OSVALDO HONÓRIO DE ABREU

DISCUTINDO ALGUMAS RELAÇÕES POSSÍVEIS ENTRE INTUIÇÃO E RIGOR E ENTRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL NO ENSINO DE LIMITES E CONTINUIDADE EM CÁLCULO I

OURO PRETO
2011

OSVALDO HONÓRIO DE ABREU

DISCUTINDO ALGUMAS RELAÇÕES POSSÍVEIS ENTRE INTUIÇÃO E RIGOR E ENTRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL NO ENSINO DE LIMITES E CONTINUIDADE EM CÁLCULO I

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

OURO PRETO
2011

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISCUTINDO ALGUMAS RELAÇÕES POSSÍVEIS ENTRE INTUIÇÃO E RIGOR E ENTRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL NO ENSINO DE LIMITES E CONTINUIDADE EM CÁLCULO I

Autor: Osvaldo Honório de Abreu

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

____

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis - UFOP - Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Antônio Olímpio Júnior – UFJF

____

Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel - UFOP

2011

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda a minha família, amigos e em especial à minha futura esposa Thaís, pelo apoio, colaboração e paciência durante esta jornada.

Agradecimento

A Deus, princípio de todas as coisas.

Aos meus familiares, por todas as oportunidades que posso me lembrar.

Novamente aos meus familiares, pelas oportunidades que não posso me lembrar.

Ao Dr. Frederico da Silva Reis, meu orientador, pelo apoio incondicional.

Ao amigo Fredão, pelo impulso nesta jornada maravilhosa. Valeu “brô”!!!!

Aos professores Dr. Antônio Olímpio Junior e Dr. Felipe Rogério Pimentel por aceitarem o convite de contribuir com este trabalho.

A todos os professores do Mestrado por se tornarem uma referência em minha vida profissional.

Aos meus amigos do mestrado: Daniel, Dona Kelly e Dona Lílian. VALEU!!!

À nossa coordenadora do mestrado, profa. Dra. Ana Cristina, mas que aqui me reservo o direito de chamar de minha amiga Ana.

Aos amigos do Uni-BH, pelo apoio, e em especial à nossa coordenadora profa. Rosicler Miranda, que não mediu esforços para eu pudesse concluir o Mestrado.

E, finalmente, ao “Pelotão”.

RESUMO

Partindo de trabalhos de pesquisadores que apontam as dificuldades que envolvem o ensino e a aprendizagem do cálculo diferencial e integral, em particular o cálculo I, apresentamos neste trabalho algumas relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual manifestadas por alunos de cálculo I no estudo de limites e continuidade. Partindo de uma breve contextualização histórica do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral para a abordagem de limite e continuidade em alguns livros didáticos, trabalhamos com uma amostra de 56 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto. Embasados nos conceitos de imagem conceitual e definição conceitual, apresentamos algumas considerações sobre as relações destas com, respectivamente, a intuição e o rigor presentes nas considerações de nossos colaboradores na pesquisa.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Cálculo. Educação Matemática. Intuição. Rigor. Imagem Conceitual. Definição Conceitual.

ABSTRACT

Based on works by researchers who show the difficulties that involve teaching and learning of differential and integral calculus, in particular the calculus I, this paper introduced some relationships between intuition and rigor and between image and concept definition manifested by students of calculus I in the study of limits and continuity. Starting with a brief historical background of the development of differential and integral calculus to approach of limit and continuity in some textbooks, we work with a sample of 56 students in courses of Degree in Mathematics and Bachelorship of Statistics in University of Ouro Preto (UFOP). Based upon the concepts of concept image and concept definition, presented some considerations about their relationships with, respectively, intuition and rigor respectively, in the considerations our collaborators in the research.

KEY WORDS: Calculus Teaching. Mathematics Education. Rigor. Intuition. Concept Image. Concept Definition.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Sumário

Capítulo 1

APRESENTANDO O TRABALHO

"Há uma idade em que se ensina o que se sabe; mas vem em seguida outra, em que se ensina o que não se sabe: isso se chama *pesquisar*."

Roland Barthes

1.1 Introdução

Meu primeiro contato com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I foi como estudante de graduação em Física, na Universidade Federal de Minas Gerais, em 1985. À época a disciplina de Cálculo I era ministrada em um contexto que era popularmente chamado, por professores e alunos, de "aulão". Estudantes dos mais diversos cursos que deveriam cursar a disciplina de Cálculo I assistiam às aulas em enormes auditórios e as turmas eram divididas, invariavelmente, apenas pela ordem de matrícula; ou seja, num "aulão" tínhamos alunos dos mais diversos cursos da área de exatas (engenharias em suas diversas modalidades e as licenciaturas de Matemática, Física e Química) assistindo a uma mesma aula. Era difícil para o professor, senão impossível, contextualizar qualquer exposição, pois os interesses dos alunos eram os mais variados possíveis.

Ainda que naquela época não tenham sido divulgadas pesquisas de destaque que pudessem compreender o motivo para o número elevado de reprovações na disciplina de Cálculo I, parecia consenso entre alunos e os próprios professores, que a prática das aulas neste regime do "aulão" pudesse estar diretamente ligada ao elevado número de reprovações. Como estudante, tínhamos uma dificuldade muito grande de verbalizar qualquer tipo de questionamento, devido às dimensões do espaço físico da sala de aula, e principalmente pelo caráter "genérico" da aula. Lembrando que uma mesma aula deveria atender aos mais diversos interesses, não raro as aulas acabavam ministradas com uma característica de "generalidade", atendendo a todos, mas satisfazendo a poucos.

Felizmente este ambiente durou pouco no meio acadêmico da UFMG, embora posteriormente constatasse que ele não fosse exclusividade daquela instituição. Ainda que pouco utilizado nas instituições particulares de ensino superior, a solução dos "aulões" mostrou-se uma saída "corriqueira" em algumas instituições públicas.

Minha experiência acadêmica como aluno da graduação na UFMG encerrou-se em 1987, quando me transferi para o curso de Licenciatura em Matemática da então FAFI-BH – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Belo Horizonte (atual Centro Universitário de Belo Horizonte – UNIBH). Com aulas ministradas em turmas de não mais que 50 (cinqüenta) alunos, a disciplina de Cálculo I tinha ementa e objetivos específicos para atender à formação dos licenciandos em Matemática e, principalmente, uma dinâmica de aulas expositivas com foco específico na formação destes futuros professores.

Destacando a tradição da instituição na formação de professores, a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática era construída como um contraponto à prática comum da estrutura curricular "3 +1" (assim conhecida por contemplar 3 anos iniciais de disciplinas de Matemática Pura e 1 ano final de disciplinas de Práticas Pedagógicas). A carga horária de disciplinas de Práticas Pedagógicas estava distribuída ao longo de todo o curso. Esse currículo, longe de ser considerado pioneiro era ao menos pouco usual entre os cursos de licenciatura na década de 1980.

Talvez motivado exatamente por sua vocação centrada nos preceitos da Educação, as aulas para turmas com muitos alunos não se enquadravam nos moldes propostos pela instituição. Como aluno, pude então pela primeira vez, traçar um paralelo entre a antiga modalidade dos "aulões" de Cálculo I e esta proposta que, até o momento, era novidade em minhas atividades discente.

Posteriormente, após a conclusão de minha Especialização em Análise de Sistemas, também na FAFI-BH, fui convidado para ministrar aulas de Cálculo Vetorial nesta mesma instituição. Era 1992 e, após algumas modificações e adequações, o currículo continuava em sua essência o mesmo que tive a oportunidade de vivenciar como estudante, porém agora, aparecia a oportunidade de vivenciá-lo como professor. Em 2001, ministrei pela primeira vez a disciplina de Cálculo I. Chegou finalmente o momento esperado para uma comparação entre a visão discente e a visão docente para com a disciplina.

Num primeiro questionamento como professor, mas sem me preocupar em validar cientificamente as observações, pude constatar a dificuldade dos alunos com as disciplinas de Cálculo. Aparentemente havia uma distância acentuada entre a postura típica do aluno de Ensino Médio e as habilidades desejadas para um melhor aproveitamento do curso no Ensino Superior. Este "distanciamento", na falta de uma denominação mais adequada, se mostrava de forma mais acentuada exatamente na disciplina de Cálculo I.

Como professor, podia avaliar um tipo de ruptura entre os conceitos que procurava ensinar em minhas aulas e a forma como o aluno demonstrava sua compreensão sobre o assunto. Havia um descompasso entre um conceito formalmente apresentado e a maneira como o aluno se apropriava deste conceito. Infelizmente nos faltava algo que pudesse compreender de maneira adequada este descompasso. Faltavam, além de uma postura "mais investigadora" para com a questão, todos os conceitos teóricos que permitissem qualquer tipo de diagnóstico ou, pelo menos, uma tentativa de identificar de forma adequada a origem para este na comunicação professor - aluno. Esta questão me acompanhou de forma angustiante durante minha vida profissional e, de maneira recorrente, enquanto lecionava a disciplina de Cálculo I.

Ministrando a disciplina de Equações Diferenciais (chamada de Cálculo Diferencial e Integral IV), novamente pude avaliar e perceber esta particularidade no ensino da disciplina. Invariavelmente os alunos conseguiam, até sem maiores dificuldades, resolver questões que envolviam as derivadas e integrais. A dificuldade aparecia no momento de contextualizar estas questões. Os alunos resolviam as equações diferenciais propostas, mas não relacionavam qualquer problema (físico, químico, biológico, etc.) à equação diferencial correspondente.

Minha prática pedagógica mostrava que esta "modelagem" não se processava de maneira natural, ou seja, requeria um pouco mais de prática e exercício, porém os alunos resolviam problemas que envolviam as derivadas, mas se mostravam incapazes de relacioná-las ao seu contexto mais elementar de taxa de variação; ou seja, derivavam de maneira algorítmica, porém não compreendiam o significado da operação, novamente manifestando o mesmo descompasso entre as operações algorítmicas e os conceitos e as definições.

Na tentativa de resolver a questão, acabei me concentrando na questão do "rigor" com o qual a disciplina poderia ou deveria ser ministrada e, paralelamente, avaliava a "intuição" dos alunos ao abordarem as questões e problemas.

Em 2008, como aluno da disciplina eletiva "Educação Matemática Superior" do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, pude ter contato pela primeira vez com as perspectivas do "Advanced Mathematical Thinking" (Pensamento Matemático Avançado).

Mais especificamente as noções de imagem conceitual[1] e definição conceitual[2], conforme apresentadas em alguns trabalhos de David Tall e Shlomo Vinner, mostravam-se como um aporte teórico interessante para os nossos questionamentos. Estes autores, devido a sua relevância em nossa pesquisa, nos acompanharão ao longo de toda a nossa jornada merecendo um capítulo à parte em nosso trabalho.

Nosso objetivo inicial será investigar, tanto quanto possível, algumas destas questões que nos acompanharam, tomando como ponto de partida a imagem conceitual e a definição conceitual que o aluno desenvolve ao tratar alguns assuntos fundamentais do Cálculo I.

Entendemos, na perspectiva de David Tall e Shlomo Vinner, as imagens conceituais como sendo os processos e imagens mentais relacionados à aquisição de um conceito e as definições conceituais como sendo os processos formais e lógicos relacionados à construção deste conceito.

Em particular, pretendemos abordar o assunto segundo dois aspectos que, para o nosso trabalho, podemos classificar como cruciais: os conceitos de "Limite e Continuidade" de funções reais de uma variável.

Admitindo-se a existência daquela distinção, basicamente a definição conceitual trata do conceito formalmente definido, ou seja, a matemática no seu contexto lógico e formal. A imagem conceitual diz respeito ao aspecto cognitivo sobre o qual o aluno constrói este conhecimento. Sobre este aspecto é importante levarmos em conta a particularidade de cada aluno na forma como ele constrói este conhecimento. Isto se dá, às vezes de forma equivocada, a despeito de qualquer análise formal que se tenha construído durante a aula.

Há, normalmente, um *gap* entre a imagem conceitual e a definição conceitual, o que não significa, necessariamente, algo errado. Podemos inclusive discutir em nosso trabalho como poderíamos aproveitar a imagem conceitual pela qual o aluno constrói o seu conhecimento e aplicar a definição conceitual como suporte para o aprimoramento e refinamento desta imagem conceitual. Não cabe uma "desconstrução" da imagem conceitual e sim, o seu aprimoramento à luz da definição conceitual.

---

[1] Tradução livre de *concept image*, também chamada por alguns autores de imagem do conceito ou ainda conceito imagem.

[2] Tradução livre de *concept definition*, também chamada por alguns autores de definição do conceito ou ainda conceito definição.

Voltamos aqui ao proposto no início, onde apresentamos a realidade de algumas instituições que promovem aulas para vários alunos que, dependendo de sua formação e escolha profissional, construirão a imagem conceitual de formas muito diversas entre si.

Em uma sala de aula de dimensões teatrais é muito difícil, senão impossível, atingir cada uma destas imagens conceituais. Torna-se, portanto, difícil avaliar a implicação desta imagem conceitual que o aluno constrói para a formação e aprimoramento da definição conceitual. Iremos retomar e aprofundar esta discussão nos capítulos seguintes.

1.2 Iniciando uma discussão sobre o ensino de Cálculo

Há muito que se pesquisar no ensino de Cálculo. Principalmente quando consideramos que na grande maioria das salas de aula o “fazer pedagógico” está, normalmente, direcionado a uma abordagem livresca e centrado no professor cuja função é unicamente transmitir conhecimento a partir de reprodução / memorização seguido de repetição à exaustão de exemplos.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, doravante denominada apenas Cálculo I, está presente no currículo das Engenharias em suas diversas modalidades e nas Licenciaturas em Matemática, Física e Química. O Cálculo I assume um papel fundamental dentro do ensino de Matemática Superior com inserção ainda nas ciências biológicas, com disciplinas de introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, e nas ciências econômicas e sociais, com disciplinas de Cálculo Aplicado.

O ensino de Cálculo tem sido tema de importantes trabalhos. Tradicionalmente ligado a um elevado número de reprovações, tem despertado o interesse de diversos pesquisadores. Frescki e Pigatto (2009, p. 911) citam a contribuição de diversos autores que se concentraram nas dificuldades envolvendo o ensino e a aprendizagem do Cálculo, tais como Cury (2005), Flemming e Luz (1999), Nascimento (2002), Soares e Sauer (2004), Barbosa (2004), os quais apontam problemas que vêm se acumulando desde o ensino básico até culminarem no ensino superior:

> Estes problemas, conforme os pesquisadores supracitados, resultam da forma como os conteúdos de Matemática são estudados nos ensinos fundamental e médio, com muitos “macetes” e fórmulas decoradas, sem compreensão dos conceitos básicos.

De quem é a culpa? Do sistema? Do professor? Do aluno? Dos livros didáticos? Não queremos aqui apontar quem é ou não o culpado, mas sim afirmar que a responsabilidade de mudar esse quadro que aí se encontra é, de fato, de todos que de alguma forma estão envolvidos nesses processos de ensino e de aprendizagem.

Também parece não haver um consenso sobre como significar, de maneira satisfatória, um número reconhecidamente elevado de reprovações nas disciplinas de Cálculo. A abordagem didática tradicional de alguns professores ("binômio quadro-giz") ou até mesmo uma preparação inadequada do aluno no Ensino Médio são temas recorrentes nessas explicações.

Em nossa concepção, qualquer uma dessas explicações, quando consideradas isoladamente, pode ser uma tentativa de reduzir a uma causa única um problema que pode, e eventualmente tem, múltiplas explicações. Seria simples, ou até mesmo simplório, avaliarmos segundo apenas uma única perspectiva. O aspecto algorítmico e repetitivo do ensino de Cálculo também aparece na conclusão de alguns destes estudos. Segundo Frota (2001, p. 91):

> Parece haver consenso que o ensino da Matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz a aprendizagem de procedimentos e não incentiva ao conhecimento matemático relacional que leva ao indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados.

Sobre esse aspecto, acreditamos que a repetição à exaustão de um exercício (ou um grupo deles) pode ser de pouca ajuda no desenvolvimento das habilidades do estudante; principalmente se esse procedimento estiver dissociado de algum contexto que seja significativo para o aluno.

Ainda em relação ao procedimento, temos a contribuição de Barufi (1999, p. 162):

> A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e "odiada" pelos professores: Pra que serve isto?

Ainda preocupada com a questão do aspecto procedimental em detrimento do aspecto significativo da atividade, e focando em uma das múltiplas interpretações para o conceito de derivada, Meyer (2003, p. 4) destaca:

> Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas

> funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal da derivada de uma função. Mas, freqüentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. Quando um estudante associa a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de derivada, o que é bastante frequente em nossos cursos de Cálculo, tal processo de significação não o impede de ter sucesso na realização de tarefas ditas operatórias, mas pode contribuir para o insucesso na realização de tarefas que envolvam aspectos conceituais.

Destacamos essa dicotomia envolvendo o procedimento e a significação, pois como veremos adiante, ela será de crucial importância em nosso trabalho.

Em nossa experiência como professor e também como aluno, pudemos atestar em grande parte, os problemas aqui levantados. Atuando na docência de Cálculo I, percebemos que os alunos têm realmente uma grande facilidade com exercícios que requerem, para a sua resolução, tão somente a repetição do processo de um “exemplo resolvido”. Normalmente, após a explicação teórica temos, por parte dos alunos, a solicitação da resolução de um exemplo. Notamos que, aparentemente, a maior parte destes alunos não se apropriou dos conceitos envolvidos na resolução do exercício. O exemplo serve apenas como um “receituário” para que eles possam resolver outros exemplos semelhantes; e por “semelhante” nos referimos a praticamente o mesmo exercício, mudando apenas alguns poucos dados. Qualquer atividade que extrapole esta possibilidade se constitui em uma fonte de grandes dificuldades.

Tal prática se torna mais evidente em disciplinas onde os conceitos do Cálculo I precisam ser realmente aplicados e, mais ainda, interpretados. Na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, por exemplo, o conceito de “taxa de variação” é tratado pelo aluno de forma totalmente desvinculada do conceito de derivada. A maior parte dos alunos não relaciona a derivada, que foi previamente “aprendida” por repetição à exaustão, com o conceito de taxa de variação de uma função.

Ainda que tenhamos, como professor, a preocupação de, quando possível, evitarmos a aplicação de listas com exercícios repetidos à exaustão, notamos que os esforços neste sentido se tornam inócuos ou pouco efetivos. Quando as atividades propostas precisam ser contextualizadas e interpretadas, o que, em nosso entendimento constituem as atividades de maior possibilidade didática, alguns alunos simplesmente “copiam” a resolução dos exercícios. Normalmente, esses alunos assim o fazem como uma tentativa de solução reducionista pensando em generalizações que possam ser aplicados em exercícios que, no seu entendimento, possam ser semelhantes. A proposta do aluno seria a de se concentrar no método de resolução e não na idéia da solução.

Em atenção a esse comportamento dos alunos, temos a contribuição de Pinto (2001, p. 125) cuja pesquisa foi voltada para o ensino de Análise Real, mas que, em nosso entendimento, consegue depreender o comportamento típico de alguns alunos de Cálculo I que buscam no procedimento uma forma única de aprendizagem:

> Estudantes são provenientes de um sistema educacional onde o ensino de Matemática está principalmente centrado em cálculos e na manipulação de símbolos, bem como na exploração de conceitos a partir de suas propriedades. A análise formal passa a requerer dos alunos um trabalho com definições que envolvem quantificadores múltiplos e lógica proposicional. Estudantes podem fazê-lo como se estivessem iniciando uma construção nova, compartimentalizada das imagens prévias deixando a reconciliação com as experiências anteriores para depois, ou, partindo do conhecimento prévio, reconstruindo-o.

Como professores de Cálculo, não podemos também deixar de assumir a parcela de culpa que nos cabe neste processo. Onuchic (2009, p. 171) assim nos apresenta:

> Sempre houve muita dificuldade para se ensinar Matemática. Apesar disso, todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para se entender o mundo e nele viver. Como elemento mais importante para se trabalhar a Matemática é o professor de Matemática e este não está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções, as dificuldades nesse processo têm aumentado muito.

Novamente Onuchic (2009, p. 173) retorna à prática pedagógica de alguns professores e, em especial, à sua possibilidade de capacitação, de forma ainda mais incisiva:

> Sabe-se que a visão da sala de aula de Matemática, apresentada pelos documentos e que promove mudanças radicais na prática, requer uma forte re-educação dos atuais professores. Embora uma implementação adequada requeira mudanças políticas e estruturais, a natureza do desenvolvimento profissional do qual os professores participam, fortemente determinará a extensão da mudança que os alunos experimentaram em sala de aula.

Ainda questionando a prática pedagógica dos professores de Cálculo, Reis (2001, p. 23) reafirma:

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do

> Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver.

Acreditamos que tais questões devem ser objeto de reflexão por parte de todos os "atores" dos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo: nós, professores, que devemos refletir / repensar o papel do Cálculo na formação matemática de nossos alunos; e alunos, que devem refletir / reconhecer a importância da construção dos conceitos do Cálculo para sua formação matemática.

1.3 Apresentando nossa Questão de Investigação

Como observamos então, a investigação sobre definições conceituais e imagens conceituais pode revelar interessantes elementos que contribuam para a discussão do ensino de Cálculo. Nessa perspectiva, elaboramos a seguinte questão:

Que relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual podem ser manifestadas pelos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem de "Limites e Continuidade" em Cálculo I?

Esta questão se enquadra na área de pesquisa de Educação Matemática no Ensino Superior e, portanto, na linha de pesquisa "Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática" desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

1.4 Apresentando nossos objetivos

- Mais geralmente, investigar os processos de ensino e de aprendizagem de "Limites e Continuidade" em Cálculo I, na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior;

- Mais especificamente, levantar hipóteses e categorias de análise de algumas relações estabelecidas por alunos entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual nos processos de ensino e de aprendizagem destes tópicos.

Como produto educacional, a partir da presente dissertação, produzimos um conjunto de atividades relacionadas a "Limites e Continuidade" que pode ser utilizada em Cálculo Diferencial e Integral I.

1.5 Apresentando nosso trabalho

Após o presente capítulo introdutório, passamos a discutir alguns trabalhos relacionados ao ensino de "Limites e Continuidade" no Capítulo 2, no qual também apresentamos uma breve análise de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral utilizados em universidades brasileiras, com o intuito de observar a sua abordagem daqueles conceitos.

No Capítulo 3, apresentamos alguns trabalhos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado dos quais destacaremos algumas conceituações importantes para a nossa investigação, especialmente para a análise dos nossos dados obtidos em nossa pesquisa.

Já no Capítulo 4, descrevemos nossa pesquisa em seu contexto, retomando a questão de investigação e os objetivos e apresentando os instrumentos de coleta de dados e os participantes de nossa pesquisa de campo, dentro de uma linha metodológica de investigação.

No Capítulo 5, apresentamos os dados obtidos em nossa pesquisa de campo, analisando-os na perspectiva da identificação de categorias emergentes relacionadas à nossa questão de investigação.

Finalmente, nas Considerações Finais apontamos um conjunto de respostas à presente investigação, bem como fomentamos questionamentos que podem ser focos de investigações futuras.

Capítulo 2

SOBRE O ENSINO DE LIMITES E CONTINUIDADE EM CÁLCULO: DA HISTÓRIA PARA A ABORDAGEM DOS LIVROS DIDÁTICOS

"Não se assinala o caminho apontando-o com o dedo, mas sim caminhando à frente".

Provérbio Macua – Moçambique

2.1 Introdução

Faremos neste capítulo uma breve exposição sobre o panorama do ensino de Cálculo no cenário da Educação Superior. Sem a pretensão de esgotar o assunto, buscaremos levantar alguns problemas apontados em trabalhos de estudiosos e pesquisadores. Cabe salientar que este capítulo não se propõe a procurar qualquer tipo de solução para tais problemas. O objetivo é tão somente contextualizar o ensino e eventuais dificuldades apontadas.

Concluiremos com uma breve análise de alguns livros didáticos de Cálculo que, em nosso entendimento, são representativos enquanto diretrizes pedagógicas para os professores das universidades brasileiras, notadamente no que se refere à apresentação de Limites e Continuidade.

