Universidade Federal de Ouro Preto

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

ATIVIDADES COMPUTACIONAIS PARA O CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

MARCOS DIAS DA ROCHA

Ouro Preto, 2010

Caro(a) colega professor,

O ensino e aprendizagem de Cálculo têm preocupado, há décadas, professores e pesquisadores em várias partes do mundo. Em nosso país, são significativos os índices de reprovação e evasão nessa disciplina nos mais diversos cursos e universidades. Por outro lado, inúmeros estudos têm proposto alternativas para buscando a melhora no processo de ensino-aprendizagem. Dentre elas, destaca-se a utilização de softwares educacionais e uma maior exploração do papel da visualização na construção dos conceitos.

Este livreto é fruto de um estudo que realizei em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I na Universidade Federal de Ouro Preto utilizando o software GeoGebra. Os resultados mostraram que as atividades realizadas no laboratório contribuíram para a discussão e compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral. A articulação entre a visualização e manipulação facilitadas pelo software mostrou-se um dos aspectos centrais desse trabalho.

Apresento, então, uma proposta de ensino com algumas ideias formuladas a partir da experiência que vivenciamos. As atividades que proponho são resultado de pesquisa em livros de Cálculo e em ampla literatura que apresenta propostas também testadas em diversas instituições de ensino. As atividades na íntegra contém algumas correções feitas a partir da aplicação das mesmas. Elas servem como uma primeira ideia para que você possa adaptá-las e/ou criar outras que sejam mais adequadas às suas necessidades.

Espero que esta proposta possa trazer contribuições para nossas aulas de Cálculo.

Um grande abraço,

Marcos

Introdução

Em muitas universidades do país e do exterior, essa é uma das disciplinas cujos índices de reprovação, evasão e repetência são elevados (BARUFI, 1999; NASSER, 2007; REZENDE, 2003). Rezende (2003) afirma que o "fracasso no ensino de Cálculo" é um dos grandes desafios no ensino de Matemática no nível superior. Segundo este autor, as dificuldades começaram a partir do momento em que o Cálculo começou a ser ensinado. Ele apresenta dados que evidenciam os altos índices de não aprovação na Universidade Federal Fluminense (UFF). Barufi (1999) também aponta, em sua tese de doutorado, os altos índices de reprovação nessa disciplina na Universidade de São Paulo (USP).

Na Pontifícia Universidade Católica (PUC-MG), os índices de reprovação em Cálculo giravam em torno de 47% nas turmas de Engenharia, no período em que Lachini (2001) fez sua pesquisa.

Na UFOP, relatórios da Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD) apontam este problema e outros aspectos que devem ser considerados:

> O primeiro período letivo coincide com o momento em que os estudantes estão se adaptando à Universidade, à cidade, moradias estudantis, etc. Sendo assim, o desempenho acadêmico nas disciplinas neste contexto deve ser analisado à luz de diversos fatores que podem influenciar no sucesso ou no insucesso. [...] Das informações disponibilizadas merecem destaque os índices de reprovações, que variam conforme o curso e disciplinas. Há cursos em que as reprovações nas disciplinas do primeiro período quase não existem (Artes Cênicas e Turismo) e outros em que as reprovações são mais elevadas, em especial nas disciplinas de Matemática dos cursos de Engenharia (PROGRAD-UFOP)[1].

No relatório citado (relativo aos semestres de 2005/2 e 2006/1), os índices de reprovação na UFOP nas disciplinas de Cálculo 1, nas turmas de Engenharia, variavam de 40% a 50% e alcançaram 85% na turma de Engenharia de Minas, no segundo semestre de 2005.

Este não é um problema exclusivo do Brasil, ele se repete há muitos anos também no exterior. Rezende (2003) cita o *Calculus's Reform,* movimento internacional organizado na década de 80, que procurou reformar o ensino de Cálculo, principalmente com a adoção de tecnologias. Este quadro tem preocupado não apenas pela reprovação, mas também pela dificuldade em fazer com que os alunos aprendam adequadamente os conceitos e procedimentos do cálculo.

Os estudos acerca da aprendizagem de Cálculo têm trazido vários olhares para subsidiar a discussão acerca dos problemas no processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina.

[1] Disponível em: < http://www.prograd.ufop.br/Downloads/Formulario/RelatorioProgramaMelhoria-2005-2-a-2006-2.pdf>. Acessado em 15 de Janeiro de 2009.

Frota (2006, p. 2) aponta que “a sala de aula de Cálculo tem sido afetada por fatores decorrentes, em parte, de um ensino universitário de massa: excessivo número de alunos, grande parte deles desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica”.

Os professores entrevistados no trabalho de Barbosa (2004, p. 73) também incluem os alunos entre os responsáveis pelo insucesso em Cálculo pela imaturidade, descompromisso e, principalmente, pela falta de pré-requisitos. Lachini (2001) em seu estudo, já ressaltava aspectos semelhantes. Segundo ele, as explicações para o insucesso

> vão desde o despreparo do aluno e a incompetência de professores até fatores institucionais, política implementada pelo governo e dependência do capital internacional. **Sem perder de vista o contexto em que a escola está inserida, bem como os múltiplos fatores intervenientes na ação pedagógica, o pressuposto [...] é que, tanto o sucesso quanto o insucesso podem ser explicados também nas relações instituídas por professores e alunos em torno do trabalho com o conteúdo de Cálculo** (p. 149, grifos do autor).

Em sua pesquisa, o autor sugeria dois aspectos como principais: a falta de dedicação dos alunos (“[...] 48% dos alunos [pesquisados][...] não dedicam ao estudo de Cálculo I o mínimo de tempo necessário [menos de 3 horas semanais] para a incorporação deste capital”) (LACHINI, 2001, p. 162); e o outro é que “44% dos alunos entrevistados responderam ter tido no máximo duas dúvidas ao estudar Cálculo depois de 2 meses de aula” (p. 170).

Para Rezende (2003), grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo tem natureza epistemológica. Em sua tese de doutorado, o autor identificou cinco macroespaços de dificuldade de natureza epistemológica na disciplina de Cálculo. Segundo ele, esses macroespaços emergem das cinco dualidades fundamentais do Cálculo e seu ensino: *discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.* Dessa forma

> “a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo (REZENDE, 2003, p. 331).

Nasser (2007) destaca o que considera as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos de Cálculo:

- Falta de conhecimentos prévios.
- Dificuldades relacionadas ao raciocínio lógico:

  A natureza da matemática do ensino superior exige dos alunos a capacidade de utilizar argumentos lógicos para provar afirmativas. Para ela, essas dificuldades são provenientes de uma falta de experiências prévias.

  Ela acrescenta que

> O tipo de trabalho desenvolvido nas salas de aula e a orientação dos livros didáticos não propiciam em geral o desenvolvimento, nos alunos de nível fundamental e médio, da capacidade de expressar e comunicar ideias ou justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de tarefas. Consequentemente, eles não se familiarizam com o raciocínio lógico-dedutivo e, em particular, com as demonstrações (NASSER, 2007, p. 3).

- Dificuldades no traçado de gráficos e sua análise:

> Observamos que o traçado de gráficos constituía um obstáculo para o progresso desses alunos na aprendizagem de cálculo. De acordo com os pesquisadores [...], esse obstáculo é de natureza didática, consequência da ausência de um trabalho prévio com o traçado e a análise de gráficos no ensino médio, gerando uma insegurança nos primeiros períodos do curso superior. Também observamos que os alunos não procuravam raciocinar sobre gráficos básicos do mesmo tipo. Por exemplo, se a função é do 1º grau, seu gráfico deve ser uma reta e se a variável aparece elevada ao quadrado, o gráfico deve ser uma parábola (NASSER, 2007, p. 7).

A reprovação ajudou a chamar a atenção dos pesquisadores para as dificuldades dos alunos. Sendo assim, antes da criação de qualquer proposta de intervenção para o Cálculo, faz-se necessário ao professor refletir sobre os estudos a respeito do processo de ensino-aprendizagem.

É possível destacar que, dentre as razões apontadas para o problema, dois pontos: a deficiência de conhecimentos/habilidades básicas dos alunos e a forma como o professor conduz o processo de ensino-aprendizagem. O quadro apresentado até aqui mostra que a questão é complexa. Contudo, nosso intuito não é simplesmente resolver o problema da reprovação, entendemos, sim, que é preciso construir um tipo de conhecimento de Cálculo que contemple tanto os aspectos procedimentais, quanto os conceituais.

O que fazer para alterar essa situação?

Os pesquisadores acenam com algumas possibilidades de contribuição para um ensino de Cálculo que alcance os objetivos esperados. Podemos destacar, baseados em nossa revisão bibliográfica, a modelagem matemática, o uso da história e a informática como algumas dessas perspectivas/possibilidades de abordagem do Cálculo. Alertam, também, para a rotina das aulas e a relação professor-aluno como pontos que precisam ser revistos para a efetivação das propostas.

Como nosso objetivo é a criação de uma proposta que altera o ambiente da sala de aula, faz-se necessário a construção de uma nova dinâmica. É preciso passar de uma organização em que o professor é o centro, para uma em que os alunos interagem com os outros alunos, o professor e as mídias para que o conhecimento possa ser construído. Sendo assim, a busca por uma melhora no ensino de Cálculo passa também pela mudança nas relações entre professor, aluno e conteúdo.

Nesse sentido, dentre as alternativas sugeridas pela literatura e inspirados por nossa experiência docente, escolhemos o uso de softwares educacionais para estruturar um ambiente de aprendizagem no qual a construção dos conceitos de limite, derivada e integral fosse potencializada.

Entendemos a aprendizagem como um processo que envolve a interação entre o indivíduo e o ambiente (outros indivíduos e os objetos). Além disso, quando pensamos na produção de conhecimento, vamos considerar o humano e o não humano como um coletivo, e é na relação entre esse coletivo que o conhecimento é produzido. Apoiamos-nos, dessa forma, na noção dos seres-humanos-com-mídias apresentada em Borba e Villarreal (2005) e Borba e Penteado (2001, 2002), ou seja, na perspectiva de que o processo de produção de conhecimento surge na relação entre tecnologias e seres humanos. Assim, entendemos que o pensamento se dá "*com*" as mídias, existe uma unidade entre o homem e as tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática, cf. LÉVY, 1993).

No sentido de que o conhecimento emerge no diálogo, na comunicação, nas explicações e nas explorações, o laboratório deve ser um ambiente que possibilite a interação entre os alunos, professor/pesquisador e as mídias (papel, lápis, calculadoras, computador, etc.). Nas atividades propostas, procuramos acrescentar itens que trouxessem as explicações dos alunos para as questões investigadas. Ao aluno procuramos dar liberdade para participar, experimentar, testar, questionar, interagir, conjecturar, errar, simular, enfim, ter papel ativo no processo.

Acreditamos que o professor propõe os desafios e experimentações, mas nesse tipo de ambiente não há rigidez nos papéis, todos podem descobrir novas possibilidades. Os alunos também podem propor novas questões a partir da manipulação e experimentação, cabendo ao professor aproveitar as conjecturas para uma discussão com o restante dos participantes.

Nesse sentido, a perspectiva dos seres-humanos-com-mídia apresentada por Borba e Villarreal (2005) integra nossa concepção de trabalho no laboratório. Pois, neste ambiente, entendemos que o conhecimento é produzido quando as diferentes mídias são utilizadas (BORBA e PENTEADO, 2001). As atividades no laboratório foram planejadas procurando uma coerência com essas perspectivas.

Na pesquisa que realizamos entendemos o *ambiente informatizado* como sendo o laboratório de informática, onde as diferentes mídias (cadernos, lápis, calculadoras e, principalmente, o computador com *software* de matemática dinâmica) e os seres humanos (alunos, pesquisador, monitora) interagem como um coletivo pensante modificando a Matemática produzida.

Os aspectos visuais são potencializados pela presença do *software* no coletivo. A visualização foi explorada por entendermos que a imagem, como afirma Guzmán (2002, p. 11, tradução nossa), "é uma influência estimulante para o surgimento de problemas interessantes em diferentes sentidos". Concordamos com este autor entendendo que a visualização não é uma visão instantânea das relações, "mas antes uma interpretação do que é apresentado à nossa contemplação que só podemos fazer quando tivermos aprendido a ler adequadamente o tipo de comunicação que nos oferece" (GUZMÁN, 2002, p. 4). Logo, há diferentes interpretações do sujeito sobre o que é visualizado ao manipular um objeto no computador, dependendo de seu arcabouço cultural usado no processo de codificação/decodificação.

O *software* GeoGebra contribui nesse processo de visualização. Ele foi utilizado, dentre outros fatores, por agregar as características de manipulação, interatividade e simulação, além de permitir trabalhar com as diferentes representações (gráfica, analítica e tabular). Ele se apresentou como adequado para os propósitos de nossa investigação e, portanto, as atividades foram elaboradas buscando explorar seus recursos, além de permitir que os alunos pudessem fazer as experimentações e justificassem as interpretações a partir da visualização.

Nas atividades procuramos trazer situações em que as abordagens algébrica e visual (VILLARREAL, 1999) pudessem ser utilizadas. Contudo, elaboramos questões nas quais o computador pudesse ser utilizado para testar conjecturas e tomar decisões a partir da análise e manipulação das representações. O *software* teve um papel importante como tecnologia que possibilitou a realização de explorações visuais dinâmicas que seriam usadas para buscar uma compreensão ligada aos conceitos.

As atividades compõem a proposta de ensino que articula a visualização e a experimentação num ambiente onde o *coletivo pensante* negocia significados buscando compreender os conceitos de limites, derivadas e integrais. Os conceitos foram abordados à partir das suas múltiplas representações exploradas no GeoGebra.

Apresentando o contexto no qual a proposta foi realizada

A proposta, aqui apresentada, foi realizada em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I na Universidade Federal de Ouro Preto no primeiro semestre de 2009. Escolhemos essa turma por que o professor regente se dispôs a apoiar a pesquisa cedendo um espaço durante suas aulas para o desenvolvimento das atividades e discutindo a elaboração das mesmas, em alguns momentos.

A turma foi aberta para atender à demanda de um grande número de alunos que haviam sido reprovados na disciplina. Portanto, era composta exclusivamente por alunos repetentes, característica essa que se tornou outra variável para a análise dos dados.

Inicialmente, havia 55 alunos matriculados, porém, cinco desistiram. Dessa forma, o convite foi feito aos 50 alunos frequentes. Foram acompanhadas (ao todo) 48 aulas ministradas pelo professor em sala de aula e realizadas 10 atividades no laboratório. A disciplina era dividida em 6 aulas semanais, sendo 3 aulas na terça-feira e 3 aulas na quinta-feira, sempre no horário de 15:20 às 17:50 horas. Nos dias em que ocorriam atividades no laboratório, o professor terminava a aula às 17 horas (correspondendo à duas aulas) e os últimos cinquenta minutos eram reservados ao laboratório (uma aula). As atividades no laboratório foram desenvolvidas em duplas ou trios, dependendo da quantidade de alunos e disponibilidade de máquinas em cada dia.

A seguir, apresentamos cada atividade realizada, descrevendo-a com detalhes.

ATIVIDADE 1: CONHECENDO O GEOGEBRA

Objetivos

- Apresentar o *software* GeoGebra, sua interface e possibilidades de uso.
- Familiarizar os alunos com os principais comandos deste *software* como marcar, renomear, colorir e modificar pontos, retas, segmentos, dentre outros.

O que é o *GeoGebra?*

GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria.

Por um lado, *GeoGebra* é um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções geométricas tanto com pontos, vetores, segmentos, retas e secções cônicas, como com funções que podem ser modificadas dinamicamente. Por outro, pode-se inserir equações e coordenadas diretamente. Assim, no *GeoGebra* podemos trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos, determinar derivadas e integrais de funções e oferece um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes ou extremos. Estas duas perspectivas caracterizam o *GeoGebra*: uma expressão na *janela algébrica* (localizada à esquerda da tela) corresponde-se com um objeto na *janela de desenho* ou *janela de gráficos* (localizada à direita da tela) e vice-versa.

Abrindo o GeoGebra

- Para acessar a versão *on-line*[2] vá até o endereço **www.geogebra.org**. Depois clique em ***Iniciar GeoGebra***. Então clique no botão GeoGebra WebStart.

Primeiros comandos:

- Zoom: Para aumentar ou diminuir a imagem, podem ser utilizados os botões  e  localizados no sub-menu vertical do botão  (Basta clicar na setinha no canto inferior direito do botão). Outra opção é utilizar, quando disponível, o botão de *scroll* de alguns modelos de mouse (rodinha usada para rolar a tela).
- Arrastar uma figura ou os eixos: Clique no botão  e depois clique sobre a *Janela de desenho*, segure e arraste para a posição desejada na janela.
- No menu *Exibir* você tem a opção de visualizar ou ocultar os eixos coordenados e malha quadriculada.
- O atalho **Crtl + Z** desfaz a última construção.
- Para entrar comandos usamos a *Caixa de Entrada de Comandos*, localizada na parte inferior da tela.

OBS.: 1) Em nossas atividades os comandos estarão escritos em negrito. É necessário digitar o comando exatamente da forma que está escrito no roteiro.

- Quando queremos inserir um texto na tela, basta digitá-lo na caixa de comando entre aspas.

MARCAR PONTOS:

1º modo) Clicando no botão  e depois clicando na janela de construção. Quando você clica na tela o software associa um nome aos pontos marcados seguindo a ordem alfabética.

2º modo) Na entrada de comandos, definindo ou não um nome.

[2] *Abre a versão mais recente do programa.*

Exemplos:

Abra uma nova janela.
Habilite no menu *Exibir* Malha. Digite na caixa de comando as coordenadas abaixo apertando a tecla *Enter* do teclado após cada ponto digitado

(2,5)	**(3,-6)**	**T = (-4,4)**
U = (-sqrt(7),-sqrt(8))	**P = (x(A),y(B))**	**C=(-3,4)**

Note que o *software* nomeia o primeiro ponto digitado de A, caso não seja especificado, e os próximos usando a ordem alfabética.

CONSTRUIR RETAS:

1º modo) De forma direta com o mouse: no menu de comandos, clique no botão  (comando "***Reta definida por dois pontos***") e depois clique em dois pontos (A e B) na janela de construção.

