutiram entre si a atividade. Assim, tivemos 7 grupos. A proposta apresentada aos alunos foi trabalhar exatamente com as funções da Atividade 2, mas com outro foco, pois toda a atividade foi desenvolvida no computador, explorando as ferramentas que o programa dispõe. Foi apresentado aos participantes o seguinte roteiro:

1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;
2) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta “Ponto em Objeto”;
3) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta “Reta Tangente”;
4) Movimente o ponto selecionado, utilizando a ferramenta “Mover”;
5) Observe a equação da reta tangente na janela algébrica;
6) A partir dos gráficos construídos, descreva os valores de x para os quais a reta tangente é crescente, decrescente ou constante, discutindo com seu colega!

De certa forma, as questões levantadas e discutidas na Atividade 2 serviram de base para a elaboração dessa atividade e os conceitos lá questionados e discutidos, a respeito da relação entre a função derivada e a própria função, foram explorados geométrica e algebricamente nesta atividade. A dinamicidade do GeoGebra foi extremamente útil e interessante para a proposta pensada e apresentada na Atividade 3.

Os participantes não apresentaram nenhuma dificuldade para a execução do roteiro apresentado e gostaram muito da atividade. Em conversa com eles após a conclusão da tarefa pelos grupos, tivemos a oportunidade de verificar que todos viram, empiricamente, qual, de fato, era a relação entre a função derivada e a função f dada.

Destacamos durante o desenvolvimento da atividade que o coeficiente angular da reta tangente é o valor da derivada da função do ponto. A seguir, apresentamos o gráfico da questão (3), que foi exposto para discussão ao fim dos trabalhos, com as tangentes em três de seus pontos sendo que, durante a exposição, apenas uma tangente foi traçada e movimentada no decorrer da discussão:

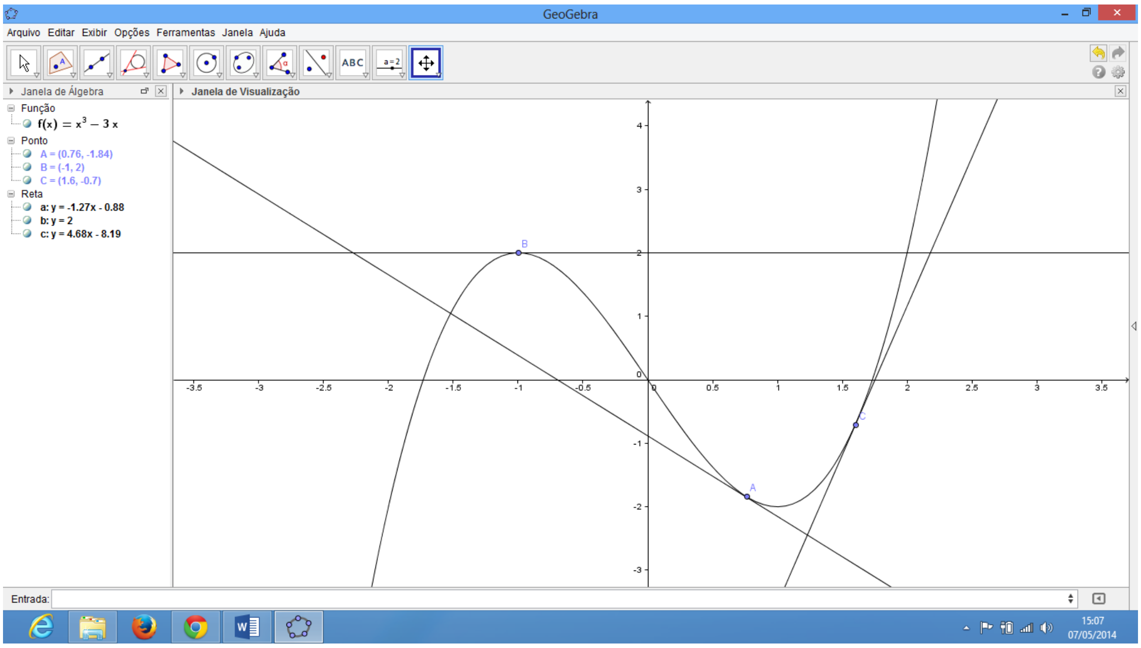


Figura 15. Questão 3 – Atividade 3

Embora simples e sem dificuldade para a execução e, também, com nenhum ponto polêmico na discussão, a atividade foi muito rica na construção do conceito de derivada como inclinação da reta tangente. Nenhum dos participantes demonstrava dúvida com relação ao fato do coeficiente angular da reta tangente ser a derivada no ponto e, à medida que essa reta era movimentada, seu coeficiente variava. Portanto, parece que ficou claro para todos que o sinal da derivada está diretamente ligado à inclinação da reta tangente e, portanto, também está ligado ao crescimento ou decrescimento da função.

Nesse momento, tivemos elementos suficientes para acreditar que uma imagem conceitual mais rica em detalhes e com representações diferentes já se revelava entre os participantes das atividades da pesquisa. Dentre elas, podemos destacar duas: derivada da função no ponto como inclinação da reta tangente e o sinal da função derivada relacionado ao crescimento e decrescimento da função. As discussões em torno desses pontos e as respostas apresentadas pelos participantes nos levavam a esse entendimento.

4.2.4. Atividade 4: Construindo gráficos de Funções Contínuas e movimentando Retas, relacionando com as Derivadas Laterais.

Essa atividade, diferentemente das demais, serviu como introdução dos conceitos abordados, ou seja, o professor regente ainda não havia iniciado o conteúdo de derivadas laterais em sala de aula. Talvez por esse motivo, tenham sido necessárias mais intervenções de nossa parte no decorrer da atividade.

Participaram nesse dia 14 alunos, formando 6 duplas e 2 participantes realizaram a atividade sozinhos e discutiram-na entre si. Assim, tivemos 8 grupos. Os procedimentos propostos foram iguais aos adotados na atividade anterior, construindo a reta tangente em um ponto qualquer, movendo esse ponto e, consequentemente, a reta tangente. A ideia principal era movimentar essa reta nas proximidades de um ponto já predeterminado e verificar quais eram as derivadas à esquerda e à direita desse ponto, e assim dizer qual era a derivada no ponto escolhido.

As funções e os respectivos pontos escolhidos em cada questão foram:

1) $f(x) = x^2, x = 0;$

2) $f(x) = |x|, x = 0;$

3) $f(x) = x^3, x = 0;$

4) $f(x) = \begin{cases} 4, & se\ x \leq 2 \\ x^2, & se\ x > 2 \end{cases}, x = 2.$

O primeiro ponto a se destacar nessa atividade foi a recuperação / ênfase na definição da derivada, pois para se analisar a derivada imediatamente à esquerda ou à direita de um ponto, resgatamos a ideia ou o fato de que a derivada de uma função é um limite. Não estávamos mais calculando a derivada no ponto e sim investigando seu comportamento nas proximidades do ponto escolhido. Então, para que ela existisse no ponto, os valores laterais deveriam ser iguais.

Essa conclusão, de que a derivada no ponto existiria se as derivadas laterais existissem e fossem iguais, foi levantada por um participante e não pelo pesquisador, que somente fez uma analogia com limites laterais. Essa conclusão foi compartilhada com a turma que, a partir daí, deu continuidade à atividade. Alguns grupos tiveram dificuldade em esboçar o gráfico da função modular e todos apresentaram dificuldades para esboçar a função da questão (4); foi, então, necessária a intervenção do pesquisador. Após essa intervenção, todos concluíram a atividade com certa agilidade e fomos, então, para o fechamento, como de costume.