Para contextualizar começaremos com uma pequena abordagem histórica sobre o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, buscando destacar alguns aspectos relacionados aos conceitos de Limites e Continuidade os quais, em sua evolução, são bastante representativos de relações entre rigor e intuição no estabelecimento de definições e propriedades a eles relacionadas.

2.2 Um pouco da história do Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral, em uma primeira abordagem, pode ser dividido em dois grandes assuntos: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Oportunamente, quando conveniente, vamos nos referir a quaisquer desses aspectos sem nos preocuparmos com essas questões que, em nosso entendimento, têm caráter apenas didático.

Historicamente, o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral está relacionado ao "problema das tangentes". Ainda que seu estudo não se reduza apenas a essa abordagem, não há como negar que no início do desenvolvimento e da formalização do Cálculo a preocupação inicial era com a reta tangente a uma curva. Assunto recorrente na Grécia antiga, a reta tangente a uma curva era determinada de forma geométrica a partir de construções e desenhos e estava ainda longe dos aspectos procedimentais e, principalmente, dos aspectos conceituais que norteiam sua abordagem nos estudos do Cálculo atualmente. Cabe destacar que, ainda que sejam inegáveis as contribuições de Cauchy (1789 – 1857) e Weierstrass (1815 – 1897) no aprimoramento da notação de limite, ao discorrermos sobre o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral estamos, em última análise, discorrendo sobre o conceito de limite. Achamos oportuno destacar tal impressão, pois nesta breve visita histórica, estaremos também tratando de limites de maneira indireta. Não iremos separar o desenvolvimento histórico para o conceito e notação de limite do surgimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral como um todo.

Anteriormente ao problema das tangentes encontramos, ainda na matemática dos gregos, questões que seriam retomadas e analisadas de maneira mais rigorosa à luz do Cálculo Diferencial e Integral. Questões que envolviam o cálculo das áreas de figuras planas eram recorrentes. Arquimedes (287 – 212 a.C.) usou o chamado "método da exaustão" para calcular a área do círculo. O método da exaustão consistia em inscrever e circunscrever polígonos em uma circunferência aumentando o número de lados destes polígonos obtendo assim, por aproximações sucessivas, valores que "convergiam" para a área do círculo.

Reis (2001, p. 54) destaca a importância de Zenão e Arquimedes na história do Cálculo:

> Ao tentar descrever, mesmo que sucintamente, as origens e principais contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, torna-se quase que obrigatório iniciar por Zenão. Zenão viveu por volta de 450 a.C. e seus paradoxos dividem os historiadores em relação à sua interpretação e influência sobre a matemática grega. Outro grego importante foi Arquimedes (287 – 212 a.C.), cujo problema do traçado da reta tangente à espiral desencadeou a busca por métodos gerais de traçado de tangentes a curvas.

Mas foi apenas no século XVII que ocorreu a formalização do Cálculo Diferencial e Integral com os trabalhos de Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716).

Desenvolvidos de forma independente, estes trabalhos constituem um marco histórico para toda a Matemática e não apenas para o Cálculo Diferencial e Integral. Importante citarmos ainda as contribuições de Fermat (1601 – 1665) e Barrow (1630 – 1677). Sobre o primeiro é digna de nota a observação de Laplace (1749 – 1827) que cita aquele como sendo “o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial”.

Em 1666, Newton escreveu seu tratado sobre os *fluxions*, no qual ele associou o movimento de uma partícula sobre uma curva com duas linhas horizontal e vertical representadas em um sistema cartesiano. Essas linhas eram as *fluxões* de x e y associados ao tempo. Estavam apresentadas as primeiras noções de derivadas. Este estudo se desenvolveu principalmente entre os anos de 1666 e 1671, embora a primeira publicação tenha sido feita apenas em 1736.

Diferentemente de Newton, Leibniz se preocupou não com o movimento, mas apenas com “incrementos cada vez menores” das variáveis x e y. Historicamente, credita-se a ele a notação clássica dos incrementos diferencias dx e dy.

Newton desenvolveu seu trabalho com Cálculo Diferencial e Integral entre 1665 e 1666, quando a Universidade de Cambridge se encontrava fechada devido à epidemia de peste que assolava a Europa. Newton era aluno de Isaac Barrow (1630 – 1677) e, com a interrupção das atividades em Cambridge, acabou retornando para casa onde teve a oportunidade de refletir sobre as questões que discutia com seu mestre (Stewart, 2001, p. 105). É interessante observar que o trabalho de Newton foi o primeiro trabalho em que apareceu o conceito de limite. Ainda que este conceito tenha sido completamente diferente de como é interpretado hoje em dia, mesmo assim podemos observar as noções cruciais que envolvem a compreensão intuitiva para o “infinitamente pequeno” ou o “estar próximo de”.

Ainda que Newton tenha sido o primeiro a falar sobre limites, o fez de maneira intuitiva, o que, invariavelmente, poderia conduzir a erros de interpretação ou até de cálculo. Exatamente por isso, seu trabalho acabou sendo alvo de duras críticas.

Brito e Cardoso (1997, p. 138) destaca assim algumas das críticas enfrentadas por Newton e Leibniz após a publicação de seus trabalhos:

> Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente para os diferenciais de ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle

> (1652-1719), podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual à parte, pois uma grandeza *x* somada ao seu diferencial *dx* era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais eram manipulados diferentemente, conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon (1654 – 1722), com base no método Newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porem, não satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada.

As noções de Limites e Continuidade foram inicialmente trabalhadas de forma intuitiva por Newton e Leibniz para, a seguir, receberem um tratamento mais rigoroso, a partir dos trabalhos de Cauchy e Weierstrass, e de seus seguidores (EVES, 1995).

Reis (2001, p.59) se refere assim ao tratamento rigoroso dispensado por Cauchy à notação e refinamento na definição de limite:

> Após ser nomeado para o corpo docente da *École Polytechnique* de Paris em 1816, como professor da nova cátedra de Análise Matemática, Cauchy inicia um movimento de refinamento da teoria de limites e utiliza-a como base de uma nova e ampla disciplina ordenada rigorosamente, desenvolvida através de um conjunto consistente de definições e teoremas apresentados formal e logicamente, com uma notação una e coerente ao longo do texto de seu *Cours d'analise* (1821). Uma das principais contribuições de Cauchy foi uma definição de limite quase tão precisa quanto a que se tem hoje.

Reis (2001, p. 59), ainda sobre o trabalho de Cauchy, apresenta:

> Mas, talvez, a maior contribuição de Cauchy não esteja no rigor da definição de limite. A diferença fundamental em relação a muitos matemáticos anteriores é que estes concebiam o infinitésimo enquanto um número fixo, ao passo que Cauchy define-o claramente como uma variável dependente.

Podemos destacar a contribuição de Cauchy, no que diz respeito à formalização e notação, para a compreensão do "infinitésimo". Nos trabalhos precedentes faltava um maior rigor para o "infinitamente grande" e o "infinitamente pequeno". Newton e Leibniz apresentavam estes conceitos de maneira intuitiva o que, em alguns aspectos, poderiam conduzir a erros.

Baron e Bos (1985, p. 43), ao comentarem a transição do Cálculo para a Análise, destacam essa mudança fundamental na natureza do Cálculo, da seguinte forma:

> O Cálculo, por volta de 1700, era ainda essencialmente orientado para a Geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos

> algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras.

Estas pequenas considerações sobre a parte histórica do Cálculo têm o intuito apenas de sugerir que os aspectos do rigor e da intuição já se faziam presentes até mesmo na consolidação do Cálculo Diferencial e Integral como área de conhecimento. Vale lembrar que esta relação aparentemente dicotômica (rigor x intuição) nos acompanhará ao longo de nosso trabalho.

2.3 Alguns estudos sobre o ensino de Cálculo e de Limites e Continuidade

Não tendo a pretensão de esgotar o assunto, vamos apresentar alguns trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Após uma breve abordagem em nossa introdução, retomamos esta discussão selecionando alguns trabalhos que julgamos representativos frente às dificuldades do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo aqui é destacar as dificuldades com o Cálculo e, principalmente, mostrar como o assunto vem sendo discutido de forma recorrente em trabalhos e como tema em congressos. Concluímos com alguns trabalhos relacionados especificamente ao ensino e aprendizagem de Limites ou Continuidade.

Cury (2009, p. 223), ao comentar as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo, o faz de maneira direta e contundente associando àquelas o alto índice de evasão dos alunos em alguns cursos:

> As dificuldades encontradas por professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral estão entre as principais causas apontadas para a excessiva desistência e evasão encontradas em curso superiores da área de Ciências Exatas. Pesquisas sobre o ensino de Cálculo vêm sendo apresentadas em comunicações, dissertações e teses ao longo das últimas décadas, mas seriam necessários mais estudos sobre o tema para que pudéssemos vislumbrar mudanças nos cursos.

Cury (2009, p. 223) também destaca a quantidade de trabalhos voltados para as questões que envolvem as dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo:

> Fiorentini (1993) mostrou que, na produção brasileira de pós-graduação em Educação Matemática até 1991, apenas 19% das dissertações ou teses

> enfocavam o ensino superior. Dos 65 estudos sobre tópicos específicos do currículo, identificados por Fiorentini (1993), 15 envolviam o estudo de disciplinas do ensino superior e, destes, 10 tratavam do Cálculo Diferencial e Integral. A partir de então, com o aumento do ingresso de estudantes em instituições de ensino superior nos últimos dez anos, as dificuldades relativas à aprendizagem de Cálculo foram se tornando mais freqüentes e preocupantes, pois evidenciavam a falta de conhecimentos prévios ou a compreensão equivocada de assuntos estudados nos níveis anteriores. A divulgaão dos anais de congressos das áreas de Matemática Aplicada, Engenharia e Educação Matemática permite analisar os assuntos abordados e nota-se que a maior parte dos trabalhos sobre ensino superior se relacionam ao Cálculo.

Destacamos essa contribuição com o intuito de mostrar que o tema, de acordo com a autora, já se apresentava de forma recorrente em vários estudos. Notemos ainda que, apesar dessas contribuições, não se nota uma mobilização dentro da sala de aula. Estamos cientes das dificuldades e dos problemas envolvidos, mas aparentemente impotentes para promovermos mudanças substanciais em nossa prática pedagógica.

Algumas instituições que mantêm cursos na área de Ciências Exatas já sinalizam com mudanças. A disciplina de Cálculo I, normalmente ministrada no primeiro período, já tem sido precedida pelo chamado “Cálculo 0” (como uma disciplina específica, deslocando o Cálculo I para o semestre seguinte, ou até mesmo como um curso de nivelamento em horário extra curricular). Entendemos essa mudança como extremamente benéfica para o aluno e para o curso e apenas lamentamos que ainda não seja adotada em instituições que , devido ao alto índice de reprovação em Cálculo I, talvez pudessem se beneficiar dessa prática.

Nasser (2009, p. 43) cita diversos pesquisadores como Baldino (1995), Giraldo (2004), Tall (1991), Cury (2003) e Igliori (2003), e destaca a preocupação deles com o desempenho dos estudantes nas séries iniciais dos cursos que envolvem o estudo do Cálculo:

> Muitos trabalhos de pesquisa, nacionais e internacionais, têm ressaltado as dificuldades dos alunos nos ciclos básicos das universidades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. No grupo de Educação de Matemática no Ensino Superior (GT4) do I, II e III Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), houve uma predominância de artigos de pesquisa sobre a aprendizagem de Cálculo. Os índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo são, em geral, muito altos, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando seu curso universitário. Rezende (2003) e Baruffi (2009) estão entre os pesquisadores brasileiros que se preocupam com o baixo desempenho dos alunos em Cálculo, mas isso não é prerrogativa dos universitários brasileiros: há uma preocupação mundial com o fracasso em Cálculo, a

> qual deu origem ao movimento conhecido como “Calculus Reform”, na década de 80.

Ainda que a dificuldade da aprendizagem do Cálculo possa ter diversas causas, Igliori (2002) remete-se a Brousseau, que distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: um que se refere a limitações do próprio sujeito, que o autor se refere como sendo de origem ontogênica; outro que o autor diz como sendo de origem didática e que depende das experiências de aprendizado vivenciadas; finalmente aqueles de ordem epistemológica e que seriam inerentes ao conhecimento.

A partir desse trabalho de Igliori (2002), Nasser (2009, p. 43) destaca ainda, algumas reflexões acerca dos obstáculos na aprendizagem:

> - as concepções que ocasionam obstáculos no ensino da matemática são raramente espontâneas, mas advindas do ensino e das aprendizagens anteriores;
>
> - os mecanismos produtores de obstáculos são também produtores de conhecimentos novos e fatores de progresso;
>
> - o obstáculo está relacionado a um nó de resistência mais ou menos forte segundo os alunos, de acordo com o ensino recebido, pois o obstáculo epistemológico se desmembra frequentemente em obstáculos de outras origens, notadamente didáticos.

A apresentação desses trabalhos nos permite acreditar na relevância de nossa pesquisa. A preocupação com o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral é tema recorrente e objeto de estudo de várias pesquisas, como evidenciamos.

Especificamente, agora tentaremos delinear alguns estudos focados no ensino de Limites e Continuidade, tema específico de nossa investigação.

Começaremos destacando a dificuldade no ensino de Limites a partir da dificuldade, até mesmo histórica, de conceituá-lo de maneira formal. Conforme apresentado anteriormente, a noção intuitiva para limite acompanhou todo o desenvolvimento do Cálculo desde os trabalhos na Grécia Clássica até Newton. Não devemos esquecer que, até este último, apesar de sua inegável contribuição para o desenvolvimento do Cálculo, também teve dificuldade em apresentar a noção de limite e, nos seus primeiros trabalhos, teve que enfrentar duras críticas às suas primeiras publicações que tratavam do assunto.

Grosso modo, o ensino de Limites apresenta uma dificuldade que Cornu (1983) chamou de epistemológica. Neste primeiro contexto, temos o que poderíamos chamar de dificuldade inerente ao conceito de limite. Independente de qual maneira ou até o mesmo qual público pretendemos alcançar, o conceito de limite é, em si, complexo ao ser ensinado. Por sua vez, Tall (2002) destaca que os processos mentais requeridos para esta compreensão demandam certo amadurecimento cognitivo. Posteriormente, vamos destacar a chamada *deep intuition* (intuição profunda, em tradução livre) que, ao ser aplicada ao conceito de limite, irá requerer do aluno, uma compreensão que transcende sua definição pura e simples.

Normalmente, o conceito de limite aparece no primeiro período nos cursos de Licenciatura em Matemática e em cursos de Engenharia e, invariavelmente, são abordados como um pré-requisito necessário para a compreensão do cálculo das derivadas e das integrais. Vamos avaliar alguns livros de Cálculo oportunamente, mas vemos que, normalmente, o assunto é introduzido de maneira bastante intuitiva e, posteriormente, apresenta-se a definição formal. Naquele primeiro momento, costuma-se trabalhar conceitos como "estar próximo de" ou "tender para" e a representação gráfica é a mais utilizada.

Notemos que, se não abordada de maneira adequada, podemos pecar aqui com um excesso de informalidade e contribuir para a construção de uma imagem conceitual por vezes equivocada pelo aluno. Os termos utilizados nesta exposição costumam, quando utilizados no cotidiano, diferirem sobremaneira quando aplicados a conceitos matemáticos. Celestino (2008) nos traz a seguinte contribuição:

> Nós usamos palavras ou frases como convergência, fronteira, arbitrariamente próximo, tende a, e limite, quando trabalhamos com limites de funções. Os significados cotidianos dos termos podem influenciar as percepções dos estudantes sobre estes termos em um contexto matemático. Há uma ambigüidade na maneira como o conceito de Limite pode ser percebido. Pode-se focar no processo de aproximar o limite e, então, considerá-lo como um procedimento que nunca chega ao fim. Mas pode-se pensar no Limite como uma entidade estática com a quais funções podem ser comparadas.

Quando apresentamos o conceito de limite, utilizando a definição formal $\varepsilon - \delta$, não há como negar a complexidade que essa notação apresenta e, principalmente, o que o aluno necessita para compreendê-la. Zuchi (2005, p. 19), por exemplo, refere-se à noção de limite como sendo abstração forte e que esta deveria ser adiada para momento mais oportuno.

Já em relação ao ensino de Continuidade, na perspectiva do Cálculo, alguns pesquisadores (REIS, 2001, 2009) destacaram também as dificuldades em relação à abordagem do conceito e a definição formal, mesmos pontos já apontados no ensino de Limites. Entendemos, então, que é fundamental aprofundarmos a discussão sobre alguns elementos que dizem respeito à abordagem do ensino de Cálculo, o que faremos no próximo capítulo.

2.4 Destacando a abordagem de alguns livros didáticos de Cálculo

Apresentado um panorama geral do cenário em que se encontra o ensino e a aprendizagem do Cálculo, passaremos agora a uma pequena análise de alguns manuais de Cálculo, em particular, aqueles adotados em algumas universidades brasileiras (conforme pesquisa virtual de programas e ementas de disciplinas de Cálculo I) e que tratam do assunto "Limites e Continuidade" de funções reais de uma variável.

Cabe ressaltar que não pretendemos fazer qualquer tipo de "valoração" sobre o material didático e nem pretendemos promover qualquer tipo de *ranking* entre aqueles. Acreditamos no potencial didático de cada um deles e pretendemos constatar, se existirem, diferenças na abordagem dos referidos conteúdos.

Em função da proposta de nosso trabalho, vamos nos concentrar na apresentação dos conteúdos e na proposta das atividades segundo o rigor despendido. Avaliaremos, em contra partida, a eventual exploração de aspectos intuitivos proposta pelos autores. Como cenário para estas observações, tentaremos identificar como cada autor explora, em seu texto, as imagens conceituais e definições conceituais envolvidas na apresentação dos conteúdos.

Cabe destacar que procuraremos fazer considerações levando em conta nossa própria experiência didático-pedagógica com alguns destes materiais analisados. Acreditamos que isto em nada desabona o caráter investigativo e de isenção que permeia nossa pesquisa, mas estaremos tão somente apresentando "múltiplos olhares" sobre o material escolhido. Tivemos o privilégio de avaliá-los como professor e como coordenador de curso de Licenciatura em Matemática (no período de 1999 a 2001), sendo responsáveis pela análise de diversos materiais didáticos das mais diversas disciplinas que compunham a estrutura curricular do curso.

2.4.1 Os livros didáticos escolhidos

Vamos analisar 4 (quatro) manuais didáticos de Cálculo, iniciando pela abordagem dos “Limites” e concluindo com a abordagem de “Continuidade”:

1) **Cálculo A**. Diva Marília Flemming; Mírian Buss Gonçalves. Volume Único. São Paulo: Makron Books, 2006;

2) **Cálculo com Geometria Analítica**. Earl W. Swokowski. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999;

3) **Cálculo de uma variável**. Deborah Hughes-Hallet e outros. Volume Único. Rio de Janeiro: LTC, 2004;

4) **Cálculo**. James Stewart. Volume 1. São Paulo: Pioneira-Thompson Learning, 2005.

2.4.2 A abordagem de Limites

Como uma característica geral, quase todos os livros adotam uma mesma postura para a apresentação do conteúdo: uma primeira “noção intuitiva” para o limite partindo para a “definição formal”. Cabe ressaltar a utilização da “notação épsilon-delta” nesta formalização para a definição de limite. Notemos que essa postura difere um pouco da prática tradicional docente. Infelizmente, muitos professores acabam optando por uma apresentação que começa com a definição e, a seguir, partem para a resolução de exemplos. Esta conduta, que não privilegia uma abordagem contextualizada, pode refletir diretamente na forma como o aluno constrói sua imagem conceitual sobre o assunto, podendo inclusive não possibilitar ao aluno formar qualquer imagem conceitual que seja pertinente.

Em **Cálculo A**, Flemming e Gonçalves (2006) trazem os limites no Capítulo 3 – Limite e Continuidade. Os tópicos estão assim distribuídos: “Noção Intuitiva”; “Definição”; “Proposição (Unicidade do Limite)”; “Propriedades dos Limites”; “Exercícios”; “Limites Laterais”; “Exercícios”; “Cálculo de Limites”; “Exercícios”; “Limites no Infinito”; “Propriedades dos Limites Infinitos”; “Exercícios”; “Limites

Fundamentais"; "Exercícios". Observamos uma extensa exploração da noção intuitiva de limite, mas na apresentação do conteúdo, não temos uma descrição detalhada do assunto, apenas o objetivo do capítulo (FLEMMING e GONÇALVES, 2006, p. 70):

> O objetivo deste capítulo é dar uma definição de LIMITE de uma maneira intuitiva e também de uma maneira convencional. Vamos analisar as propriedades e teoremas referentes a limites de funções. Finalmente, definiremos a continuidade das funções usando limites.

Em nosso entendimento, as autoras declinam de uma ótima oportunidade para introduzir o assunto de uma maneira mais contextualizada.

Posteriormente, as autoras partem da função $y = 1 - \frac{1}{x}$ definida para todo $x \in \mathcal{R}^*$. São construídas duas extensas tabelas apresentando valores numéricos para as variáveis independente (x) e dependente (y), sendo que os valores para a variável x vão se tornando "arbitrariamente grandes" e "arbitrariamente pequenos". Claramente, o objetivo das autoras é mostrar que os valores assumidos pela variável y se "aproximam" do valor 1.

Na sequência, há uma representação gráfica onde vemos a assíntota $y = 1$ para o gráfico da função $y = 1 - \frac{1}{x}$. Podemos assumir que tanto as tabelas como os gráficos apresentados constituem uma primeira representação da imagem conceitual que o aluno começará a construir sobre limite.

Concluindo este primeiro exemplo, as autoras destacam (FLEMMING e GONÇALVES, 2006, p. 72):

> Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que:
> $y \to 1$ quando $x \to \pm\infty$.
> Denota-se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 - 1/x) = 1$.

Nesse procedimento, já é usada uma notação mais rigorosa para o conceito de limite, ainda que não tenha sido apresentada qualquer definição formal.

As autoras repetem os mesmos procedimentos para as funções $y = x^2 + 3x - 2$, $y = \frac{2x+1}{x-1}$, $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $y = 3x - 1$, sendo que, ao final de todas elas, é apresentada a notação $\lim\limits_{x \to \pm a} f(x) = L$.

Temos finalmente, a apresentação para a definição formal de limite (FLEMMING e GONÇALVES, 2006, p. 78):

> Seja $f(x)$ definida no intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos
> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Na sequência, é apresentado um exemplo com a função $f(x) = 3x - 1$, onde deve-se provar que $\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$ usando a definição.

Nas atividades propostas, o livro começa com uma bateria de 5 exercícios que associam o conceito de limite à interpretação gráfica. Esta prática, em nosso entendimento, contribui para uma melhor possibilidade de construção da imagem conceitual sobre limite. O rigor pode ser percebido nos próximos 9 exercícios que incluem, além de demonstrações, o cálculo do limite usando a definição $\varepsilon - \delta$.

Coerentemente com a maneira como o assunto foi introduzido, não há qualquer exercício contextualizado.

No livro **Cálculo com Geometria Analítica**, Swokowski (1999) traz o conteúdo de limites ao longo do Capítulo 2 – Limites de Funções, cujos tópicos são: “Introdução ao conceito de limite”; “Definição de limite”; “Técnicas para a determinação de limites”; “Limites que envolvem o infinito”.