2º modo) Na entrada de comandos: digitando o comando **reta[,]** e dentro do colchetes definir em quais dois pontos passam a reta, entre os pontos se faz o uso de vírgula, definindo ou não um nome prévio para ela;

Exemplos:

Digite: **reta[P,T]**
Ou então, você pode nomear a reta escrevendo o nome e colocando igual: **s=reta[A,U]**
Obs.: Observe que o *software* apresenta na Janela de Álgebra as equações das retas.

3º modo) Inserindo a equação da reta na forma geral, reduzida ou paramétrica na entrada de comandos;

Exemplos:

Digite:	***y = 2x + 4***	*e clique em ENTER.*
Digite:	**3x+2y-5=0**	*e clique em ENTER.*

CONSTRUIR SEGMENTOS:

1º modo) De forma direta com o mouse: Barra de comandos, clique na seta na parte inferior direita do botão , depois clique em  (comando "***Segmento definido por dois pontos***"). Agora basta clicar em dois pontos na tela ou na tela em branco para ir definindo novos pontos para os extremos do segmento.

2º modo) De forma direta com o mouse: Barra de comandos, clique na seta na parte inferior direita do botão , depois clique em  (terceiro botão, comando "***Segmento com dado comprimento a partir de um ponto***". Agora basta clicar em dois pontos na tela ou na tela em branco.

3º modo) Na caixa de entrada de comandos: digitando **segmento[,]** e dentro do colchetes definir por quais pontos o segmento tem seus extremos, definindo ou não um nome prévio para ele.

Exemplo:

Clique no menu *arquivo* no item *novo* para limpar a janela.
Defina os pontos **P=(0,0)** e **Q=(-4,sqrt(3)).** Agora digite: **segmento[P,Q]**
Repare que o GeoGebra ira nomear o segmento e apresentar na Janela de Álgebra o seu comprimento.

4º modo) Na entrada de comandos: digitando o comando **segmento[,]** e dentro do colchetes definir um ponto e um número no qual dista o outro extremo do segmento, definindo ou não um nome prévio para ele.

Exemplo:

Digite: **segmento[P,5]**

PONTO MÉDIO OU CENTRO DE UM DADO SEGMENTO:

1º modo) De forma direta com o mouse: Menu de comandos, clique no canto do botão  para abrir o sub-menu, e depois no botão  (comando "***Ponto médio ou centro***"). Basta clicar nos dois pontos.

2º modo) Na entrada de comandos: digitando o comando **pontomédio[,]** e dentro do colchetes definir os dois pontos para o programa calcular e marcar o ponto médio.

3º modo) Na entrada de comandos: digitando o comando **pontomédio[ ]** e o nome do segmento dentro do colchetes.

Exemplo:

Digite: **pontomédio[P,Q]**

Observações: Se você clicar com o botão direito do mouse sobre um ponto, segmento, reta, circunferência ou qualquer outra construção, vai aparecer um menu com opções de *renomear* o objeto, *ocultar, apagar, habilitar rastro* e ainda a o sub-menu *propriedades* onde é possível mudar as características do desenho (ex.: cor, estilo, tracejado dentre outras funções).

INSERINDO FUNÇÕES:

- Na entrada de comandos: digitando diretamente a função, usando ***x*** como variável, podendo dar um nome prévio ou não a função;
- Na entrada de comandos: digitando o comando **função[ ]**, e dentro do colchetes, uma função usando x como variável independente;
- Na entrada de comandos: digitando o comando **função[, ,]**, e dentro do colchetes, inserindo uma função usando x como variável independente antes da primeira vírgula, e os dois próximos argumentos números que vão definir qual é o intervalo de representação da função;

Exemplos:

Limpe a tela.

Digite na caixa de entrada de comandos as funções:

FUNÇÕES	COMANDOS
f(x) = 4	***f(x) = 4***
g(x) = x^2	***g(x) = x^2*** *ou* ***g(x) = x^2***
h(x) = $\frac{sen(x)}{x}$	***h(x) = sin(x) / x***
Soma das funções f e g	***j(x) = f(x) + g(x)***
Composta de h por g	***t(x) = h(g(x))***
o(x) = x³ – 1 , x pertencente ao intervalo -1 à 1 Comando: **função[f(x), x_{min}, x_{max}]**	***o(x)=função[x^3-1,-1,1]***

Comentários:

Na primeira atividade, buscamos apresentar os principais comandos do *software* que seriam utilizados. Esta atividade[3] se assemelha a muitos tutoriais que podem ser encontrados em diversas páginas da internet (incluindo o próprio site do GeoGebra que está traduzido em vários idiomas). Procuramos fazer desse momento inicial uma investigação das funções básicas do GeoGebra de forma rápida e aplicada. Neste sentido, os conceitos matemáticos iriam sendo relembrados à medida que o *software* fosse explorado, pois, a falta de conhecimentos prévios é sempre destacada por vários autores (ex: LACHINI, 2001; FROTA, 2002; NASSER, 2007).

É importante lembrar que as atividades no laboratório eram precedidas por uma aula teórica (entendida aqui como uma aula dada pelo professor responsável da disciplina). Neste dia, o professor abordou a regra da cadeia para derivar funções compostas. A atividade a ser realizada no laboratório não foi preparada tendo em vista esse tópico, contudo, em outros momentos, procuramos trabalhar exatamente os conceitos desenvolvidos em sala de modo a favorecer a compreensão dos mesmos.

Os alunos, em geral, não apresentaram grandes dificuldades com os comandos do *software*, acarretando inclusive que alguns (em torno de 30) terminaram antes do final da aula. Houve o relato de um dos alunos (do curso de Ciências da Computação) que, como já havia usado o *software Matlab*, teve facilidade na aplicação dos comandos no GeoGebra. Outros, que também terminaram rapidamente o roteiro, ficaram construindo outros gráficos, experimentando expressões diferentes daquelas solicitadas no roteiro.

Essa facilidade apresentada pelos alunos quanto à manipulação do *software*, por um lado era esperada devido à forma intuitiva com que o programa foi projetado. Neste aspecto ele é difere de alguns *software*s de manipulação simbólica (*Matlab*, por exemplo) nos quais para alterar o gráfico são necessárias a utilização de diferentes comandos. No GeoGebra pode-se alterar a espessura da curva (que representa uma função) utilizando um *menu* acessível ao clicar com o botão direito do *mouse* sobre alguma de suas representações (fórmula ou gráfico). São recursos muito parecidos aos utilizados no ambiente *Windows* que é um sistema operacional presente na maioria dos computadores domésticos.

Outra questão que merece atenção foi o fato de os alunos extrapolarem o roteiro, ou seja, foram além do que lhes havia sido solicitado. Isso é comum em atividades no laboratório de informática. Quanto às explorações extras, os alunos acabam trazendo para as atividades outras questões não previstas pelo professor. Mesmo nesta atividade, duas duplas introduziram funções que não apareceram na janela. O motivo foi o valor mínimo ser maior do que o que poderia ser mostrado na janela naquele momento. Eles questionaram por que o *software* não fez o gráfico. Coube ao pesquisador/monitor, analisar e tentar descobrir, junto com a dupla, a causa.

Esse tipo de situação poderia parecer inconveniente naquele momento, pois desvia a atenção do professor a uma tarefa não pedida ocasionando uma demora em atender outras duplas. Entretanto, surgem questões que podem ser usadas para enriquecer o momento.

[3] A atividade completa está disponível no apêndice 1.

Em relação ao roteiro, um problema verificado nesta primeira atividade foi que registramos os comandos que os alunos deveriam digitar entre aspas. Mas, mesmo tendo sido explicado no quadro, alguns alunos não entenderam/perceberam e acabaram digitando também as aspas. Neste caso, tudo o que é digitado entre aspas no GeoGebra é lido como texto e, portanto, é impresso na tela e não executado. Nas atividades seguintes corrigimos este problema colocando os comandos apenas em negrito.

Uma potencialidade de ambientes computacionais na exploração de funções é a possibilidade de alterar o nível de *zoom* na visualização das representações gráficas. Ampliar ou reduzir uma parte do desenho de uma curva é fundamental quando precisamos visualizar o comportamento de uma função num intervalo pequeno ou ter uma visão geral do comportamento para valores grandes da função. Um problema que encontramos, foi que alguns computadores tinham um *hardware* (processador e memória) muito limitado, mesmo para o GeoGebra, que necessita de configurações mais leves. Algumas duplas, quando precisaram utilizar o *zoom*, que no caso do GeoGebra poderia ser feito utilizando o menu do programa ou o botão *scroll* do *mouse*[4] (quando ele tinha este recurso disponível), tiveram dificuldades. Quando o computador era lento o aluno aplicava o *zoom* e a resposta demorava a aparecer na tela. E, quando realmente executava o comando, outros já haviam sido dados e atrapalhavam a sequência da atividade. Com o decorrer das atividades seguintes percebemos que os alunos se acostumaram ao tempo das máquinas mais lentas e começaram a esperar os comandos serem executados para aplicar os próximos.

Apesar de esta atividade objetivar apenas o trabalho com a entrada de funções, pontos e retas, muitos alunos se sentiram à vontade para explorar outros comandos do *software*. No final, os alunos se mostraram muito interessados e motivados com esses primeiros recursos do GeoGebra.

DICAS:

- ***É importante que o professor se familiarize com o GeoGebra e os comando antes de propor a atividade.***
- ***Verifique no laboratório com antecedência se todos se os computadores possuem acesso a internet e se não há restrições para abrir o GeoGebra on-line. Lembre-se que*** **o GeoGebra requer o** ***plugin*** **Java JRE instalado previamente (*plugin* disponível no site www.java.com).**

[4] Roda que alguns *mouses* possuem que pode ser utilizado para rolar a tela e/ou alterar o *zoom* em alguns programas.

ATIVIDADE 2

Objetivos

- Aprender a criar e utilizar seletores, deslocamento de funções através de seletores, etc.
- Visualizar o deslocamento da reta tangente a uma curva.

Criando seletores:

1º) Clique no botão  e depois clique na tela branca. A tela que abre permite ajustar as configurações de seu seletor/parâmetro. Clique no botão "Aplicar". Certifique-se que o nome associado ao seletor é a letra "a".
2º) Na caixa de entrada de comandos (localizada na parte inferior da tela), digite: **A=(a, a^2)**.
3º) Desabilitando a opção de criação de seletores: Clique no botão mover:  (Observação: Se você continuar clicando na tela com a opção de "seletor" habilitada, o software vai continuar a criar outros seletores).
4º) **Clique** e **arraste** o ponto localizado na barra do seletor e verifique o que acontece com o ponto A.
5º) Agora clique com o botão direito do mouse no ponto **A** e clique em habilitar/exibir rastro/traço.
6º) Novamente, clique, segure e arraste o ponto do seletor e verifique o que está acontecendo.

Explorações

Dica: Quando a escala não estiver adequada, podemos clicar no botão  e, em seguida, na tela branca com o botão direito do mouse e clicar em "Visualização padrão".

1. Abra uma nova janela: Vá no menu "Arquivo" e clique em "Nova Janela".

1º) Crie 2 seletores e nomeie-os de a e b.
2º) Construa o gráfico da função $f(x) = x\sqrt{3-x}$. Para isso digite na barra de entrada de comando: **f(x)=x*sqrt(3-x)**
3º) Digite na caixa de entrada de comandos: **f(x)+a** e **f(x+b)**.
4º) Mova o ponto do seletor para variar os valores de a e b dos seletores e verifique o que acontece com as funções.
5º) E se você escrever a função $|f(x)|$, o que acontece com o gráfico? Faça no GeoGebra usando o comando **abs(f(x)).** (Dica: modifique a cor e o estilo de traço da função)

2. Visualização da reta tangente à uma curva:

1º) Abra uma nova janela e defina a função f(x)=x²+3x-5. Digite: **f(x)=x^2+3x-5**
Caso julgue necessário, ajuste o zoom da tela para melhor visualizar o gráfico.

2º) Usando o GeoGebra, calcule sua derivada e a nomeie de g(x).
Comando **g(x) = Derivada[f(x)]**

3º) Esconda a função derivada: clique com o botão direito do mouse sobre seu gráfico (ou sua expressão na janela de álgebra –à esquerda da tela) e, então, clique sobre o item "Exibir objeto" para desabilitá-lo.
4º) Digite na caixa de comando **(1,-1).** Note que este ponto pertence à função.

5º) Calcule usando o programa a inclinação da reta tangente à curva que passa por este ponto. Utilize a função derivada já definida.
6º) Entre com a equação da reta tangente passando pelo ponto definido.
A fórmula é $y – y_0 = m*(x – x_0)$. Neste caso o comando será: **y+1=5*(x-1)**

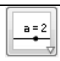
Vamos agora criar um ponto genérico e fazer a derivada “passear” sobre o gráfico da função.

Para começar apague o ponto **A** e a reta tangente à ele. (Basta selecioná-los e clicar em Del).

7º) Agora, crie um seletor e nomeie-o de “k”.
8º) Defina o ponto **(k,f(k))**. Note que este ponto pertence a função f(x).
9º) Entre com a equação da reta tangente que passa por este ponto usando o comando:
y-f(k)=g(k)*(x-k)

10º) Arraste o seletor e observe o que acontece com o ponto definido e a reta.

Vamos agora experimentar outra função.

CONSTRUÇÃO	BOTÃO	COMANDO
• Em outra janela, entre com a função		**f (x)=x*sin(x)**
• Crie um seletor, nomeio de **s**. • Habilite para o cursor a opção		
• Defina o ponto		**(s,f(s))**
• Defina a derivada de g(x) = f’(x) • oculte-a (botão direito – desabilite “exibir objeto”).		**g(x) = Derivada[f(x)]** ou **g(x)=f’(x)**
• Entre agora com a função:		**y-f(s)=g(s)*(x-s)** ou **y-f(s)=f’(s)*(x-s)**
• Arraste o seletor e observe o que acontece com o ponto definido.		

Comentários:

O principal objetivo dessa segunda atividade era ensinar como se utilizam os “seletores”.

No *GeoGebra*, seletores são botões dinâmicos associados a algum dado (número, comprimento ou ângulo, por exemplo) que pode ser arrastado, assim, a figura se modifica simultaneamente ao movimento no seletor. O seletor, portanto, funciona como uma parametrização do objeto associado a ele, dessa forma, torna-se uma interessante ferramenta para manipular e animar construções.

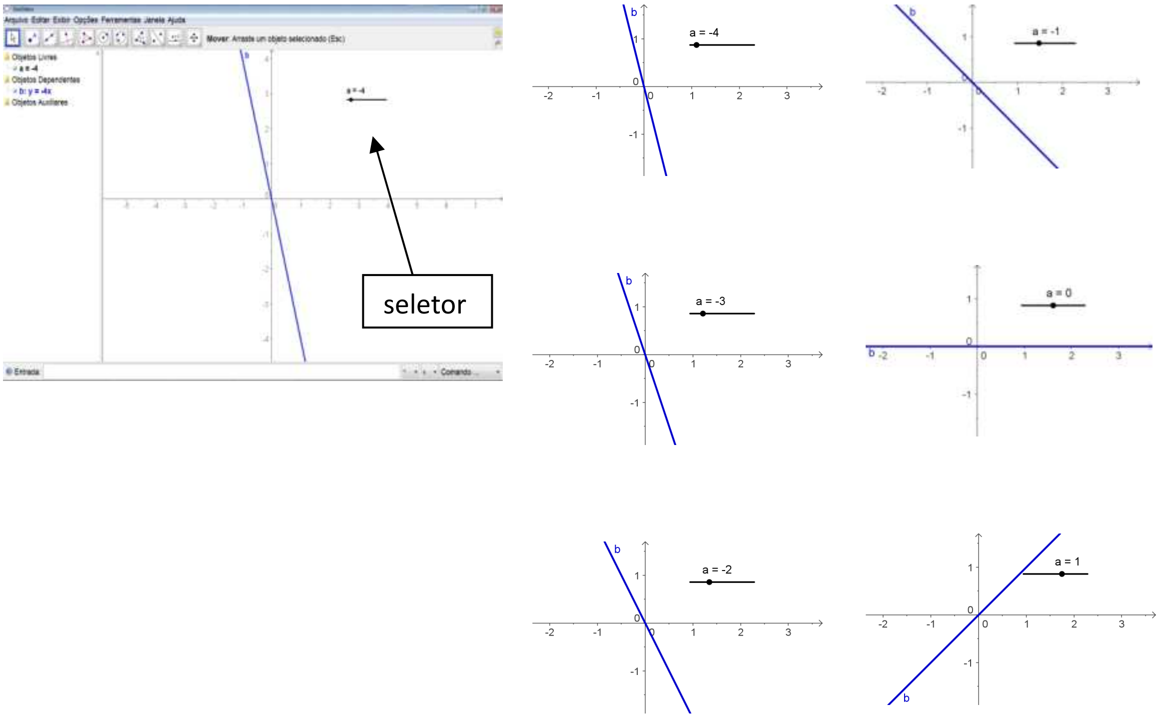


Figura 1 – Exemplo de utilização do recurso *seletor* no GeoGebra.

A figura 2 mostra um exemplo de utilização do seletor. Podemos criar um seletor “nomeado” de ***a*** (com um intervalo definido, por exemplo: ***a*** ∈ [-5, 5]) e entrar com a reta de equação ***y = ax*** (comando: ***y = a*x***). Assim, arrastando o ponto do seletor, faremos o valor de ***a*** variar dentro do intervalo definido e segundo *incrementos* que podem ser modificados (o padrão é de 0.1, ou seja, cada movimento no seletor ***a*** varia de um décimo), portanto a reta irá se inclinar de acordo com o valor dado.

Esta atividade explora os deslocamentos verticais e horizontais da função ***f(x)=x*sqrt(3-x)***, usando os comandos ***f(x)+a*** e ***f(x+b),*** usando ***a*** e ***b*** como seletores. Na figura 3, apresentamos o resultado (utilizamos pontilhado de cores azul e verde para destacar os gráficos deslocados). No laboratório, aproveitamos esta atividade para revisar algumas questões sobre transformações nos gráficos de algumas funções.