Alguns erros de interpretação foram revelados durante a conversa e renderam excelentes discussões, como destacamos: as questões (1) e (3), como já poderíamos esperar, não apresentaram problemas na interpretação, uma vez que são curvas “suaves” e as derivadas laterais existem e são iguais. A questão (2) foi resolvida da mesma forma pelos grupos, obtendo derivada à esquerda igual a – 1 e à direita igual a 1, porém todos eles afirmaram que a derivada no ponto era “indefinida”, ao invés de não existir; apenas 3 grupos concluíram que a função não era derivável em $x = 0$. Apresentamos duas dessas respostas:

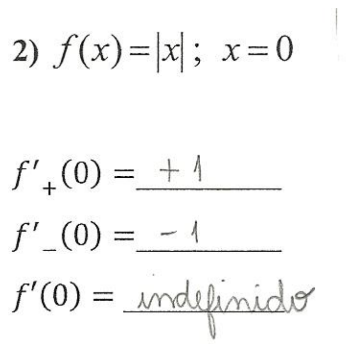


Figura 16. Resolução Grupo 2 – Atividade 4

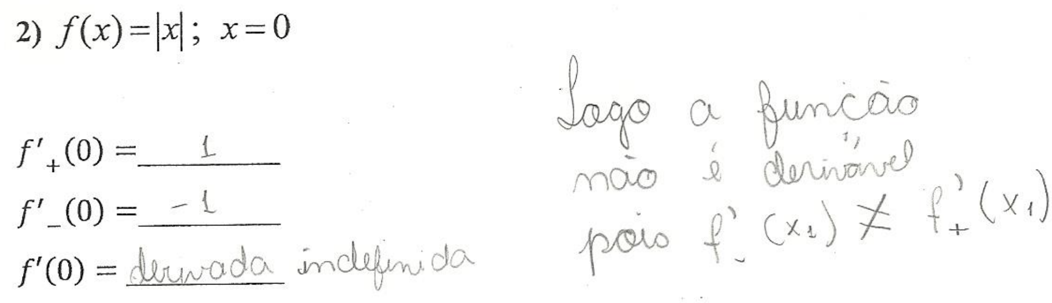


Figura 17. Resolução do Grupo 4 – Atividade 4

Naquele momento, aproveitamos para, mais uma vez, relembrar que a derivada é um limite e que se os limites laterais são diferentes, isso implica que o limite não existe, e isso não é a mesma coisa de ser indefinido. Essa questão foi bem resolvida e entendida por todos.

O erro apresentado na interpretação da questão (4) foi igual ao da questão (2), com relação à indefinição da derivada, por 3 dos 8 grupos; os demais afirmaram que as derivadas laterais eram iguais a 4 e, portanto, a derivada também seria igual a 4; isso aconteceu pois, ao movimentar a reta tangente à esquerda de $x = 2$, a equação da tangente é dada por y = 4; logo os cinco grupos, erroneamente, atribuíram o valor 4 à inclinação da reta tangente.

Destacamos, a seguir, o gráfico da função com duas tangentes, uma à esquerda e outra à direita:

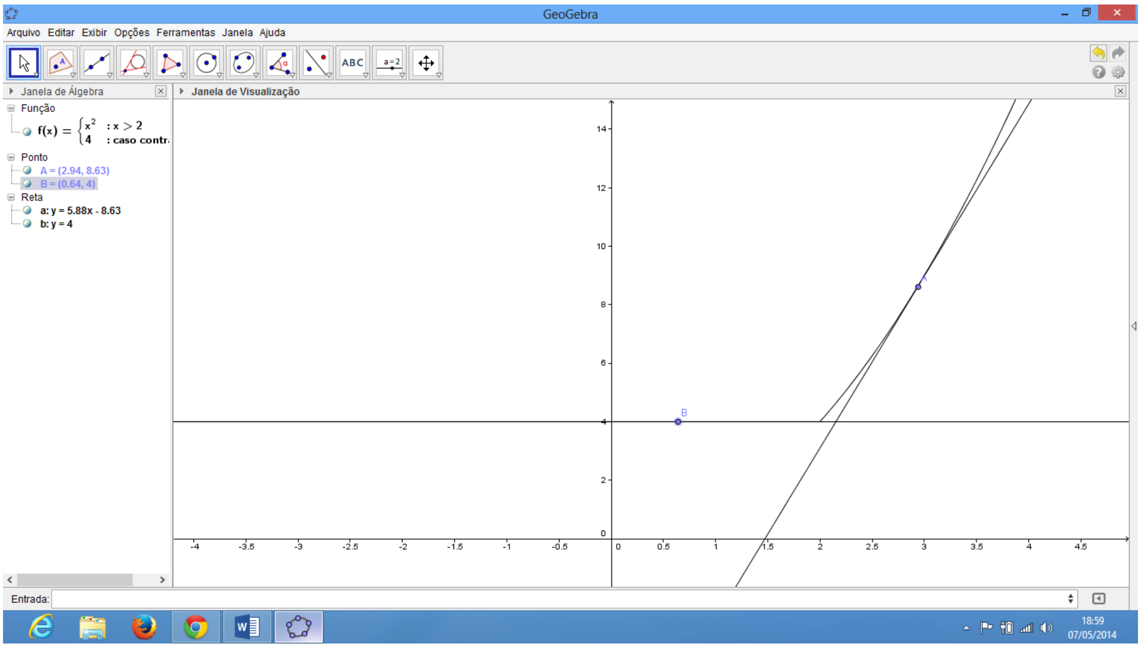


Figura 18. Gráfico da Questão 4 – Atividade 4

Os alunos que responderam que a derivada à esquerda valia 4, provavelmente confiaram mais no que estavam vendo na janela gráfica, somada a uma certa desatenção, do que nas imagens conceituais já construídas. O outro erro apresentado, dizer que a derivada é indefinida no ponto, remeteu-nos ao erro apresentado na questão (2); logo, foi rapidamente solucionado.

Durante esses esclarecimentos, uma dúvida foi levantada e gerou uma discussão que envolveu a todos, quando um aluno perguntou:

> Professor, as questões (2) e (4) apresentam funções que são definidas por expressões diferentes em intervalos diferentes e são exatamente as funções que apresentam pontos não deriváveis. Isso sempre acontece e é a única forma de termos pontos não deriváveis? (Grupo 3)

Aproveitamos a indagação e perguntamos aos demais participantes se eles saberiam responder à pergunta, apresentando exemplos, ou seja, dando exemplos de funções definidas por várias sentenças como a da questão (4), deriváveis em todos os pontos e também exemplos de funções não deriváveis em pelo menos um ponto. Eles tentaram, porém não conseguiram elaborar um exemplo. No caso das funções não deriváveis, sugerimos a eles que observassem as funções não contínuas em algum ponto.

Para as funções que são definidas por várias sentenças como a da questão (4), pedimos a eles que pensassem em uma função, não constante, que tenha derivada nula à direita de algum valor de x. Prontamente, um participante apresentou a função $y = x^2$, que à direita de $x = 0$ é nula, sugerimos, então que a função à direita de $x = 0$ fosse diferente de $y = x^2$, mas com derivada também nula. Outro aluno sugeriu uma função constante, no caso $y = 0$. Pronto! Construímos, conjuntamente uma função como queríamos: definida por várias sentenças e derivável em $x = 0$.