O autor inicia o capítulo com uma pequena introdução (SWOKOWSKI, 1999, p. 49) sobre o conceito de limite:

> O conceito de limite de uma função f é uma das idéias fundamentais que distinguem o cálculo da álgebra e da trigonometria. No desenvolvimento do cálculo no séc. XVIII, o conceito de limite foi tratado intuitivamente, tal como fazemos aqui na SEÇÃO 2.1, onde supomos que o valor de $f(x)$ tende para um certo número L quando x tende para um número a. Ou seja, quanto mais próximo de L estiver o valor de $f(x)$, mais próximo de a estará x. O problema desta definição está na palavra *próximo.*

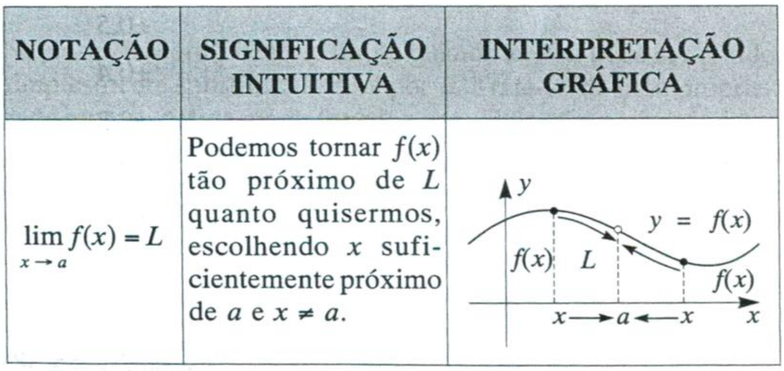
Ainda em relação à questão da “proximidade”, o autor procura esclarecer possíveis interpretações diferentes:

> Assim, para evitar ambigüidade, é preciso formular uma definição de limite que não contenha a palavra *próximo*. Faremos isto na sessão 2.2, enunciando o que é tradicionalmente chamado de definição $\varepsilon - \delta$ *de*

> *limite de uma função* A definição é precisa e aplicável a qualquer situação que queiramos considerar.

Na sequência temos a apresentação de um exemplo numérico através da função racional $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{3x-6}$ com domínio $\mathcal{R} - \{2\}$. Semelhantemente à abordagem seguida no livro anteriormente apreciado, o autor nos apresenta uma tabela envolvendo valores para as variáveis x e y. Enquanto na coluna da variável independente, os valores de x se tornam arbitrariamente próximos de 2, na coluna da variável dependente, os valores de y se aproximam do valor $\frac{4}{3}$. O autor conclui, apenas sugerindo, que o valor da função esteja se "aproximando" de $\frac{4}{3}$ quando x se "aproxima" de 2. O autor só se permite tal conclusão quando a expressão funcional é fatorada e temos o fator comum $x - 2$ simplificado no numerador e no denominador da expressão. Lembrando que, até esse momento, as noções de limite são todas intuitivas, notamos uma preocupação com o rigor quando o autor executa e justifica a necessidade deste procedimento para "dar maior garantia" ao resultado.

Ainda explorando o exemplo numérico dado, o autor propõe alguns questionamentos que, em nosso entendimento, têm o objetivo de, ainda que intuitivamente, construir uma definição para limite. Temos, então, um quadro (Fig. 1) que permite ao aluno uma múltipla leitura e interpretação para a definição de limite (SWOKOWSKI, 1999, p. 51):



NOTAÇÃO	SIGNIFICAÇÃO INTUITIVA	INTERPRETAÇÃO GRÁFICA
$\lim_{x \to a} f(x) = L$	Podemos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, escolhendo x suficientemente próximo de a e $x \neq a$.	

Fig. 1: Limites

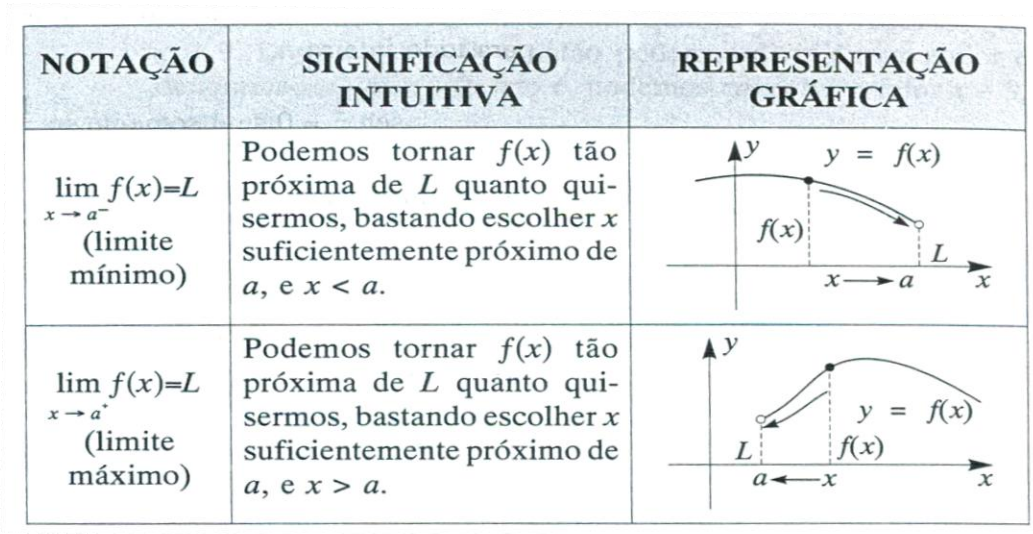
Processo semelhante é seguido para a apresentação da função $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$. O autor questiona a existência de $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$ e, baseado em uma tabela, intui ao leitor que o valor da função se torna próximo de 1 quando x se torna próximo de zero. É interessante observar que, diferentemente do processo para calcular o limite no primeiro exemplo, ou seja o uso da fatoração, aqui o autor esclarece que este "processo intuitivo" pode redundar em avaliações precipitadas (SWOKOWSKI, 1999, p. 53):

> Como dissemos, fizemos apenas uma conjectura quanto à resposta. A tabela indica que $(sen\ x)/x$ está cada vez mais próximo de 1 quanto mais próximo x está de 0, todavia, não podemos estar absolutamente certos disto. Poderia ser que os valores da função se afastassem de 1 se x estivesse mais próximo de 0 do que os valores indicados no quadro. Embora uma calculadora possa auxiliar-nos na suposição da existência do limite, ela não pode ser usada como demonstração.

Notamos uma preocupação do autor com o rigor empregado para avaliar o resultado. Acreditamos que a avaliação do exemplo ressalta a importância que a construção de uma imagem conceitual consistente pode assumir na formalização e descrição da definição conceitual, que será apresentada oportunamente.

A seguir, temos a apresentação de 4 exemplos, todos fartamente ilustrados com gráficos e tabelas, onde rigor e intuição caminham lado a lado sendo devidamente refinados a partir do momento em que há uma transição entre as diversas representações.

O autor apresenta um quadro (Fig. 2) aplicado aos limites laterais que ilustra esta abordagem (SWOKOWSKI, 1999, p. 58):



NOTAÇÃO	SIGNIFICAÇÃO INTUITIVA	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA
$\lim_{x \to a^-} f(x)=L$ (limite mínimo)	Podemos tornar $f(x)$ tão próxima de L quanto quisermos, bastando escolher x suficientemente próximo de a, e $x < a$.	
$\lim_{x \to a^+} f(x)=L$ (limite máximo)	Podemos tornar $f(x)$ tão próxima de L quanto quisermos, bastando escolher x suficientemente próximo de a, e $x > a$.	

Fig. 2: Limites laterais

Na parte das atividades propostas aos alunos, o autor opta por começar com vários exercícios para o cálculo de limite. Há 10 exercícios onde o autor simplesmente escreve: "Ache o limite". Apenas a partir do exercício 31, vemos uma preocupação com a associação do conceito de limite à representação gráfica. Em nosso entendimento, essa prática se mostra um pouco “contraditória” em função de como o assunto foi apresentado, ou seja, intuição e rigor sendo construídos juntos.

Digno de nota são um total de 6 exercícios contextualizados. O autor se utiliza da Física, da Economia e da Biologia para que o aluno possa aplicar os conceitos de limite associados à interpretação gráfica.

Para a definição formal de limite, o autor apresenta um extenso contexto aplicado à hidrodinâmica (Fig. 3), partindo de um exemplo de um líquido fluindo através de um tubo cilíndrico com uma constricção estreita (SWOKOWSKI, 1999, p. 65):

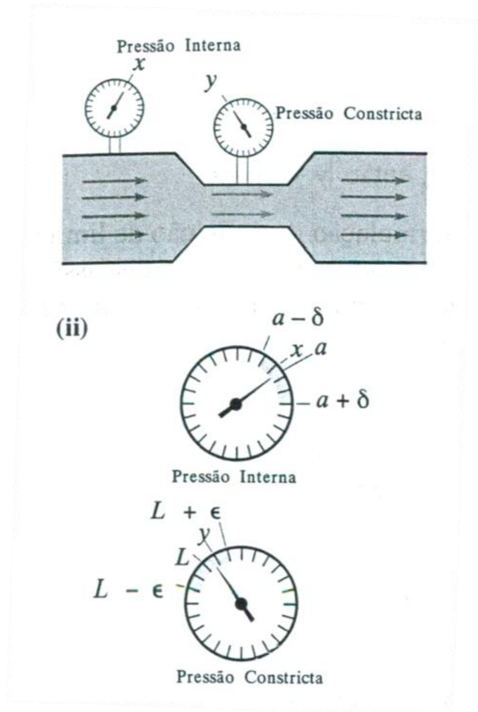


Fig. 3: Hidrodinâmica

Fartamente ilustrado, esse exemplo contribui para a construção de uma imagem conceitual que, posteriormente, poderá ser útil na definição de limite; entretanto, não iremos nos ater em seu detalhamento.

Finalmente, temos a definição formal para o limite (SWOKOWSKI, 1999, p. 66):

> Seja uma função f definida em um intervalo aberto que contém o ponto a, exceto possivelmente no próprio ponto a, e seja L um número real. A afirmação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Chamada pelo autor de “definição alternativa”, é também apresentada (Fig. 4) a definição de limite em uma representação na reta real (SWOKOWSKI, 1999, p. 66), com destaque para as vizinhanças criadas a partir de intervalos abertos:

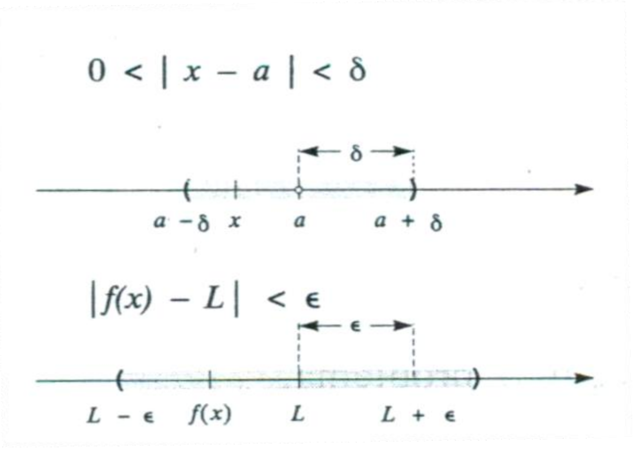


Fig. 4: Definição alternativa para limite

O livro traz, ao longo de todo o capítulo, vários exemplos resolvidos onde o autor procura sempre uma resolução onde a abordagem algébrica e a interpretação geométrica possam ser contemplados. Na maioria desses exemplos, temos enunciados do tipo “ache o limite” ou “esboce o gráfico interpretando geometricamente o limite”. Acreditamos que tal prática, além de ser coerente com a forma como o autor apresenta o conteúdo, possibilita ao estudante explorar de maneira adequada a definição conceitual a partir de algumas imagens conceituais especialmente, aquelas construídas graficamente.

Os exercícios propostos ao longo de todo o material mantêm a mesma estruturação. Como destaque, notamos apenas certa “incoerência” com a exploração de poucos exercícios contextualizados, o que contrasta com a forma como o autor apresentou o conceito de limite. De qualquer forma, os exercícios, longe de serem repetitivos, apresentam ao leitor uma grande diversidade de interpretações.

No livro **Cálculo de uma variável**, Hughes-Hallet e outros (2004) abordam os limites no Capítulo 2 – Conceito Chave: A Derivada, nos seguintes tópicos: “Como medimos velocidade?”; “Limites”.

A primeira observação que podemos fazer é que os autores, diferentemente de uma ordem “clássica” para apresentar o assunto, optaram por introduzir o conceito de derivada de uma função imediatamente após o tratamento de limite, antes mesmo de tratar da continuidade de uma função.

O livro parte de um exemplo em um contexto físico, mais especificamente na cinemática: a velocidade. Considerando o exemplo de um objeto em queda livre, os autores tratam de velocidade e velocidade escalar. A idéia dos autores é, a partir de questionamentos sobre o comportamento do objeto em queda livre, intuir o leitor a considerar o conceito de velocidade instantânea.

Propondo exemplos de cálculos para a velocidade em diversos momentos da experiência (Fig. 5), os autores "refinam" os intervalos de tempo entre dois instantes de queda do objeto tomando intervalos "sucessivamente menores" (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 49):

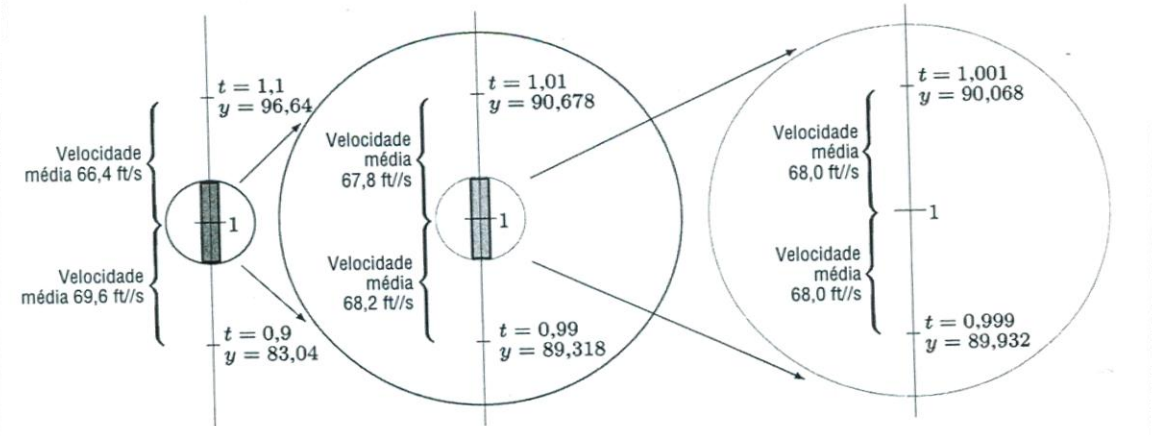


Fig. 5: Objeto em queda livre

Os autores definem velocidade instantânea utilizando a notação que nos remete à derivada. Acreditamos que os autores propõem esta abordagem para, posteriormente, introduzirem o conceito de limite. Interessante observar que o exemplo de velocidade foi explorado apenas como recurso didático, não se constituindo em um fim em si mesmo, conforme percebemos na seguinte observação (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 50):

> Observe como substituímos a dificuldade original de calcular a velocidade em um ponto por uma busca de um argumento para nos convencer de que as velocidades médias se aproximam de um número quando os intervalos de tempo diminuem. De certo modo, trocamos uma pergunta difícil por outra, já que ainda não temos idéia de como nos certificar de qual número as velocidades médias estão se aproximando.

Após esta exposição, os autores definem velocidade instantânea como um limite (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 50), da seguinte forma:

> Vamos definir, agora, velocidade instantânea em um ponto arbitrário $t = a$. Vamos usar o mesmo método que em $t = 1$: considerar intervalos pequenos de tamanho h em torno de $t = a$. Depois, no intervalo $a \leq t \leq a + h$,
>
> $$\text{velocidade média} = \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$
>
> A mesma fórmula é válida quando $h < 0$. A velocidade instantânea é o número a que tendem as velocidades médias quando o intervalo diminui de tamanho, isto é, quando h torna-se cada vez menor. Definimos então:
> Velocidade instantânea = limite quando h tende a 0 de $\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$.

Notemos que, nesse momento, os autores não utilizam qualquer formalização para o conceito de limite. A própria notação clássica "*lim*" foi substituída pela palavra "*limite*" e uma descrição do procedimento a ser adotado.

Então, é apresentado pela primeira vez o conceito de limite. Os autores justificam que o assunto será detalhado oportunamente e nos apresentam uma primeira noção intuitivamente simbólica e verbal (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 50):

> Escrevemos $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ para representar o número L ao qual $f(x)$ tende quando x se aproxima de c.

A seguir, temos uma bateria de 5 exemplos resolvidos. Os exemplos são semelhantes em forma e conteúdo à parte introdutória, com possibilidade de cálculo de limites de algumas funções. Importante observar que, nesse momento, os autores tratam limite de uma maneira mais intuitiva, lembrando que a formalização do conceito de limite ainda não foi apresentada.

Em oposição à forma ilustrada com que o assunto foi abordado, sentimos falta de uma maior exploração de gráficos ou tabelas. Dos seis exercícios propostos, apenas em um deles foi solicitada, de forma explícita, uma solução gráfica. Os demais foram excessivamente elaborados sobre o aspecto algébrico, como por exemplo (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 53):

> Use álgebra para encontrar $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

Finalmente, temos a definição para limite. Digno de nota é o fato dos autores não utilizarem a notação $\varepsilon - \delta$ nesta definição. Eles introduzem o assunto com uma pequena nota histórica citando Augustin Cauchy que, no entendimento dos autores, deu uma definição formal para limite (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 54):

> Suponhamos que uma função *f* esteja definida em um intervalo em torno de
> *c*, exceto, talvez, no ponto $x = c$. Definimos o ***limite*** da função *f(x)* quando *x* tende a *c*, denotado por $\lim_{x \to c} f(x)$, como sendo o número *L* (se existir) tal que *f(x)* pode tornar-se tão próxima a *L* quanto quisermos sempre que *x* estiver próximo de *c* (com $x \neq c$). Se *L* existe, escrevemos, $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Somente depois dessa definição, temos a definição clássica para limite com o uso da notação $\varepsilon - \delta$, da seguinte forma (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 55):

> Definimos $\lim_{x \to c} f(x)$ como sendo o número *L* (se existir) tal que dado qualquer $\varepsilon > 0$ (tão pequeno quanto queiramos), existe $\delta > 0$ (suficientemente pequeno) tal que, se $|x - c| < \delta$ e $x \neq c$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Na sequência, os autores trazem alguns exemplos trabalhando com limites laterais e limites no infinito. Finalmente, é apresentado um total de 48 exercícios variados onde os autores solicitam soluções gráficas e algébricas.

Diferentemente de outros livros, alguns exercícios nos chamam a atenção por solicitar que o aluno "explique" algumas soluções envolvendo limites, propondo que ele não apenas "repita" a definição, mas que a interprete na solução de alguns problemas, contribuindo sobremaneira para a construção de algumas imagens conceituais. Um exemplo interessante é a sequência de exercícios (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 59):

> Nos problemas de 25 a 27, modifique a definição de limite dada nesta seção para dar uma definição de cada uma das coisas a seguir:
>
> 25. Um limite à direita.
> 26. Um limite à esquerda.
> 27. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

No livro **Cálculo**, Stewart (2005) traz os limites no Capítulo 2 – Limites e Derivadas. O capítulo está dividido nos seguintes tópicos: "Os Problemas da Tangente e da

Velocidade”; “Limite de uma Função”; “Cálculo dos Limites Usando suas Leis”, “A Definição Precisa de Limite”.

Já no prefácio o autor apresenta o assunto e detalha como irá tratá-lo. Digno de nota é a observação sobre a definição formal (em termos de $\varepsilon - \delta$) poder ser tratada como opcional (STEWART, 2005, p.ix):

> O material sobre limites está motivado por uma discussão anterior dos problemas da tangente e da velocidade. Limites são tratados sob os pontos de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico. A seção 2.4, sobre a definição precisa de limite em termo de $\varepsilon - \delta$, é opcional. As seções 2.8 e 2.9 tratam de derivadas (especialmente de funções definidas gráfica e numericamente) antes das regras de derivação, cobertas no capítulo 3. Aqui os exemplos e exercícios exploram os significados das derivadas em vários contextos.

O autor inicia o capítulo com uma justificativa ao leitor contextualizando o uso de limite em situações cotidianas (STEWART, 2005, p. 84):

> Neste capítulo usaremos limites para estimar a rapidez com que um peru esfria quando tirado do forno; para explicar o que realmente significa a leitura do velocímetro de um carro; e para estimar o fluxo de corrente elétrica do capacitor para um *flash* de uma câmera.

O livro inicia o assunto com o problema clássico das tangentes e “define” reta tangente a uma curva como sendo aquela que a intercepta em apenas um ponto. Citando Euclides, o autor apresenta a reta tangente a uma circunferência a partir dessa definição e estende a idéia da reta tangente a uma curva qualquer. O autor constata a fragilidade desta definição e mostra que, para curvas mais “complicadas”, a definição de reta tangente apresentada se mostra inadequada.

Partindo de um exemplo algébrico, o autor explora a função $y = x^2$ e o problema de determinar uma reta tangente t a esta curva. Tomando dois pontos P e Q pertencentes à parábola, e seguindo o procedimento clássico, o autor faz o ponto Q “tender” ao ponto P e chama o coeficiente angular da reta tangente como sendo m_{PQ}. Com o uso de algumas tabelas, o autor “sugere” que a inclinação da reta tangente t à parábola seja $m_{PQ} = 2$. Após estas considerações, o autor já apresenta uma primeira formalização para o conceito de limite (STEWART, 2005, p. 86):

> Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes, e expressamos isso simbolicamente escrevendo que $\lim_{Q \to P} m_{pq} = m$ e $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Este exemplo é fartamente ilustrado (Fig. 6) o que, no nosso entendimento, colabora para que o conceito de limite, a ser apresentado posteriormente, possa ser mais bem compreendido pelo leitor. Notamos assim, novamente, uma preocupação com a imagem conceitual a ser construída pelo leitor para o conceito de limite (STEWART, 2005, p. 86):

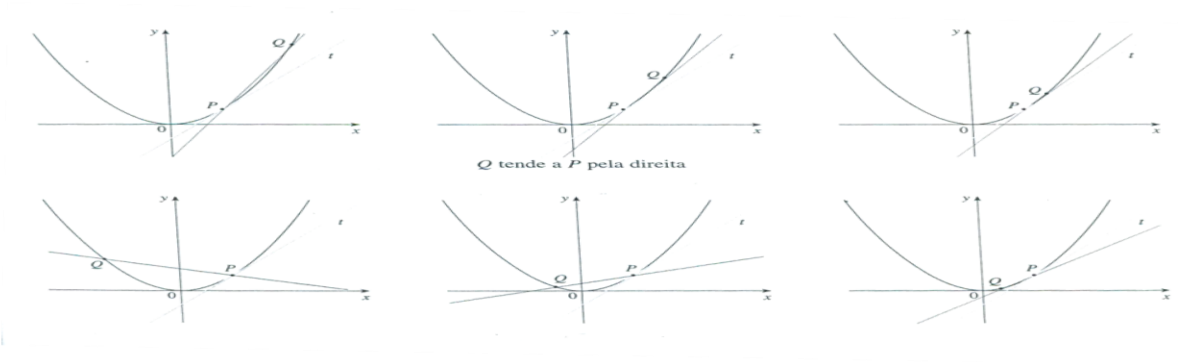


Fig. 6: Interpretação geométrica para limite

Antes de dar o conceito formal para limite, o autor explora ainda mais dois exemplos: o *flash* de uma câmera fotográfica e o problema da velocidade instantânea de um carro.

No primeiro, o autor, com o auxílio de uma tabela, mostra a quantidade de carga elétrica armazenada em um capacitor de uma câmera fotográfica. Após o "disparo" do *flash* a carga no capacitor cai muito rapidamente (o autor se refere a este descarregamento do capacitor como sendo "quase instantâneo"), e esboça em um gráfico o comportamento da experiência. Após calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico ele mostra que, em um curto espaço de tempo, a quantidade de carga diminui rapidamente. Interessante neste exemplo é como o autor explica esta inclinação (STEWART, 2005, p. 87):

> A inclinação da reta tangente representa o fluxo de corrente elétrica do capacitor para o *flash*.

Ainda que este comentário seja simples sobre o ponto de vista dos conceitos elétricos envolvidos, ele se reveste de uma importância muito grande no aspecto matemático. Acreditamos que esta simples contextualização para a inclinação da reta tangente, possibilita ao leitor expandir suas considerações sobre o assunto visto que é usual interpretar a inclinação da reta tangente apenas geometricamente. Em nosso entendimento foi bastante oportuna esta intervenção do autor no problema.