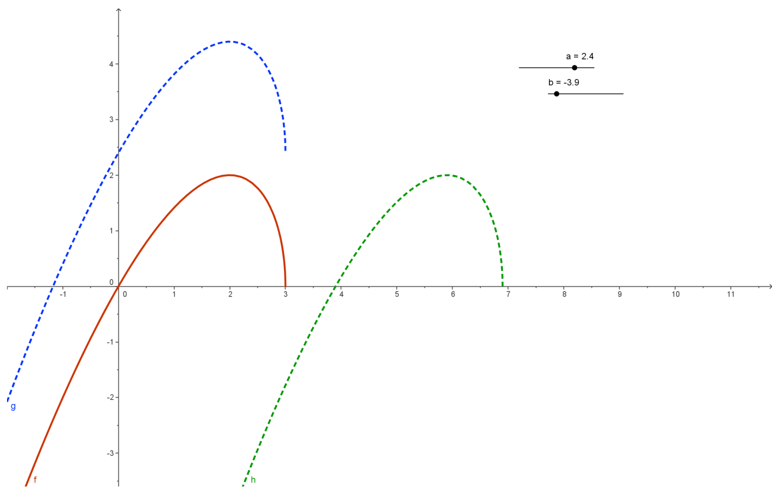


Figura 2 – Exemplo de deslocamento vertical e horizontal.

Exploramos ainda os seletores para fazer deslocamento de gráfico de funções e aproveitamos para que os alunos visualizassem a reta tangente a uma curva. Foram necessárias algumas explicações no quadro para relembrar esses conceitos.

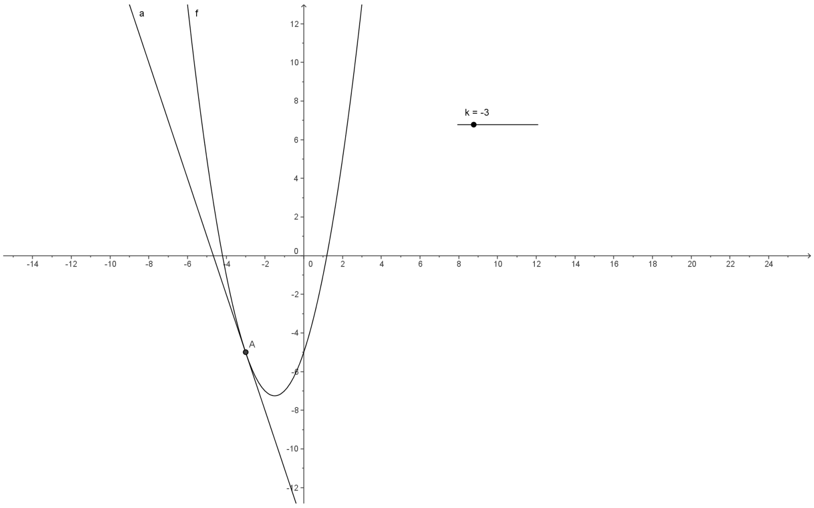


Figura 3 – Representação gráfica de uma função de 2º grau e uma reta tangente que é deslocada através de um seletor

Diferente da primeira atividade, quando aplicamos esta, houve um número maior de dúvidas dos alunos quanto ao uso do software. Talvez, influenciados pela primeira atividade, acreditávamos que os alunos iriam conseguir realizar facilmente cada etapa. Com relação aos comandos, não houve muitos problemas, a dificuldade maior foi com conceitos de ensino médio (equação da reta, por exemplo). Previmos uma última etapa em que os alunos deveriam utilizar uma função qualquer (definida por eles) e construir a reta tangente "passeando" sobre a curva, contudo não foi possível a realização desta.

DICAS:

- **Os alunos podem apresentar dificuldades nas construções, e alguns deles não lembrarem da fórmula $y-y_o=m.(x-x_o)$ para a equação da reta e, portanto, não entenderem o significado de $y - f(k) = g(k) * (k - a)$.**
- **A compreensão de a derivada ser a inclinação da reta tangente pode ser confundida com a própria reta tangente.**

Nesses casos pode ser necessário fazer uma breve revisão em sala ou mesmo no laboratório.

- **Uma alteração possível no roteiro é a supressão de uma das etapas utilizando diretamente o comando *f'(x)* ao invés de entrar com outra função e usar o comando *derivada[f(x)].***

ATIVIDADE 3

Objetivos

- Trabalhar com gráficos de funções definidas por partes e com domínios limitados.

Explorações:

1ª parte:

Vamos relembrar o comando **função[f(x), Xmin, Xmax]** para definir uma função em um determinado intervalo.

Exemplo: Construir o gráfico de f(x) = e^x no intervalo [-3,1]. Comando: **f(x)=função[exp(x),-3,1].**

2ª parte:

Abra uma nova janela (Menu: *arquivo>nova janela*).

- Crie um seletor **a** e defina na janela que se abre os intervalos Mín: -0.5 e Máx: 0.5. (clique no botão  e na janela que abre entre com os valores especificados. Clique em aplicar)
- Entre com os comandos abaixo para o GeoGebra traçar os gráficos das funções:
Função[a*x² - 1, -1, 1] **Função[-(2 x - 1)² + 2 x, 0.5, 1]** **Função[-(2 x + 1)² - 2 x, -1, -0.5]**

e da circunferência: **x²+y²=4.**

- Mova o seletor e verifique o movimento da parábola. Explique por que a parábola faz esse movimento quando modificamos o valor do seletor.

3ª parte:

Nesta atividade vamos utilizar o comando[5] **f(x)=se[x<a,g(x),h(x)]** ou **f(x)=se[x<=a,g(x),h(x)]** para construir gráficos de funções do tipo $f(x)=\begin{cases} g(x), & se \quad x \leq a \\ h(x), & se \quad x > a \end{cases}$. O comando "se" indica que para x < a (ou x ≤ a), ele vai construir o gráfico de g(x) e, caso contrário, ou seja para x ≥ a (ou x > a) será desenhada a função h(x).

Exemplos:

a) O gráfico da função $f(x)=\begin{cases} x^2, & se \quad x \leq 0 \\ x+1, & se \quad x > 0 \end{cases}$, será desenhado a partir do comando **f(x)=se[x<=0,x^2,x+1]**

[5] Dependendo da versão utilizada, deve ser utilizada a expressão ***if*** no lugar de ***se*** no comando.

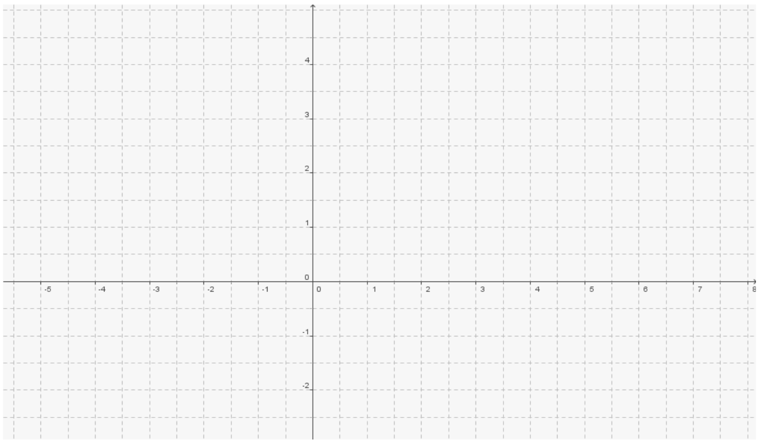
b) Para o gráfico da função $g(x) = \begin{cases} x^2+2x & se \quad x<0 \\ x^3-4x-2 & se \quad 0 \le x \le 2 \\ \log(x) & se \quad x>2 \end{cases}$, deve ser utilizado o comando

g(x)=se[x<0,x^2+2x,se[x<=2,x^3-4x-2,log(x)]]

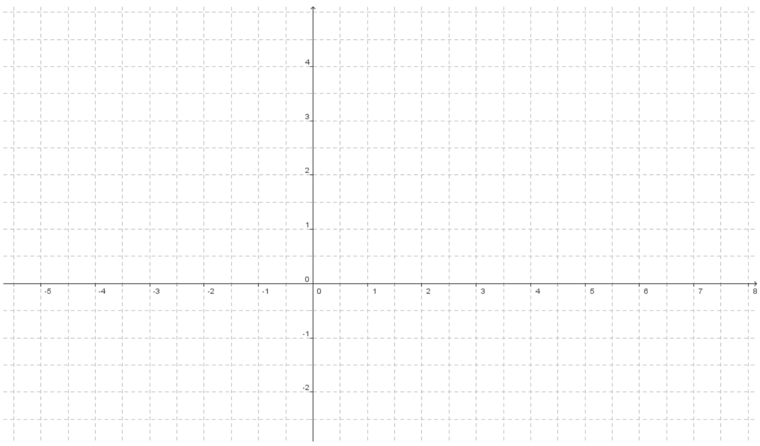
Para entregar:

1) Construa no GeoGebra o gráfico das funções abaixo e represente seu esboço ao lado:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-5}, & se \quad x \le 0 \\ x^3 \log \dfrac{1}{x^2}, & se \quad x > 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2} & se \quad x<0 \\ -x^3+1 & se \quad 0 \le x \le 1 \\ \log(x^2) & se \quad x>1 \end{cases}$$



Comentários:

No GeoGebra é possível construir cada gráfico separadamente definindo o domínio ou utilizar o comando *se* (ou *if* dependendo da versão). A primeira parte da atividade objetivava apenas a explicitação do comando. A segunda (baseada na atividade *"Brincando com funções"*, disponível em FIGUEIREDO, MELLO e SANTOS, 2005, p. 20) tinha como objetivo utilizar os seletores de modo lúdico. Usando os comandos dados, os alunos iriam ver uma figura com formato de um rosto (Figuras 5).

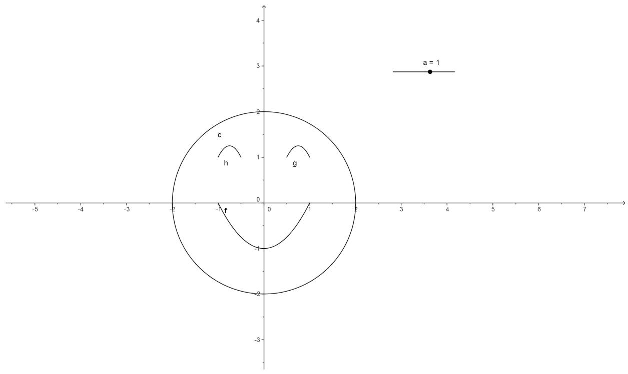


Figura 4 – Representação de rosto usando curvas no GeoGebra

E, manipulando o seletor, a parábola posicionada representando a “boca”, dada pelo comando ***Função[a*x² - 1, -1, 1]***, sofre transformações gerando novas figuras dando movimento (Figura 6).

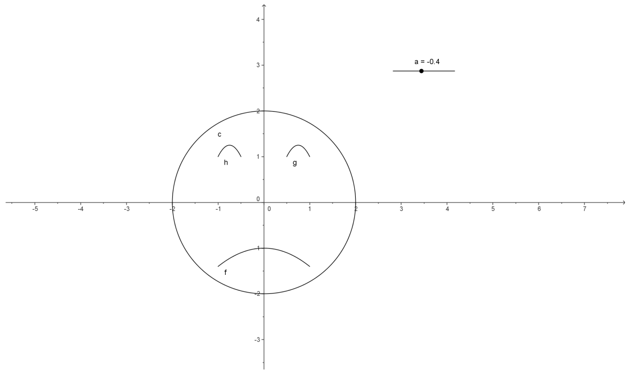


Figura 5 – Representação de rosto triste usando curvas no GeoGebra

Nosso intuito era de estimular os estudantes, pois, como Moran (2006, p. 24), acreditamos que “aprendemos pelo prazer, porque gostamos de um assunto, de uma mídia, de uma pessoa. O jogo, o ambiente agradável, o estímulo positivo podem facilitar a aprendizagem”.

Na terceira parte da atividade, optamos por usar o comando *se,* pois possibilitaria introduzir uma noção inicial de lógica. Cabe destacar que o gráfico construído desta forma (apenas entrando o comando adequado) ainda se mantém estático e não revela seu caráter dinâmico (NASSER, 2007), contudo achamos adequado, nesta atividade, uma vez que já havíamos trabalhado na atividade anterior com os gráficos de forma dinâmica (com o uso de seletores).

A última parte da atividade deveria ser entregue com um esboço dos gráficos construídos. Essa segunda folha foi entregue após a maioria ter explorado e compreendido os comandos. Como os comandos foram colocados na folha de atividades, não houve dificuldade, apenas erros de digitação cometidos por alguns alunos.

Para a função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 5}, se\ x \leq 0 \\ \frac{x^3 \ln 1}{x^2}, se\ x > 0 \end{cases}$, o gráfico apresentado no GeoGebra segue abaixo:

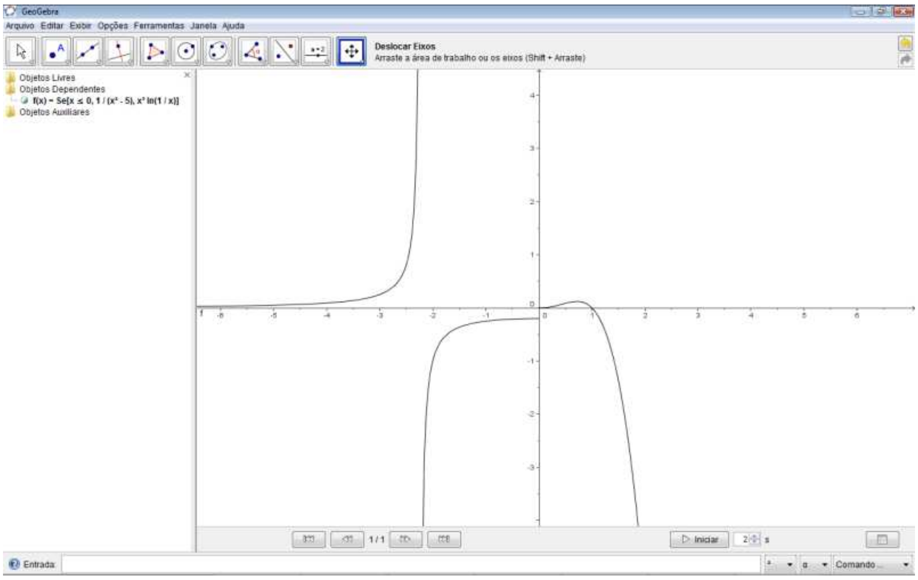


Figura 6 – Representação gráfica da função f(x) da terceira atividade

Os alunos fizeram os seguintes esboços:

Alunos 13 e 44:

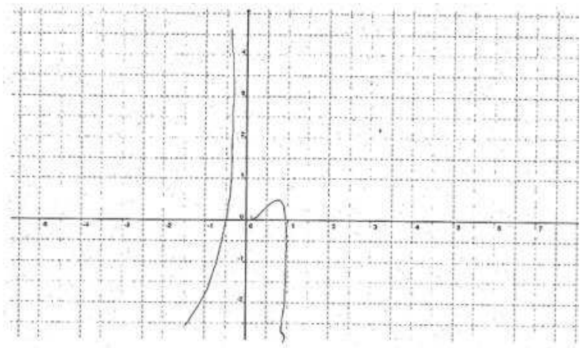


Figura 7 – Esboço feito pelos alunos 13 e 44

Aluno 42:

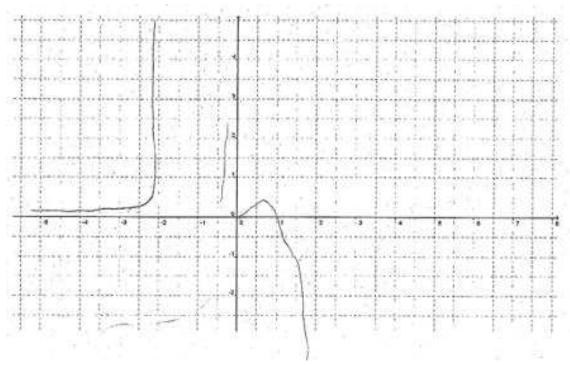


Figura 8 – Esboço feito pelo aluno 42

Os demais (26 alunos), os esboços se assemelhavam ao da Figura 10:

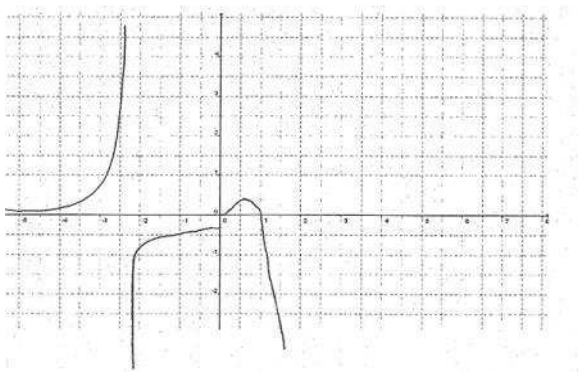


Figura 9 – Esboço feito pelo aluno 20

A diferença entre os gráficos pode ser explicada pelo erro na digitação dos comandos. Enquanto alguns digitaram o comando: ***f(x) = 1 / (x² - 5)***, outros digitaram a expressão: ***g(x) = 1 / x² - 5***.

Para a função $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2}, & se\ x < 0 \\ -x^3 + 1, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ log(x^2), & se\ x > 1 \end{cases}$, o gráfico esperado é o da figura 11:

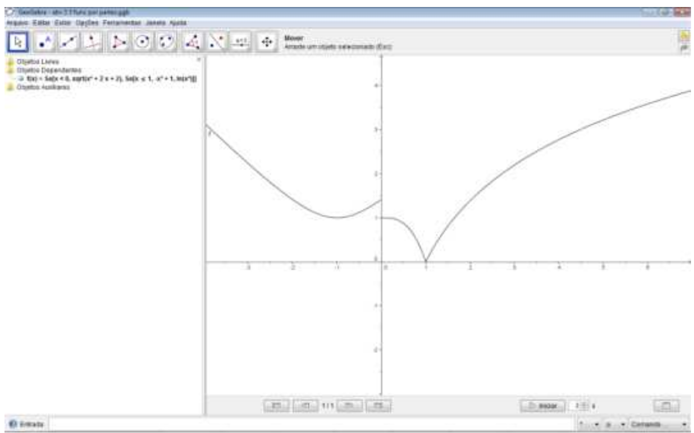


Figura 10 – Representação gráfica da função g(x) da terceira atividade

A resposta apresentada pela dupla de alunos 9 e 10 na figura 13 talvez esteja influenciada pelo nível de *zoom* apresentado na janela. No *zoom* padrão, o GeoGebra apresenta o gráfico da figura 11, contudo modificando o *zoom* podemos ter uma imagem como na figura 14. Neste último caso, a descontinuidade em $x = 0$ é imperceptível.