A função $f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0 \\ x^2, & se\ x > 0 \end{cases}$ construída pelos participantes da pesquisa foi apresentada graficamente:

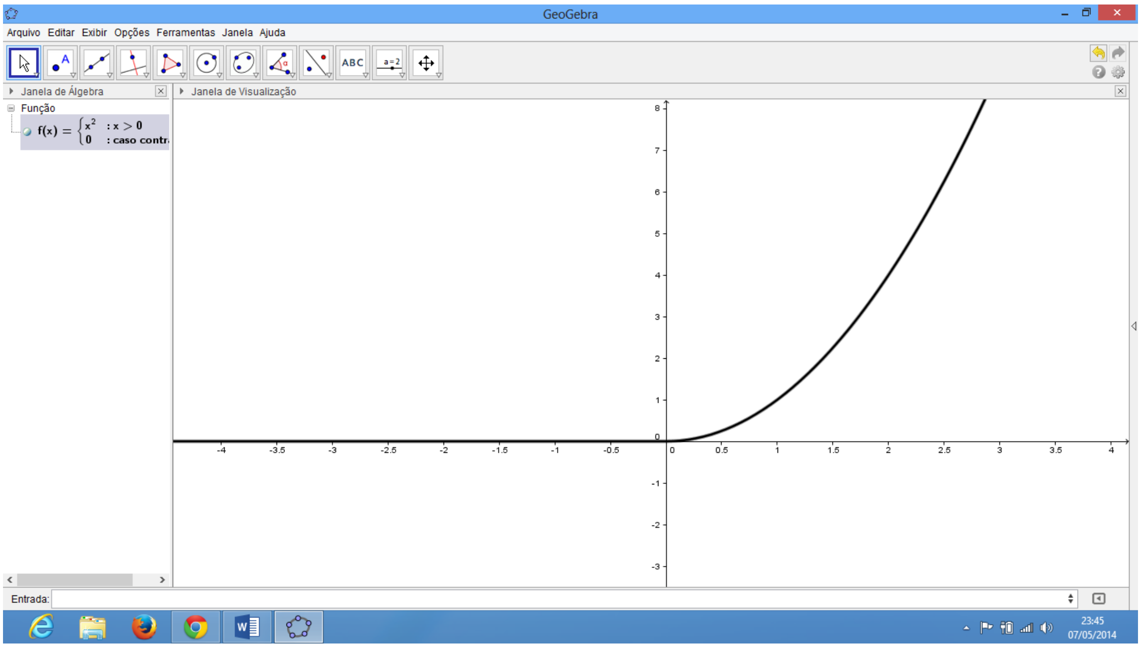


Figura 19. Função construída pelos participantes durante a realização da Atividade 4

Vários aspectos teóricos de nossa pesquisa puderam ser apurados no desenrolar dessa atividade; as imagens conceituais do conceito de derivada ficaram mais ricas, pelo fato de trabalharmos de forma mais aprofundada a ideia da derivada a partir do conceito de limites laterais, reforçando a definição de derivada como um limite e aumentando, assim, o número de representações do conceito de derivada.

Outra questão interessante que podemos destacar na análise dessa atividade, é o fato da construção do conhecimento, em parte do desenvolvimento do trabalho, ter partido de um ponto conflitante na resolução da atividade e por conjecturas feitas pelo próprio aluno. Isso exemplifica bem o que afirma Dreyfus (1991):

> Abstrair é primeiramente um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, isto é, a partir de propriedades e de relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento de propriedades e relações apropriadas. Requer a habilidade de trocar atenção dos objetos em si para a estrutura de suas propriedades e relações. Essa atividade construtiva mental por parte de um aluno é fortemente dependente da atenção do aluno, devendo enfocar nas estruturas que formarão parte do conceito abstrato, desviando-se daqueles que são irrelevantes no contexto pretendidos; a estrutura se torna importante, enquanto detalhes irrelevantes estão sendo omitidos, deste modo reduzindo a complexidade da situação (DREYFUS, 1991, p. 37, tradução nossa).

Nesse momento do desenvolvimento de nossas atividades já era possível notar, em alguns dos participantes da pesquisa, uma construção ou uma formação de representações distintas do conceito de derivada, tais como: derivada no ponto como inclinação da reta tangente, derivada como uma função que descreve os intervalos de crescimento e decrescimento da função e derivada como limite nas proximidades de um ponto.

4.1.5. Atividade 5: Problemas de Maximização e Minimização

A quinta e última atividade, que passaremos agora a descrever, foi pensada para apresentar a derivada como uma ferramenta na resolução de situações problema de otimização, o que a tornou um pouco mais elaborada e trabalhosa que as anteriores.

Participaram dessa atividade 16 alunos, divididos em 7 grupos, sendo 5 duplas e 2 trios. Escolhemos 5 problemas retirados do livro texto da disciplina: o primeiro ligado à Biologia que trata de maximização do fluxo de ar na traqueia; o segundo no qual se pede para minimizar o custo de um obra; o terceiro que trata da minimização de uma área; o quarto que envolve o volume de um caixa retangular, onde o objetivo é minimizar o custo de produção, dados os preços dos materiais; o quinto que pede para se maximizar o lucro de uma empresa.

A proposta era que cada grupo resolvesse um problema, seguindo um roteiro, e ao final, as soluções de cada problema seriam socializadas. O roteiro para solucionar cada problema era o seguinte:

1) Leia atentamente o problema proposto para o seu grupo e anote as variáveis envolvidas;
2) Expresse algebricamente a função que modela matematicamente o problema e seu domínio de definição;
3) Construa o gráfico da função modelada no GeoGebra;
4) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta “Ponto em Objeto”;
5) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta “Reta Tangente”;
6) Movimente o ponto selecionado ao longo da curva, utilizando a ferramenta “Mover”;
7) A partir do gráfico construído, descreva o ponto de máximo (ou mínimo) e o valor máximo (ou mínimo) da função, de acordo com o problema proposto, discutindo com seus colegas!
8) Anote a equação da reta tangente que aparece na janela algébrica;
9) Utilizando as derivadas primeira e segunda, verifique algebricamente os resultados obtidos no GeoGebra.
10) Apresente o problema e sua solução para seus colegas de sala!

Essa atividade foi muito bem planejada em termos de tempo, porém fatores externos influenciaram negativamente na condução dos trabalhos: uma greve dos coletivos na região da universidade atrapalhou nossos planos. Alguns alunos chegaram atrasados e disseram que só compareceram porque estava combinado que seria nosso encontro final de conclusão dos trabalhos, mas que teriam que ir embora mais cedo.

Mesmo diante de tal problema, conduzimos normalmente os trabalhos. Ajudamos alguns grupos no equacionamento do problema proposto e na derivação algébrica; alguns deles tiveram problemas no esboço, pois a função plotada requeria melhoramento na imagem. Um problema em especial gerou mais conflito durante os trabalhos: o problema (2), pois apresentava valores pequenos para a abscissa do ponto mínimo e imagens com valores elevados; esse fato fez com que o gráfico da função não aparecesse na tela gráfica do programa. Com nossa ajuda, esse problema foi contornado; Esse conflito, previsto nesses tipos de atividades, foi enfrentado, juntamente com os participantes do grupo (4), pois como afirma Giraldo (2002), devemos enfatizar os conflitos teórico-computacionais e não simplesmente evitá-los, se quisermos contribuir para o enriquecimento das imagens conceituais dos participantes.