No próximo exemplo o autor parte de um objeto em queda livre e estuda a variação de sua velocidade no experimento. De forma análoga ao desenvolvimento do exemplo anterior, o autor constrói uma tabela que envolve a medida de tempo e a velocidade de queda e considera intervalos de tempo cada vez menores e avalia a velocidade. O autor conclui estabelecendo uma relação entre os problemas das tangentes e o cálculo de velocidade (STEWART, 2005, p. 88):

> Você deve ter visto que os cálculos usados na solução deste problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre os problemas da tangente e do cálculo de velocidades.

Segue então uma pequena lista de exercícios onde o autor propõe atividades que, para serem resolvidas, estimulam o aluno a interpretações algébricas e geométricas para noção de reta tangente ao gráfico de uma função.

Finalmente a autor apresenta a definição para limite, mas o faz ainda sem a notação $\varepsilon - \delta$. Retomando a abordagem da construção de tabelas o autor explora a função $f(x) = x^2 - x + 2$ e toma valores próximos a $x = 2$ por valores menores que 2 (à esquerda de 2) e por valores maiores que 2 (à direita de 2) e mostra que o valor da função se aproxima de 4. Neste momento, por proposta do autor, não há qualquer referência ao conceito de "próximo", cabendo ao leitor construir tal conceito a partir apenas do exemplo.

O autor apresenta, pela primeira vez, a notação para limite (STEWART, 2005, p. 90):

> Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ estará próximo de 4. De fato, é evidente que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4. A notação para isto é $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - x + 2)$. Em geral, usamos a seguinte notação. Escrevemos:
> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e dizemos "o limite de $f(x)$ quando x tende a a, é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tomando x suficientemente próximo de a, mas não iguala a a.

Em nosso entendimento, esta definição para limite (ou ao menos a forma como foi redigida / traduzida) é aquela que pode trazer ao leitor uma melhor compreensão para o conceito de limite. Foi, ao mesmo tempo, plena de significado sem ser excessivamente formal.

O autor apresenta uma sucessão de exemplos resolvidos (e por resolver) incluindo noções para limites laterais, que inclusive havia sido abordado nas explicações anteriores. Somente após uma exposição detalhada e a proposta de diversas atividades é que o autor apresenta a definição formal para limite (STEWART, 2005, p. 113):

> Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio ponto a. Então dizemos que **o limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ é $\boldsymbol{L}$**, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Outra maneira de escrever esta linha da definição é se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Interessante a opção do autor de apresentar a definição $\varepsilon - \delta$ para limite apenas depois de explorar de maneira intuitiva a noção para limite. Em nosso entendimento o autor primeiro trabalha a imagem conceitual de maneira ostensiva antes de apresentar a definição conceitual, prática essa que poderia servir para os professores que trabalham com a disciplina.

Passaremos agora a uma análise da abordagem do assunto “Continuidade de função real de uma variável” conforme apresentada nos materiais analisados. Manteremos, por questão de praticidade, a mesma sequência dos livros.

2.4.3 A abordagem de Continuidade

Em **Cálculo A**, Flemming e Gonçalves (2006) trazem a continuidade no Capítulo 3 – Limite e Continuidade. Os tópicos estão assim distribuídos: “Continuidade”; “Propriedades das Funções Contínuas”; “Teorema do valor Intermediário”; “Exercícios”.

As autoras retomam a definição de limite de uma função em um ponto $x = a$ e, sem qualquer outra abordagem ou introdução ao assunto, definem a continuidade de uma função em um ponto (FLEMMING e GONÇALVES, 2006, p. 130) da seguinte forma:

> Dizemos que uma função f é contínua no ponto $x = a$ se as seguintes condições forem satisfeitas:
> (a) f é definida no ponto a;
> (b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Na sequencia são apresentados alguns gráficos (Fig. 7) de funções descontínuas, destacando os diversos tipos de descontinuidade (FLEMMING e GONÇALVES, 2006, p. 130):

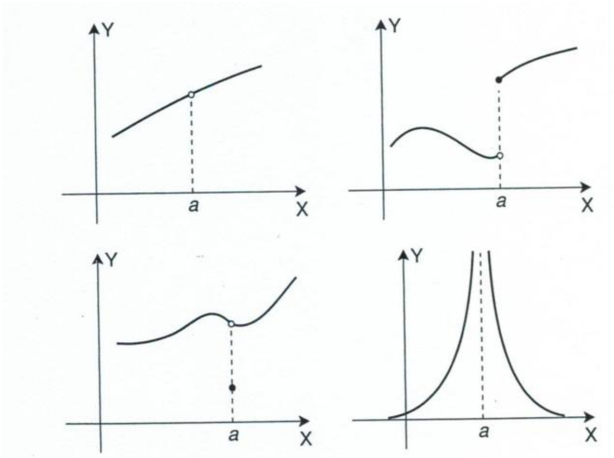


Fig. 7: Descontinuidades (a)

Logo depois, ainda alguns exemplos de funções descontínuas onde o leitor deve avaliar a descontinuidade a partir da expressão algébrica da função e de seu gráfico. São exploradas as funções $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ e a função $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, se\ x \neq 1 \\ 1, \ se\ x = 1 \end{cases}$ definida por duas sentenças em um exemplo e, em outro exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, se\ x \neq 0 \\ 0, se\ x = 0 \end{cases}$, também definida por duas sentenças.

Temos ainda o enunciado das propriedades envolvendo duas funções $f(x)$ e $g(x)$ ambas contínuas em um ponto a (soma, diferença, produto e quociente) e o Teorema do Valor Intermediário. Não detalharemos estas duas últimas abordagens, pois escapam um pouco do propósito de nosso trabalho.

De qualquer forma, em nosso entendimento, a autoras foram "econômicas" na apresentação do conteúdo. Ainda que continuidade tenha essa característica de apresentação, entendemos que as autoras poderiam ter explorado um pouco mais o assunto principalmente antes de partir diretamente para a definição de continuidade.

No livro **Cálculo com Geometria Analítica**, Swokowski (1999) traz o conteúdo de continuidade ao longo do Capítulo 2 – Limites de Funções, que tem como único tópico do assunto "Funções Contínuas".

Como já é de praxe, o autor inicia o tópico apresentando o uso no cotidiano para o termo "contínuo" e, dentro deste contexto, como seria entendido na Matemática. O autor apresenta ainda (Fig. 8) alguns exemplos de descontinuidade graficamente (SWOKOWSKI, 1999, p. 98):

> Na linguagem cotidiana dizemos que o tempo é contínuo, uma vez que ele decorre de maneira ininterrupta. O tempo não salta, digamos, de 1h para 1h1min da tarde deixando um lapso de um minuto. Deixando-se cair um objeto de um balão, encaramos seu movimento subseqüente como contínuo. Se a altitude inicial é de 500 metros, o objeto passa por *todas* as altitudes entre 500 m e 0 m antes de atingir o solo.
> Em matemática usamos a expressão *função contínua* em um sentido semelhante. Intuitivamente, consideramos contínua uma função cujo gráfico não tem interrupções. A título de ilustração, nenhum dos gráficos abaixo representa uma função contínua no ponto c.

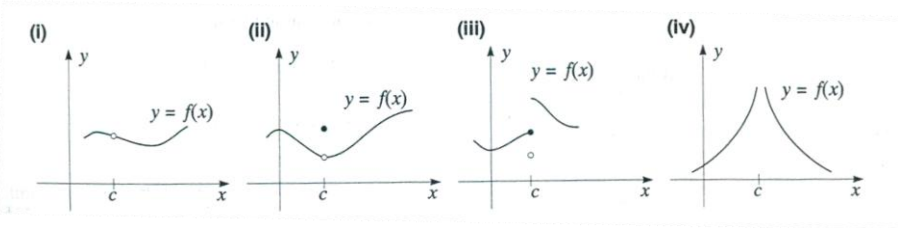


Fig. 8: Descontinuidades (b)

Em nosso entendimento, a explicação acima, ainda que simples, pode ser de muita ajuda para o leitor. Note que já é possível a construção de uma imagem conceitual para função contínua com alguns significados.

Na sequência, é apresentada a definição para a continuidade (SWOKOWSKI, 1999, p. 99):

> Uma função f é **contínua** em um ponto c se satisfaz as seguintes condições:
> (i) $f(c)$ é definida;
> (b) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe;
> (c) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Temos então alguns exemplos de descontinuidade em seus diversos tipos (removíveis, tipo salto ou descontinuidade infinita, segundo o autor) explorando as funções $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 2 & se\ x = 1 \end{cases}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $p(x) = \frac{|x|}{x}$.

De forma análoga ao livro anterior, temos o enunciado das propriedades envolvendo duas funções $f(x)$ e $g(x)$ ambas contínuas em um ponto a (soma, diferença, produto e quociente) e o Teorema do Valor Intermediário.

No livro **Cálculo de uma variável**, Hughes-Hallet e outros (2004) abordam a continuidade no Capítulo 2 – Conceito Chave: A Derivada, no tópico: "Continuidade e Diferenciabilidade". Conforme citado anteriormente, os autores optaram for trabalhar o assunto derivada junto com limites. É digno de nota que o tópico sobre continuidade foi tratado depois de derivadas de ordem superior (derivada de 2ª ordem), opção didática não usual.

Semelhante ao livro de Flemming e Gonçalves (2006), os autores também optaram por apresentar a definição de continuidade sem qualquer introdução, porém apresentam uma "descrição" intuitiva para a expressão "contínua" à medida que apresentam uma definição rigorosa para continuidade (HUGHES-HALLET e OUTROS, 2004, p. 82):

> Lembre-se que a idéia de continuidade impede a existência de quebras, pulos ou buracos exigindo que o comportamento de uma função *perto* de um ponto seja consistente com o comportamento *no ponto*:
> A função f é **contínua** em $x = c$ se f está definida em $x = c$ e $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Em outras palavras, $f(x)$ torna-se tão perto de $f(c)$ quanto quisermos desde que x esteja suficientemente perto de c. A função é **contínua em um intervalo** $[a, b]$ se for contínua em todos os pontos do intervalo.

Notemos que tal definição possibilita uma "visualização" para a idéia de continuidade. Em nosso entendimento, é como se os autores estivessem possibilitando a construção da imagem conceitual junto com a definição conceitual, prática esta que poderia ser adotada por professores que trabalham com a disciplina de cálculo. Vale ressaltar a opção por não apresentar a definição para a continuidade na forma "clássica", como o fazem outros autores (função definida no ponto, existência do limite e igualdade entre o limite e o valor da função no ponto), optando por uma escrita mais intuitiva.

Na sequência, temos o enunciado das propriedades (soma, diferença, produto e quociente) envolvendo duas funções $f(x)$ e $g(x)$, ambas contínuas em um ponto a.

Interessante são os exemplos que se seguem: apresentação de funções contínuas e verificação da continuidade. Notemos que os livros anteriores e muitos que tratam do assunto, preferem enfatizar a continuidade pelo "contra-exemplo" apresentando primeiro várias funções descontínuas e justificando a(s) descontinuidade(s).

Conforme comentado, os autores optaram por tratar a derivada de uma função junto com limites. Assim, todos os exemplos apresentados são explorados junto com a possibilidade de diferenciação. Há exemplos de funções contínuas e diferenciáveis e o exemplo clássico da função $f(x) = |x|$ contínua, mas não diferenciável em $x = 0$.

O livro **Cálculo** (Stewart, 2005) apresenta o assunto de continuidade no Capítulo 2 em apenas um tópico: "Continuidade".

Diferentemente de sua abordagem usual, onde o autor apresenta sempre o assunto de forma contextualizada, nesse momento ele opta apenas por apresentar de imediato a definição formal para continuidade (STEWART, 2005, p. 122):

> Uma função é contínua em um número a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

O autor apresenta uma definição para a expressão "contínua", partindo de um exemplo físico de um objeto em movimento ou a função altura de uma pessoa com o tempo. Segue um exemplo numérico onde autor pede para o leitor identificar ponto(s) de descontinuidade(s) em uma função apresentada graficamente. Interessante notar que o primeiro exemplo após a definição é um exemplo onde o leitor deve usar sua imagem conceitual para continuidade.

Seguem outros exemplos para avaliar a descontinuidade, porém as funções são apresentadas algebricamente:

$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, se\ x \neq 2 \\ 1, se\ x = 2 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, se\ x \neq 0 \\ 1, se\ x = 0 \end{cases}$ e $f(x) = |x|$.

Aproveitando os exemplos anteriores o autor nomeia as descontinuidades ("removíveis", "descontinuidade infinita" e "pulos de descontinuidade"), representando cada uma delas (Fig. 9) graficamente (STEWART, 2005, p. 123):

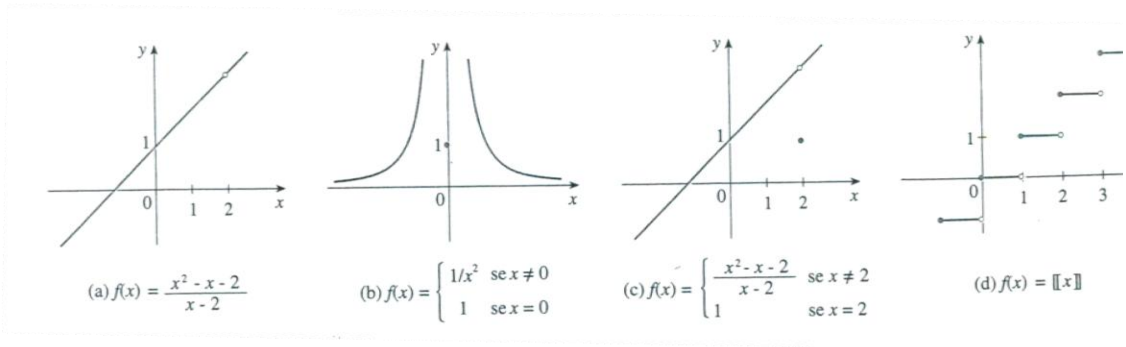


Fig. 9: Descontinuidades (c)

O autor estende a definição de continuidade em um ponto para a continuidade em um intervalo e cita ainda as propriedades (soma, diferença, produto e quociente) para funções contínuas e o Teorema do Valor Intermediário.

O autor finaliza o tópico propondo um total de 61 exercícios que, em sua maior parte, contemplam o aspecto algébrico da continuidade. Em nosso entendimento, o autor poderia ter explorado a continuidade das funções também em um contexto mais geométrico com o uso de gráficos e tabelas.

A breve análise dos livros didáticos aqui realizada aponta para a importância que os autores conferem à definição formal de limite. Isto fica claro quando todos eles, após uma abordagem inicial mais intuitiva, utilizando-se de gráficos e tabelas, convergem para a definição $\varepsilon - \delta$. A questão está em se avaliar a real contribuição dessa definição para a construção da imagem conceitual de limite.

Por outro lado, a definição $\varepsilon - \delta$ para a continuidade não parece ter a mesma importância para os autores, os quais preferem abordar a definição / propriedades por condições relacionadas ao domínio e limite de uma função. Outra questão interessante seria avaliar se tal opção didática contribui para uma maior significação da imagem conceitual de continuidade.

Já é hora de trabalhar melhor as ideias de imagem conceitual, definição conceitual, intuição e rigor, o que faremos no próximo capítulo, apresentando algumas considerações sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Capítulo 3

BUSCANDO RELAÇÕES ENTRE INTUIÇÃO E RIGOR E ENTRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL

> "Esse processo de problematização, ressignificação e sistematização de conceitos a partir das imagens conceituais dos alunos lembra, de certa forma, a noção de rigor que pode ser visto como um processo de conceptualização de intuições."
>
> Frederico da Silva Reis

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos nos concentrar em alguns aspectos teóricos que permearão nosso trabalho. Segundo nossa concepção e dos autores que nos acompanharão, vamos propor uma definição para "intuição" e "rigor". Pretendemos ainda apresentar, tão detalhadamente quanto possível, as noções de "imagem conceitual" e "definição conceitual", concentrando-nos nos trabalhos de David Tall [3] e ShlomoVinner [4].

Sobre esses autores, interessa-nos particularmente, seus trabalhos publicados no livro "Advanced Mathematical Thinking" ou, em tradução livre, "Pensamento Matemático Avançado" (PMA). Começaremos com uma visão geral deste livro.

3.2 Sobre o livro "Advanced Mathematical Thinking"

O livro Advanced Mathematical Thinking (TALL, 1991) está dividido em cinco grandes partes: "INTRODUCTION", "THE NATURE OF ADVANCED MATHEMATICAL THINKING", "COGNITIVE THEORY OF ADVANCED MATHEMATICAL THINKING", "RESEARCH INTO THE TEACHING AND LEARNING OF ADVANCED MATHEMATICAL THINKING" e um "EPILOGUE".

---

[3] David Orme Tall, professor in "Mathematical Thinking" at the University of Warwick, UK. (david@davidtall.com)

[4] Shlomo Vinner, professor in Mathematics and Science Education at the Hebrew University, Israel.

Na 1ª parte, temos apenas o Capítulo 1: “The Psychology of Advanced Mathematical Thinking”. De autoria de David Tall, este capítulo trata, basicamente, dos aspectos que envolvem a consolidação do PMA. Iniciando com algumas “considerações cognitivas” passando pelo crescimento e consolidação do PMA e sua “base de conhecimento”.

Na 2ª parte, temos um total de três capítulos. O Capítulo 2, “Advanced Mathematical Thinking Processes” é de autoria de Tommy Dreyfus e trata do PMA como um processo e suas generalizações, sínteses e abstrações. O Capítulo 3, “Mathematical Creativity” de autoria de Gontran Ervynck, aborda a criatividade em seus diversos estágios dentro da estruturação da matemática. Finalmente no Capítulo 4, “Mathematical Proof”, temos como tema principal a demonstração na matemática em seus diversos aspectos e é de autoria de Gila Hanna.

Três capítulos compõem a 3ª parte. No primeiro, “The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics”, de autoria de Shlomo Vinner, temos as apresentações e definições para dois conceitos que serão de suma importância no nosso trabalho: “imagem conceitual” e “definição conceitual”. Este Capítulo 5 será um dos principais referenciais teóricos de nosso trabalho e nos acompanhará ao longo de toda a nossa trajetória. O Capítulo 6, “The Role of Conceptual Entities and their symbols in building Advanced Mathematical Concepts”, por Guershon Harel e James Kaput, trata das funções da conceituação, compreensão e o papel da notação dentro da matemática. “Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking”, de Ed Dubinsky, é o Capítulo 7 e trata das componentes da psicologia no aprendizado abordando a abstração matemática no pensamento da criança.

A 4ª parte começa com o Capítulo 8: “Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level” escrito por Aline Robert e Rolph Schwarzenberger. Este capítulo começa com uma proposta interessante ao questionar se há a necessidade de alguma habilidade especial para se compreender a Matemática avançada e apresenta algumas pesquisas sobre o ensino e aprendizado da Matemática avançada. O Capítulo 9 (“Functions and Associated Learning Difficulties”) trata de algumas dificuldades inerentes ao aprendizado da Matemática avançada e foi escrito por Theodore Eisenberg. O Capítulo 10, de Bernard Cornu, é intitulado “Limits” e apresenta o conceito de limite em suas diversas leituras tratando do rigor e da intuição em sua apresentação. Michele Artigue, no Capítulo 11, “Analysis”, apresenta a Análise Matemática e algumas de suas conceituações teóricas e do rigor que permeia o seu ensino. O Capítulo 12, “The Role of

Students'Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory" de Dina Tirosh, aborda a concepção de "infinito" apresentada pelos estudantes quando se ensina a teoria dos conjuntos de George Cantor. Em "Research on Mathematical Proof", Capítulo 13, os autores (Daniel Alibert e Michael Thomas) apresentam as conjecturas e demonstrações em Matemática nos seus diversos "estilos" e formas de organização. Temos finalmente o Capítulo 14, "Advanced Mathematical Thinking and the Computer", por Ed Dubinsky e David Tall, onde é apresentado, entre outros, o uso do computador na Educação Matemática.

A última parte trás o "Epilogue" onde David Tall faz algumas análises finais e aponta algumas diretrizes.

Passaremos agora a apresentar algumas considerações sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA).

3.3 Sobre o Pensamento Matemático Avançado

Em linhas gerais, o PMA, conforme publicações e pesquisas, é caracterizado por dois aspectos essenciais: a Matemática e suas definições precisas, conforme compartilhada pelos acadêmicos e pesquisadores em matemática e seus pares, e as deduções lógicas dos teoremas apresentados conforme aquelas definições.

Segundo Tall (1991), o PMA se baseia inicialmente em referências abstratas que serão posteriormente construídas através das deduções lógicas e das definições formais presentes na Matemática. O PMA se preocupa essencialmente com as propriedades que caracterizam um objeto matemático a partir de sua definição em oposição ao "pensamento matemático elementar" que se refere, em sua essência, à "descrição" do objeto matemático com base em suas propriedades concretas e sua manipulação experimental. Em linhas gerais, enquanto o pensamento matemático elementar se preocupa em "descrever" o objeto matemático, a partir de sua manifestação sensorial, o PMA se preocupa em conceituá-lo a partir de sua definição que, normalmente, extrapola o aspecto descritivo que o objeto possa apresentar.

Com base em Dreyfus (1991), Domingos (2003, p. 71) nos apresenta uma possível relação entre o PMA e o pensamento matemático elementar:

> Segundo Dreyfus (1991) é possível pensar sobre tópicos de matemática avançada de uma forma elementar e a distinção entre os dois tipos de pensamento reside na complexidade e na forma como se lida com ela. Ele

> admite que não há uma distinção profunda entre muitos dos processos que são usados no pensamento matemático elementar e avançado, mesmo considerando que a matemática avançada se foca essencialmente nas abstrações de definição e dedução. Os processos que Dreyfus considera estarem presentes nos dois tipos de pensamento são os processos de *representação* e *abstração*, sendo a principal diferença marcada pela forma como a complexidade que é exigida em cada um deles é abordada.

Concordando com Dreyfus (1991), também acreditamos que não há uma relação dicotômica entre o PMA e o pensamento matemático elementar. Consideramos ainda os dois tipos de pensamento complementares e necessários para uma melhor compreensão do objeto matemático em toda a sua essência.

Também julgamos importante destacar o que entendemos por “compreensão”, conforme apresentado por Domingos (2003, p. 14), baseando-se em Herscovics e Bergeron (1984):

> Herscovics e Bergeron (1984) apresentam um modelo mais refinado composto por quatro modos de compreensão: *intuitiva*, *de procedimentos*, *abstração* e *formalização*. A compreensão intuitiva refere-se a um conhecimento matemático informal caracterizado por se basear em pré-conceitos (por exemplo, superfície é um pré-conceito de área), na percepção visual ou em ações não quantificadas (por exemplo, acrescentar e juntar são ações que mais tarde serão associadas com a adição aritmética). A compreensão de procedimentos refere-se à aquisição de procedimentos matemáticos que os sujeitos podem relacionar com o seu conhecimento intuitivo e usar de forma apropriada. A abstração matemática pode ter dois sentidos, a abstração no sentido usual, como afastamento de uma representação ou de um procedimento concreto (por exemplo, o número 7 existe na mente da criança sem requerer a presença de objetos ou a necessidade de os contar) e a abstração no sentido matemático, como a construção de invariantes (por exemplo a conservação do número), a reversibilidade e composição de transformações e operações matemáticas ou a generalização. A formalização refere-se às interpretações usuais da axiomática e à demonstração matemática formal.

Dentro do PMA, parecem-nos bastante relevante as ideias de Conhecimento Conceitual e Conhecimento Procedimental.

O ensino focado na habilidade ou no entendimento tem sido motivo de discussão dentro da Educação Matemática, embora não fique limitado a essa área. Schaeffler (1965) destaca esses procedimentos como, respectivamente, “saber aquilo” e “saber como”, dentro da perspectiva da filosofia do conhecimento. Diversos pesquisadores ao longo de todo o século passado, aproveitando a natureza da Matemática, propuseram questionamentos relevantes sobre como se deveria focar seu ensino. Dewey (1895) argumentava em favor do entendimento, em oposição a Thorndike (1922) que defendia a aprendizagem baseada nas habilidades.