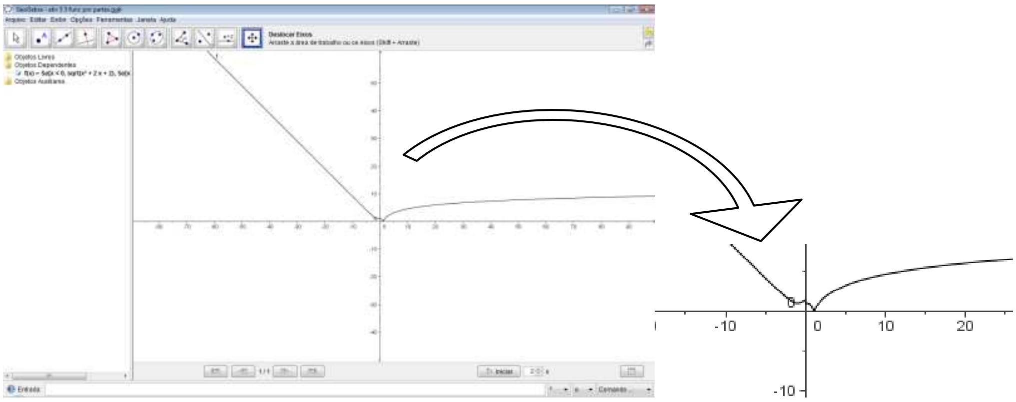


Figura 11 – Alteração do *zoom* na terceira atividade

O aluno 11 além de não apresentar a descontinuidade em x = 0, a função logarítmica com uma curva que apresentava um decrescimento a partir de certo ponto.

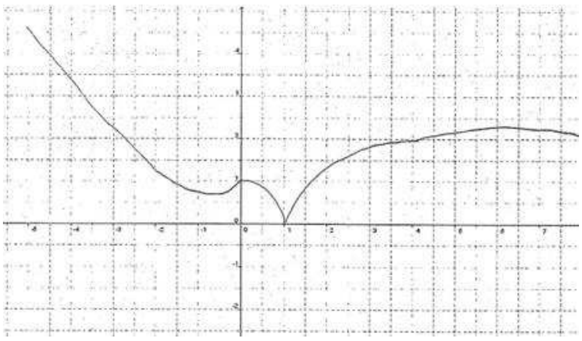


Figura 12 – Esboço da função g(x) feito pelo aluno 11

Essas atividades acabaram não oportunizando uma discussão sobre questões como, por exemplo, as transformações ocorridas nos gráficos (deslocamentos, translações, simetrias, etc.). Mas, permitiu verificar que alguns alunos não raciocinam sobre a expressão analítica quando utilizam o computador. A resposta apresentada na tela parece ser para eles uma verdade absoluta. No primeiro gráfico que eles deveriam esboçar, a maioria (em torno de 30 alunos) inicialmente havia digitado o comando incorretamente e não analisaram a questão do domínio da primeira parte da função $\left(f(x) = \frac{1}{x^2} - 5, se\ x \leq 0\right)$.

Como o GeoGebra plota os gráficos automaticamente, sentimos a necessidade de que esta atividade recebesse um tratamento mais reflexivo. A ideia de fazer o esboço está associada a análise de como os alunos transpõem o que está representado na tela do computador, associando as duas mídias (computador e papel). Os “descuidos” cometidos poderiam indicar elementos que eles julgaram menos importantes no gráfico uma vez que o termo usado no enunciado da questão era “esboço”. Então algumas questões que ficaram em aberto estão relacionadas ao que eles entendem por “esboço”. Quais são os elementos mínimos que devem estar presentes em um esboço? Há esboços “bons” e “ruins”? Acredito que essas e outras questões estão relacionadas aos objetivos que se pretende ao analisar um esboço.

DICAS:

- **É possível que alguns alunos não tenham estudado ainda comandos básicos de computação (em disciplinas), portanto, caso o professor utilize o comando *se* ele deverá fazer uma breve explicação da lógica de utilização deste.**

ATIVIDADE 4

Objetivos

- Ilustrar o Teorema do Confronto e outros casos de limites.

Inicie o GeoGebra

OBSERVAÇÃO: PARA CADA PARTE DA ATIVIDADE UTILIZE UMA NOVA JANELA NO GEOGEBRA.

1ª Parte:

Plote o gráfico da função $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ (Lembre-se que no GeoGebra sen=*sin*). Dê um *zoom* nas proximidades do ponto da função de abscissa zero.

Há algo errado com este gráfico? Comente.

- Crie um seletor com o nome **a** e depois entre com o ponto **A=(a,f(a))**.
- Então, entre com o comando **tangente[a,f]** (este comando cria a tangente à função **f(x)** no ponto de abscissa **a** que nesse caso depende do seletor).
- Arraste o seletor e verifique o que acontece com o ponto A e a reta tangente em valores de x próximos de 0, em particular no próprio zero. O que você observou? Por que isso acontece?

2ª Parte:

Faça o gráfico da função $f(x) = sen(1/x)$. Dê um *zoom* em direção à origem algumas vezes.

i) Comente o comportamento dessa função nas proximidades de zero.
ii) O limite de f(x) quando x→0 existe? Por quê?

3ª parte:

Teorema do Confronto: Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$ Então $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

- Faça os gráficos de $f(x) = -x^2$, $h(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 sen\frac{1}{x}$. Dê um *zoom* nas proximidades do 0 para melhor visualização. O que você observa?

4ª parte:

1) Plote o gráfico das funções $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} sen\frac{\pi}{x}$ (No GeoGebra: π = **pi**). Mude a cor da função (clique com o botão direito sobre a curva, depois em "Propriedades..." daí basta escolher uma cor). $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ e $h(x) = -\sqrt{x^3 + x^2}$ no GeoGebra. Dê um *zoom* nas proximidades de zero.

2) Agora, use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} sen\frac{\pi}{x} = 0$

Comentários:

A motivação inicial para a preparação desta atividade foi propor uma reflexão sobre o teorema do confronto. Na ocasião, algumas vezes os professores utilizam predominante o aspecto geométrico na explicação deste teorema, porém, os exemplos apresentados apenas aplicam os recursos algébricos.

Atividade semelhante é apresentada em Figueiredo, Mello e Santos (2005). Essas autoras ressaltam que o "processo de obtenção de um limitante local para uma função, e a consequente construção de funções que delimitam localmente uma função dada, tornam concreto o conceito subjacente ao teorema do confronto" (FIGUEIREDO; MELLO; SANTOS, 2005, p. 38).

Quanto à manipulação do *software* GeoGebra, os alunos em nossa pesquisa não tiveram dificuldades, mas apresentaram dúvidas em relação aos conteúdos prévios necessários para responder algumas questões, como, por exemplo, explicar por que não existe o limite de $\frac{sen(x)}{x}$ quando $x \to 0$. Uma hipótese, construída a partir da observação das respostas dos alunos no roteiro, é que eles conheciam (talvez de forma "decorada") o procedimento para o uso do teorema do confronto. Entretanto, os conceitos por trás do procedimento pareceu não estar claro para eles nas respostas dadas às perguntas da primeira e segunda parte.

A proposta era que os alunos manipulassem o recurso de *zoom* no GeoGebra para relacionar a visualização da representação gráfica com a expressão analítica de algumas funções.

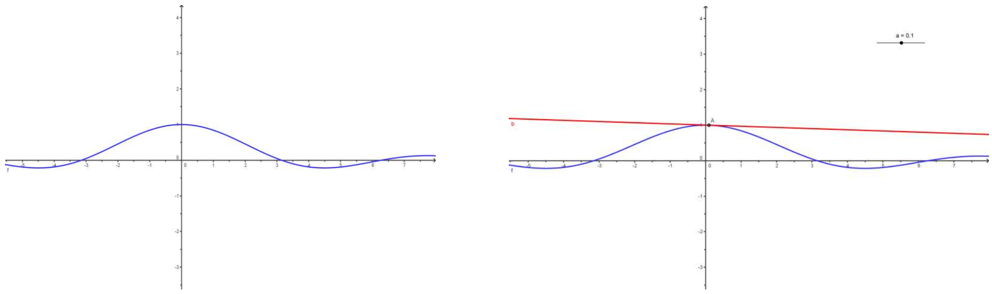


Figura 13 – Representações gráficas das funções $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ e *uma tangente se deslocando sobre a curva*

Na primeira coluna da tabela 8 apresentamos exemplos de respostas dos alunos para a questão "há algo errado com este gráfico?" (da função $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$) e, na segunda, comentários sobre o que acontece com a reta tangente (construída e deslocada sobre o gráfico da função no GeoGebra) em valores de x próximos de 0, em particular no próprio zero.

<u>Alunos 48 e 15:</u> não tem nada de errado, é um limite fundamental	*<u>Alunos 48 e 15:</u> A esquerda do zero ela é positiva. No zero ela é zero e a direita do zero ela é negativa. Com pequena inclinação.*
<u>Alunos 20 e 43:</u> , mas o gráfico mostra que quando f(0) = 1 e tal fato não esta	*<u>Alunos 20 e 43:</u> Não existe a reta que tangencia*

definido.	*esse ponto, já que a derivada não existe.*
<u>Aluno 42:</u> Não, quanto menor o intervalo definido, a função torna-se uma reta.	*<u>Aluno 42:</u> A tangente some, por que em x = 0 a função é descontinua, ou seja, não existe função em x = 0*
<u>Alunos 40 e 41:</u> Não há nada de errado com o gráfico, pois a função esta definida para todos os reais.	*<u>Alunos 40 e 41:</u> A medida que o seletor aproxima de zero a tangente desloca-se no sentido anti-horário, quando o seletor é zero a tangente some, pois a derivada é definida pela inclinação da reta e em a = 0, a reta não possui inclinação.*
<u>Aluno 25</u>: Observando o gráfico não identifiquei nenhum erro.	*<u>Aluno 25</u>: Em zero a tangente desaparece, uma vez que a função é indefinida em zero, por isso sabemos que não possui tangente, pois é descontinua em x=0, portanto não existe a derivada, uma vez que a derivada seria inclinação dessa tangente a função no ponto A.*
<u>Alunos 1 e 2:</u> Sim, pois pelo gráfico não é perceptível que seja descontinua, mas pela função sabemos que o seu denominador não poderá ser zero devido o domínio ser os reais menos o zero.	*<u>Alunos 1 e 2:</u> Observamos que quando colocamos o seletor a = 0, o ponto A e a reta tangente não existe devido à derivada não existir neste ponto como falamos acima.*

Tabela 1 – Respostas dos alunos na quarta atividade

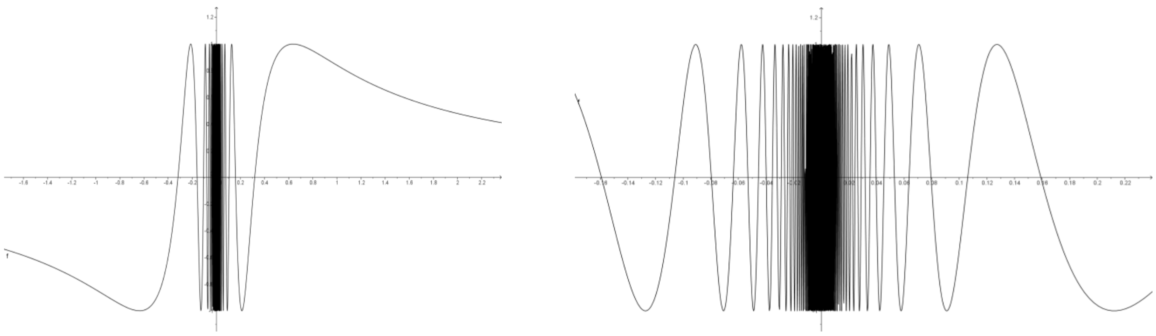


Figura 14 – Representações gráficas das funções $g(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ e com o *zoom* alterado próximo da origem

Abaixo seguem algumas respostas para a terceira questão, na qual pedimos que analisassem o comportamento da função nas proximidades de zero e se o limite existe quando x tende a zero.

<u>Alunos 48 e 15:</u> (i) Próxima de zero tende a -1 e 1.

Não, pois tende a dois valores -1 e 1.

<u>Alunos 20 e 43:</u> O período da senoide diminui bruscamente nas proximidades de zero.

Não, porque f(0)

<u>Aluno 42:</u>

(i) Pela esquerda o limite tende a - e pela direita tende a +

(ii) Os limites laterais são diferentes, logo, o limite não existe.

<u>Alunos 40 e 41:</u> O limite quando $x \to 0$ não existe pois seus limites laterais variam de 1 a -1, logo, são diferentes e o limite não existe.

<u>Aluno 25</u>: (i) Próximo de zero a função tende a 1 por um lado e a -1 por outro lado.(ii)Não, pois os limites laterais são diferentes, um tende a -1 e o outro a 1.

<u>Alunos 1 e 2:</u> (i) Nas proximidades do zero a função e descontinua.

(ii) Não, porque não houve unicidade.

<u>Aluno 30:</u> O gráfico oscila entre dois valores y = 1 e y= -1.

e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\nexists$ $\lim_{x \to 0} f(x)$

<u>Alunos 12 e 9:</u> (i)Observa-se que perto da origem a função oscila bastante e o período da função diminui. (ii)O limite não existe, pois a função f(x)=sin(1/x) quando $x \to 0$ tende a $\pm$, logo a função fica oscilando entre -1 e +1 e o limite deve ser fixo.

Na terceira parte, os alunos deveriam *plotar* o gráfico de três funções (Figura 18). O intuito foi de ilustrar o *Teorema do Confronto* e reconhecer geometricamente o significado das desigualdades ($f(x) \leq g(x) \leq h(x)$) na resolução. Muitas vezes, este teorema é chamado de *Teorema do Sanduíche* pelo fato de as duas funções *f* e *h* "espremerem" a função *g*.

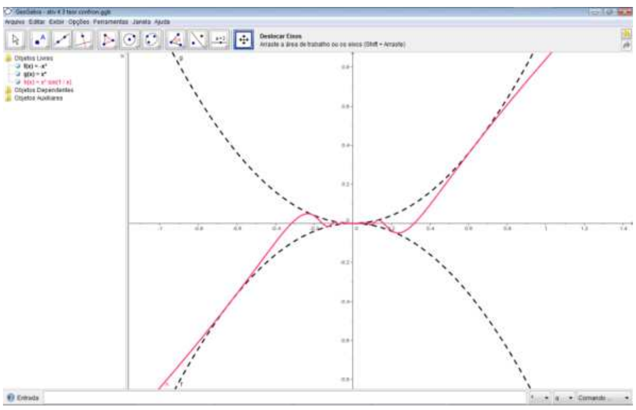


Figura 15 – Representação de três funções para o Teorema do Confronto

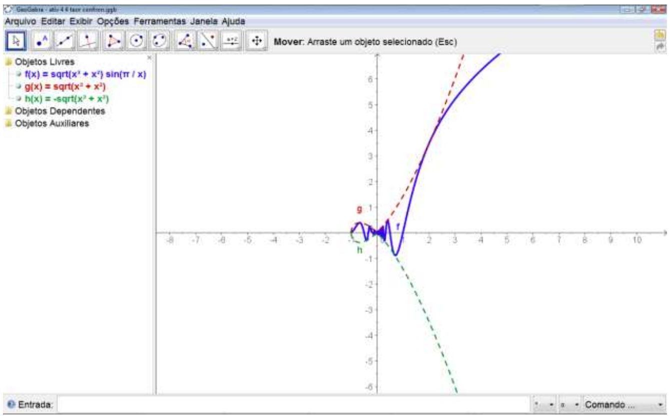


Figura 16 – Representação do Teorema do Confronto usando o gráfico de três funções

DICAS:

- **Aproveite os erros de comandos e explore o *zoom* para refletir com os alunos sobre os conceitos. Os alunos costumam aceitar o resultado dado pelo *software,* portanto, é preciso provocá-los para estimular a discussão.**
- **Em todas as atividades, há alunos que terminam antes e ficam explorando outras possibilidades, se possível retome essas descobertas no próximo encontro.**

ATIVIDADE 5

Objetivos

- Trabalhar com o conceito de família de funções.
- Perceber a relação entre o gráfico da função e da função derivada.

Explorações:

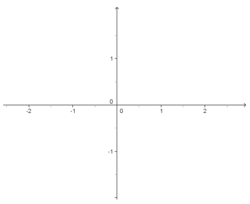
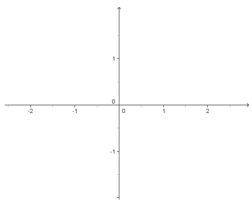
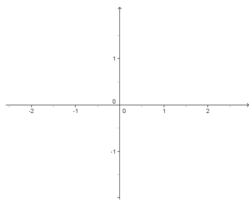
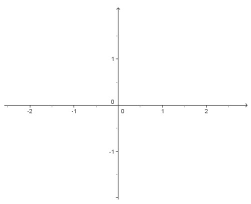
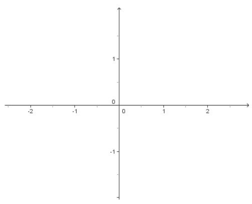
1ª parte:

“**Família de funções** (...) é uma coleção de funções cujas equações estão relacionadas”[6].

Seja a família de funções $f(x)=x^3+ax$.

a) Crie um seletor “a” no GeoGebra e depois, defina a função f(x) digitando **f(x)=x³+a*x**. Arraste o seletor e observe o gráfico da **família** de funções f(x) (se necessário aumente o intervalo do seletor modificando suas propriedades clicando nele com o botão direito do mouse). Esboce os gráficos de f(x) para

a = 2, a = 1, a = 0, a = - 1 e a = - 2.

b) O que acontece quando a<0, a=0 e a>0 (com relação à concavidade, máximos e mínimos, crescimento, etc)?

[6] STEWART (2003).

c) **Escreva** a equação da derivada primeira e **calcule** suas raízes (x_1 e x_2) em função de a.

d) Desenhe no GeoGebra os gráficos das retas $\mathbf{x = x_1}$ e $\mathbf{x = x_2}$ (onde x_1 e x_2 são as raízes da derivada em função de *a* calculadas no item anterior e $x_1<x_2$) e da derivada primeira de f(x) (utilize o comando **g(x)=derivada[f(x)]**.

e) Trace os gráficos de **h(x)=Função[g(x),-sqrt(-a/3), sqrt(-a/3)]** e **i(x)=Função[f(x),-sqrt(-a/3),sqrt(-a/3)]**

Na janela de Álgebra (esquerda da tela), clique com o botão direito sobre as expressões das funções h(x) e i(x) para alterar suas propriedades (cor e estilo: espessura).

f) Posicione o seletor em a=-3 estabeleça as relações entre o crescimento/decrescimento de f(x) e o sinal de f'(x) para $x<\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_1}<x<\mathbf{x_2}$ e $x>\mathbf{x_2}$.