Depois de resolver essa questão com o grupo, resolvemos socializar sua solução. Destacamos o gráfico da questão (2), que foi exposto para a turma e discutido:

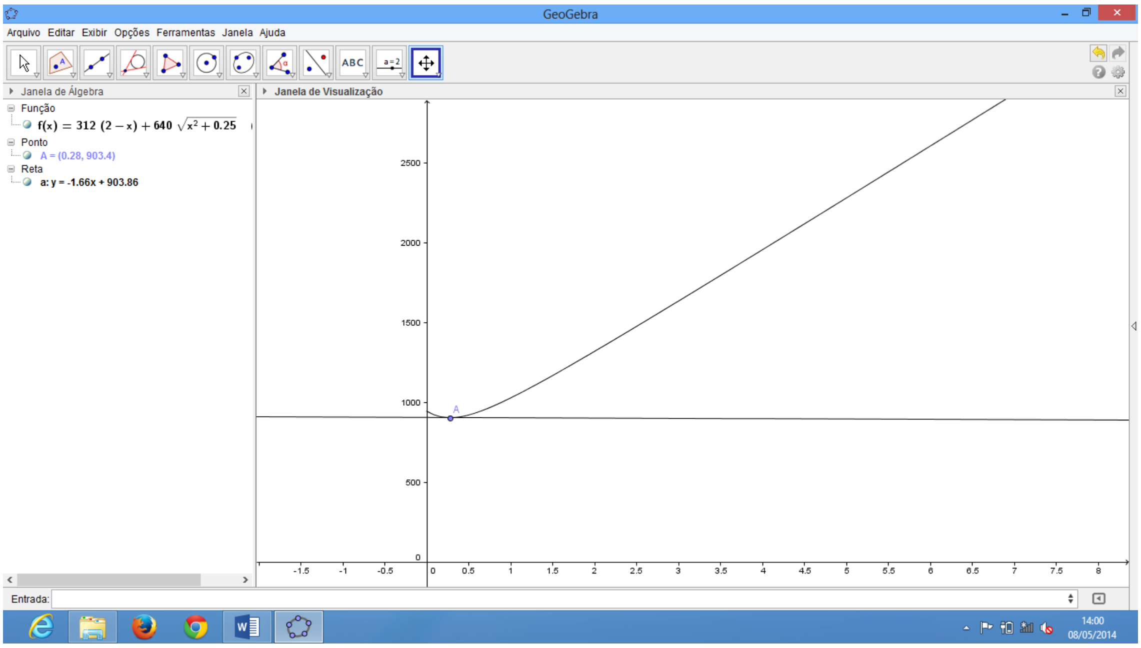


Figura 20. Problema 2 – Atividade 5

Esse foi o produto final da resolução; mostramos à turma todo o processo, utilizamos a lousa para determinar a função que representava o problema e, em seguida, plotamos seu gráfico, que inicialmente não aparecia na tela; após ajustes dos eixos, chegamos a essa versão. Daí, seguimos o roteiro, marcando um ponto e traçando a tangente, movimentamos essa tangente a fim de deixá-la na posição horizontal, ou seja, tangente com inclinação nula. Um aluno quis saber como resolvê-la algebricamente; pelo pouco tempo, não sugerimos essa resolução como atividade; ela foi resolvida pelo pesquisador na lousa, chegando ao valor de $x = 0{,}28$ como raiz da derivada.

Por conta do pouco tempo que tínhamos, optamos, então, por expor apenas mais um dos cinco problemas propostos, o problema (1), por ser de uma área menos comum que as demais dos outros problemas. Da mesma forma que o problema (2), equacionamos o problema e apresentamos sua solução gráfica.

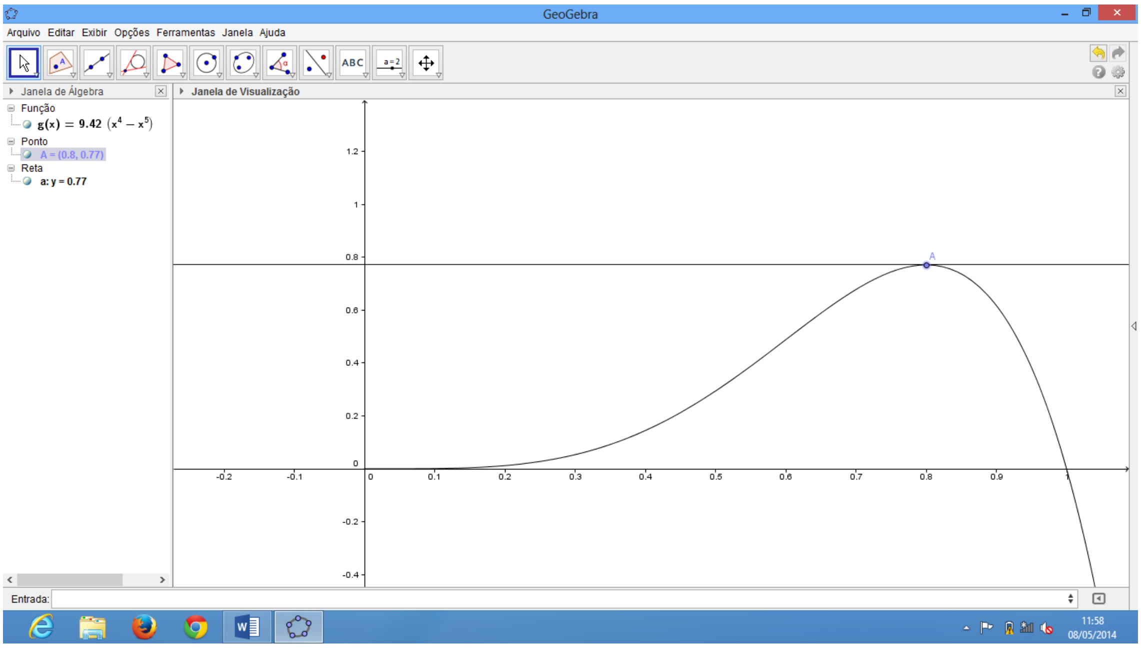


Figura 21. Problema 1 – Atividade 5

Esse gráfico também necessitou de ajustes nos eixos para uma melhor visualização, mas não apresentou dificuldades em ser interpretado e entendido por todos os participantes.

Embora tenham ocorridos problemas na execução dos trabalhos dessa atividade, entendemos e pudemos observar que ela cumpriu seu papel pedagógico e parte considerável do seu objetivo principal foi alcançado. Não tivemos tempo para expor e discutir todas as questões da atividade, mas as duas que foram expostas desempenharam bem sua finalidade. Assim, o ponto central da atividade, que seria resolver o problema de maximização ou minimização utilizando os recursos gráficos / computacionais que o *software* oferece foi observado.

4.2. Elaborando Categorias / Eixos de Análise

Daremos início, agora, à descrição das categorias / eixos de análise, tarefa que consideramos fundamental para os objetivos traçados, mas que sabemos tratar-se de uma questão árdua e perigosa. Na perspectiva da pesquisa qualitativa, as categorias nos permitem agrupar e/ou comparar dados apresentados e essas decisões dependem, quase que exclusivamente, do olhar do pesquisador; portanto olhares diferentes poderiam gerar categorias distintas das estabelecidas.

A partir da análise das atividades, juntamente com nossa observação do desenrolar da pesquisa de campo, além das notas de campo, do referencial teórico / bibliográfico e do Questionário de Avaliação das Atividades, decidimos estipular duas categorias / eixos de análise: A formação de Imagens Conceituais e A visualização proporcionada pelo GeoGebra.

Relembremos que o questionário foi entregue aos 17 (dezessete) alunos presentes no dia da realização da Atividade 5, e pelo pouco tempo disponível naquela oportunidade, optamos por fornecer aos participantes o questionário e combinamos que eles deveriam entregá-los na aula seguinte ao professor regente da turma, sendo que 14 (quatorze) deles devolveram o questionário respondido. Para a leitura e análise desses questionários, estes foram numerados de 1 a 14, de forma aleatória; portanto, nos destaques necessários, vamos nos referir ao número de cada um.

4.2.1. A formação de Imagens Conceituais

Das teorias cognitivas que envolvem o Pensamento Matemático Avançado, escolhemos a que foi desenvolvida por Tall e Vinner sobre Imagem Conceitual e Definição Conceitual, por sua consistência, pela gama de material disponível e por se tratar de um campo de pesquisa no qual o orientador dessa pesquisa atua.