Destacamos, atualmente, as pesquisas que envolvem o Conhecimento Conceitual e o Conhecimento Procedimental. Segundo Hiebert e Lafevre (1986, p. 4):

> Conhecimento conceitual é caracterizado mais claramente como conhecimento que é rico em relações. Pode ser pensado como uma rede conexa de conhecimento, uma *network* na qual as relações de ligação são tão proeminentes quanto as partes discretas de informação. Relações permeiam fatos e proposições de tal modo que as partes de informação são conectadas. De fato, uma unidade de conhecimento conceitual nunca pode ser um pedaço isolado de informação; por definição, algo é uma parte do conhecimento conceitual somente se o conhecedor reconhece sua relação com outros pedaços da informação.

Por outro lado, esses mesmos autores apresentam assim o Conhecimento Procedimental (1986, p. 7):

> Conhecimento procedimental, como nós definimos aqui, é constituído de duas partes distintas. Uma parte é composta da linguagem formal, ou do sistema de representação simbólica da matemática. A outra parte consiste dos algoritmos, ou regras, para levar a termo atividades matemáticas. A primeira parte é algumas vezes chamada "forma" da matemática. Inclui a familiaridade com os símbolos usados para representar as ideias matemáticas e uma consciência das regras sintáticas para descrever os símbolos numa forma admissível. A segunda parte do conhecimento procedimental consiste de regras, algoritmos ou procedimentos usados para resolver tarefas matemáticas. Eles são instruções passo a passo que prescrevem como completar tarefas.

Retomando Meyer (2003), destacamos parte do resultado de seu trabalho que registra um bom desempenho de seus sujeitos de pesquisa quando submetidos ao que ela chama de tarefas algorítmicas. Ainda que não tenhamos a possibilidade de inferir como foi focado o ensino de seus alunos (na habilidade ou no entendimento) notamos, pelo resultado apresentado, que os alunos demonstram um melhor desempenho em atividades que requerem um conhecimento procedimental.

A partir dessa discussão sob os aspectos procedimentais e conceituais nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo, apresentaremos agora a noção de "intuição" e "rigor", segundo alguns autores, e como as percebemos para o desenvolvimento de nosso trabalho.

3.4 Sobre Intuição e Rigor

Segundo o Dicionário Aurélio [5], temos as seguintes definições para intuição: imagem; percepção clara e imediata; conhecimento imediato de um objeto na plenitude de sua realização; ato de ver, perceber, discernir. O mesmo livro nos apresenta assim a expressão rigor: rigidez, dureza, precisão, exatidão, clareza.

Ainda que estas definições não possam abranger, em sua plenitude, a sua aplicação no contexto matemático, ao menos elas apresentam uma noção aproximada: a intuição estaria ligada a uma “compreensão imediata” de um assunto, enquanto o rigor poderia estar relacionado a uma “explicação detalhada” do assunto.

Segundo Freudenthal (1973, p. 147), em Matemática é importante, além do resultado correto, a “fundamentação correta” do raciocínio. O rigor não se reflete apenas no resultado, mas na forma e nos caminhos que foram utilizados para obtermos o resultado. É interessante observar que um raciocínio “intuitivo” pode levar também a uma resposta correta ainda que, na essência, não tenhamos sido rigorosos.

Sobre esta questão da intuição e rigor na condução de um procedimento para a resolução de um problema matemático, Reis (2001) nos apresenta o que ele chama de “tensão entre rigor e intuição”. Fazendo uma crítica à relação entre estes conceitos e o ensino de Cálculo e Análise, Reis (2001, p. 79) dispara:

> [...] podemos afirmar que é inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático. Igualmente inaceitável seria associar ao ensino de Cálculo, uma abordagem essencialmente intuitiva e ao ensino de Análise uma abordagem essencialmente rigorosa.

O termo “tensão” foi sugerido ao autor a partir de Bicudo (1992, p. 64), o qual descreve a relação entre rigor e intuição na construção do conhecimento matemático da seguinte forma:

> É por essa tensão dialética entre rigor e intuição que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de diferenciação (intuição) e unificação (rigor). Não há avanço de uma sem a outra.

[5] Novo Dicionário da Língua Portuguesa – Aurélio Buarque de Holanda Ferreira – Editora Nova Fronteira – Rio de Janeiro, 2008.

Entenderemos no presente trabalho intuição como a capacidade do aluno de avaliar uma questão segundo a sua percepção (visual, sensorial, tátil) a despeito de qualquer definição rigorosa para o objeto matemático. Assim, para a questão de "continuidade", por exemplo, entenderemos como resposta intuitiva aquela onde o aluno entenda por continuidade qualquer imagem que possa ser evocada a partir de sua experiência cotidiana.

Por rigor, vamos entender o processo que norteia o método axiomático de entendimento do objeto matemático conforme compartilhado pela comunidade acadêmica e, quando possível diagnosticar, o método axiomático seguido pelo aluno para avaliar a questão. Retomando o exemplo de "continuidade", vamos entender como rigor, o processo que envolve a definição formal para continuidade conforme apresentada a partir da existência dos limites que, por sua vez, serão considerados a partir de sua conceituação com a chamada notação $\varepsilon - \delta$.

Na perspectiva da sala de aula, Reis (2001, p. 79) se refere assim ao papel do rigor na construção do conhecimento matemático:

> Portanto cabe a nós, professores de Cálculo e Análise, a avaliação de qual nível de rigor é conveniente atingir sem que, com isso, percamos o real sentido e a real compreensão das idéias matemáticas. Para isso, devemos levar em consideração, fundamentalmente, o perfil do nosso estudante no que se refere a sua formação matemática anterior e aos objetivos das disciplinas que ministramos para os diversos cursos da carreira universitária, os quais formam profissionais com os mais diferentes espectros.

Concluindo essa seção, apresentaremos a noção de intuição profunda trabalhada por Zbigniew Semadeni. Interessante observar que não há uma definição única para o termo intuição. Freudenthal (1983, p. 33, 226) nos apresenta a intuição associado à expressão "objetos mentais" e que pode significar "visão interior" ou "iluminação". O mesmo autor também se refere à intuição como uma referência à representação que uma criança usaria para definir um objeto. Aqui, podemos também considerar, além dos objetos concretos, os objetos abstratos da Matemática.

Semadeni (2008) destaca ainda uma aparente relação dicotômica entre a intuição e o rigor ao apresentar que, dentro da Educação Matemática, usualmente vemos a expressão intuição como uma oposição ao rigor. A intuição estaria relacionada à representação visual ou àquilo que poderia ser considerado plausível, ainda que não tenhamos utilizado de nenhuma demonstração rigorosa. O autor destaca a contribuição de Tall que apresenta o pensamento matemático se desenvolvendo a partir da conexão entre três universos (*world*, no original) da Matemática, tendo cada um deles um nível próprio de sofisticação e aprimoramento. O primeiro seria o universo baseado na descrição do objeto matemático (*conceptual-embodied world*). Neste primeiro momento o objetivo é descrever ou deduzir propriedades baseado na observação e manipulação do objeto. O segundo universo (*proceptual-symbolic world*) compreende as ações e esquemas que podem explicar o objeto de uma maneira mais simbólica. Finalmente, temos o universo da descrição formal, rigorosa e axiomática do objeto (*formal-axiomatic world*).

Conforme apresentado, a forma como definimos um objeto matemático delimitará a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. A intuição profunda (*deep intuition*) pressupõe a compreensão do objeto matemático em toda a sua multiplicidade de significados, incluindo suas propriedades e, principalmente, a relação com outros objetos, matemáticos ou não, que podem estar associados àquele. Nesse sentido, para compreendermos “profundamente” devemos compreender o objeto imerso em todo um contexto associado à sua percepção física, sensorial, de definição e sua relação com o meio.

Finalmente, cabe ressaltar que compartilhamos com a proposta apresentada por alguns educadores matemáticos (REIS, 2001, 2009; DOMINGOS, 2003) para a relação entre rigor e intuição: não há, em nosso entendimento, uma relação dicotômica entre estas duas aproximações para a compreensão de um elemento matemático. Acreditamos fortemente numa relação de complementaridade entre estes conceitos.

3.5 Sobre Imagem Conceitual e Definição Conceitual

Diferentemente do que o senso comum nos apresenta, a construção de uma ideia ou a apropriação de um novo conceito não se dá de forma completamente linear em nosso cérebro. Ainda que o cérebro tenha uma identificação estreita com uma estrutura puramente lógica, seu funcionamento não é propriamente lógico. Quando evocamos um conceito qualquer ou quando vamos nos apropriar de uma nova informação, e aqui podemos incluir os conceitos e as informações matemáticas, o fazemos de maneira complexa e acionamos diferentes partes de nosso cérebro ao mesmo tempo. Existe toda uma estrutura cognitiva extremamente complexa para a apropriação desta nova informação. Nosso cérebro evoca diferentes imagens para se apropriar deste novo conceito, acionando toda uma rede complexa de imagens, definições pré-estabelecidas e saberes prévios para compreendermos esta nova informação.

Vamos recorrer às idéias de David Tall e Shlomo Vinner para lançarmos uma luz sobre esta complexa rede de informação acionada pelo nosso cérebro, ainda que nosso trabalho não pretenda elucidar todo o aspecto cognitivo que implica essa aquisição do conhecimento. Nosso objetivo é tão somente evocar os conceitos de “imagem conceitual” e “definição conceitual” conforme propostos por esses pesquisadores, para uma melhor compreensão da forma como nos apropriamos de um novo conceito matemático.

Consideraremos, no presente trabalho, as ideias de Tall e Vinner (1981) sobre imagem conceitual nas quais nos apoiaremos fortemente:

> Usaremos o termo *imagem conceitual* para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo amadurece e se depara com novos estímulos e amadurece.

Cabe destacar que a imagem conceitual é individual e dinâmica e vai sendo modificada com o tempo. A forma como cada um de nós constrói sua imagem para um dado conceito é muito particularizada e está sempre impregnada de valores e referências que são pessoais. Por outro lado, ela é também dinâmica e varia com o tempo. Novas imagens vão sendo agregadas às anteriores modificando-as e revestindo-as de um caráter dinâmico.

Consideraremos também, no presente trabalho, as ideias relacionadas à definição conceitual de Meyer (2003, p. 6), a qual também se baseou em Tall e Vinner (1981):

> O termo definição conceitual é utilizado para indicar a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. Esta definição conceitual pode ser aprendida pelo indivíduo de uma forma rotinizada ou de uma forma mais significativa, relacionando-a em maior ou menor grau com a definição formal do conceito científico. Pode também constituir uma reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual (evocada).

Interessante é que, principalmente em função de como foi processada a imagem conceitual, a definição conceitual pode diferir da definição apresentada formalmente. O aluno (re)constrói sua definição conceitual permeada pelas suas imagens conceituais previamente estabelecidas.

Notemos que a definição conceitual é uma forma de descrever em palavras um conceito. Podemos então evocar, para uma dada definição conceitual, imagens conceituais diferentes e, mais ainda, até mesmo conflitantes. O aluno pode sem o perceber, ter construído imagens conceituais conflitantes para uma mesma definição conceitual e não detectar o equívoco até ter a oportunidade de evocar as duas imagens em uma mesma situação.

3.6 Buscando relações com o ensino e levantando questionamentos

No ensino de Cálculo, várias vezes nos deparamos com situações de sala de aula que evocam diferentes manifestações de intuição e de rigor e várias perspectivas de construção de imagens e definições conceituais.

Especificamente, no ensino de limites podemos destacar os cálculos procedimentais que muitas vezes são guiados intuitivamente, mas sem a construção de significados para as operações envolvidas. Seria esta uma situação em que falta o “rigor”?

Também no ensino de continuidade, vale destacar os inúmeros exemplos e gráficos trabalhados visando a reelaboração da imagem conceitual. Entretanto, nesse processo estaria ocorrendo também uma reelaboração da definição do conceito?

A partir de nossa pesquisa de campo, descrita no próximo capítulo, intentamos buscar algumas respostas a tais questões.

Capítulo 4

UM OLHAR SOBRE NOSSA PESQUISA

> "É importante notar que o ser humano é o principal ator nesta modalidade de pesquisa, e não há procedimentos que substituam idéias e *insights*".
>
> Marcelo de Carvalho Borba

4.1 Retomando nossos objetivos

Neste capítulo, trataremos das opções metodológicas da nossa pesquisa. Relembremos que a pesquisa tem o objetivo de identificar, tão detalhadamente quanto possível, as relações entre imagem conceitual e definição conceitual manifestadas por alunos de Cálculo I quando do estudo de "Limites e Continuidade" de funções reais de uma variável.

4.2 Retomando nossa questão de investigação

Ao propor nossa questão de investigação, o fizemos com a convicção de que, mantidas as devidas proporções, há no ensino de Cálculo, uma tensão entre as "interpretações intuitivas" de Limites e Continuidade e suas "definições formais".

Pinto (2001) trata desse momento de transição e o reveste de um grande impacto. Ela cita "duas Matemáticas" e refere-se a uma delas como "Matemática elementar", que prima pela "coerência" e a outra como "Matemática formal", onde a "conseqüência" é o motivador. Esta transição está profundamente representada no que a pesquisadora classifica como movimento do "descrever para o definir".

Dentro dessa perspectiva, elaboramos a seguinte questão de investigação:

Que relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual podem ser manifestadas pelos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem de "Limites e Continuidade" em Cálculo I?

4.3 Apresentando e justificando nossa metodologia

Iniciamos este trabalho com uma pesquisa bibliográfica na qual buscamos considerar questões relacionadas ao nosso objeto de pesquisa nas mais diversas fontes teóricas relacionadas ao tema pesquisado.

Durante a pesquisa bibliográfica, nosso objetivo foi, tanto quanto possível, apropriarmo-nos de termos e conceitos associados à imagem conceitual e definição conceitual conforme proposto por Tall e Vinner (1981, 1991). Procuramos ainda trabalhos que, baseados nestes conceitos, nos apresentassem temas relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, incluindo os seus processos de ensino e aprendizagem.

Após essa fase, iniciamos uma pesquisa de documentação direta. Para tal, partimos para uma pesquisa de campo com participantes previamente selecionados. Detalharemos oportunamente o contexto em que esta pesquisa de campo foi realizada.

Nosso trabalho tem um caráter de diagnóstico e apresenta aspectos de uma pesquisa de cunho qualitativo e também quantitativo. Segundo Neves (1996, p. 1):

> Enquanto estudos quantitativos geralmente procuram seguir com rigor um plano previamente estabelecido (baseado em hipóteses claramente indicadas e variáveis que são objeto de definição operacional), a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo de seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, não emprega instrumental estatístico para análise dos dados; seu foco de interesse é amplo e parte de uma perspectiva diferenciada da adotada pelos métodos quantitativos. Dela faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo. Nas pesquisas qualitativas, é freqüente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo as perspectivas dos participantes da situação estudada e, a partir daí, situe sua interpretação dos fenômenos estudados.

Ainda segundo Neves (1996, p. 2), os métodos qualitativos e quantitativos não são excludentes e sim complementares, no seguinte sentido:

> Os métodos qualitativos e quantitativos não se excluem. Embora difiram quanto à forma e à ênfase, os métodos qualitativos trazem como contribuição ao trabalho de pesquisa uma mistura de procedimentos de cunho racional e intuitivo capazes de contribuir para a melhor compreensão dos fenômenos. Pode-se distinguir o enfoque qualitativo do quantitativo, mas não seria correto afirmar que guardam relação de oposição.

Entretanto, enxergamos nossa pesquisa qualitativa em sua essência, pois buscaremos estabelecer, para além dos dados quantitativos, relações que produzam categorizações relevantes à presente investigação, na perspectiva de Borba e Araújo (2004). Assim, nossos instrumentos para a coleta de dados foram duas atividades com questões abertas que serão detalhados a seguir.

4.4 Apresentando nossas atividades

Como as noções de rigor e intuição permearão a análise dos resultados para que possamos estabelecer, se possível, uma relação entre os conceitos (imagem e definição) e os tratamentos (intuitivo ou rigoroso) desprendidos pelos alunos, a proposta de nossas atividades envolve habilidades em que poderemos avaliar tais noções.

Nessas atividades, em função da questão de investigação proposta, partimos de aspectos que envolvem / evocam a intuição dos alunos para aspectos que descrevem / demonstram o rigor dos alunos na construção dos conceitos de “Limites e Continuidade”. Isto pode ser notado quando exploramos, ao final de cada atividade, a capacidade dos alunos de, não mais “descrever” os conceitos envolvidos, mas de “defini-los” formalmente.

4.4.1 Atividade 1 – Limites

Questão 1: Escrevendo com suas palavras...

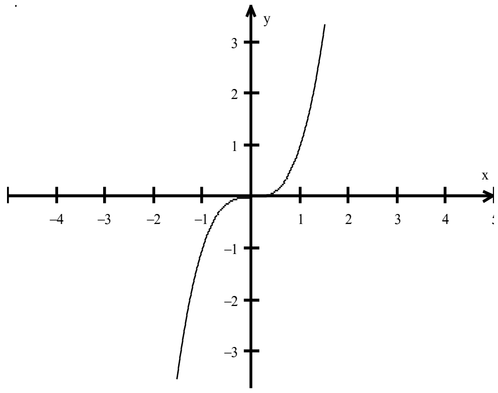
Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

a) uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor.
b) uma função tem limite infinito quando a variável independente cresce indefinidamente.

Questão 2: Do gráfico para o cálculo...

Com base nos gráficos determine, caso exista:

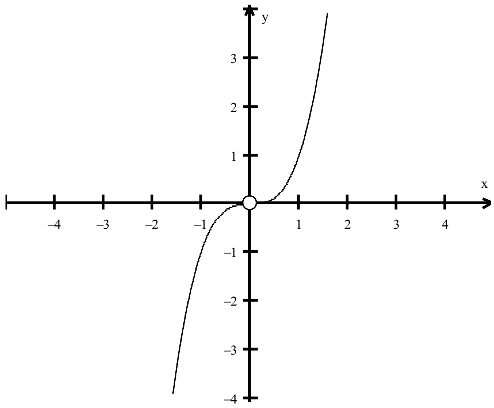
a)



$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

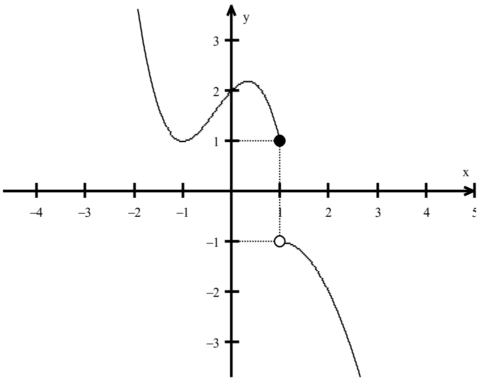
b)



$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

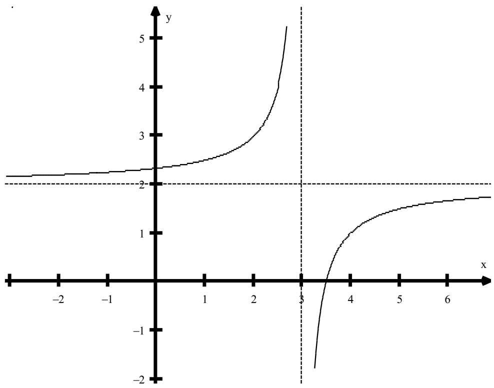
c)



$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

d)



$\lim_{x\to 3^+} f(x)$ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ $\lim_{x\to 3} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

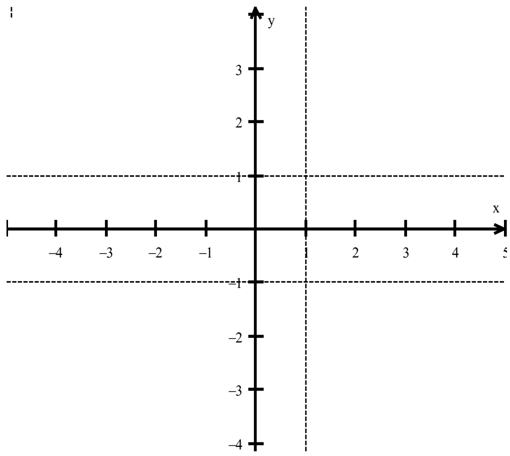
Questão 3: Do cálculo para o gráfico...

Construa o gráfico de uma função com as seguintes propriedades:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$



Questão 4: Tentando escrever rigorosamente...

De acordo com as definições precisas de limites, o que significam as afirmações:

a) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

b) para todo $M > 0$ real dado, existe $N > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $x > N$, então $f(x) > M$.

4.4.2 Atividade 2 – Continuidade

Questão 1: Escrevendo com suas palavras...

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

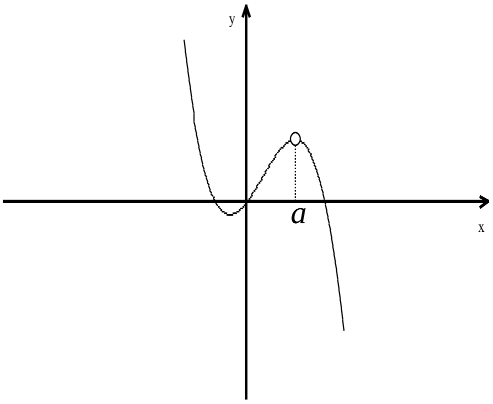
a) uma função é contínua para um certo valor da variável independente.

b) uma função é contínua.

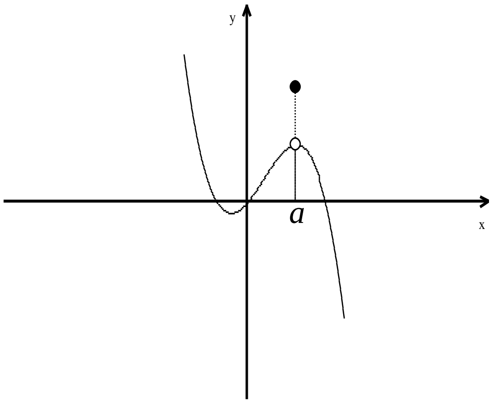
Questão 2: Do gráfico para o cálculo...

Determine se a função é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$. Caso seja descontínua, justifique.

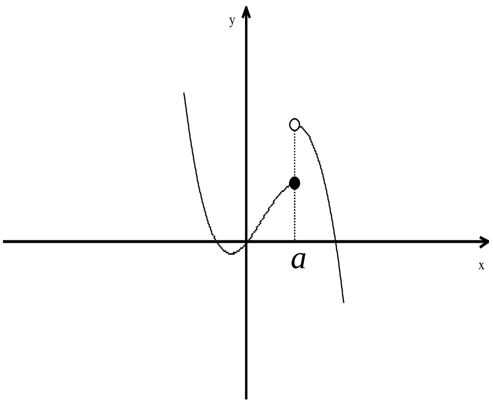
a)



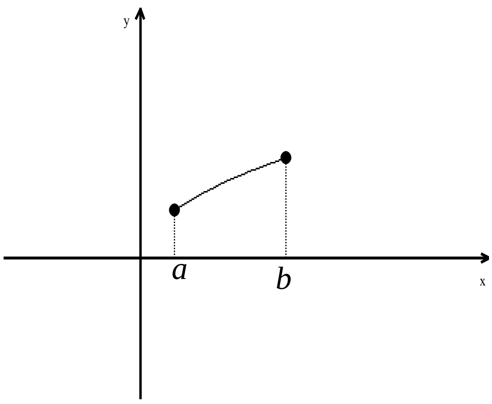
b)



c)



d)



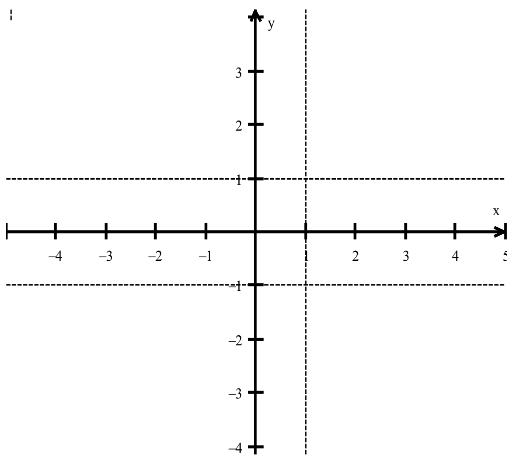
Questão 3: Do cálculo para o gráfico...