2ª parte:

Oculte todos os elementos da tela, com exceção de f(x). Para ocultar clique com o botão direito do mouse sobre ele e desmarque a opção "Exibir objeto".

a) Entre com a função **p(x)=derivada[f(x),2]**, onde 2 significa que o GeoGebra vai calcular a derivada de segunda ordem.

Ao mover o seletor, o que acontece com o gráfico de p(x)? Você já esperava isso? Por quê?

b) Aumente o máximo do seletor para 50 (clique com o botão direito nele e depois na opção propriedades). Verifique o que acontece com o gráfico para valores grandes de *a*. O que você observa?

c) Agora, posicione o seletor em a=50 e mude a escala do referencial para 1:100 (Clique com o botão direito do mouse na janela de construção e vá em “Eixo x: Eixo y”). Para voltar para a escala padrão clique com o botão direito e escolha “Visualização padrão”.

d) Para finalizar, estabeleça a relação entre a concavidade de f(x) e o sinal da derivada segunda.

Comentários:

No laboratório, explore o conceito de família de funções associada ao recurso *seletor* do GeoGebra. A questão pede que, dada a função $f(x) = x^3+cx$, onde c é um seletor, esboçar os gráficos para diferentes valores de c. Os aluno deverão construir o seletor e entrar com a função e, a partir da representação no *software*, transpor o esboço para a folha de atividade. A seguir, questione o que acontecia com a função em relação ao gráfico (concavidade, pontos de inflexão, máximos e mínimos, crescimento/decrescimento, etc.) para valores de c menores, igual e maiores que zero. Na figura 20, apresentamos, a título de ilustração, as representações. Para $c \geq 0$, a função é sempre crescente e, portanto, não terá máximos nem mínimos locais.

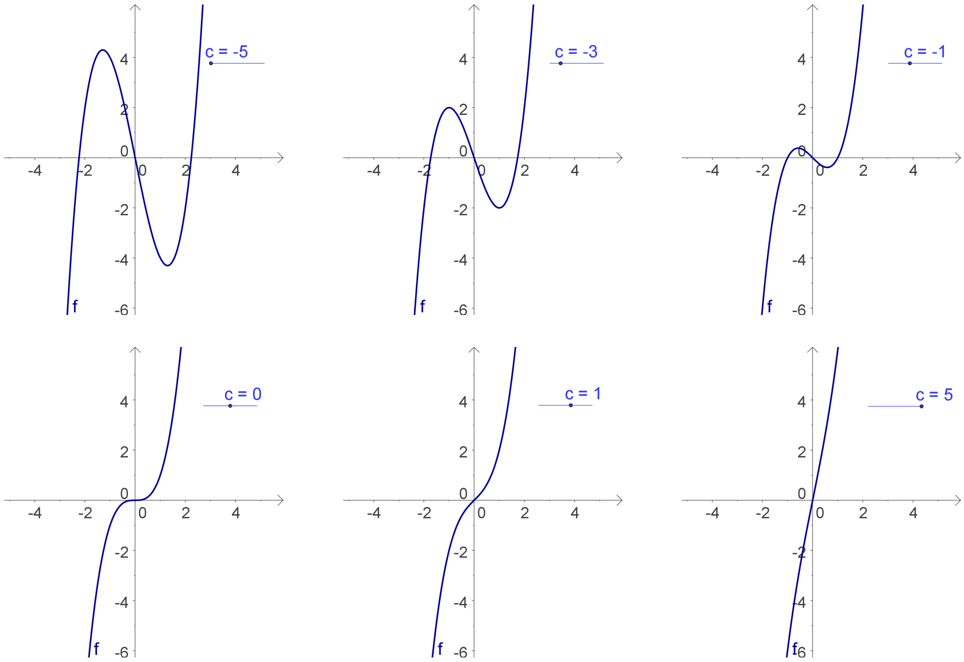


Figura 17 – Representação no GeoGebra da função $f(x) = x^3+cx$ variando o valor de c

Em nosso estudo um dos alunos (44) digitou a função de modo equivocado (provavelmente esqueceu-se de digitar o sinal de adição e digitou $f(x) = x^3\ c*x$)[7] e encontrou o seguinte resultado na figura 21.

[7] O GeoGebra traduz um espaço deixado na digitação dos comandos com multiplicação.

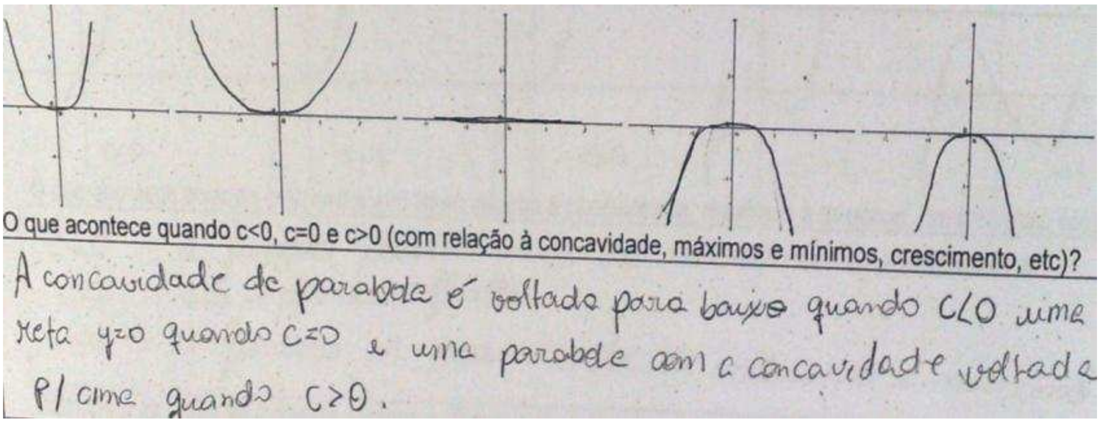


Figura 18 – Resposta do aluno 44 para questão da quinta atividade

Mais uma vez, identificamos a falta de uma reflexão adequada sobre a representação algébrica e gráfica. Cabe destacar que a pergunta seguinte pedia para calcular a derivada primeira (que é uma função de 2º grau) e ele fez corretamente.

A última tarefa desta primeira parte pedia para os alunos estabelecer a relação entre crescimento e decrescimento da função a partir do gráfico da derivada primeira, utilizando ***c*** = - 3.

Seguindo o roteiro, os alunos construíram uma representação conforme a figura 22.

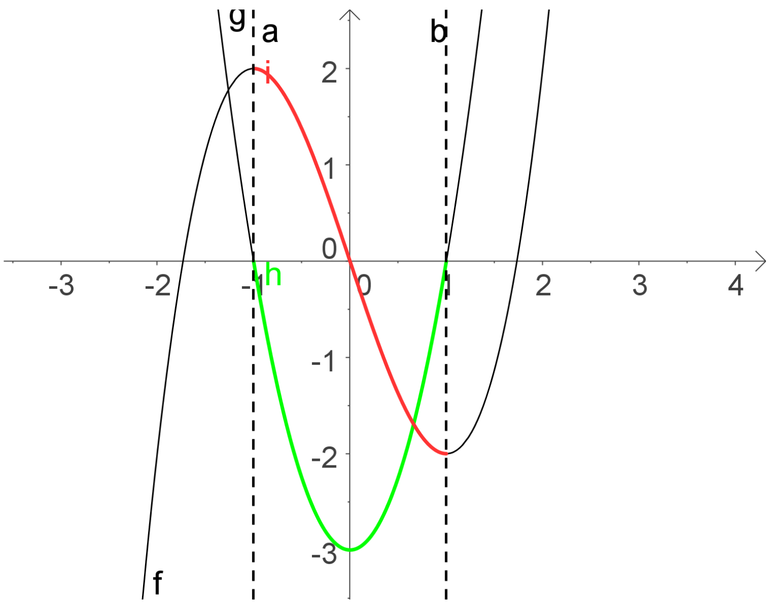


Figura 19 – Gráficos de uma função e sua derivada primeira destacando os zeros da derivada.

Gostaríamos que percebessem graficamente o crescimento/decrescimento associado ao sinal da derivada primeira. Para a última da primeira parte, onde pedimos que eles estabelecessem essa relação, 8 alunos deram respostas muito próximas ao que estava no roteiro que o professor havia dado em sala para construir gráficos. As alunas 40 e 41 (dupla) responderam:

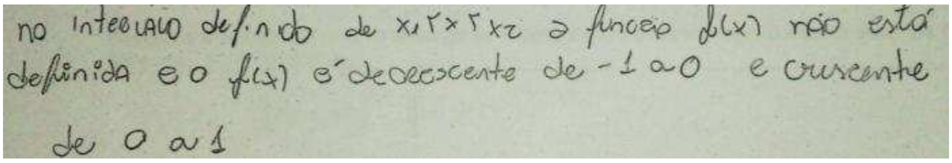

no intervalo definido de $x_1 < x < x_2$ a função $f(x)$ não está definida e o $f(x)$ é decrescente de -1 a 0 e crescente de 0 a 1

Figura 20 – Resposta das alunas 40 e 41 para questão da quinta atividade

Não foi possível perceber se ele cometeu algum erro de digitação, mas em sua resposta, ele analisa apenas o crescimento/decrescimento da função derivada.

Na segunda parte da atividade procuramos explorar a relação dos gráficos de uma função e de sua derivada de segunda ordem. Talvez pelas discussões que ocorreram nas duplas e com o pesquisador e a monitora, nesta última questão os alunos responderam sem a necessidade de muitas intervenções.

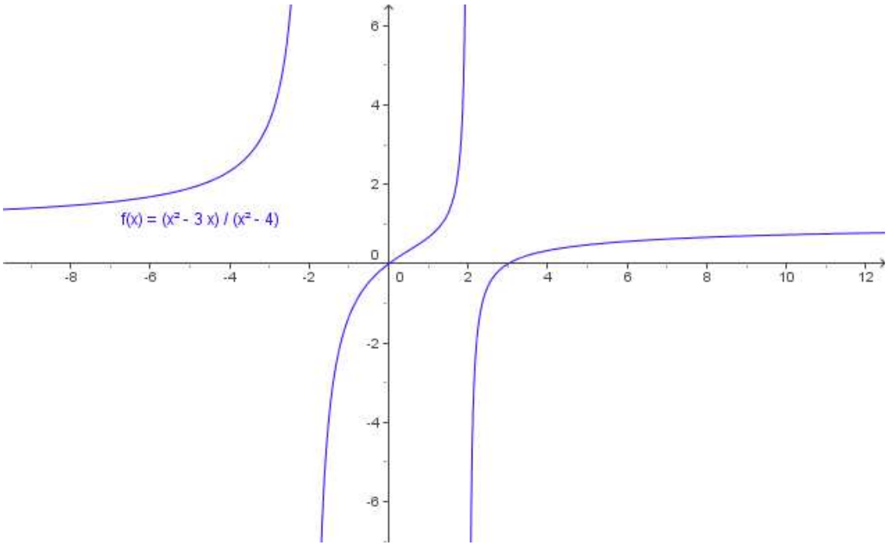
ATIVIDADE 6

Objetivos

➢ Trabalhar com a relação entre os gráficos de uma função e o de suas derivadas primeiro e segunda.

1ª parte:

Seja a função $f(x) = (x^2 - 3x) / (x^2 - 4)$. Veja um esboço abaixo.

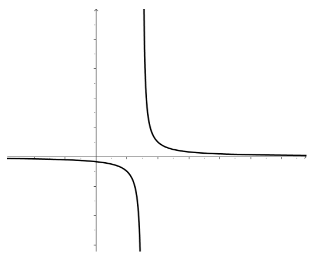
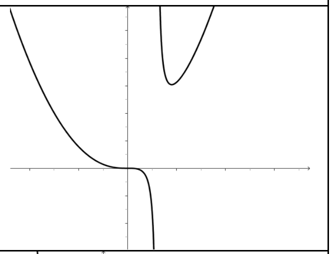
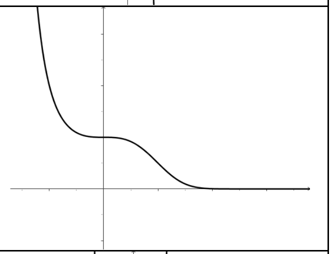
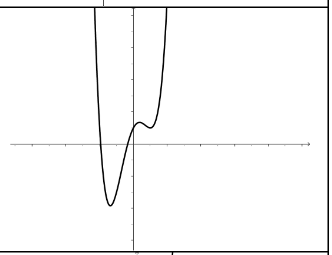
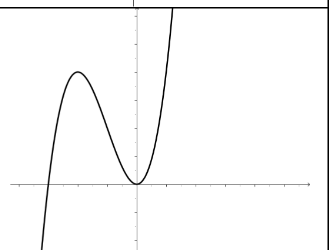
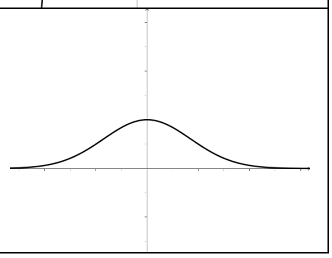


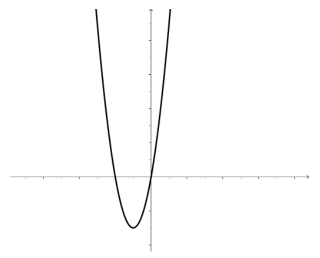
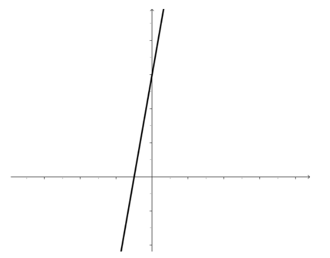
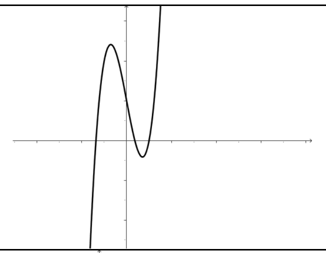
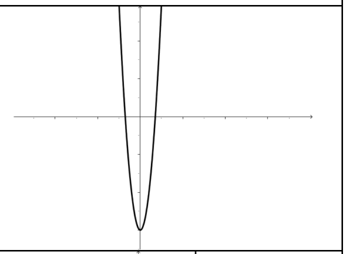
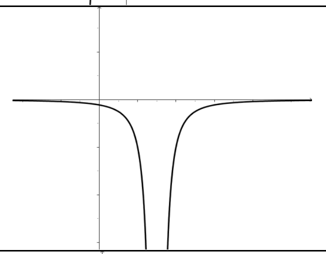
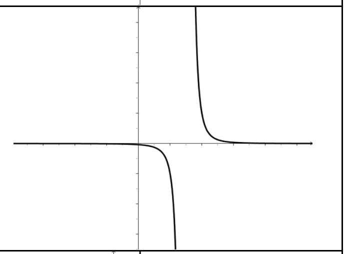
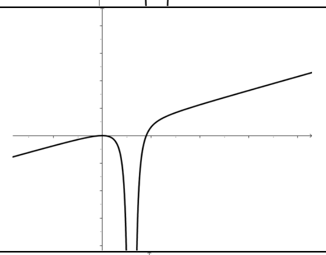
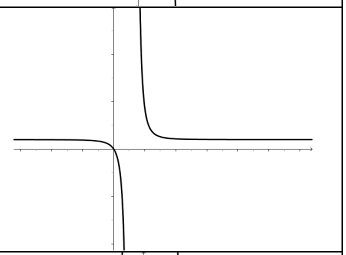
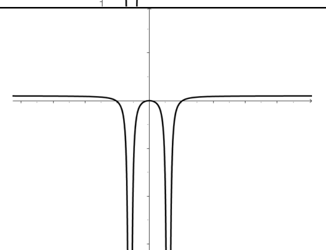
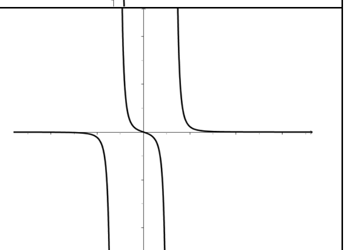
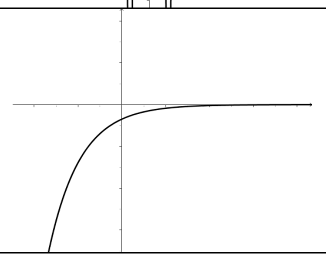
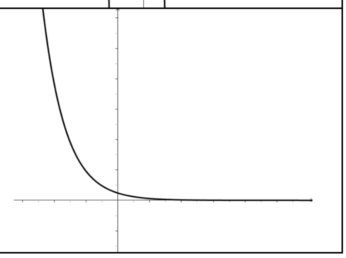
Observando seu gráfico, sem calcular a derivada, responda:

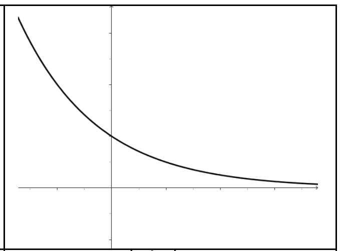
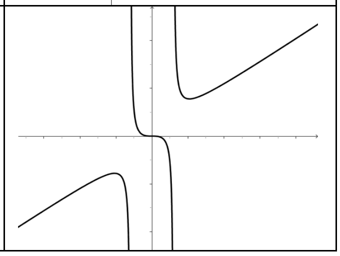
i) O gráfico da derivada primeira corta o eixo x? Justifique.
ii) O gráfico da derivada segunda corta o eixo x? Justifique.