Revisitando nosso referencial teórico, percebemos que, de acordo com Tall e Vinner (1981) e Tall (1992), a imagem conceitual está associada à estrutura cognitiva total de um conceito, incluindo todas as representações mentais, já existentes ou adquiridas em experiências cotidianas. Todas as demais leituras, como Dreyfus (1991) e Giraldo (2002), giram em torno dessa teoria central desenvolvida por Tall e Vinner.

Optamos por trabalhar nessa pesquisa em um ambiente informatizado, utilizando o *software* GeoGebra, por acreditar que tal ferramenta despertaria nos estudantes um estímulo à aprendizagem do conceito de derivada e assim, verificar de que forma as atividades desenvolvidas com uso de um *software* de geometria dinâmica poderiam influenciar na formação das imagens conceituais.

Recorrendo novamente a nosso referencial teórico, encontramos em Marín (2011) e Villarreal (1999) subsídios que necessitávamos para um planejamento adequado das atividades exploratórias, a fim de obtermos um bom resultado no que se refere a uma aprendizagem significativa e, dessa forma, melhor aproveitar o que as atividades em um ambiente informatizado poderiam oferecer.

Para confirmar o que foi planejado ao longo de todo o projeto de pesquisa e verificar quais as possíveis contribuições que a utilização de um *software* de geometria dinâmica pode proporcionar à formação de Imagens Conceituais relacionadas a derivada, destacamos algumas respostas dadas pelos participantes às Questões 1 e 2 do Questionário de Avaliação das Atividades.

Destacaremos, primeiramente, as respostas dadas à Questão 1: "Após a realização das atividades com o uso do GeoGebra, quais são as principais ideias e/ou representações (algébricas, geométricas, físicas, etc), que você associa ao conceito de derivada? (Você pode utilizar representações gráficas em sua resposta!)"

Consideramos relevantes as seguintes afirmações:

> Após o uso do GeoGebra no ensino do conceito de derivada, acredito que o entendimento lógico e espacial deste conceito tornou-se mais claro. Ao se mostrar a derivada de forma menos abstrata, como a inclinação da reta tangente à curva em um determinado ponto, acredito que meu entendimento lógico para seu ensino e utilidade ficaram mais claros. Assim sendo, as atividades associadas ao uso do GeoGebra, sem dúvida, contribuíram largamente para a consolidação deste conceito bem como de tantos outros relacionados ao tema (ponto de máximo ou mínimo, ponto de inflexão, concavidade). (PARTICIPANTE 4).

> Associo o conceito de derivada pensando em sua forma geométrica, isto é, que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente à curva, num ponto P do gráfico da função. (Veja a figura) (PARTICIPANTE 14).

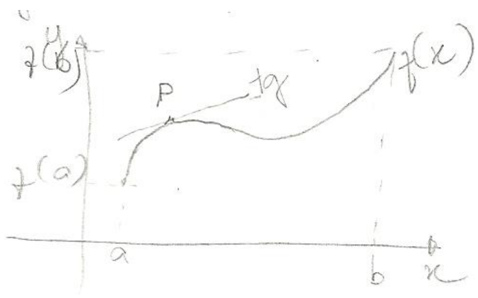


Figura 22. Questão 1 – Questionário de Avaliação das Atividades

Passaremos agora à Questão 2: “Se você tivesse que explicar a um colega, o que é a derivada de uma função real de uma variável, como o faria, utilizando suas próprias palavras?”

Destacamos, também, algumas das respostas dadas pelos participantes:

> Explicaria que considerando-se que a função é contínua, a derivada é a inclinação no ponto, da reta tangente. (PARTICIPANTE 3)
>
> Se tivesse que explicar o conceito de derivada a alguém (como já o fiz) iniciaria tentando deixar claro a essência deste conceito, evidenciando que a derivada nada mais é do que a inclinação da reta tangente que passa por aquele ponto, e posteriormente mostraria qual a importância deste conceito, qual sua utilidade prática ao aluno, como por exemplo para calcularmos aproximadamente os valores de certas funções ou encontrarmos os subsídios básicos à construção do gráfico de uma função. (PARTICIPANTE 4)
>
> “A derivada de f num ponto x é a reta secante se tornando tangente.” Ou melhor, é a inclinação da reta tangente à curva. (PARTICIPANTE 6).
>
> É o coeficiente angular da reta tangente no ponto. (PARTICIPANTE 9).

Baseados nas observações realizadas durante o desenvolvimento das Atividades Exploratórias e nos depoimentos colhidos nos Questionários de Avaliação das Atividades, temos evidências que nos levam a acreditar que a utilização das TICEM aliada à sequência de atividades exploratórias contribuíram para a formação e enriquecimento de Imagens Conceituais relacionadas ao conceito de derivada, com destaque para:

- a imagem algébrica da derivada associada à inclinação da reta tangente;

- a imagem geométrica da derivada como coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto;

- a imagem aplicativa da derivada na obtenção dos pontos críticos de uma função;

- a imagem aproximativa da derivada nos valores de uma função nas proximidades de um ponto;

- a imagem transformativa da derivada quando a reta secante se torna tangente;

- a imagem local da derivada como sendo uma propriedade pontual.

4.2.2. A visualização proporcionada pelo GeoGebra

Ao pesquisar e ler a Teoria da Visualização em Educação Matemática, apoiados em Villarreal (1999), Frota (2013) e Flores (2012), ampliamos nosso referencial teórico e adquirimos bagagem suficiente para dar continuidade aos trabalhos. De certa maneira, estávamos prontos para ir a campo e colocar em prática o que havia sido planejado, colhendo informações sob a luz desses referenciais.

A visualização "é considerada como uma ferramenta para a compreensão matemática", segundo Villareal (1999) e, de acordo com Tall (1991), a visualização tem papel fundamental para o Cálculo. Várias são as pesquisas que relacionam o Cálculo e o uso dos recursos computacionais; nosso referencial teórico nos permite dizer que, as tecnologias tem desempenhado papel muito importante na visualização em Cálculo.

Continuaremos essa reflexão, analisando as outras duas questões do nosso Questionário de Avaliação das Atividades, as Questões 3 e 4. Começaremos pela Questão 3: "Em que medida e de que forma você considera que a utilização do GeoGebra contribuiu para a sua aprendizagem das propriedades e aplicações das derivadas?" Separamos algumas das respostas colhidas:

> Através do GeoGebra temos uma visão melhor do que acontece com a derivada. Através dos gráficos, podemos conhecer alguns pontos críticos da função. (PARTICIPANTE 1).

> Acredito que com a utilização do GeoGebra é mais fácil visualizar a teoria, de modo que torna-se mais real, mais palpável e facilita a compreensão do conceito. (PARTICIPANTE 3).
>
> O GeoGebra se torna uma ferramenta muito útil quando usado corretamente. O GeoGebra me auxiliou a enxergar melhor os conceitos de derivada, bem como reta tangente da função, continuidade no ponto, crescimento/decrescimento, máximos/mínimos e os pontos de inflexão. Fica mais fácil também para achar a equação da reta tangente, sem precisar fazer cálculos. (PARTICIPANTE 7).
>
> Acredito que contribuiu muito, principalmente na visualização da função e da reta tangente. Ajudou muito também para o curso não ficar só teoria já que é um curso muito difícil. Além disso uma função tem muitas propriedades e com o GeoGebra facilita a visualização. (PARTICIPANTE 9).

Nessas e em outras respostas é muito forte a presença do termo visualização; entretanto, salientamos que, em nenhum momento foi utilizado o termo visualização, enquanto teoria. Naturalmente as respostas conduziram a esse termo.