Construa o gráfico de uma função com as seguintes propriedades:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ $\quad f(1) = -1$

$f(-1) = 1$ $\quad$ *f(x)* é contínua em *x=0*



Questão 4: Tentando escrever rigorosamente...

De acordo com as definições precisas de continuidade, o que significam as afirmações:

a) existe $f(\pi)$, existe $\lim_{x \to \pi} f(x)$ e $\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$.

b) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(f)$ e $|x - 4| < \delta$ então $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

4.5. Apresentando os participantes de nossa pesquisa

Nossa pesquisa de campo foi realizada no 2º semestre letivo de 2010, com 56 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática (36 alunos dos 2º e 3º períodos) e Bacharelado em Estatística (20 alunos dos 2º e 3º períodos) da Universidade Federal de Ouro Preto.

Os alunos estavam matriculados em duas turmas da disciplina MTM 212 – Cálculo Diferencial e Integral I, obrigatória para os cursos de Matemática e Estatística, com carga horária de 60 horas/aula, desenvolvidas dentro da seguinte ementa: Derivadas e Aplicações; Integrais e Aplicações.

Cabe ressaltar que os conteúdos de Limites e Continuidade são estudados na disciplina MTM 211 – Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, integrante da grade curricular do 1º período de cada curso, também obrigatória e pré-requisito para o Cálculo I, com carga horária de 60 horas/aula, desenvolvidas dentro da seguinte ementa: Números Reais; Funções; Limites e Continuidade.

Entretanto, é quase que uma prática “obrigatória” dos professores de Cálculo I, iniciar a disciplina com duas semanas de revisão das definições e principais propriedades de Limites e Continuidade, o que foi feito pelo professor responsável pela disciplina, um docente efetivo do Departamento de Matemática da UFOP, com formação de Doutorado em Matemática Aplicada e com 15 anos de experiência docente no Ensino Superior.

Contatamos esse professor responsável, o qual prontamente aceitou aplicar a 1ª Atividade ao final da 1ª semana de aula (agosto / 2010), na qual foi revisado o conteúdo de Limites e a 2ª Atividade ao final da 2ª semana de aulas (agosto / 2010), na qual foi revisado o conteúdo de Continuidade, sendo dado o tempo de 1 hora/aula para a realização de cada atividade por parte dos alunos. Obviamente, estes foram devidamente instruídos sobre o objetivo e a natureza das atividades enquanto instrumentos de uma pesquisa científica.

A análise das atividades será feita no próximo capítulo.

Capítulo 5

IDENTIFICANDO RELAÇÕES ENTRE INTUIÇÃO E RIGOR E ENTRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL MANIFESTADAS PELOS ALUNOS PARTICIPANTES

> ”Definição cria um problema sério na aprendizagem da Matemática. Ela representa, talvez mais do que qualquer coisa, o conflito entre a estrutura da Matemática, como concebida pelo matemático profissional, e os processos cognitivos de aquisição de conceito.”
>
> Shlomo Vinner

5.1. Introdução

Neste capítulo, faremos a análise dos dados das atividades propostas aos nossos sujeitos de pesquisa. Recordamos que foram aplicadas duas atividades com questões abertas sobre Limites e Continuidade chamadas, respectivamente, de Atividade 1 e Atividade 2. Cada uma das atividades foi aplicada individualmente aos alunos com um intervalo de uma semana entre elas. Entendemos que, para a proposta de nosso trabalho, as atividades sendo aplicadas e avaliadas individualmente nos permitem uma maior compreensão sobre as relações entre os elementos envolvidos manifestadas pelos alunos sobre os temas propostos.

Neste momento, faremos um levantamento quantitativo e qualitativo das respostas, tentando tanto quanto possível inferir impressões sobre as respostas dos sujeitos de pesquisa. Antes de iniciarmos esta fase de nossa pesquisa, achamos pertinente retomarmos que, em nossa questão de investigação, objetivamos identificar algumas relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual, a partir das respostas fornecidas pelos alunos participantes de nossa pesquisa.

Avaliamos todas as 4 (quatro) questões de cada uma das duas atividades realizadas pelos 56 (cinqüenta e seis) alunos, perfazendo assim um total de 448 (questões) distribuídas em 112 (cento e doze) atividades. Optamos por analisar todas as questões das duas atividades, por acreditar numa maior qualidade na análise dos resultados e por julgar que, procedendo assim, pode-se traçar um perfil mais fidedigno das representações inferidas a partir do conjunto de respostas.

Como no Capítulo 4 já apresentamos cada atividade completa, optamos por apresentar aqui as questões de cada uma em separado, seguidas de uma avaliação das respostas dos alunos.

5.2. Atividade 1 – Limites

Questão 1: Escrevendo com suas palavras...

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

a) uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor.
b) uma função tem limite infinito quando a variável independente cresce indefinidamente.

O item **a** tinha como objetivo avaliar a percepção dos alunos sobre o limite de uma função quando a variável independente tende a um ponto. Naquele momento, nossa intenção era que o aluno manifestasse sua percepção da maneira mais intuitiva possível. Foi inclusive sugerido ao aluno que não utilizasse símbolos matemáticos na resposta para que pudéssemos avaliar, tanto quanto possível, a imagem conceitual do aluno sobre o tema Limites.

Segue uma tabela (Tab. 1) contendo as respostas classificadas qualitativa e quantitativamente para o item **a**. Neste momento, estamos interessados em verificar como o aluno interpreta a existência do limite de uma função em um ponto. Procuramos categorizar as questões baseando-nos nas respostas dos próprios alunos, ou seja, optamos por não estabelecer categorizações pré-definidas para que pudéssemos avaliar adequadamente as relações manifestadas pelos alunos, conforme proposto em nossa questão de investigação.

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Ter limite é tender / se aproximar de um mesmo valor por ambos os lados.	14	25,0%
Ter limite é tender / se aproximar de um valor.	9	16,1%
Ter limite é assumir um valor.	5	8,9%
Ter limite é quando a variável independente aproxima-se de um mesmo valor à esquerda e à direita.	3	5,4%
Ter limite é assumir valor por ambos os lados.	2	3,6%
Ter limite independe da variável independente.	1	1,8%
Ter limite é quando a variável tende / se aproxima de um certo valor.	1	1,8%
Ter limite é quando um ponto do gráfico apresenta o mesmo valor de referência à esquerda e à direita.	1	1,8%
Ter limite é quando um valor chega próximo de outro valor, mas sem encostar neste valor.	1	1,8%
Não evocou qualquer imagem.	19	33,9%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 1: Análise da Atividade 1 - Questão 1 - Item **a**

A partir daí, fizemos o levantamento de alguns elementos que compõem as relações entre rigor e intuição e entre imagem conceitual e definição conceitual manifestadas pelos alunos.

Podemos observar que os alunos têm uma noção, ao menos intuitiva, que a existência do limite está diretamente ligada a uma "aproximação lateral". Um total de 14 (quatorze) alunos (25%) associou a expressão "ter limite" a uma aproximação lateral. Por outro lado, apenas 3 (três) alunos (5,4%) atribuem esta aproximação lateral ao conceito de vizinhança à esquerda e à direita da variável dependente e, mesmo assim, o fazem sem citar explicitamente o termo "vizinhança" em qualquer momento.

Interessante observar, sob o ponto de vista conceitual, que um total de 7 (sete) alunos (12,5%) associou a existência do limite ao valor assumido pela função. Nesse caso, não houve consideração sobre aproximação, mas apenas à necessidade da função assumir um valor. A mesma idéia ocorreu com 3 (três) alunos (5,4%) que associaram o limite ao valor da função, porém com a premissa de assumir o valor à esquerda e à direita.

Vamos destacar algumas respostas e comentá-las. Observemos que, para manter a privacidade dos participantes da pesquisa, foram atribuídos a cada um dos alunos os rótulos de A1 até A56, para que pudéssemos identificá-los. Isto foi feito de forma aleatória não obedecendo à ordem alfabética nem curso (Matemática ou Estatística).

Se considerarmos a imagem conceitual "ter limite é tender / se aproximar de um mesmo valor por ambos os lados" como aquela que contém elementos mais coerentes com uma definição formal de limite, verificamos um índice que pode ser considerado baixo: apenas 14 (quatorze) alunos (25%) associaram a existência do limite da função aos limites laterais. O aluno A19, por exemplo, assim nos apresenta: "Quando a variável em análise se aproxima de um mesmo ponto, tanto pela direita quanto pela esquerda, diz-se que esta função tem limite". Essa resposta, ainda que aparentemente satisfatória, apresenta um aspecto conceitual que será recorrente em nossos resultados: os alunos não fazem uma distinção muito clara entre a variável independente e a variável dependente. Notemos que o aluno faz referência a uma variável ("a variável em análise se aproximar de um mesmo ponto"), mas não deixa claro a qual variável ele se refere.

Já o aluno A14 apresenta uma resposta semelhante, inclusive não distinguindo variável independente e variável dependente: "Uma função tem limite quando a variável tende a um certo valor qualquer, tanto para a direita, quanto para a esquerda deste valor". O aluno A11, em uma redação inicial "acima da média", apresenta: "Quando a variável independente se aproxima de um mesmo valor à esquerda e à direita (sem a necessidade da função estar definida no ponto, o que importa são as vizinhanças) a função tem limite". Entretanto, notamos que esse aluno não se preocupou com a própria questão da existência do limite.

O aluno A1, por outro lado, traz a seguinte resposta: "Uma determinada função possui limite quando assume determinado valor em um determinado ponto". Notemos que, aparentemente, o aluno associa a existência do limite ao valor da função no ponto. Ainda que apenas 5 (cinco) alunos (8,9%) tenham apresentado essa resposta, julgamos relevante destacá-la, pois ela nos remete ao aspecto conceitual do limite, no qual a função não precisa sequer estar definida no ponto para que o limite exista.

Para finalizar, consideramos o número expressivo de 19 (dezenove) alunos (33,9%) que não evocaram qualquer imagem conceitual relevante. Incluímos nessa categoria, as respostas deixadas em branco ou aquelas que julgamos não expressar qualquer imagem conceitual relativamente à questão proposta.

Podemos destacar como exemplos, a resposta do aluno A6: "Quando o limite tende para positivo, negativo ou infinito" ou, ainda, a resposta do aluno A40: "A função possui um representante".

O item **b** tinha como objetivo verificar quais elementos são evocados pelos alunos envolvendo os limites infinitos e no infinito. A questão foi elaborada de tal que forma que permitisse ao aluno, em um mesmo momento, avaliar o limite infinito e o limite quando a variável independente cresce indefinidamente. Propositalmente, colocamos os dois aspectos em uma mesma questão para avaliar como o aluno percebe estas nuances conceituais dos limites e, principalmente, como os descreve em palavras.

Segue uma tabela (Tab. 2) contendo as respostas classificadas qualitativa e quantitativamente para o item **b**. Novamente, procuramos categorizar as questões baseando-nos nas respostas dos próprios alunos, não estabelecendo categorizações pré-definidas.

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Ter limite infinito é quando a função cresce indefinidamente.	25	44,6%
Ter limite infinito é quando a função cresce negativamente e positivamente.	4	7,1%
Ter limite infinito é quando a função se aproxima de uma assíntota.	3	5,4%
Ter limite infinito é a função assumir limites laterais infinitos.	2	3,6%
Ter limite infinito é quando o gráfico da função cresce indefinidamente.	2	3,6%
Ter limite infinito é quando a variável não se aproxima de um valor, mas cresce indefinidamente.	1	1,8%
Ter limite infinito é uma função que não possui limite.	1	1,8%
Ter limite infinito é quando a função tende ao infinito.	1	1,8%
Ter limite infinito é quando o valor da variável não é finito.	1	1,8%
Não evocou qualquer imagem.	16	28,6%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 2: Análise da Atividade 1 – Questão 1 - Item **b**

O primeiro aspecto relevante dessa questão foi que 25 (vinte e cinco) alunos (44,6%) responderam à questão de forma aparentemente satisfatória. Mas é interessante observar que nenhum dos alunos fez qualquer inferência ao aspecto do limite infinito estar associado ao fato da variável independente estar tendendo ao infinito. As respostas se limitaram a uma quase repetição da questão proposta, ou seja, quando questionamos sobre uma função ter limite infinito as respostas nesta categoria se resumiram a destacar que a função tem limite infinito quando a própria função cresce indefinidamente. Podemos considerar até que, para alguns alunos, a resposta se limitou a apenas tentar descrever / reproduzir o enunciado da questão, apenas redigindo-o de outra maneira.

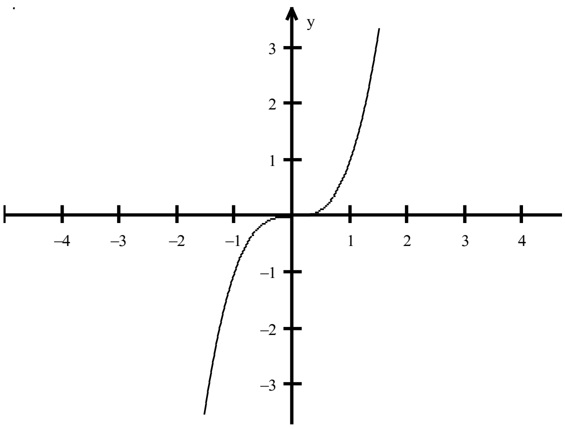
Tomemos como exemplo a resposta do aluno A8: “Quando a variável não se aproxima de um valor, mas pelo contrário continua crescendo, essa função tem limite infinito”. Note que ele se limitou a descrever a pergunta e não a questão implícita na pergunta.

O aluno A11 por sua vez, nos apresenta assim sua resposta: “Quando uma variável cresce indefinidamente, seu limite tende ao infinito positivamente ou negativamente”. Aqui estamos pressupondo que a variável à qual o aluno se refere seja a variável independente, mas notemos que ele acaba misturando a função (variável dependente) à variável independente quando conclui que “seu limite” (da função) tende ao infinito.

Questão 2: Do gráfico para o cálculo...

Com base nos gráfico determine, caso exista:

a)

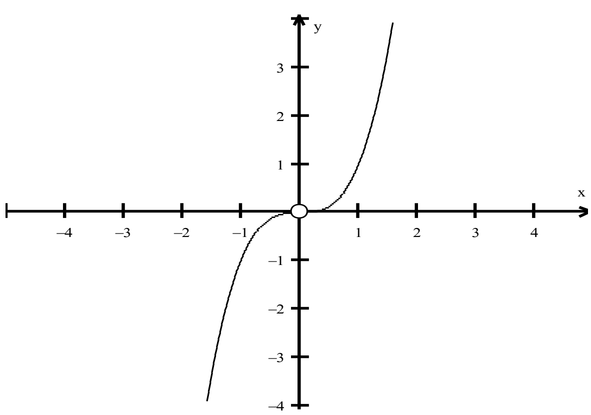


$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

b)

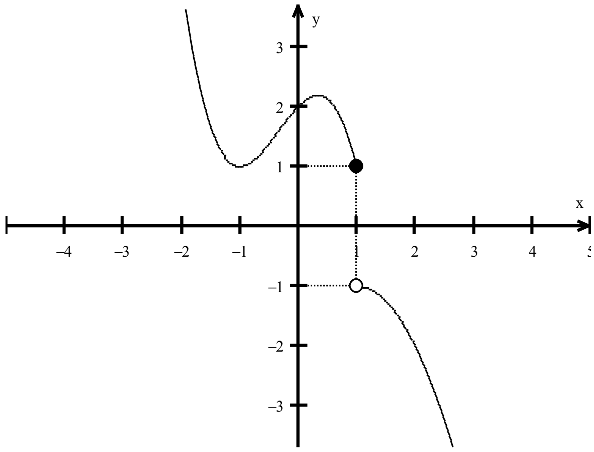


$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

c)

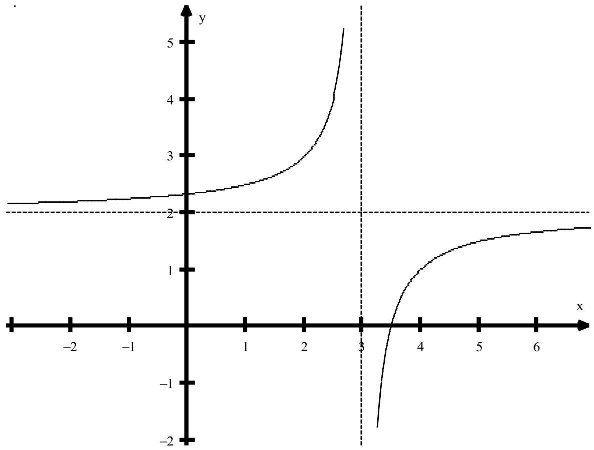


$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

d)



$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

Nessa questão, solicitamos a determinação gráfica da existência de limites com o intuito de destacar elementos da intuição gráfica / algébrica dos alunos. O objetivo da questão era avaliar como o aluno interpreta geometricamente a existência do limite de uma função. Foram construídos gráficos com limites em um ponto, com limites infinitos e com limites no infinito. Interessante observar que, propositalmente, alguns gráficos apresentam descontinuidade em pontos onde o limite existe. Ainda que alguns aspectos da continuidade sejam avaliados somente na próxima atividade, acreditamos proceder a uma melhor avaliação de algumas respostas confrontando a existência do limite com a continuidade.

No item **a**, analisando a existência dos limites laterais e de $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, o índice de acertos foi de 78,5%, ou seja, 44 (quarenta e quatro) alunos responderam corretamente. Interessante fazermos um confronto com o índice de acertos correspondente no item **b**, que caiu para 39,2%, ou seja, apenas 22 (vinte e dois) alunos responderam corretamente sobre os limites laterais e o $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Como, nesse item, o gráfico é descontínuo em $x = 0$, acreditamos que, provavelmente, os alunos que acertaram no item **a** e erraram o item **b** associaram a existência do limite à continuidade da função.

Na análise relativa aos limites quando x tende $+\infty$ e $-\infty$, o índice de acerto de ambos foi praticamente o mesmo nos dois itens: 46 (quarenta e seis) alunos (82,1%) no item **a** e 47 (quarenta e sete) alunos (83,9%) no item **b**.

No item **c,** tínhamos um gráfico com descontinuidade do tipo salto e limites infinitos. Sobre o índice de certos para os limites infinitos, tivemos praticamente o mesmo resultado dos itens anteriores: 45 (quarenta e cinco) alunos (80,3%) acertaram a questão.

No ponto de descontinuidade $x = 1$, tínhamos $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$. O índice de acerto para este limite foi de 66%, ou seja, 37 (trinta e sete) alunos acertaram a questão. No mesmo ponto do domínio, tínhamos $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$ e, curiosamente, tivemos um índice de acerto bem mais baixo: 19 (dezenove) alunos (33,9%). Temos motivos para acreditar que essa disparidade nas respostas para dois limites semelhantes em uma mesma questão foi o fato de termos $f(1) = 1$. Nesse caso, podemos inferir que muitos alunos novamente associaram a existência do limite à imagem da função, resultado semelhante ao encontrado no item **a**.

Para o item **d**, foi proposto um gráfico com comportamento assintótico horizontal para $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. O índice de acerto foi 51,7%, ou seja, 29 (vinte e nove) alunos acertaram essa parte da questão. Na outra parte do mesmo gráfico, tínhamos ainda um comportamento assintótico vertical: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$. Para essa questão, 32 (trinta e dois) alunos (57,1%) acertaram os limites laterais ($+\infty$ e $-\infty$, respectivamente) e quase todos concluíram acertadamente que não existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Como uma das poucas respostas incorretas, podemos destacar o aluno A14 que respondeu $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \pm\infty$. Não temos como inferir se essa resposta foi apenas uma escrita para indicar que o limite não existe ou se o aluno realmente interpretou como o limite tendo “dois valores”.

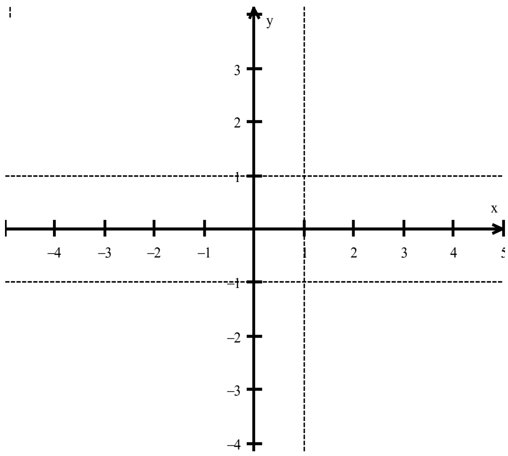
Questão 3: Do cálculo para o gráfico...

Construa o gráfico de uma função com as seguintes propriedades:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$



O objetivo dessa questão era explorar a intuição algébrica / gráfica dos alunos relacionada aos limites laterais quando a função tende a um ponto e também aos limites infinitos e no infinito. Enquanto, se na Questão 2, o aluno era levado a interpretar as informações sobre limites a partir dos gráficos, o objetivo aqui era construir o gráfico levando em consideração seu comportamento na vizinhança de alguns valores do domínio da função. Para tanto, colocamos um sistema de eixos com as respectivas assíntotas verticais nos valores em questão, a saber, $x = -1$ e $x = 1$. Destacamos também, na grade de resposta, as retas $y = -1$ e $y = 1$ para verificar se os alunos interpretavam corretamente as assíntotas como verticais e não horizontais.

Ainda que pudéssemos ter uma quantidade grande de respostas para a questão (notemos que não há qualquer informação sobre as raízes, por exemplo, assim o aluno poderia montar o gráfico com certa liberdade), o objetivo era avaliar os limites laterais em $x = -1$, onde havia uma descontinuidade do tipo salto ($\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$) e em $x = 1$ onde os limites laterais não existiam ($+\infty$ e $-\infty$, respectivamente, à esquerda e direita).

Apresentamos dois gráficos (Fig. 10 e Fig. 11) parcialmente corretos, de um total de 11 (onze) respostas (19,6%), no sentido de explicitar erros em relação ao comportamento assintótico da função, ou em relação aos limites laterais em $x = -1$ ou ainda, em relação aos limites no infinito.

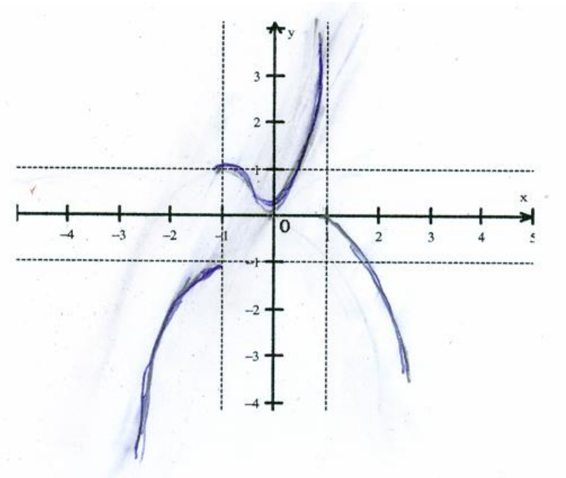


Fig. 10: resposta do aluno A4

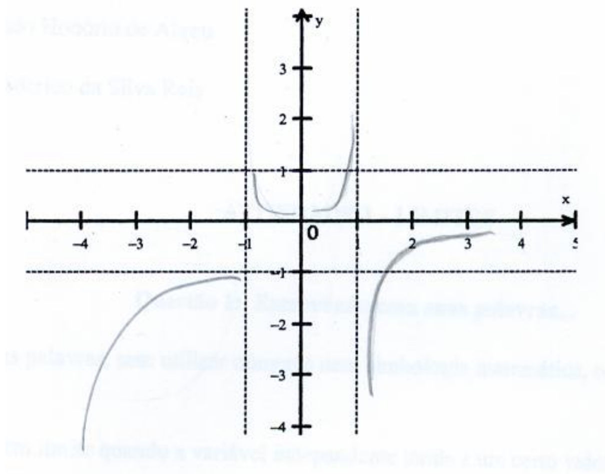


Fig. 11: resposta do aluno A10

A destacar no gráfico da Fig.10, o comportamento da função quando $x \to +\infty$ (o aluno interpretou que $f(x) \to -\infty$). Por outro lado, no gráfico da Fig. 11, o aluno interpreta corretamente os limites laterais de $f(x)$ em $x = -1$, porém não deixa claro o valor da função nesse ponto, por exemplo, utilizando a tradicional notação de "bolas" abertas ou fechadas..