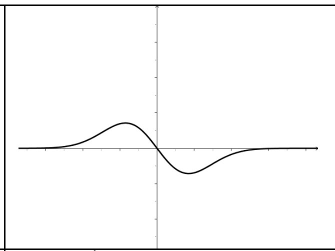
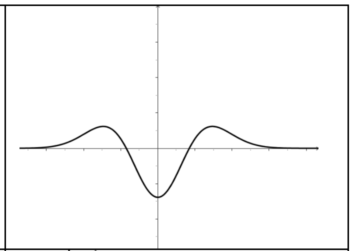
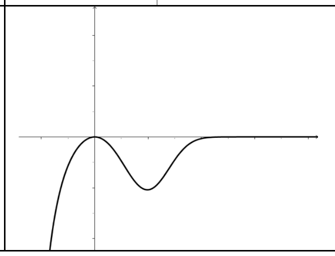
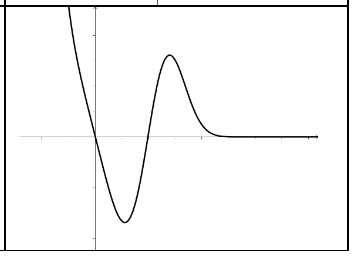
2ª parte:

Estabeleça a relação entre os gráficos das derivadas primeira e segunda e sua respectiva função:

	f(x)
I	
II	
III	
IV	
V	
VI	

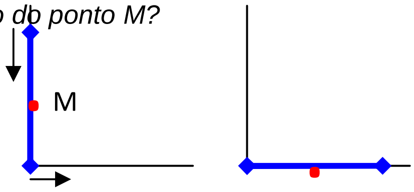
	f'(x)	**f''(x)**
( )		
( )		
( )		
( )		
( )		
( )		

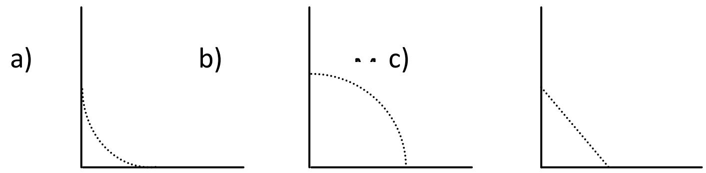
VII	
VIII	

( )		
( )		

3ª parte:

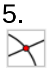
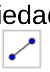
Questão: *Imagine uma escada completamente encostada numa parede. Seja M o ponto que divide a escada ao meio. Se o pé da escada arrastar afastando-se até o topo encostar o pé da parede, qual a trajetória do deslocamento do ponto M?*





Implementação no GeoGebra:

Vamos considerar o eixo y como a parede e o eixo x como o solo.

- Crie um seletor com o nome "a": Clique no botão  e depois clique na tela branca. A tela que abre permite ajustar as configurações de seu seletor/parâmetro. Mude o intervalo Mín para 0 e deixe o Máx como 5.
- Entre com o ponto **A=(a, 0)**.
- Clique na opção de selecionar. Botão 
- Construa um círculo com centro em A e raio 5. Clique no botão:  "Círculo dados centro e raio" e depois clique no ponto A. Uma caixa irá abrir pedindo o raio. Digite 5.
- Determine a interseção da Circunferência e o eixo y. Clique no botão  (localizado no sub-menu do botão ), então clique na circunferência e no eixo y.
- Nomeie de B o ponto de interseção da parte positiva da ordenada (clique com o botão direito e clique em "Renomear" ou então em "Propriedades").
- **Construa** o segmento AB (use o botão:  "segmento definido por dois pontos" e clique nos pontos A e B). O segmento AB será nossa escada.
- Agora, oculte a circunferência: clique com o botão direito do mouse sobre a circunferência e desabilite "Exibir objeto".
- Defina o ponto médio de AB. Com o botão  (localizado no sub-menu do botão ) selecionado, basta clicar no segmento AB. Nomeie este ponto de M.

- Volte para a opção de Selecionar Mover , depois clique e arraste o ponto do seletor para verificar a trajetória do ponto M.
- Habilite o rastro do ponto M (clique com o botão direito do mouse sobre ele e na opção “Habilitar rastro” ou “Exibir traço”. Depois, clique no ponto do seletor e verifique a trajetória que será marcada.

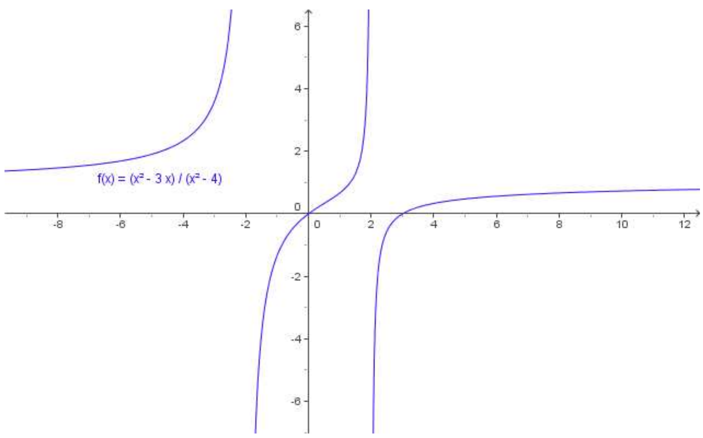
Comentários:

Essa atividade ocorreu em dois encontros. No primeiro dia, o professor da disciplina não poderia dar aula e, portanto, permitiu que a aula fosse regida pelos pesquisadores**.** Não foi utilizado todo o período da aula. Começamos por volta de 16hs e terminamos em torno das 17h20min. Neste dia, a presença dos alunos foi pequena, apenas 14 estudantes.

A atividade foi dividida em duas partes: uma primeira em sala (realizada no primeiro dia) e uma segunda no laboratório, mas como o tempo no laboratório seria curto optamos por deixar para resolver as questões no laboratório no próximo dia.

Iniciamos, em sala de aula, realizando uma breve revisão sobre o comportamento do gráfico e das derivadas primeira e segunda. A seguir, distribuímos as folhas e pedimos para que utilizassem os conceitos estudados para resolver a questão. A questão era:

Seja a função $f(x) = (x^2 - 3x) / (x^2 - 4)$. Veja um esboço abaixo.



Observando seu gráfico, sem calcular a derivada, responda:

iii) O gráfico da derivada primeira corta o eixo x? Justifique.
iv) O gráfico da derivada segunda corta o eixo x? Justifique.

Nesta questão, procuramos revisar com os alunos parte da discussão feita na aula anterior (sobre a relação do gráfico de uma função com os gráficos das derivadas primeira e segunda). Como não usamos o laboratório e a função não era tão trivial para derivar, foi necessário que eles utilizassem apenas as informações visuais do gráfico e seus conhecimentos. Propositalmente, as perguntas se relacionavam ao “cortar o eixo x”, mas houve dificuldade em associar essa expressão “verbal” à mudança (ou não) de sinal pela transposição do eixo *x*. Foi necessário que instigássemos os alunos usando exemplos mais simples no quadro para que essa questão ficasse clara.

Na segunda parte, os alunos deveriam associar gráficos de funções e os de suas derivadas primeira e segunda. Quando eram perguntados sobre os testes da derivada, eles respondiam citando o conceito que haviam copiado no caderno durante as aulas, mas a compreensão na análise gráfica, novamente, se mostrou difícil para a maioria. Por exemplo, na figura 24, temos o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$ e das funções derivadas (de primeira e segunda ordem, respectivamente). Podemos observar que, como a função é sempre crescente, a derivada de primeira ordem é positiva para todo *x.* Também, onde a função é côncava para cima, a derivada segunda é positiva e, onde ela é côncava para baixo, ela é negativa.

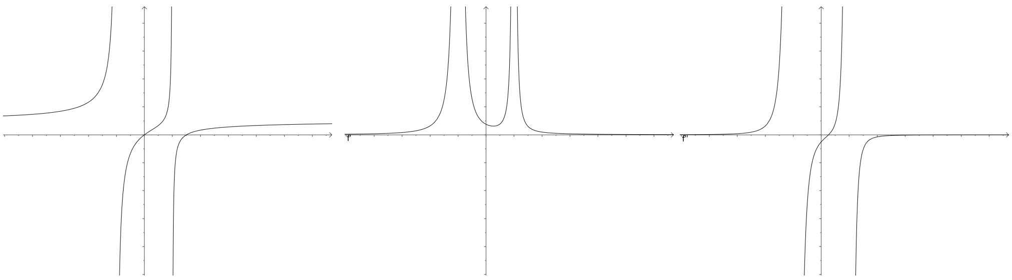


Figura 21 – Gráfico de uma função seguido dos gráficos de suas derivadas de primeira e segunda ordem

As duplas se engajaram com determinação nesta atividade. O ambiente de diálogo na confrontação de ideias para a resolução desta questão foi bastante produtivo.

A última questão tratava do trajeto realizado pelo ponto médio de uma escada completamente encostada em uma parede quando o seu “pé” é deslocado afastando-se da parede (Figura 25). Verificamos que, em sala, as estratégias adotadas pelos estudantes foram diversas. Alguns fizeram o movimento no ar tentando prever a trajetória, outros utilizaram o papel para esboçar alguns momentos do deslocamento da escada e outros simularam pegando um lápis encostado na parede e na carteira para tentar perceber o movimento.

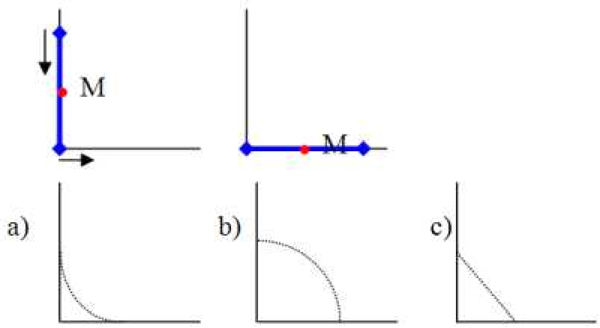


Figura 22 – Problema da escada

Para esta questão da escada, vários alunos raciocinaram como o aluno 12 que fez um esboço como na figura 26. Uma dupla realizou uma simulação utilizando um lápis representando a escada escorregando encostado num livro. Neste último caso, a dupla chegou a resposta correta.

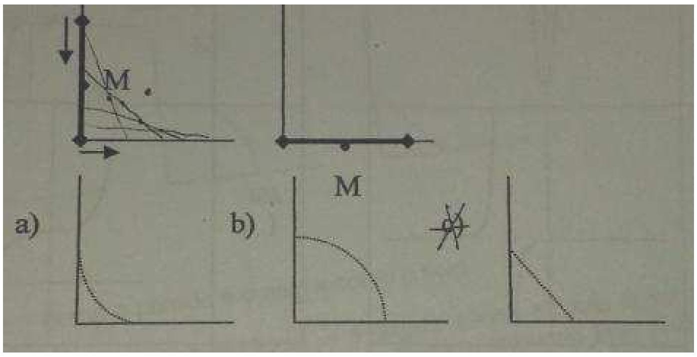


Figura 23 – Esboço de resolução do aluno 12 para o problema da escada

A maioria (ao menos 80%) dos alunos marcou as opções ***a*** ou ***c***, portanto, quando fizeram a construção do modelo no GeoGebra, se surpreenderam, uma vez que a alternativa correta é a letra ***b***.

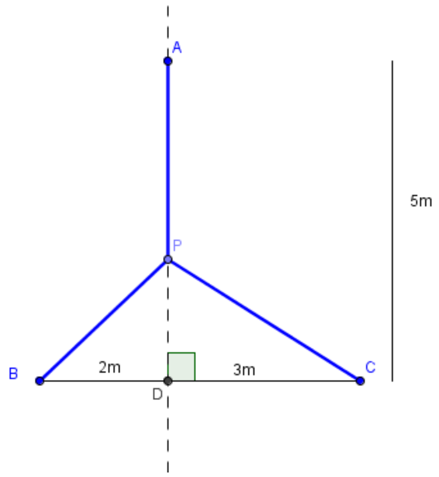
ATIVIDADE 7

Objetivos

- Visualizar problemas que envolvem aplicações da derivada.

Problema:

Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado.



a) Construa a situação no GeoGebra.

- Habilite a visualização de malhas e os eixos (menu *exibir*) para marcar os pontos B e C sobre eles e a opção de reta perpendicular para determinar a reta AD.
- Nomeie os segmentos AP, BP e PC de **a**, **b** e **c**.
- Entre com o valor de L digitando na linha de comando **L=a+b+c**.

b) Arraste o ponto P sobre a reta AD para verificar qual o menor valor para L. **Mín (L) =**

c) Expresse L como uma função de x = |AP|.

d) Em outra janela do GeoGebra, faça os gráficos de L e dL/dx.

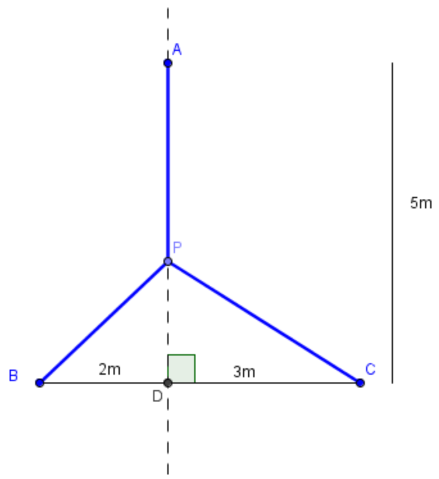
e) Utilize os gráficos das funções para estimar o valor mínimo e confirmar a sua pesquisa no item b (Sugestão: trace a reta **y=k**, onde k = mín (L) encontrado em b).

Comentários:

Esta atividade foi baseada em tarefa dada em sala e em uma proposta semelhante encontrada em Stewart (2003). Um detalhe que adicionamos foi fazer uma primeira construção e experimentação no desenho antes de realizar os cálculos usando as derivadas.

A atividade explorava a seguinte problemática:

Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado.



Os alunos deveriam construir o modelo no GeoGebra e procurar experimentalmente uma posição que minimizasse o comprimento de AP + BP + CP. A princípio, a maioria dos alunos arrastou o ponto P em direção ao ponto D supondo que este daria o menor comprimento para as somas de AP+BP+PC (ver, como exemplo, a figura 27). Foi necessário intervir em algumas duplas para questionar se esse era realmente o valor mínimo.

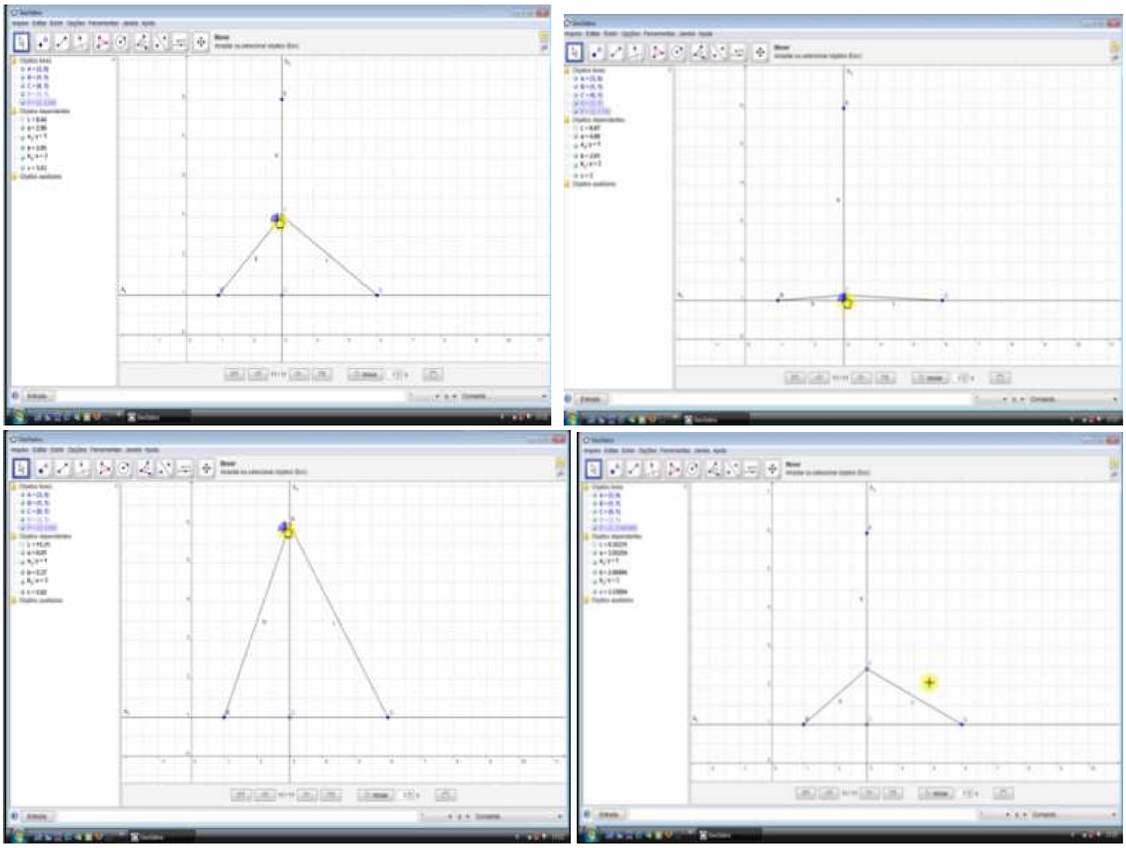


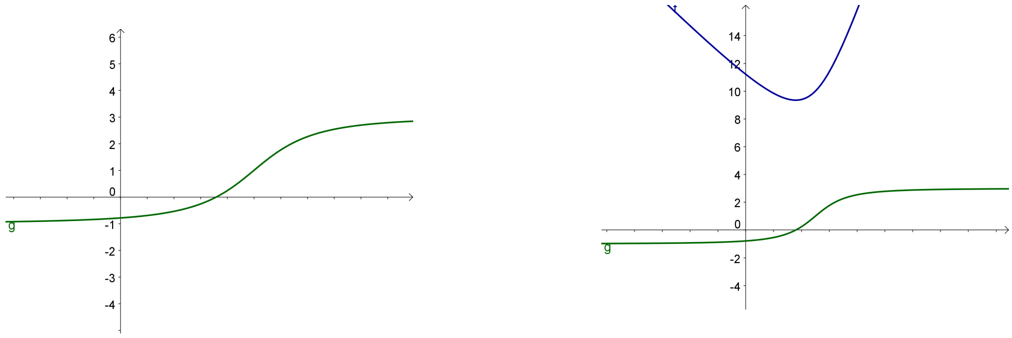
Figura 24 – Sequencia de telas do vídeo de aluno resolvendo a atividade 7 (capturada com o *software* *TipCam Recorder v2.2.2.4675)*

A familiaridade com o *software* começou a ser percebida entre os alunos que, até aqui, tiveram maior presença no laboratório. A maioria dos alunos conseguiu realizar a construção com facilidade, as dúvidas se concentraram no momento de escrever uma função para o comprimento do fio, apesar este exigir apenas a aplicação do Teorema de Pitágoras.