Em nosso entendimento, pelas associações que os participantes fizeram, a visualização proporcionada pelo GeoGebra pode ser interpretada nas seguintes dimensões:

- formação de imagens mentais e representações gráficas (VILLARREAL, 1999), destacada na visualização dos conceitos de derivada, continuidade, crescimento e decrescimento, máximos e mínimos de uma função;

- interpretação de imagens informações e construção de representações visuais (FROTA, 2013), destacada na visualização da "teoria" de modo a torná-la "palpável", facilitando a compreensão dos conceitos;

- raciocínio baseado no uso de imagens mentais (FLORES, 2012), destacada na visualização da reta tangente ao gráfico de uma função e a relação com sua expressão algébrica.

Passaremos à última questão do Questionário de Avaliação das Atividades, Questão 4: "A partir do desenvolvimento deste projeto, qual é a sua impressão final sobre a utilização do *software* no ensino de Cálculo?" A seguir, seguem algumas respostas apresentadas:

> Tive uma boa impressão com relação à utilização de *softwares* no ensino de Cálculo, principalmente por se tratar de uma matéria que muitas vezes não é vista com riqueza de detalhes no Ensino Médio, tornando-se muitas vezes de difícil compreensão para os alunos, então com a utilização de recursos computacionais torna-se menos abstrata, chama a atenção para os detalhes gráficos, consequentemente esclarece mais a teoria. (PARTICIPANTE 3).

> Finalmente, de forma mais genérica acredito que a utilização de *software* em sala de aula, quando utilizado de forma direcionada e específica ao ensino de um tema, contribui largamente para o ensino e a aprendizagem do aluno, pois além da abordagem do tema matemático de uma forma mais diferenciada, o uso do *software* contribui para que o aluno veja e encare o tema ensinado com algo mais fácil, acessível, palpável, e assim obtenha um entendimento maior e uma visão diferente do tema ensinado, algo que não seria possível sem o *software*. (PARTICIPANTE 4)

> É muito importante o uso de *software* no ensino de Cálculo, com eles podemos perceber e visualizar muito melhor as propriedades e aplicações dos conteúdos. (PARTICIPANTE 6).

> É muito interessante a utilização de *softwares* no aprendizado de Cálculo, nos ajuda a entender e ter uma visão mais ampla do que acontece na derivada. (PARTICIPANTE 8).

Com as anotações do diário de campo e as respostas obtidas nessas duas questões, temos evidências para crer que, de fato, a utilização do *software* GeoGebra no ensino de Cálculo e, em particular, no ensino de derivada tenha proporcionado e, ao mesmo tempo, facilitado a visualização dos conceitos e propriedades relacionados à derivada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Crescer como profissional, significa ir localizando-se no tempo e nas circunstâncias em que vivemos, para chegarmos a ser um ser verdadeiramente capaz de criar e transformar a realidade em conjunto com os nossos semelhantes, para o alcance de nossos objetivos como profissionais da Educação.
>
> Paulo Freire

Como forma de conclusão deste trabalho, propomo-nos agora, a elencar um conjunto de respostas à questão norteadora de nossa investigação:

Quais são as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra para a formação de imagens conceituais relacionadas ao conceito de Derivadas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção de gráficos?

Antes, porém, cabe ressaltar que acreditamos ter atingido nossos objetivos, especialmente agora, quando passamos a identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de gráficos.

1. A contribuição para a formação e o enriquecimento de imagens conceituais multivariadas relacionadas ao conceito de Derivadas

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias com a utilização de um *software* contribuiu para a formação e a lapidação de várias imagens conceituais relacionadas às derivadas, com destaque para as imagens algébrica e geométrica da derivada como inclinação da reta tangente num ponto, além das suas propriedades fundamentais na construção do gráfico de uma função.

Acreditamos que, em nossa prática docente, é fundamental trabalharmos com as várias representações da derivada, pois o conflito gerado entre as imagens construídas em sala de aula e no laboratório de informática contribui para um enriquecimento das imagens conceituais e pode levar ao estabelecimento de definições conceituais mais próximas das definições formais dos conceitos do Cálculo I.

2. A contribuição para a construção de conceitos a partir das atividades exploratórias com o GeoGebra

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias com o uso do GeoGebra contribuiu para a possibilidade de construção de novos conceitos associados à derivada no laboratório de informática, sem que esses conceitos tenham sido trabalhados em sala de aula, como foi o caso da apresentação das derivadas laterais de uma função.

Acreditamos que, em nossa prática docente, é fundamental estimularmos nossos alunos a pensarem em exemplos e contraexemplos nucleares no desenvolvimento dos conceitos do Cálculo I, pois assim eles podem se sentir mais estimulados ao raciocínio e a uma participação ativa que perpassa os limites do laboratório de informática e acaba se estendendo à sala de aula.

3. A contribuição para a aplicação dos conceitos de derivadas em problemas de Maximização e Minimização

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias de construção de gráficos contribuiu não só para o entendimento dos conceitos e propriedades das derivadas mas também valorou sua aplicação em problemas práticos envolvendo a própria Matemática e outras áreas do conhecimento, o que nem sempre é uma prioridade nas ementas tradicionais de disciplinas de Cálculo.

Acreditamos que as aplicações não só ressignificam os conceitos do Cálculo I, como também remetem a um resgate histórico das raízes do Cálculo Diferencial e Integral, cujo desenvolvimento inicial dos conceitos esteve atrelado a suas aplicações; do ponto de vista didático, os problemas de Maximização e Minimização também enriquecem as imagens conceituais formadas pelos alunos, por possibilitar a utilização dos conceitos e propriedades das derivadas.

4. A contribuição para a formação de um professor de Matemática que valorize a visualização proporcionada pelas TICEM

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática contribuiu para a formação inicial de um professor de Matemática que ao vivenciar, como discente, uma experiência que ressalta a importância da visualização, passe a valorizar seus diversos processos em sua futura prática docente.

Acreditamos que a utilização das TICEM tem um papel fundamental no fomento e desenvolvimento dos processos de visualização que, por sua vez, são imprescindíveis para a formação de imagens mentais e representações gráficas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I.

Por fim, gostaríamos de destacar, enquanto pesquisador, a importância das discussões ocorridas após a realização das atividades exploratórias. Elas foram fundamentais na promoção de uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, levando à ampliação das suas representações mentais e ao fortalecimento das suas imagens conceituais.

Ademais, queremos ressaltar a importância da realização de novas pesquisas dentro desta temática, talvez ampliando-as para outros conceitos do Cálculo, o que pretendemos fazer em futuras jornadas.

Referências

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Um estudo sobre a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva de David Tall. In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013. Disponível em: <sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1555_995_ID.pdf>. Acessado em: 31 de dezembro de 2013.

AMORIM, L. I. F. A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Tradução M. J. ALVAREZ, S. B. SANTOS e T. M. BAPTISTA. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. *Students understanding of transformation of functions using multirepresentational software.* Conell: Cornell University, 1993. 377 p. Tese (Doutorado em Educaçã) – Cornell University, 1993.

BORBA, M. C. GPIMEM e UNESP: extensão e ensino em informática e educação matemática. In: PENTEADO, M.; BORBA, M. C. (Orgs.) A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho D’Água, p. 47-66, 2000.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOYER, C.B. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, 2002.

CAMPOS, D. F. Análise de uma proposta para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I surgida na UFMG após o REUNI usando o testbench de Engeströn como modelo de aplicação da teoria da atividade em um estudo de caso. 176 f. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte: UFMG, 2012.