Apresentamos também, todos os gráficos considerados corretos (Fig. 12, Fig. 13, Fig. 14, Fig. 15), que correspondem a um total de 4 (quatro) alunos (7,1%).

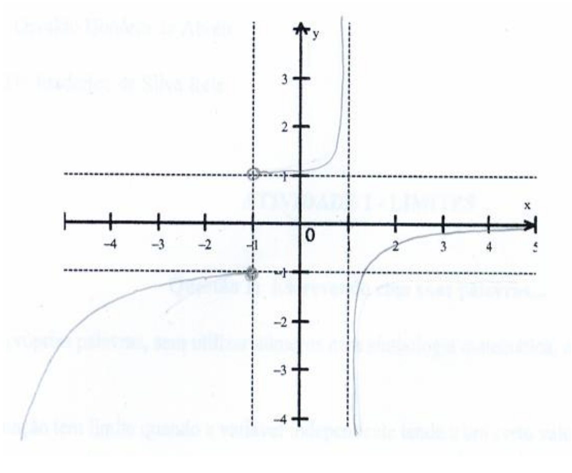


Fig. 12 – resposta do aluno A22

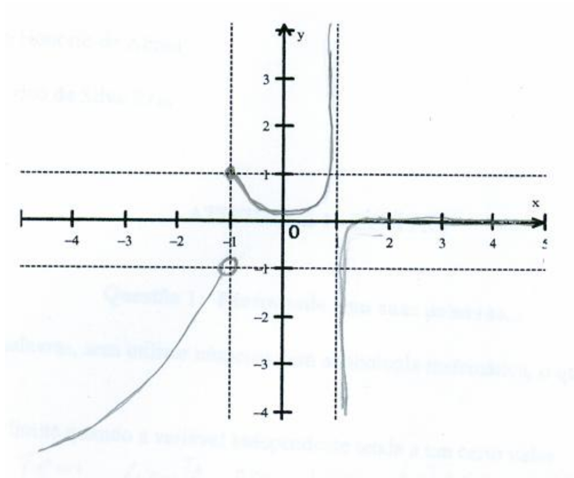


Fig. 13 – resposta do aluno A28

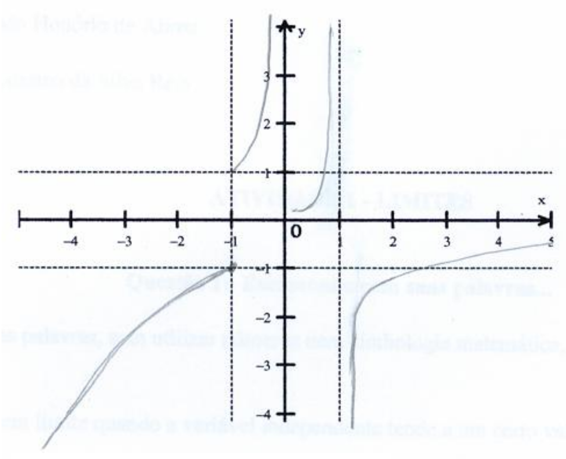


Fig. 14 – resposta do aluno A29

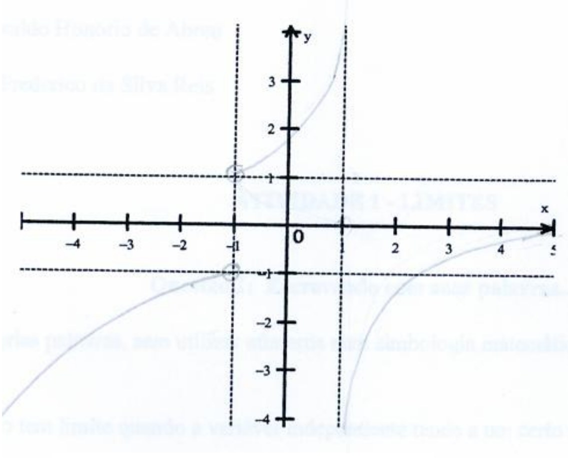


Fig. 15 – resposta do aluno A48

Destacamos ainda que, no caso do aluno A29 (Fig. 14), apesar de considerar o gráfico correto, nota-se que não há uma definição clara do valor da função na origem, o que não contradiz as propriedades requeridas.

Concluímos, pelo baixíssimo índice de acertos, que a transposição “do cálculo para o gráfico” evidencia uma dificuldade dos alunos muito maior que “do gráfico para o cálculo”, quando comparamos com os resultados da questão anterior.

Questão 4: Tentando escrever rigorosamente...

De acordo com as definições precisas de limites, o que significam as afirmações:

a) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $0 < |x-4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

b) para todo $M > 0$ real dado, existe $N > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $x > N$, então $f(x) > M$.

Diferentemente das outras questões, que tratavam basicamente de identificar / explorar as imagens conceituais dos alunos, essa questão busca identificar definições precisas de limites. No item **a,** descrevemos de maneira rigorosa, com a notação $\varepsilon - \delta$, uma situação onde a função possui limite em um ponto (no caso, temos $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$) e, no item **b,** descrevemos uma função que possui limite infinito quando a variável independente tende ao infinito (ou seja, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

Devido à semelhança nas respostas, iremos apresentar o resultado categorizado para os dois itens da questão ao mesmo tempo (Tab. 3 e Tab. 4):

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Resposta em branco.	47	83,9%
O aluno limitou-se a tentar descrever ou reescrever a questão, sem utilizar notações.	9	16,1%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 3: Análise da Atividade 1 – Questão 4 – Item **a**

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Resposta em branco.	45	80,4%
O aluno limitou-se a tentar descrever ou reescrever a questão, sem utilizar notações.	11	19,6%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 4: Análise da Atividade 1 – Questão 4 – Item **b**

A notar nessa questão, em ambos os itens, a quantidade enorme de respostas em branco. Um total de 47 (quarenta e sete) alunos (83,9%) não respondeu ao item **a** e 45 (quarenta e cinco) alunos (80,4%) não respondeu ao item **b**.

Na categoria "limitou-se a tentar descrever ou reescrever a questão", no item **a**, em nenhuma delas apareceu qualquer resultado com a notação de limite. Tomemos como exemplo a resposta do aluno A14: "Para todo ε maior que zero, existe um valor δ maior que zero, se o número x pertence ao domínio da função e o módulo desta for um número que mais se aproxima do valor entre ε e δ". Outro exemplo, do aluno A5: "Para dado um número real existe outro número real que havendo um x no domínio de f e $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \mathbf{4}| < \delta$, então $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{5}| < \varepsilon$".

No item **b**, podemos destacar a resposta do aluno A29: "A imagem será todos os valores maiores que M". Acreditamos que não podemos inferir que o aluno tem a compreensão de que a função assume valores maiores que qualquer M real dado.

Notamos que, conforme nos foi informado pelo professor responsável, as definições formais de limites exploradas na questão já haviam sido trabalhadas / destacadas na disciplina Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, que antecede a disciplina Cálculo I. Entretanto, ainda assim, nenhum aluno pareceu construir imagens conceituais ou uma definição conceitual que se aproximasse das definições precisas.

5.3. Atividade 2 – Continuidade

Questão 1: Escrevendo com suas palavras...

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

a) uma função é contínua para um certo valor da variável independente.

b) uma função é contínua.

O item **a** tinha como objetivo avaliar a percepção dos alunos sobre a continuidade de uma função em um ponto. A intenção era que o aluno manifestasse sua percepção da maneira mais intuitiva possível e, conforme proposto na primeira questão da primeira atividade, foi sugerido ao aluno que não utilizasse símbolos matemáticos na resposta.

Novamente destacamos que nosso interesse nesse momento é verificar como o aluno interpreta a continuidade de uma função em um ponto. Da mesma forma, procuramos categorizar as questões baseando-nos nas respostas dos próprios alunos, ou seja, não estabelecemos categorizações pré-definidas para que pudéssemos avaliar adequadamente as relações manifestadas pelos alunos, conforme proposto em nossa questão de investigação. Segue, então, uma tabela (Tab. 5) contendo as respostas classificadas qualitativa e quantitativamente para o item **a**.

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Ser contínua é quando a função possui imagem.	7	12,5%
Ser contínua é quando seu limite é igual a $f(x)$.	6	10,7%
O aluno limitou-se a tentar descrever ou reescrever a questão.	5	8,9%
Ser continua é quando a função não possui "quebra" em seu gráfico.	5	8,9%
Ser contínua é quando a função não há interrupção na função.	3	5,4%
Ser contínua é quando a função possui limite e este é igual ao valor da função no ponto.	3	5,4%
Ser contínua é quando existem os limites laterais e eles são iguais ao valor da função no ponto.	2	3,6%
Ser contínua é quando os limites laterais são iguais.	2	3,6%
Ser contínua é quando a função não se anula no ponto.	2	3,6%
Ser contínua é quando há imagem e ela está contida no ponto do gráfico.	1	1,8%
Ser contínua é quando a função não possui intervalo aberto.	1	1,8%
Não evocou qualquer imagem.	19	33,9%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 5: Análise da Atividade 2 – Questão 1 – Item **a**

A primeira inferência que podemos destacar na análise das respostas é que, aparentemente, uma parte dos alunos associa a continuidade simplesmente à existência da imagem da função no ponto sem, entretanto, fazer qualquer relação direta com a existência do limite. Assim, um total de 13 (treze) alunos (23,2%), de alguma forma, associou a continuidade à existência da imagem da função no ponto. Podemos citar a resposta do aluno A39: "Para o valor da variável independente, a função assume um determinado valor". Ou ainda a resposta do aluno A56: "A função será contínua se o ponto do domínio tiver uma imagem correspondente".

Por outro lado, num total de 2 (duas) respostas (3,6%) associou-se a continuidade à existência dos limites laterais sem, entretanto, fazer qualquer relação direta com o valor da função no ponto. Podemos citar a resposta do aluno A54: "Uma função é continua em um ponto se os limites laterais forem iguais".

Devemos ainda destacar aquelas respostas que evocam uma imagem conceitual típica para a continuidade: a do gráfico da função "sem interrupção". Interessante notar que essa imagem conceitual foi evocada para a continuidade em um ponto e não para a continuidade da função em um dado intervalo. O aluno A41 assim nos descreve a continuidade: “Quando o gráfico não tem falhas ou saltos, sendo assim a função é contínua no ponto em questão”.

As respostas consideradas satisfatórias foram apenas de 5 (cinco) alunos (8,9%). Esses alunos associaram a continuidade à existência do limite e este, ao valor da função no ponto. Podemos destacar a contribuição do aluno A42: “Uma função é contínua para um certo valor da variável independente se existir limite neste ponto, ou seja, se os limites laterais forem iguais e se a imagem da função naquele ponto for igual ao valor encontrado para este limite”.

Ainda a destacar, a grande quantidade de respostas nas quais os alunos não evocaram qualquer imagem significativa. Entre estas 19 (dezenove) respostas (33,9%), temos as respostas em branco ou respostas do tipo “sim” ou “não” à questão.

Já o objetivo do item **b** da questão era verificar, após a avaliação da continuidade em um ponto, a continuidade de uma função. Tentamos avaliar, tanto quanto possível, como o aluno faz a transição da continuidade em um ponto para a continuidade em um intervalo ou em todo o domínio da função. Segue uma tabela (Tab. 6) contendo as respostas classificadas qualitativa e quantitativamente para o item **b**.

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Ser contínua é não haver interrupção na função.	7	12,5%
Ser contínua é não haver quebra no gráfico da função em nenhum ponto do domínio.	6	10,7%
Ser contínua é a função possuir limite e este ser igual ao valor da função no ponto.	4	7,1%
Ser contínua é não possuir intervalo aberto.	3	5,4%
Ser contínua é a função estar definida em todos os pontos.	3	5,4%
Ser contínua é quando seu limite é igual a $f(x)$.	2	3,6%
Ser contínua é ser contínua em todos os pontos de um intervalo.	2	3,6%
Ser contínua é quando $f(x)$ é igual a $f(a)$.	2	3,6%
Ser contínua é quando não existe uma quebra na função.	2	3,6%
Ser contínua é a função não possuir interrupção no seu domínio.	1	3,6%
O aluno limitou-se a tentar descrever ou reescrever a questão.	1	3,6%
Ser contínua é existir o limite da função e ele ser igual ao valor da função no ponto.	1	3,6%
Não evocou qualquer imagem.	22	39,3%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 6: Análise da Atividade 2 – Questão 1 – Item **b**

Várias respostas continuaram associando a continuidade da função à continuidade em um ponto, sem estender a continuidade aos demais pontos do domínio da função. Um total de 8 (oito) alunos (14,2%) responderam de forma análoga ao item **a**.

Tivemos ao todo 16 (dezesseis) respostas (28,6%) associando a continuidade de uma função à não interrupção do gráfico ou do domínio da função. Temos como exemplo, a resposta do aluno A18: “Quando podemos desenhar o gráfico da função sem paradas”. Ou ainda a resposta do aluno A19: “Uma função é contínua quando não tem interrupção em seu domínio”.

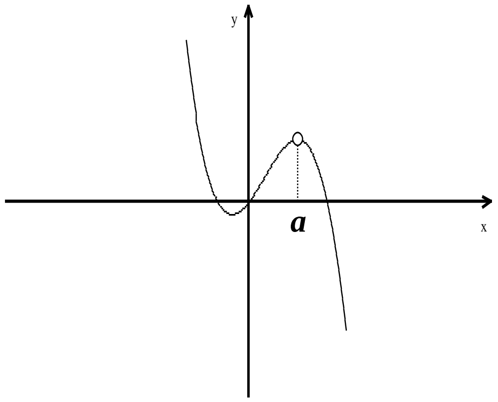
Pudemos destacar apenas 2 (duas) respostas (3,6%) nas quais os alunos apresentaram uma imagem conceitual satisfatória sobre a continuidade. Como exemplo, temos a resposta do aluno A5: “Uma função é contínua ser for contínua em todos os pontos de seu intervalo”. Ainda assim, nota-se que não foi explicitado que o tal intervalo seja o domínio da função ou esteja nele contido.

Novamente, chama-nos atenção a grande quantidade de respostas em branco ou que não evocaram qualquer imagem significativa (39,3%).

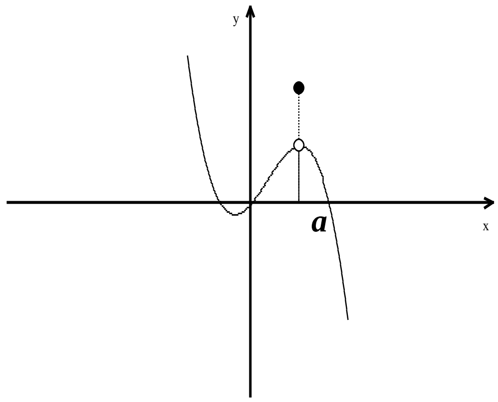
Questão 2: Do gráfico para o cálculo...

Determine se a função é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$. Caso seja descontínua, justifique.

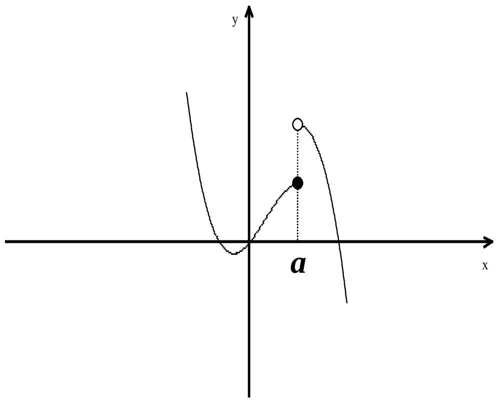
a)



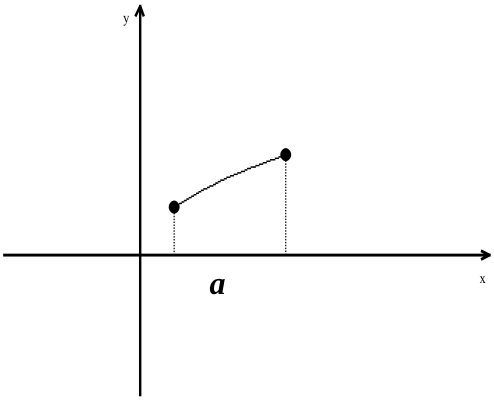
b)



c)



d)



Nessa questão, solicitamos ao aluno que avaliasse a continuidade em 4 gráficos. De forma análoga à análise da Questão 2 da primeira atividade, achamos oportuno avaliar em conjunto os dois primeiros itens (**a** e **b**), para que pudéssemos fazer, se possível, um contra-ponto entre as respostas apresentadas aos dois gráficos. Notemos que, em ambos, há uma descontinuidade em $x = a$ com a diferença que, no item **b**, a função está definida neste ponto.

Para o item **a**, tivemos 50 (cinquenta) respostas corretas (89,2%). A maior parte dos alunos respondeu à questão justificando a descontinuidade sem utilizar simbologia matemática. Como exemplo, temos a resposta do aluno A29: “A função é descontínua, pois ela não está definida no ponto”. Tivemos ainda algumas respostas mais detalhadas, como a contribuição apresentada pelo aluno A26: “A função é descontínua, pois $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, mas $f(x)$ não está definida em $x = a$”.

Para o item **b**, o índice de acertos caiu para 58,9%, ou seja, apenas 33 (trinta e três) alunos responderam satisfatoriamente à questão. Como previamos, a existência de imagem para o ponto $x = a$ acabou induzindo aos alunos a concluir pela continuidade da função.

Para o item **c** (descontinuidade do tipo salto), tivemos um percentual de acertos de 73,3%, ou seja, 44 (quarenta e quatro) respostas corretas. Numa grande parte das respostas, apesar de solicitada uma justificativa para a descontinuidade, os alunos se limitaram a responder apenas que a função era descontínua. Poucos alunos apresentaram justificativa para a descontinuidade. Tomemos como exemplo a resposta do aluno A4: “A função é descontínua. Os limites laterais são diferentes”. O alunos A9, por sua vez, utilizou simbologia matemática: “A função é descontínua pois não existe $\lim_{x \to a} f(x)$”. Uma imagem conceitual interessante para a descontinuidade do tipo salto foi evocada pelo aluno A12: “É descontínua. Há buracos no gráfico da função”.

O item **d** apresenta uma função contínua em $x = a$, embora tenhamos apenas que satisfazer a condição $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$para garantir a continuidade, pois $f(x)$ está definida no intervalo $a \leq x \leq b$. Para essa questão, tivemos um percentual de acerto de 83,9%, com 47 (quarenta e sete) respostas corretas. Mesmo as respostas do tipo “descontínua” não nos possibilitaram qualquer inferência que pudesse explicar o equívoco, pois os alunos se limitaram apenas a responder que o gráfico representava uma função descontínua em $x = a$ sem justificar a resposta.

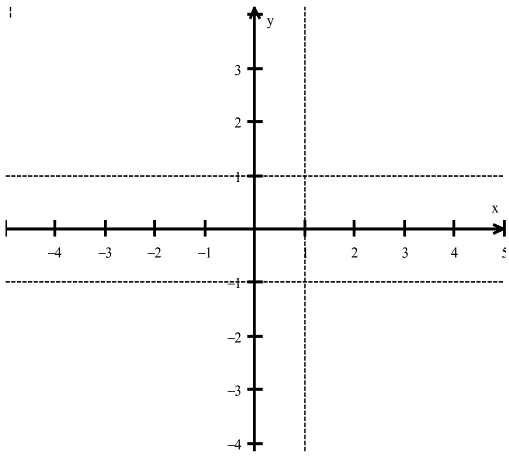
Questão 3: Do cálculo para o gráfico...

Construa o gráfico de uma função com as seguintes propriedades:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ $f(1) = -1$

$f(-1) = 1$ *f(x)* é contínua em *x=0*



O objetivo dessa questão também era explorar a intuição algébrica / gráfica dos alunos relacionada aos limites laterais quando a função tende a um ponto e também a continuidade da função em $x = 0$. Novamente, colocamos um sistema de eixos com as respectivas assíntotas verticais nos valores $x = -1$ e $x = 1$. Ainda que a função não tenha, necessariamente, comportamento assintótico, destacamos na grade de resposta, as retas $y = -1$, $y = 1$, $x = -1$ e $x = -1$ para que o aluno pudesse responder com mais liberdade.

Tivemos um total de 43 (quarenta e três) respostas (76,7%) onde, em nosso entendimento, os alunos apresentaram erros relevantes, tais como alguns gráficos que não representavam sequer uma função.

Destaca-se ainda, o grande número de respostas deixadas em branco: 22 (vinte e duas), o equivalente a 39,2%.

Dos gráficos selecionados, temos um total de 6 (seis) respostas (10,7%) consideradas corretas. Vamos destacar alguns destes gráficos (Fig. 16, Fig. 17, Fig. 18, Fig. 19):

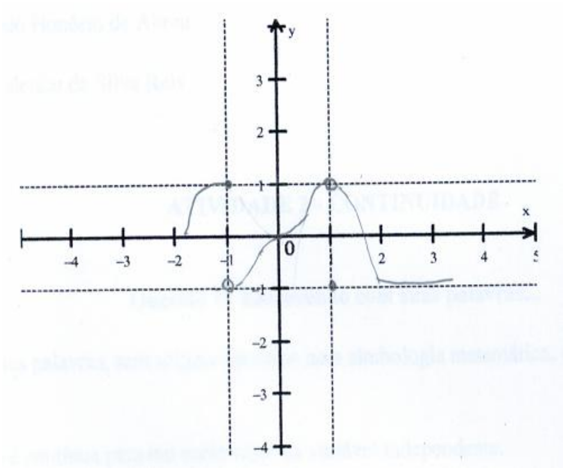


Fig. 16 – resposta do aluno A8

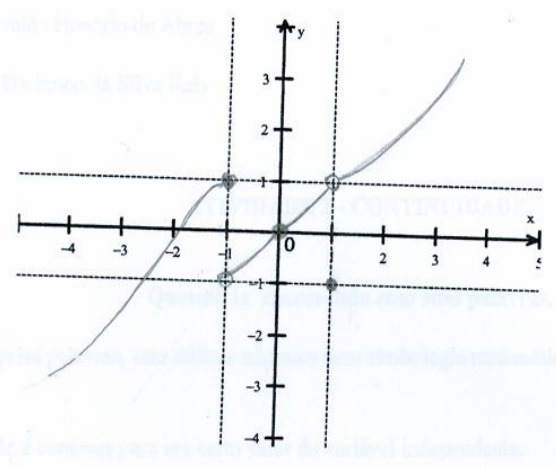


Fig. 17 – resposta do aluno A16

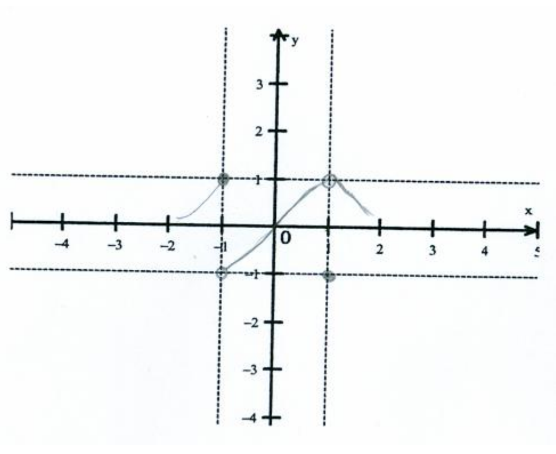


Fig. 18 – resposta do aluno A22

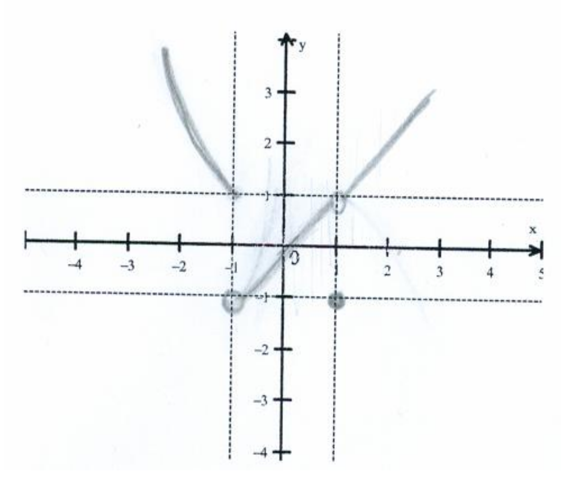


Fig. 19 – resposta do aluno A24

Dentre os 7 (sete) gráficos (12,5%) considerados parcialmente corretos, destacamos duas respostas (Fig. 20 e Fig. 21) que denotam erros tanto em relação à própria continuidade, como em relação a limites.