Os próximos passos eram: representar no GeoGebra os gráficos da função e de sua derivada e usa-los para confirmar o valor mínimo já encontrado. Para traçar o gráfico da derivada da função que teriam que minimizar, alguns alunos estranharam este não aparecer na tela do *software*. Perguntamos aos alunos: "Qual foi o ponto de mínimo que vocês observaram manipulando o modelo solicitado na construção da atividade?".

> *Alunos: "9,35".*
>
> *Pesquisador: "Observe o eixo de visualização do software que vocês estão trabalhando, é visível este ponto de mínimo?".*
>
> *Alunos: "Não."*

Sugerimos que alterassem o *zoom*. Assim, conseguiram visualizar o gráfico da derivada juntamente com seu ponto de mínimo. Essa janela



Tela padrão **Tela com alteração no *zoom***

Figura 25 – Representação de questão da segunda parte da sétima atividade

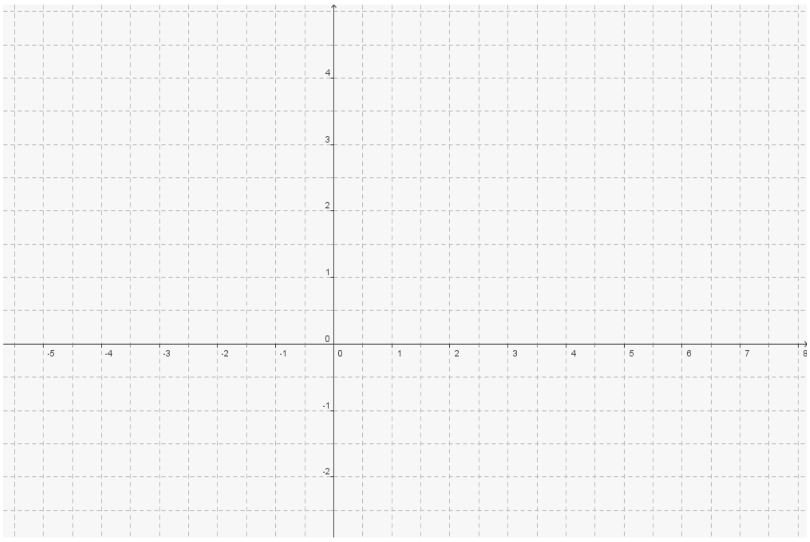
Este episódio exemplifica como o GeoGebra pode contribuir em atividades que envolvem simulação e análise de conjecturas.

ATIVIDADE 8

1ª PARTE:

Já sabemos que $\lim_{x\to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0$. Para calcular esse limite usamos o fato de que a função seno é limitada e, pelo Teorema do Confronto, segue que $-1 \le sen\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 sen\frac{1}{x} \le x^2$.

1) Plote o gráfico das funções $f(x) = x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = -x^4$ no GeoGebra.



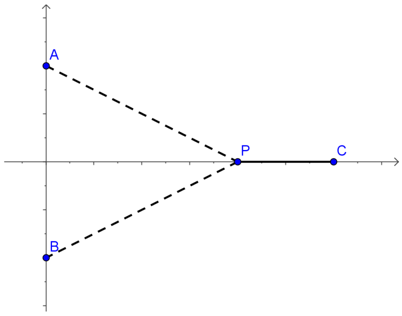
Mude a cor da função f(x) (clique com o botão direito sobre a curva ou sua expressão analítica na janela de Álgebra no lado esquerdo da tela, depois em "Propriedades..." daí basta escolher uma cor). Dê um *zoom* nas proximidades de zero.

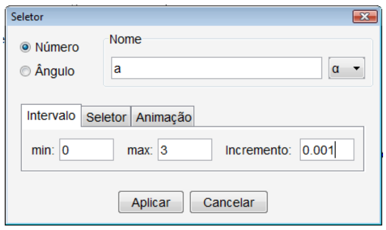
Represente no plano ao lado um esboço dos gráficos anteriores.

2) Agora, use o Teorema do Confronto para calcular $\lim_{x\to 0} x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)$

2ª PARTE:

Questão: Uma companhia tem fábricas localizadas (em um sistema coordenado adequado) nos pontos A(0,1), B(0,-1) e C(3,0). A companhia planeja construir uma central de distribuição elétrica no ponto P(x,0). Os diretores e engenheiros se reuniram para decidir qual é o local adequado (valor de x) que minimiza a soma das distâncias de P aos pontos A, B e C.





a) Construa um modelo que simule essa situação no GeoGebra.

- Crie um seletor **a** com as propriedades (min: 0, máx: 3 e Incremento: 0.001) como na figura:
- Entre com o as pontos **A=(0,1)**, **B=(0,-1)**, **C=(3,0)** e **P=(a,0)**.
- Crie os segmentos AP, BP e PC e nomeie-os de **b**, **c** e **d** respectivamente.
- Seja S a soma das distâncias. Entre com o valor de S digitando na linha de comando **S=b+c+d**.

b) No menu Opções modifique o arredondamento para 10 casas decimais. Agora, arraste o seletor para movimentar o ponto P sobre o eixo x e verificar qual o menor valor para S.

Mín (S) =

c) Expresse S como uma função de x.

d) Em outra janela do GeoGebra, faça o gráfico de S.

e) Utilize o gráfico da função para estimar o valor mínimo e confirmar a sua pesquisa no item b (Sugestão: trace a reta **y=k**, onde *k = mín (S)* encontrado em (b).

f) Utilize os seus conhecimentos sobre derivadas para calcular (no espaço abaixo) o valor exato para x que minimiza a função S e o valor mínimo da função.

Comentários:

Ao elaborar a atividade, priorizamos abordar alguns assuntos segundo a perspectiva em que estávamos trabalhando no laboratório. Logo, na atividade estiveram presentes construção no GeoGebra de representações gráfica e modelos, experimentação, simulação e alguns procedimentos algébricos. Escolhemos o Teorema do Confronto e, também, aplicações da derivada, pois foram assuntos já trabalhados no laboratório. Esta escolha foi discutida e aceita pelo professor da disciplina.

A atividade foi dividida em duas partes.

Na primeira havia duas questões. Uma delas visava apenas ilustrar o teorema do confronto e, na segunda, realizar o cálculo de um limite ($\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$). Notamos que o teorema do confronto mais uma vez foi utilizado de forma mecânica. Com descuido da notação e procedimentos. Mas, o erro mais recorrente nas resoluções do limite dado, foi de não partir do fato de a função ser limitada. A figura 29 mostra um exemplo deste erro. Na resolução, sem essa premissa, a conclusão não se sustenta.

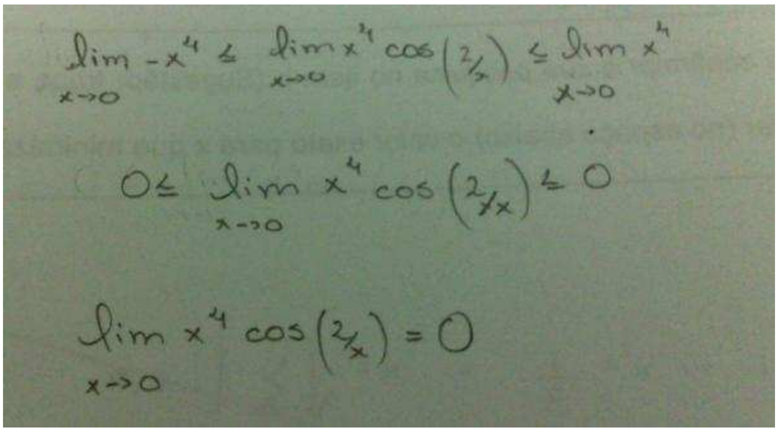


Figura 26 – Resolução do aluno 24 para a 1ª parte (questão 2) da atividade 8.

A segunda parte repetiu a exploração feita na sétima atividade. Os alunos deveriam encontrar uma medida que minimizasse a distancia entre três pontos nas condições dadas (ver: Figura 30).

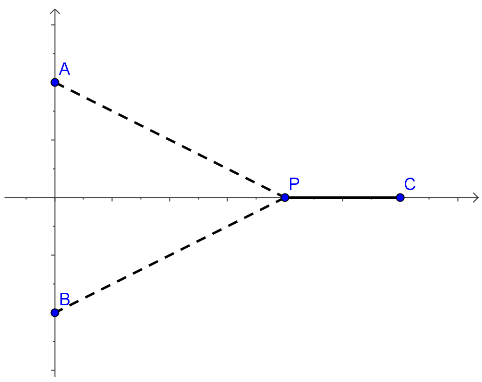


Figura 27 – Representação do modelo pedido na 2ª parte da oitava atividade

Os passos seguiam:

- Construção do modelo no GeoGebra utilizando o seletor para que o ponto P se deslocasse sobre o eixo x e uma variável S representando o comprimento do fio de dependendo da posição de P;
- Exploração do modelo, manipulando P para descobrir o menor comprimento;
- Determinação da expressão da função correspondente (na folha do roteiro);
- Representação gráfica da função no GeoGebra;
- Determinação da derivada primeira e cálculo exato do valor mínimo.

Apenas a última etapa se diferenciou da atividade já realizada, pois pedimos para que eles calculassem a derivada apresentando os passos e determinassem o valor exato de *x* que minimiza a função. Na verdade, o próprio GeoGebra determina a derivada.

Como eles tinham o *software* à disposição e trabalharam em duplas, todos os alunos conseguiram resolver as duas partes da atividade.

ATIVIDADE 9

Objetivos

- Introduzir o conceito de integral definida através da noção de área sobre uma curva.

1ª parte:

O procedimento inverso da derivação

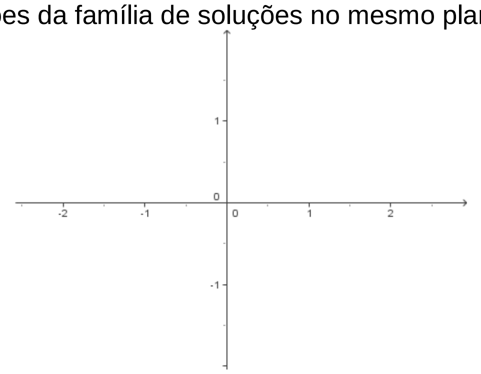
Considere o seguinte problema:

Encontrar uma família de soluções

$y = f(x)$ tal que $\dfrac{dy}{dx} = x^2$

i. Com seus conhecimentos de derivação polinomial, resolva o problema.

ii. Esboce algumas funções da família de soluções no mesmo plano cartesiano.



iii. Quantas soluções passam por (*1*, *2*)? E por (*a*, *b*), *a*, *b* arbitrários? [sugestão: construa no geogebra a função e utilize um seletor para variar o parâmetro c].

iv. Qual o valor da constante *c* neste caso?

v. Dado um ponto (*a, b*), como encontrar a curva solução correspondente?

2ª parte:

O problema da velocidade

Suponhamos que um carro se move com velocidade crescente e suponha que a velocidade foi medida a cada 5 segundos, resultando nos dados da tabela abaixo.

<table>
<tr><td>Tempo (seg)</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td rowspan="2">Avaliação por baixo: 6 . 5 + 13 . 5 = 95 m
Avaliação por cima: 13 . 5 + 17 . 5 = 150 m
Neste caso temos que: 95 m < distância total < 150 m</td></tr>
<tr><td>Velocidade (m/seg.)</td><td>6</td><td>13</td><td>17</td></tr>
</table>

Faça agora as novas avaliações superiores e inferiores para os casos onde a velocidade foi medida a cada 2 segundo e a cada 1 segundo:

Tempo (seg)	0	2	4	6	8	10
Velocidade (m/seg.)	6	10	13	15	16	17

Avaliação inferior: 6.2 +10.2+13.2+15.2+16.2 = **120m**

Avaliação superior:

Tempo (seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocidade (m/seg.)	6	9	10	12	13	14	15	15,5	16	16,5	17

Avaliação inferior:

Avaliação superior:

Avaliações para a velocidade:

1ª aval.: 95 m < distância total < 150 m

2ª aval.: ___ m < distância total < ___ m

3ª aval.: ___ m < distância total < ___ m

3ª parte:

1 - Considere o problema: Encontrar a área delimitada por $f(x) = x^2$, $x=0$, $x=3$ e $y=0$.

- Plote a curva **$f(x)=x^2/8 + 1$** no intervalo [-3,5] no *GeoGebra.* Comando: **função[x^2/8 +1, -3, 5]**

Usando os comandos ***SomaInferior[f(x), a, b, n]*** e ***SomaSuperior[f(x), a, b, n]*** - onde **f(x)** é a função, ***a*** é o início do intervalo, ***b*** é o fim do intervalo e **n** o número de subintervalos escolhidos – podemos construir os retângulos entre a curva e o eixo x.

2 – Em uma nova janela do *GeoGebra* defina a função $f(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 4/3$ e, com o auxílio dos comandos citados, visualize as somas inferiores e superiores no intervalo [0,4] com aproximação de 3 subintervalos. Depois altere para 9 subintervalos e verifique a diferença entre a avaliação superior e inferior.

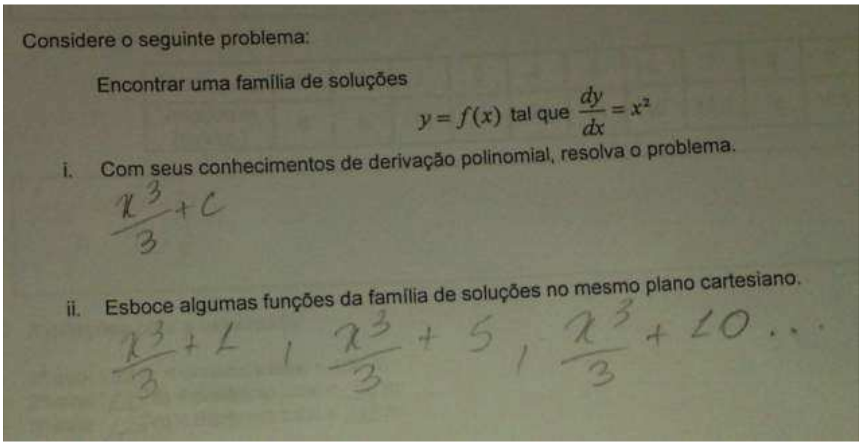
O que você observou?

Comentários:

Apesar de havermos determinado para esta atividade o objetivo de introduzir o conceito de integral definida, na verdade ele já havia sido dado em aula. Portanto, nosso objetivo foi possibilitar uma melhor visualização e articulação desse conceito com a ideia da área como limite.

A primeira parte desta atividade foi elaborada baseada em atividade do livro de Figueiredo, Mello e Santos (2005). A segunda foi elaborada usando como exemplo a introdução deste conceito feito em Hugues-Hallett *et al* (1999). A terceira foi reelaborada a partir de atividade que usamos no estudo piloto.

Assim como em Figueiredo, Mello e Santos (2005), a primeira parte da atividade foi realizada em sala de aula. Como esperado, pelo fato de o professor ter explicado sobre a integral em aula recente, ao pedir para encontrar uma família de soluções $y = f(x)$ tal que $\frac{dy}{dx} = x^2$, a maioria utilizou a notação de integral. Apenas o aluno 43, parece não ter compreendido o que deveria ser feito (Figura 31).


Considere o seguinte problema:

Encontrar uma família de soluções

$$y = f(x) \text{ tal que } \frac{dy}{dx} = x^2$$

i. Com seus conhecimentos de derivação polinomial, resolva o problema.

$\frac{x^3}{3} + C$

ii. Esboce algumas funções da família de soluções no mesmo plano cartesiano.

$\frac{x^3}{3} + 1, \frac{x^3}{3} + 5, \frac{x^3}{3} + 10 \ldots$

Figura 28 – Resolução do aluno 43 para questão da nona atividade

Na segunda, apresentamos uma situação, onde se podem usar aproximações para cálculo de áreas. Nesse caso, uma figura da lagoa da Pampulha foi projetada e quadriculada com diferentes malhas. Foi discutido que, quanto menor o quadriculado, melhor seria a aproximação para a área.

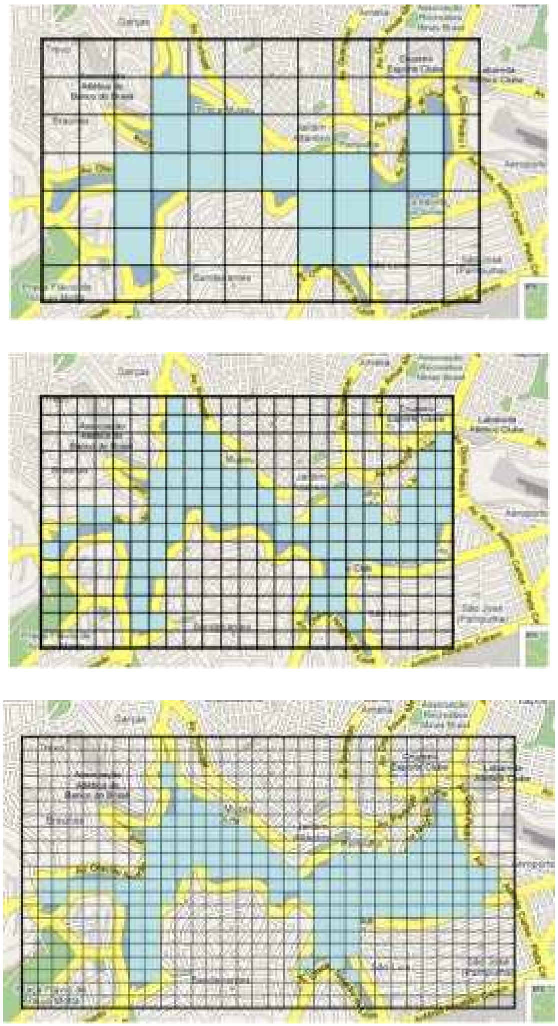


Figura 29 – Representação de quadriculados da lagoa da Pampulha

Em seguida, usamos um problema simples de determinar uma distância percorrida por um veículo que não está em velocidade constante, mas crescente. Nessa atividade os alunos puderam analisar que, quanto mais subintervalos de tempo temos, melhor a avaliação da velocidade. Utilizamos o *data-show* para mostrar a questão das avaliações "por baixo" e "por cima" (Figura 33).