CONTADOR, P. R. M. Matemática, uma breve história. Vol. I. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

____________. Matemática, uma breve história. Vol. II. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

COSTA, C. “Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização”. In: Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 257-273, Coimbra, Portugal, 2002. Disponível em <*www.esev.ipv.pt/mat1Ciclo/.../CCosta_proc_mentais_visual.pdf*>. Acesso em 30/12/2013.

D’AMBRÓSIO, U. Uma História da Matemática no Brasil. Rio de Janeiro, Vozes, 2008.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B. Cálculo A. São Paulo: Makron Books, 2010;

FLORES, C. R. Pesquisa em visualização na Educação Matemática: conceitos, tendências e perspectivas. In: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L. Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 7-10, 2009.

FROTA, M. C. R. Investigações na sala de aula de Cálculo. In: Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, X, São Paulo, 2006. Anais... São Paulo: ANPED, 2006.

____________. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA, M. C. R.; CARVALHO, M. F. T.; BIANCHINI, B. L. (Orgs.) Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior. Campinas: Papirus, p. 61-88, 2013.

GERETI, L. C. V.; SAVIOLI, A. M. P. D. Pensamento Matemático Avançado: um estudo com questões de vestibular. In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013. Disponível em: sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/275_1476_ID.pdf. Acessado em: 31 de dezembro de 2013.

GIRALDO, Victor; CARVALHO, Luiz Mariano; TALL, David. Conflitos teórico-computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada. 2002. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf. Acessado em 21 de abril de 2014.

____________. Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada. 2002. Disponível em: http://sbmac.org.br/tema/seer/index.php/tema/article/view/405/341. Acessado em 21 de abril de 2014.

GIRALDO, Victor; CARVALHO, Luiz Mariano. Funções e Novas Tecnologias. 2002. Disponível em: http://sbmac.org.br/tema/seer/index.php/tema/article/view/429/365. Acessado em 2 de maio de 2014.

GONÇALVES, D. C. Gonçalves - Aplicações das Derivadas no Cálculo I: Atividades Investigativas utilizando o GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2012.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, 1998. Anais... Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: <lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF>. Acesso em: 03 de abril de 2010.

HANNA, G. Provas que provam e provas que explicam. In: *Proceedings of the Tentieth Conference of the Intenational Group for the Phychology of Mathematics Education*, vol II, p. 45-54. Paris, 1989.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: na Introductory Analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). Conceptual and Procedural Knowledge. Hills Dale: Erlbaum, 1986. cap. 1, p. 1-23.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 11-26, 2009.

LIMA, G.L. O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo. In: XII Encontro Brasileiro de Pesquisa em Educação Matemática, 2008. Anais... São Paulo: UNESP, 2008. Disponível em: <www2.rc.unesp.br/eventos/matemática/ebrapem2008/upload/57-1-A-gt10_lima_ta.pdf>. Acesso em: 12 de julho de 2013.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. In: Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 527-546, 2011. Disponível em: *<revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7057>*. Acesso em: 05 de novembro de 2013.

MELLO, J. C. C. B. S.; MELLO, M. H. C. S.; SILVA, A. J. Mudanças no Ensino de Cálculo I: histórico e perspectivas. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 29, 2001, Porto Alegre. Anais. Porto Alegre: Associação Brasileira de Educação em Engenharia, 2001.

MIORIM, M. A. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo, Atual, 1998.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de professores – mudanças urgentes na licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 169-187, 2009.

PENTEADO, M. Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: PENTEADO, M.; BORBA, M. C. (Orgs.) A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho D'Água, p. 23-34, 2000.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 81-98, 2009.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: um problema do Ensino Superior de Matemática? In: Encontro Nacional de Educação de Matemática, 8, 2004, Recife. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

ROCHA, M. D. Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2010.

SANTOS, I. N. Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2010.

SILVA, C. P. A Matemática no Brasil – História de seu desenvolvimento. São Paulo, Edgar Blucher, 2003.

SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1. São Paulo: Makron Books, 1987.

STEWART, J. Cálculo, Vol. I. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

TALL, D. O. A Transição para o Pensamento Matemático Avançado: funções, limites, infinito e prova. In.*: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan*, New York, p. 495-511, 1992. Trad. PINTO, M. M. F.

____________. *Intuition and rigor: the role of visualization in the Calculus.* In: ZIMMERMANN, W., CUNNINGHAM, S. *Visualization in teaching and learning Mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991. p. 105 – 119.

VILLARREAL, M. E. O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências Humanas e Sociais, Franca, 1999.

VINNER, S. O papel das definições no ensino e aprendizagem de Matemática. Tradução de Márcio Maria Fusaro Pinto e Jussara de Loiola Araújo. *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.* In: Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 1991.

ZUCHI, I. A integração de ambientes tecnológicos no ensino: uma perspectiva instrumental e colaborativa. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 239-252, 2009.

Apêndice 1: Atividade 1

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

MTM 212 – CÁLCULO I – 2012/2

Projeto: Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais

Professores: Frederico da Silva Reis e Márcio Augusto Gama Ricaldoni

<u>Atividade 1:</u> **Construindo gráficos de Funções Elementares e interpretando domínio, imagem, raízes, continuidade e limites infinitos.**

Objetivo: Identificar domínio, imagem, raízes, continuidade e limites infinitos de funções elementares a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;
2) A partir do gráfico construído, analise cada item, discutindo com seu colega!

Funções Elementares:

1) $f(x) = x$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

2) $f(x) = x^2$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

3) $f(x) = x^3$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

4) $f(x)=\frac{1}{x}$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=$

5) $f(x)=\sqrt{x}$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=$

6) $f(x)=|x|$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

7) $f(x) = e^x$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

8) $f(x) = \ln x$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

9) $f(x) = sen x$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

10) $f(x) = tg\,x$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

Apêndice 2: Atividade 2

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

MTM 212 – CÁLCULO I – 2012/2

Projeto: Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais

Professores: Frederico da Silva Reis e Márcio Augusto Gama Ricaldoni

<u>Atividade 2:</u> Construindo gráficos de Funções Polinomiais e de Retas Tangentes utilizando a derivada.

Objetivo: Identificar as propriedades de retas tangentes utilizando derivadas de funções polinomiais a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;
2) Calcule algebricamente a derivada;
3) Obtenha a equação da reta tangente nos pontos indicados;
4) Construa os gráficos das retas no GeoGebra;
5) A partir dos gráficos construídos, analise cada item, discutindo com seu colega!

a) Verifique se a reta é crescente, decrescente ou constante;
b) Relacione com o valor da derivada.

1) $f(x) = x^2$; $f'(x) =$ _____

x = 2 → t: ____

Análise: ____

x = 0 → t: ____

Análise: ____

x = −2 → t: ____

Análise: ____

2) $f(x) = x^3$; $f'(x) =$ _____

x = 1 → t: ____

Análise: ____

x = 0 → t: ____

Análise: ____

x = −1 → t: ____

Análise: ____

3) $f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) =$ _____

x = 1 → t: ____

Análise: ____

x = 0 → t: ____

Análise: ____

$x = -1 \rightarrow$ t: ____

Análise: ____

4) $f(x) = 2x$; $f'(x) =$ _____

$x = 1 \rightarrow$ t: ____

Análise: ____

$x = k \rightarrow$ t: ____

Análise: ____

Apêndice 3: Atividade 3

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

MTM 212 – CÁLCULO I – 2012/2

Projeto: Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais

Professores: Frederico da Silva Reis e Márcio Augusto Gama Ricaldoni

<u>Atividade 3:</u> Construindo gráficos de Funções Polinomiais e movimentando Retas Tangentes.