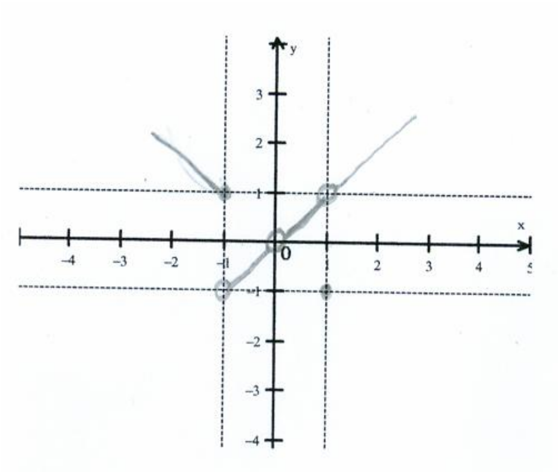


Fig. 20 – resposta do aluno A20

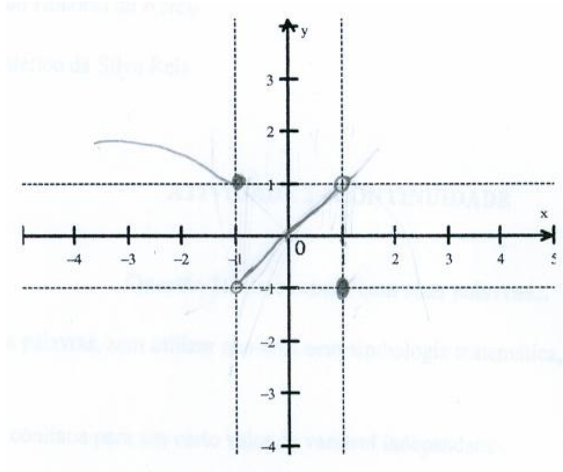


Fig. 21 – resposta do aluno A27

O aluno A20 (Fig. 20) avaliou corretamente os limites laterais, o valor da função nos pontos solicitados, mas claramente apresenta a função como descontínua em $x = 0$. Destacamos essa resposta por acharmos relevante o equívoco exatamente no tema central da atividade, ou seja, a continuidade. O aluno A27 (Fig. 21), por sua vez, avaliou corretamente o valor do limite quando $x \to -1$, mas curiosamente se equivocou com o valor do limite quando $x \to 1$.

Questão 4: Tentando escrever rigorosamente...

De acordo com as definições precisas de continuidade, o que significam as afirmações:

a) existe $f(\pi)$, existe $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$.

b) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(f)$ e $|x - 4| < \delta$ então $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

De forma análoga ao proposto na Questão 4 da Atividade 1, o nosso objetivo nessa questão era, ao nos expressarmos da maneira mais rigorosa possível, identificar as definições precisas de continuidade a partir da função / limite e ainda utilizando a notação $\varepsilon - \delta$.

No item **a**, usamos as condições da função / limite para apresentar uma função contínua em $x = \pi$. Um total de 19 (dezenove) alunos (33,9%) respondeu que a função era contínua. Notemos que o item propõe a continuidade em um ponto específico; assim resolvemos refinar, dentre as respostas acima, quais indicavam explicitamente a continuidade da função em $x = \pi$. Com este novo critério, o número de acertos caiu drasticamente para 6 (seis) respostas (10,7%) consideradas corretas.

Para o item **b**, semelhante ao que ocorreu na Questão 4 da primeira atividade, não houve nenhum acerto. Esse item apresentava uma função contínua em um ponto; porém diferentemente do apresentado no item **a** que utilizou a notação de limite, aqui envolvia-se a notação rigorosa e formal de continuidade com $\varepsilon - \delta$. Segue uma tabela (Tab. 7) contendo as respostas classificadas qualitativa e quantitativamente para o item **b**.

Categoria	Quantidade de respostas	Percentual
Resposta em branco.	48	85,7%
O aluno limitou-se a tentar descrever ou reescrever a questão, sem utilizar notações.	8	14,2%
Total	**56**	**100,0%**

Tab. 7: Análise da Atividade 2 – Questão 4 – Item **b**

Notamos que, como já mencionado, as definições formais de continuidade exploradas na questão já haviam sido trabalhadas / destacadas pelo professor das turmas. Novamente, ainda assim, nenhum aluno pareceu construir imagens conceituais ou uma definição conceitual que se aproximasse da definição utilizando $\varepsilon - \delta$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> "Para o bem ou para o mal, o homem é um espírito criativo livre. Isto produz o estranho mundo em que vivemos, um mundo de criação contínua e, portanto, mudanças e inseguranças contínuas".
>
> Joyce Cary

A motivação para essa pesquisa esteve amparada na nossa experiência pedagógica como professor de Cálculo e em uma leitura / pesquisa bibliográfica tratando das dificuldades dos alunos com a disciplina. Achamos oportuno, antes de avançarmos em nossas considerações finais, retomarmos, uma última vez, nossa questão de investigação:

Que relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual podem ser manifestadas pelos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem de "Limites e Continuidade" em Cálculo I?

Propusemos as atividades que foram detalhadamente apresentadas e discutidas e acreditamos que, dentro das limitações inerentes a uma pesquisa desta dimensão, logramos êxito em nossa proposta inicial, embora estejamos cientes de estarmos ainda longe de uma conclusão definitiva.

Começaremos com um breve resumo do nosso trabalho. Teremos a oportunidade de retomarmos algumas considerações à luz de nosso referencial teórico que nos acompanhou ao longo desta jornada, fornecendo uma grande fonte de inspiração e propiciando trilharmos este caminho com um pouco mais de segurança.

No **Capítulo 1**, apresentamos uma breve introdução, mas que acreditamos de fundamental importância para contextualizarmos nossa pesquisa. Naquele momento, procuramos permear nossas impressões pessoais, ao exercermos nossa atividade profissional, com algumas considerações de grandes pesquisadores. Tivemos ainda a oportunidade de uma reflexão sobre as dificuldades com o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral que muito nos ajudou ao constatarmos que nossas angústias e questionamentos tinham eco em outros trabalhos de outros profissionais do magistério superior.

Frescki e Pigatto (2009), Reis (2009) e, principalmente, Tall e Vinner (1981) nos propiciaram as reflexões e um amparo teórico, aos nos apontar um norte para o início de nosso trabalho. Cabe ainda destacar as contribuições de Meyer (2003) aos nossos questionamentos iniciais.

Iniciamos o **Capítulo 2** com uma breve revisão histórica do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Cientes da magnitude dessa tarefa se tomada como elemento principal de nosso trabalho, limitamo-nos apenas a considerações que, de alguma forma, pudessem se mostrar relevantes ao nosso objetivo.

Naquele momento, tivemos a companhia de autores como Reis (2001), Eves (1995), Brito e Cardoso (1995). Podemos destacar a contribuição dos primórdios do desenvolvimento do Cálculo, em particular, no que se refere aos problemas das tangentes e uma primeira oportunidade para discutir um aspecto crucial de nosso trabalho: a aparente dicotomia entre intuição e rigor. Citamos ainda as contribuições de Eves (1995) e Brito e Cardoso (1995) nessa nuance histórica do desenvolvimento do Cálculo, auxiliando-nos ao lançar uma luz sobre esta relação paradoxal até mesmo nas ideias de Newton e Leibniz que, posteriormente, seriam apresentadas de forma mais elucidativa por Cauchy.

Focando mais especificamente em nosso tema de estudo, o Limite e a Continuidade, tivemos a oportunidade de navegarmos pelas oportunas contribuições de Cury (2009), Nasser (2009), Igliori (2002) e Zuchi (2005), dentre outros. Pudemos, então, contextualizar melhor nosso trabalho e nossos objetivos, destacando-os dentro do panorama mais geral do ensino de Cálculo apresentado previamente.

Dando sequência ao nosso trabalho, passamos a uma fase de singular dificuldade: a análise de alguns livros didáticos. Achamos oportuna essa opção metodológica, pois ela nos possibilitou traçarmos um breve panorama sobre algumas possíveis abordagens para Limites e Continuidades.

Acreditamos fortemente que o profissional do Ensino Superior deve ter a sua autonomia dentro de sala de aula, não ficando preso ao livro didático. Por outro lado, não podemos nos esquecer que esses materiais selecionados, de alguma forma, contribuem para a formação de nossos alunos, pois acabam sendo uma importante fonte de consulta.

De um modo geral, pudemos constatar que os materiais escolhidos acabam por não explorar de forma aprofundada a chamada notação $\varepsilon - \delta$ na definição formal de Limite. Isto acabou por se mostrar, de alguma forma, relevante em nossos resultados. Vale lembrar que todas as nossas atividades que focaram essa definição tiveram resultados desanimadores quando pensamos em seu aproveitamento.

No **Capítulo 3**, apresentamos de maneira mais direta aqueles autores que poderíamos designar explicitamente como nosso referencial teórico para o trabalho.

Apresentamos sucintamente o livro *Advanced Mathematical Thinking* julgando-o relevante para nossos propósitos.

Em sequência, lançamos um olhar sobre o Pensamento Matemático Avançado trilhando o caminho na companhia de Tall (1991), assegurando-nos de informações relevantes vindas de Dreyfus (1991) e Domingos (2003). Confrontando nossas considerações com trabalhos mais contemporâneos, apoiamo-nos nas teorias do conhecimento conceitual e conhecimento procedimental.

Aqui pudemos constatar de forma bastante incisiva essas considerações em nosso resultado. Pudemos concluir, conforme também atestado em Meyer (2003), que os alunos demonstram um desempenho satisfatório quando consideramos aspectos procedimentais. No âmbito do conhecimento conceitual, os alunos realmente mostraram dificuldades. Retomando Hiebert e Lafevre (1986), que caracterizam o conhecimento conceitual como uma rede relacional, ou seja, o aluno precisa relacionar conhecimentos distintos para construir o conhecimento, atestamos, pelas nossas atividades, que os alunos participantes de nossa pesquisa se encontram ainda muito longe de atingir tal possibilidade.

Passamos depois a confrontar a relação entre intuição e rigor. Trilhamos esse caminho principalmente na companhia de Reis (2001; 2009), que nos apresenta a tensão entre rigor e intuição. Devemos destacar que nossas atividades foram propostas, tanto quanto possível, tendo em vista esse eixo intuição-rigor.

Encerramos este capítulo apresentando as idéias de Tall e Vinner (1981) para imagem conceitual e definição conceitual, fundamentais na elaboração e análise de nossas atividades.

No **Capítulo 4**, apresentamos nossas atividades. Acreditamos ter elaborado atividades que nos possibilitaram atingir os objetivos propostos a partir de nossa questão de investigação. Propusemos duas atividades para avaliarmos Limites e Continuidade. Cada uma das atividades foi composta de questões nas quais tentávamos estimular o aluno a apresentar imagens conceituais evocadas e avaliarmos as transições gráfico-algébrica e algébrico-gráfica. Ao final, tratamos sempre dos aspectos conceituais envolvidos. Procedendo assim, acreditamos contemplar diversas nuances do aspecto intuição-rigor e imagem conceitual-definição conceitual.

No **Capítulo 5**, apresentamos uma análise inicial das atividades. Partindo das atividades propostas, intentamos, conforme proposto em nossos objetivos, a partir de nossa pergunta de pesquisa, identificar algumas relações entre rigor e intuição e entre imagem conceitual e definição conceitual, manifestadas pelos alunos nos processos de ensino e aprendizagem de Limites e Continuidade em Cálculo I.

Da análise de nossas atividades, podemos estabelecer algumas categorizações as quais passamos, agora, a descrever.

Sobre as relações entre imagem conceitual e definição conceitual em Limites

A partir da análise da Atividade 1, inferimos que as principais imagens conceituais relacionadas à existência do limite em um ponto evocaram as aproximações laterais da função a um valor, enfatizando os limites laterais e também a aproximação da função a um valor, sem enfatizar os limites laterais. Já em relação a limites infinito e no infinito, as principais imagens conceituais evocaram o crescimento indefinido, enfatizando o limite infinito e o crescimento "negativamente e positivamente", talvez querendo enfatizar o limite no infinito. Essa dificuldade em interpretar fidedignamente uma certa imagem conceitual já havia sido ressaltada por Meyer (2003).

Como nossa atividade permitiu que o aluno descrevesse em palavras os conceitos acima mencionados, podemos considerar, segundo Tall e Vinner (1981), que as definições conceituais remetem a imagens conceituais conflitantes, como no caso da imagem de que "ter limite é assumir um valor".

Sobre as relações entre intuição e rigor em Limites

A partir da análise da Atividade 1, inferimos que os alunos parecem apenas interpretar a existência do limite a partir de uma intuição gráfico-geométrica (REIS, 2001) e se mostram limitados quando têm que transitar entre as representações gráfica e algébrica.

De um modo geral, os bons índices de acertos na questão específica da transição gráfico-algébrica nos remetem a Meyer (2003, p. 5) que destaca:

> No âmbito do ensino de Cálculo, é sabido que os estudantes apresentam bons resultados na realização de tarefas que enfocam os aspectos operatórios, e resultados menos satisfatórios se essas tarefas enfocam aspectos conceituais. [...] Este fenômeno evidencia uma questão amplamente debatida ao longo dos anos, que diz respeito à existência de diferentes tipos de conhecimento matemático: um deles relacionado à compreensão dos conceitos matemáticos, e outro, aos procedimentos adotados para resolver tarefas matemáticas.

Entretanto, sequer um conhecimento procedimental (HIEBERT e LAFEVRE, 1986) pode ser associado à transição algébrico-gráfica, que revelou uma grande dificuldade dos alunos, talvez até mesmo pela ausência de atividades que fomentam tal transição nos livros didáticos, como observamos em nossa análise realizada.

Outra inferência emergente de nossa pesquisa é que a notação rigorosa para limites se revelou totalmente sem sentido para os alunos, os quais não conseguiram minimamente perceber, nas definições formais, elementos intuitivamente corriqueiros no estudo de limites que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade.

Sobre as relações entre imagem conceitual e definição conceitual em Continuidade

A partir da análise da Atividade 2, inferimos que as principais imagens conceituais relacionadas à continuidade em um ponto estão diretamente ligadas à função estar definida nesse ponto. Para a maioria dos alunos, a continuidade em um ponto parece independer da existência dos limites laterais quando a função tende ao ponto, o que retrata uma imagem conceitual desconectada de uma imagem conceitual de limites. Interessante observarmos que os alunos não associaram a continuidade à existência dos limites, apesar de conhecerem alguns aspectos conceituais relacionados aos limites, como por exemplo, as que associam a existência do limite em um ponto com os limites laterais. Logo, entendemos que, simplesmente, os alunos não associam continuidade à necessidade da existência dos limites laterais, apenas à definição da função.

Para a continuidade de uma função, a principal imagem conceitual evocada nos remete à visão clássica de Newton sobre continuidade: não haver interrupção ou salto na função, ou seja, a possibilidade de se traçar / esboçar o gráfico da função sem interrupções. Novamente, não há qualquer imagem conceitual relativa à existência de limites ou ao valor da função em pontos.

Novamente, nossa atividade permitiu que o aluno descrevesse em palavras os conceitos acima mencionados, ou seja, explicitasse uma definição conceitual. Assim, segundo Tall e Vinner (1981), consideramos que as definições conceituais remetem a imagens conceituais restritas e/ou equivocadas, como no caso da imagem de que “ser contínua é possuir imagem”.

Sobre as relações entre intuição e rigor em Continuidade

A partir da análise da Atividade 2, deparamo-nos com outro descompasso entre a imagem conceitual evocada na continuidade e sua definição formal. Inferimos que os alunos parecem apenas interpretar a continuidade também a partir de uma intuição gráfico-geométrica (REIS, 2001), assim como interpretam os limites; logo, novamente eles se mostram limitados quando têm que transitar entre as representações gráfica e algébrica.

Novamente, podemos identificar um interessante conflito relacionado à definição formal de continuidade. Ao associar a continuidade de uma função no ponto apenas à existência de um valor da função nesse ponto, os alunos recorrem a uma imagem conceitual bastante intuitiva, mas sem "consultar" sua definição formal. Essa situação de sala de aula já havia sido alertada por Vinner (1991, p. 76), ao descrever o que pode acontecer na solução de um determinado problema ou questão:

> [..] a célula da definição conceitual, mesmo se não-vazia, não é consultada durante o processo de resolução do problema. Os hábitos de pensamento cotidianos se sobrepõem e o respondente está inconsciente da necessidade de consultar a definição formal. Não é preciso dizer que, na maioria dos casos, a referência à célula da imagem conceitual será bem sucedida. Esse fato não encoraja as pessoas a se referirem à célula da definição conceitual.

Entendemos que essa situação é rotineira na sala de aula de Cálculo e parece refletir uma dificuldade de aprendizagem que, talvez, possa estar associada a obstáculos epistemológicos, ou seja, inerentes ao próprio conhecimento, como já havia destacado Igliori (2002).

Novamente, uma inferência emergente de nossa pesquisa é que a notação rigorosa para continuidade mais uma vez se revelou totalmente sem sentido para os alunos, os quais não conseguiram minimamente identificar, nas definições formais, elementos intuitivos no estudo da continuidade que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade e também na atividade de Limites.

Algumas sugestões feitas aos Professores de Cálculo a partir de nossa pesquisa

Cientes que devemos respeitar a autonomia do profissional do Ensino Superior em sala de aula, incluindo a capacidade de repensar sua metodologia de acordo com a necessidade de seus alunos, ainda assim, a partir dos resultados apresentados em nossa pesquisa, julgamos procedente apresentar algumas considerações que intentam servir como uma fonte de reflexão para o Professor de Cálculo:

- Procure sempre revisitar as imagens conceituais que estão sendo construídas pelos seus alunos, ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, propondo atividades que primem pela diversidade de abordagens. Nesse sentido, ainda que acreditemos ser oportuno em algumas situações, a realização de exercícios de um padrão mais repetitivo, propomos uma reflexão no sentido de evitá-los, quando possível, estimulando de maneira criativa uma maior transição entre as diversas representações (gráfico-algébrica e algébrico-gráfica), a fim de enriquecer as imagens conceituais evocadas pelos alunos durante os processos de sala de aula;

- Procure fazer com que seus alunos escrevam sobre aquilo que estão entendendo, evidenciando assim suas definições conceituais e estimulando-os a explicar “como” aplicam a teoria na resolução de problemas/exercícios. Isso possibilita ao professor uma maior flexibilidade ao abordar a definição formal, além de incentivar os alunos a consultar a “célula” da definição conceitual envolvida nas atividades e até mesmo modificá-la quando necessário, em caso de conflitos com definição formal;

- Valorize a realização de atividades que abordem a transição algébrico-gráfica como forma de valorizar as diversas vertentes intuitivas presentes na abordagem dos temas e que, tradicionalmente, não são exploradas pelos livros didáticos. Atividades nesse sentido podem ajudar o aluno a compreender a importância de se evocar uma definição conceitual e confrontá-la com suas imagens conceituais, evitando assim, obstáculos na aprendizagem. Exercícios que exploram aspectos construtivos de limites e continuidade podem ser uma grande fonte de inspiração para a valorização de uma intuição profunda, no sentido de compreender os conceitos matemáticos com multiplicidade de significados e propriedades;

- Não exagere nas definições e demonstrações rigorosas, principalmente se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob um aspecto totalmente procedimental. Se uma demonstração não puder ser significativa para os alunos e, mais importante ainda, ser ilustrada, até mesmo com exemplos numéricos, tal demonstração pode ser muito mais um “exercício de ensino” para o próprio professor do que uma “atividade de aprendizagem” para os alunos. Especificamente, em limites e continuidade, as definições e demonstrações envolvendo a notação $\varepsilon - \delta$, mostram-se totalmente incapazes de evocar imagens conceituais significativas.

Finalmente, acreditamos que nossa pesquisa não esgota todas as indagações com as quais partimos e caminhamos ao longo da trajetória investigativa. Por exemplo, há que se investigar, futuramente, como se processa o rigor numa perspectiva "cognitiva" ou como o aluno constrói um conceito de forma rigorosa, ou ainda, como o aluno se apropria de um conceito de maneira rigorosa.

Outrossim, encerramos a presente pesquisa lembrando a reflexão de Reis (2009, p. 93) acerca do chamado "rigor acadêmico" o qual, segundo o autor, é dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos científicos mas que não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino:

> Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc).

Assim, concluímos nosso trabalho, esperando que ele seja uma fonte agradável de leitura para Professores de Cálculo que querem e ousam refletir sobre sua prática pedagógica e também uma fonte razoável de consulta para futuras pesquisas na área de Ensino de Cálculo e de Educação Matemática no Ensino Superior, de uma maneira geral.

Referências

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário nicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. USP. São Paulo, 1999.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BICUDO, I. **Análise não-standard**. Boletim de Educação Matemática (8), p. 60-67, 1992.

BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. **Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas**. Zetetiké, 5 (7), p. 129-144, 1997.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior**. Tese de Doutorado em Educação. PUC-SP. São Paulo, 2008.

DOMINGOS, A.M.D. **Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados – A Matemática no Início do Superior**. Tese de Doutorado em Ciência de Educação, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes**. In: TALL,D.O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer, p. 95-123, 1991.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995.

FLEMMING, D. M.; BUSS, M. **Cálculo A**. São Paulo: Makron Books, 2006.

FRESCKI, F. B.; PIGATTO, P. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um curso de nivelamento**. In: Simpósio Nacional de Iniciação Científica, I, Curitiba, 2009. Anais... Curitiba: UTFPR, p. 910-917, 2009.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

FREUDENTHAL,H. **Mathematical Rigour**. In: Mathematical as an Educational Task. Netherlands: D. Reidel Publish, 1973.

FROTA, M. C. R. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo**. In: LACHINI, J.: LAUDARES, J. B. (Orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 89-121, 2001.

HERSCOVICS,N.;BERGERON.J.C. **A Constructivist vs. Formalist approach in the Teaching of Mathematics**. In: B. Sowthwell et all. Proceeding of the Seventh Internacional Conference of PME. Sydney: University of Sydney, p. 190-196, 1984.

HUGHES-HALLET, D. et all. **Cálculo de uma variável** .Rio de Janeiro,2004.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. Tese de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo, 2003.

NEVES, J.L. **Pesquisa Qualitativa: Características, Usos e Possibilidades**. Caderno de Pesquisas em Administração. São Paulo, v. 1. n. 3, 1996.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos**. In: FROTA, M.C.; NASSER, L. (Orgs.). Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Formação de Professores: mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática**. In: FROTA, M.C.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 169-187, 2009.

PINTO, M. M. F. **Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise**. In: LACHINI, J.: LAUDARES, J. B. (Orgs.) Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 123-145, 2001.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. UNICAMP. Campinas, 2001.

REIS, F. S. **Rigor e Intuição no Ensino de Análise**. In: FROTA, M.C.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

SEMADENI, Z. **Deep intuition as a level in the development of the concept image**. Educational Studies in Mathematics, v.68, n.1 p. 1-17, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume I. São Paulo: Pioneira, 2005.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity**. Londres: Kluwer, p 151-169, 1981.

TALL, D.O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer, 1991.

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics**. In TALL, D.O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer, p. 65-81, 1991.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. UFSC. Florianópolis, 2005.