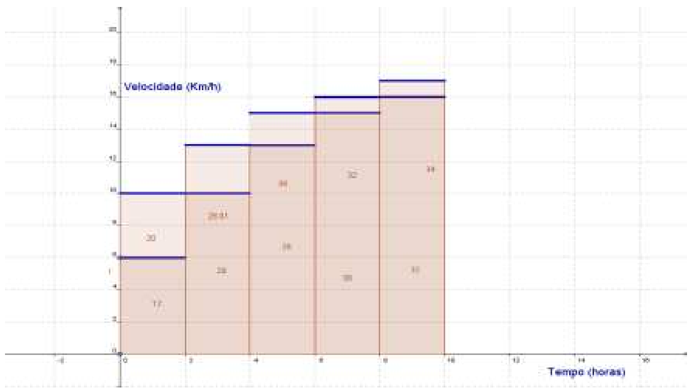
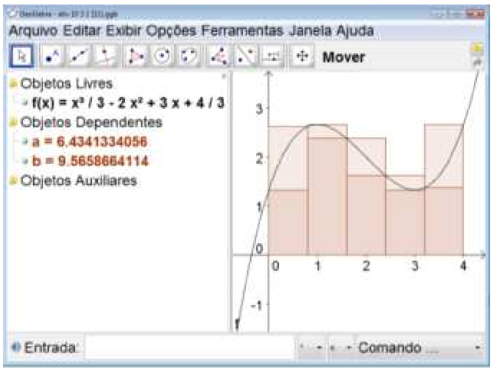


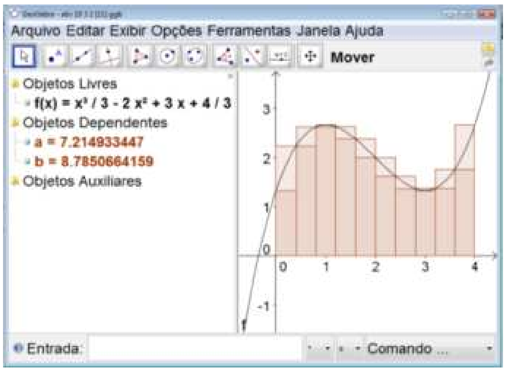
Figura 30 – Subintervalos para a determinação da velocidade

As apresentações sobre a área da lagoa e a velocidade serviram para reforçar a noção de integral como limite da soma de áreas.

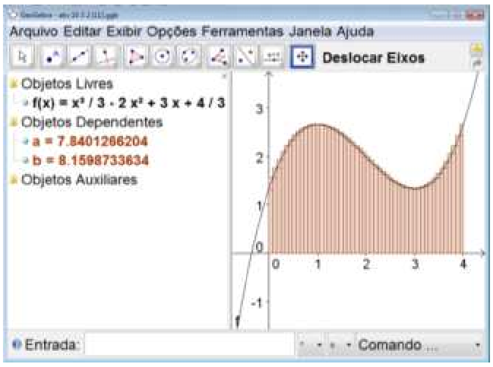
Na terceira e última parte, os alunos utilizaram os comandos de ***SomaInferior*** e ***SomaSuperior*** para representar a área sobre uma curva e explorar a questão do limite. A figura 34 apresenta três etapas da exploração que realizaram buscando perceber que, "no limite" a diferença entre a soma das áreas dos retângulos "por cima" e "por baixo" se aproximam da área sobre a curva. Ainda na figura, utilizamos apenas as somas com 5, 10 e 50 subintervalos, contudo, houve alunos que extrapolaram e colocaram valores maiores que 500. Nestes casos, os computadores tiveram dificuldade de processá-los, ocasionando uma lentidão nas atividades. Apesar disso, os alunos que arriscaram usar valores grandes visualizaram uma área totalmente preenchida e uma diferença entre as avaliações superior e inferior na casa dos milésimos. Conjecturaram, então que este deveria ser o valor da integral definida no intervalo dado.



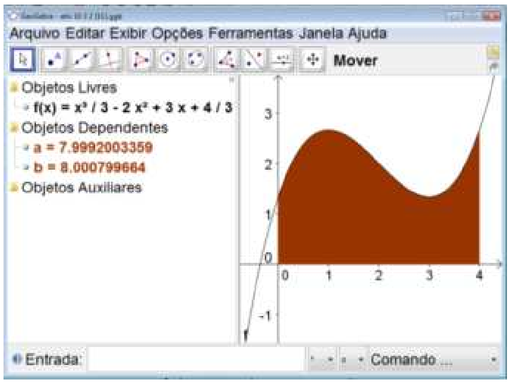
5 subintervalos



10 subintervalos



50 subintervalos



10000 subintervalos

Figura 31 – Exploração acerca da integral definida usando comando do GeoGebra

Esta última questão não pedia resposta, apenas a exploração. Entretanto, alguns alunos (6) rascunharam na folha observações a partir de suas manipulações. Os alunos 9 e 28 foram os únicos que escreveram sua conclusão.

Com mais subintervalos há maior aproximação das áreas

Figura 32 – Comentário dos alunos 9 e 28 para a última questão da nona atividade

Outros, como o aluno 17, registraram as desigualdades para a área.

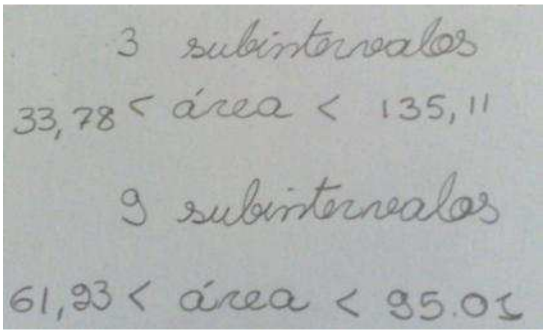


Figura 33 – Esboços do aluno 17 para a última questão da nona atividade

ATIVIDADE 10

Objetivos

- Utilizar o *GeoGebra* para visualizar funções, áreas e o conceito de integral.

Introdução:

Você teve a oportunidade de visualizar a integral como a área sobre uma curva em um processo limite (Integral de Riemann) utilizando o programa GeoGebra. Apesar de serem definições recentes (séc. XVIII), essas idéias surgiram muito antes (por volta do séc. III a.C.) com Arquimedes e Eudoxo e seu método da exaustão. Um dos problemas clássicos em que Arquimedes trabalhou, usando o método da exaustão, é o da quadratura da parábola. Vamos trabalhar com algumas destas idéias.

1ª PARTE:

a) Construa no GeoGebra as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 5$.

b) Defina os pontos de interseção A e B (sendo B no primeiro quadrante) de $f(x)$ e $g(x)$. Selecione o botão (Interseção de Dois Objetos) e depois clique na reta e na parábola (ou clique em suas expressões na janela de álgebra).

c) Desenhar o triângulo ABP, sendo P um ponto de $f(x)$, tal que a área seja máxima.

Para encontrar este ponto vamos usar o GeoGebra.

- Crie um seletor como nome **a** e seu incremento de 0.001.
- Entre com o ponto **P=(a,f(a))**.
- Entre com a tangente de $f(x)$ no ponto C (Use o comando: **h(x)=tangente[a,f]**)
- Defina o triângulo ABP usando o comando **polígono[A,B,P]**. Repare que na janela de Álgebra vai aparecer **polígono1=10.13** que é a área do triângulo ABP, dependendo do valor de seu seletor.
- Agora, vá no menu *Opções* > *Arredondamento* > *15 Casas Decimais*. Aqui queremos uma boa precisão para o ponto.
- Agora arraste o seletor e verifique a área do triangulo ABP ("polígono1"). Identifique o ponto P para o qual a área é máxima.

P=

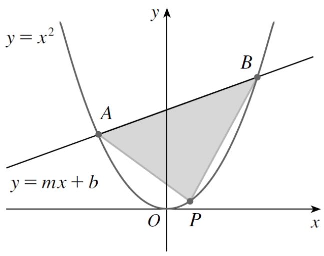
Questões:

1. Que relações existem entre a tangente $h(x)$ e a reta $g(x)$?

2. Que relação há entre as abscissas dos pontos A, B e P?

Vamos verificar essas conjecturas usando o GeoGebra.

Suponha que a reta y=mx+b intercepta a parábola y=x² nos pontos A e B, conforme a figura.



- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Crie 3 seletores e os nomeie de **m**, **b** e **a.**
- Defina as funções $f(x)=x^2$ e $g(x)=mx+b$.
- Entre com os pontos **A** e **B** das interseções de $f(x)$ e $g(x)$.
- Vamos fazer algumas contas. Determine algebricamente a abscissa (x_p) do ponto P que maximiza a área do triângulo ABP para m e b genéricos[8]. (Dica: encontre as abscissas de A e B genéricas e utilize seus conhecimentos de Geometria Analítica para determinar o ponto médio).

- Entre com o ponto **P(x_p, f(x_p))**, trocando o x_p (que depende dos parâmetros) pela expressão que você encontrou.
- Entre com o triângulo ABP e verifique se o ponto encontrado satisfaz o problema.

2ª PARTE:

Relação de Arquimedes

Arquimedes demonstrou que "A área de um segmento parabólico[9] é 4/3 da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela à base".

1 – Usando seus conhecimentos de Integral, calcule o valor do segmento parabólico AOB.

2 – Calcule a área do segmento parabólico AOB, no GeoGebra. Use o comando: **Área=Integral[f(x),g(x),a,b]**, onde f(x)>g(x) e **a** e **b** são os valores máximo e mínimo do intervalo. Para entrar apenas com a coordenada x de um ponto M, basta digitar **x(M)**.

[8] Exercício 13, p. 364, Stewart, vol. I.

[9] Segmento parabólico é a região delimitada por uma corda e um arco de parábola, conforme ilustrado na figura.

3 – Confirme a relação de Arquimedes para as áreas do segmento parabólico e do triângulo inscrito de área máxima: Entre com o comando **Arquimedes=(4/3)*polígono1** e mova os seletores para verificar que as entradas **Arquimedes** e **Área** se mantêm iguais.

Comentários:

Esta atividade foi adaptada de Stewart (2003). O professor disponibilizou os três horários para a realização da mesma.

Na primeira parte do roteiro, os alunos representaram no GeoGebra os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 5$. Em seguida, marcaram os pontos de interseção (***A*** e ***B***) e definiram um ponto ***P*** contido no gráfico de *f* e entre os pontos ***A*** e ***B***. Então, investigaram quais as coordenadas de ***P*** para que a área do triângulo ***ABP*** seja máxima (Figura 37). Propomos, ainda, que investigassem relações entre a reta tangente à função *f(x)* por ***P*** e a função *g(x),* e, também, entre os pontos ***A***, ***B*** e ***P***.

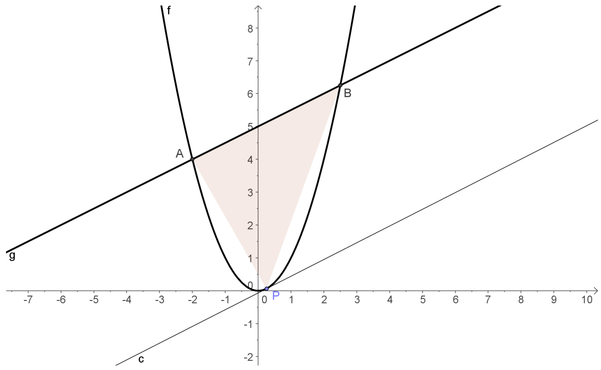


Figura 34 – Representação para a primeira questão da décima primeira atividade

A partir das discussões, todos os alunos presentes perceberam que, no ponto de área máxima a tangente é paralela ao gráfico de *g(x)*. A segunda questão demorou um pouco mais, entretanto, também conjecturaram que a abscissa de ***P*** é ponto médio de ***AB***.

Uma dúvida que surgiu dessa exploração (prevista, mas não presente no roteiro) foi o porquê de a área máxima acontecer quando temos a tangente paralela. Apesar de ter instigado o debate, poucos alunos se envolveram (em torno de 10). O restante preferiu continuar a trabalhar nas outras questões. Dos que participaram do debate, nenhum conseguiu associar a área máxima a partir da geometria plana. Como o tempo se estendeu nesta questão, preferimos direcionar o debate lembrando que, como ***AB*** está fixa, a área será maior quanto maior for a distância de ***P*** à reta que passa por ***AB***. A partir dessas informações eles conseguiram, finalmente, concluir que isto ocorre quando a tangente for paralela à base (***AB***) do triângulo.

A segunda parte buscava verificar as conjecturas levantadas pelos alunos sobre as possíveis relações. No GeoGebra, utilizaram os seletores para “provar” a conjectura geometricamente. Uma das questões do roteiro pedia para calcular a abscissa de ***P*** em função de *m* e *b*. Nesse caso, usaram os conhecimentos de Ensino Médio.

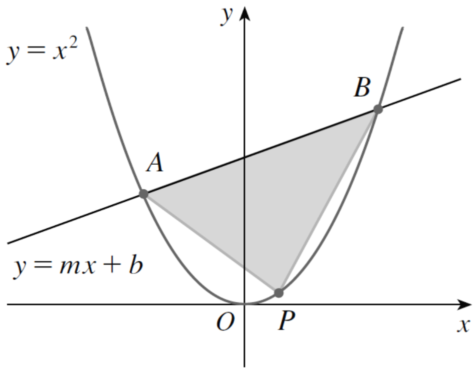


Figura 35 – Ilustração da segunda parte da décima primeira atividade

Um aluno ao tentar descobrir as coordenadas de ***A*** e ***B*** iniciou o seguinte procedimento:

$$x^2 = mx + b$$

$$x^2 - mx = b$$

$$x(x - m) = b$$

$$x = b \text{ e } x = m$$

Este é apenas um exemplo de dificuldades que surgem pela falta de uma matemática elementar sólida, conforme preconizam alguns autores (FROTA, 2006; LACHINI, 2001; NASSER, 2007).

Uma observação importante é que, pelo fato de esta atividade ser aplicada próximo ao fim do período letivo, o elevado número de provas e trabalhos de outras disciplinas acabou por tirar a atenção de alguns alunos (em torno de 10) nas últimas questões da tarefa. Talvez por esse motivo, metade dos presentes não realizou essas atividades e se ausentaram do laboratório antes do fim do horário.

Referências

BARUFI, Maria C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo, 1999. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

BORBA, Marcelo C. e PENTEADO, Miriam G. **Informática e Educação Matemática***.* Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

____. *Pesquisa em Informática e Educação Matemática*. *In:* Dossiê: a pesquisa em Educação Matemática, Educação em Revista, *Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.*

BORBA, Marcelo C. e VILLARREAL, Mónica E. **Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking**: Information and Comunication Thechnologies, Modeling, Experimentation and Visualization. USA: Springer (Mathematics Education Library). 2005.

FROTA, Maria Clara R. *O pensar matemático no ensino superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos*. Belo Horizonte, 287p., 2002. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais.

FROTA, Maria Clara R. INVESTIGAÇÕES NA SALA DE AULA DE CÁLCULO. In: **29ª Reunião Anual da ANPEd**, 2006, Caxambu. EDUCAÇÃO, CULTURA E CONHECIMENTO A CONTEMPORANEIDADE: Desafios e Compromissos. Caxambu: ANPEd, 2006. v. 1. p. 1-14.

GUZMÁN, Miguel de. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2., 2002, Hersonissos. *Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*. Hersonissos: University of Crete, 2002. p.1-24.

LACHINI, Jonas. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LACHINI, Jonas e LAUDARES João B (orgs). ***Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo****.* Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 146-188.LÉVY, P*. As tecnologias da inteligência:* o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993. 208 p. (Coleção Trans).

LÉVY, P*. As tecnologias da inteligência:* o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993. 208 p. (Coleção Trans).

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica.* 12. ed. Campinas: Papirus, 2006. Cap.1, p.11-65. 173 p. (Coleção Papirus Educação).

NASSER, Lilian. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG : SBEM, 2007.

REZENDE, Wanderley M. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, N.; CUNHA, M.(org) *Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios de epistemologia e didática.* Escrituras, São Paulo, 2003.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume I. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

VILLARREAL, Mónica E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1999. 402 f.

Bibliografia sugerida

Livro: Cálculo com aplicações: Atividades Computacionais e Projetos.
Autoras: Vera L. X. Figueiredo, Margarida P. Mello e Sandra A. Santos. Coleção IMECC, Unicamp. Campinas – SP. 2005.

Comentários: Este livro foi escrito por professoras que lecionam Cálculo há vários anos na Unicamp. As autoras sugerem três caminhos para trabalhar o Cálculo: aplicações, projetos e atividades computacionais. A vivência das autoras com a ferramenta computacional durante anos gerou este apanhado com atividades que varrem os diversos conteúdos do Cálculo. Segundo elas, "a dinâmica da Oficina de Trabalho estabelecida para a apropriação da ferramenta computacional pela equipe desencadeou questionamentos importantes: como melhorar o ensino e aprendizagem? Como provocar a reflexão por parte do aluno?" (FIGUEIREDO, MELLO e SANTOS, 2005, p.6).
Este é uma fonte rica de experiências já vivenciadas que podem ser utilizadas no laboratório e, inclusive, adaptadas para a adequação a outros software como o GeoGebra.

Livro: Cálculo. Volume I.
Autor: James Stewart. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

Comentários: Stewart concebe seu livro integrando o uso de calculadoras gráficas e/ou computadores com *software*s gráficos na resolução de muitos de seus exercícios (neste caso a proporção de exercícios que sugerem o uso de mídias eletrônicas é bem maior que no livro de Edwards e Penney (1997); em muitos casos, mais que a metade das questões de uma seção). O autor usa os dois ícones  e 

para identificar as atividades que devem ser resolvidas, respectivamente, com o auxílio de *software*/calculadora gráfica e um sistema algébrico computacional[10] (o autor sugere *Derive*, *Maple*, *Mathematica* ou a calculadora gráfica *TI-92*).

Livro: Cálculo e Aplicações
Autores: HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M.; LOCK, P. F.; FLATH, D. E *et al*. Ed. Edgard Blücher. São Paulo, 1999.

Comentários: O foco do livro escrito por Hughes-Hallett *et al* (1999) são as aplicações. Ele é rico nelas e perpassa por diversas áreas como economia, biologia, física, dentre outras, mas os autores também sugerem a utilização de recursos gráficos computacionais. No seu texto, os autores se apossam de expressões próprias dos programas computacionais como, por exemplo, usar "zooming" em gráficos de funções.

[10] CAS é a sigla utilizada para designar *Computer Algebra System*.