Objetivo: Identificar as propriedades de retas tangentes utilizando a ferramenta "Reta Tangente" de funções polinomiais a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;

2) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto";

3) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Reta Tangente";

4) Movimente o ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Mover";

5) Observe a equação da reta tangente na janela algébrica;

6) A partir dos gráficos construídos, descreva os valores de x para os quais a reta tangente é crescente, decrescente ou constante, discutindo com seu colega!

1) $f(x) = x^2$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

2) $f(x) = x^3$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

3) $f(x) = x^3 - 3x$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

4) $f(x) = 2x$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

Apêndice 4: Atividade 4

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

MTM 212 – CÁLCULO I – 2012/2

Projeto: Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais

Professores: Frederico da Silva Reis e Márcio Augusto Gama Ricaldoni

<u>Atividade 4:</u> Construindo gráficos de Funções Contínuas e movimentando Retas Tangentes, relacionando com as Derivadas Laterais.

Objetivo: Identificar as derivadas laterais de funções contínuas utilizando a ferramenta "Reta Tangente" a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;

2) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto";

3) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Reta Tangente";

4) Movimente o ponto selecionado à direita e à esquerda do ponto fixado, utilizando a ferramenta "Mover";

5) Observe a equação da reta tangente na janela algébrica;

6) A partir dos gráficos construídos, descreva os valores das derivadas laterais e conclua se a função é derivável no ponto fixado, discutindo com seu colega!

1) $f(x) = x^2$; $x = 0$

$f'_{+}(0) =$__________

$f'_{-}(0) =$__________

$f'(0) =$ ___________

2) $f(x) = |x|$; $x = 0$

$f'_{+}(0) =$__________

$f'_{-}(0) =$__________

$f'(0) =$ ___________

3) $f(x) = x^3$; $x = 0$

$f'_{+}(0) =$__________

$f'_{-}(0) =$__________

$f'(0) =$ ___________

4) $f(x) = \begin{cases} 4, \ se \ x \leq 2 \\ x^2, \ se \ x > 2 \end{cases}$; $x = 2$

$f'_{+}(2) =$__________

$f'_{-}(2) =$__________

$f'(2) =$ ___________

Apêndice 5: Atividade 5

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

MTM 212 – CÁLCULO I – 2012/2

Projeto: Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais

Professores: Frederico da Silva Reis e Márcio Augusto Gama Ricaldoni

Atividade 5: Problemas de Maximização e Minimização.

Objetivo: Identificar os extremos de funções deriváveis utilizando a ferramenta "Reta Tangente" a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Leia atentamente o problema proposto para o seu grupo e anote as variáveis envolvidas;

2) Expresse algebricamente a função que modela matematicamente o problema e seu domínio de definição;

3) Construa o gráfico da função modelada no GeoGebra;

4) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto";

5) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Reta Tangente";

6) Movimente o ponto selecionado ao longo da curva, utilizando a ferramenta "Mover";

7) A partir do gráfico construído, descreva o ponto de máximo (ou mínimo) e o valor máximo (ou mínimo) da função, de acordo com o problema proposto, discutindo com seus colegas!

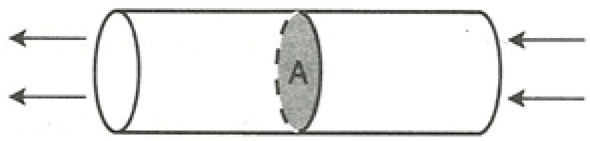
8) Anote a equação da reta tangente que aparece na janela algébrica;

9) Utilizando as derivadas primeira e segunda, verifique algebricamente os resultados obtidos no GeoGebra.

10) Apresente o problema e sua solução para seus colegas de sala!

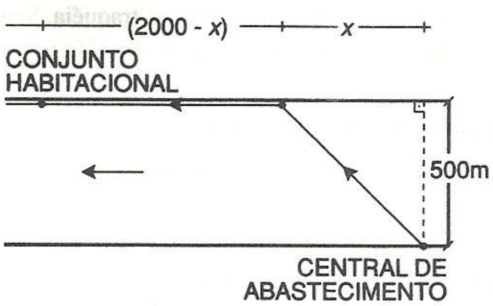
PROBLEMAS PROPOSTOS (FLEMMING e GONÇALVES, 2006)

1) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traqueia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traqueia. Quando tossimos, o raio diminui, afetando a velocidade do ar na traqueia. Sendo r_0 o raio normal da traqueia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traqueia durante a tosse é dada por $V(r) = a \cdot r^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva.

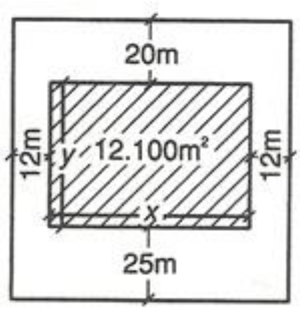


Supondo $r_0 = 1$ cm e $a = 3\ l/cm^5.s$. Calcule o valor de r para o qual teremos o maior fluxo possível.

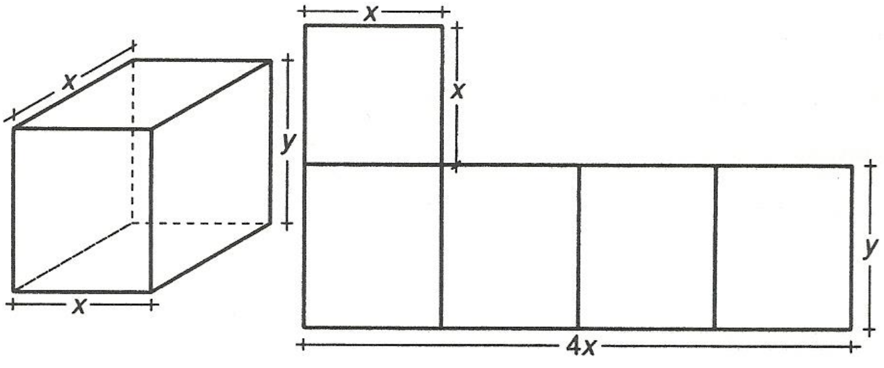
2) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada na margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de 640 milhares de reais por quilômetro, enquanto em terra, custa 312 milhares e reais por quilômetro. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?



3) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m^2. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25m da frente, 20 m atrás e 12 m de cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.



4) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500 m^3. O material da base vai custar R\$ 1.200,00 por m^2 e o material dos lados R\$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.



5) Suponha que o custo total $C(q)$ de produção de toneladas de um produto, em milhares de reais, é dado por $C(q) = 0{,}03q^3 - 1{,}8q^2 + 39q$. Supondo que a empresa possa vender tudo que produz, determine o lucro máximo que pode se obtido, se cada tonelada do produto é vendida a um preço de 21 milhares de reais.

Apêndice 6: Questionário Final

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

MTM 212 – CÁLCULO I – 2012/2

Projeto: Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais

Professores: Frederico da Silva Reis e Márcio Augusto Gama Ricaldoni

<u>Questionário Final:</u> Imagens Conceituais relacionadas a Derivadas.

Objetivo: Identificar as principais imagens conceituais relacionadas a derivadas formadas a partir da construção de gráficos no GeoGebra.

1) Após a realização das atividades com o uso do GeoGebra, quais são as principais ideias e/ou representações (algébricas, geométricas, físicas, etc), que você associa ao conceito de derivada? (Você pode utilizar representações gráficas em sua resposta!)

2) Se você tivesse que explicar a um colega, o que é a derivada de uma função real de uma variável, como o faria, utilizando suas próprias palavras?

3) Em que medida e de que forma você considera que a utilização do GeoGebra contribuiu para a sua aprendizagem das propriedades e aplicações das derivadas?

4) A partir do desenvolvimento deste projeto, qual é a sua impressão final sobre a utilização de *softwares* no ensino de Cálculo?

Muito obrigado por sua participação no projeto!