UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
Mestrado Profissional em Educação Matemática

EDNARDO TEIXEIRA LEÃO

UM ESTUDO DE SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE ENVOLVA CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS DE ESPAÇO E FORMA NO ENEM NO PERÍODO DE 2009 A 2017

OURO PRETO
Setembro, 2019

EDNARDO TEIXEIRA LEÃO

UM ESTUDO DE SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE ENVOLVA CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS DE ESPAÇO E FORMA NO ENEM NO PERÍODO DE 2009 A 2017

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Ouro Preto, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana

OURO PRETO
Setembro, 2019

L437e Leão, Ednardo Teixeira.

Um estudo de situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma no ENEM no período de 2009 a 2017 [manuscrito] / Ednardo Teixeira Leão. - 2019.

247f.: il.: color.

Orientadora: Profª. Drª. Marger da Conceição Ventura Viana.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de PósGraduação em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil). 2. Avaliação educacional. 3. Matemática- Estudo e ensino. 4. Geometria. I. Viana, Marger da Conceição Ventura. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 51:37.04

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO DE SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE ENVOLVA CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS DE ESPAÇO E FORMA NO ENEM NO PERÍODO DE 2009 A 2017

Autor: Ednardo Teixeira Leão

Orientadora: Profª. Drª. Marger da Conceição Ventura Viana

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Ednardo Teixeira Leão e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 19/09/2019

Orientadora

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu – UFOP (Presidente)

Prof. Dr. José Fernandes da Silva – IFMG / SJE (membro externo)

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP (membro interno)

2019

Dedico este trabalho à minha amada esposa Janaína
e à minha filha Cecília.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pelas oportunidades que me deu, ao longo da vida, de conviver com pessoas que me inspiraram e me inspiram continuamente.

A minha mãe, Maria Dalva de Jesus Teixeira Matos, pelas lições de amor que ensinou a mim, a meus irmãos e a todos que convivem com ela.

A meu pai, José Teixeira Leão, *in memoriam*. pelos conselhos deixados.

A meu irmão Leonardo e a minha irmã Elenice, pelos dias de convivência e aprendizado em família.

A minha esposa Janaína, pelo apoio total e incentivo no processo seletivo e no decorrer do curso. Ela é a razão desta busca de melhor formação.

Ao tio Moacir, *in memoriam*, por me tratar como um filho.

A todas as pessoas que me ajudaram com oração e me apoiaram de forma direta ou indireta em todos os momentos.

À Prof.ª Marger da Conceição Ventura Viana, pelo cuidado, pelo incentivo e pela disponibilidade, o que a fez me orientar muitas vezes fora de seu horário de trabalho e me acolher em sua casa. Serei eternamente grato por tudo que ela fez.

À Prof.ª Ana Cristina Ferreira, pelos ensinamentos e pelo empenho na minha remoção para Ouro Preto. Ela foi um instrumento de Deus na vida de minha família.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, pelas oportunidades de aprendizado e inspiração. Aprendi muito com cada um deles.

Ao Prof. Anderson Castro Soares de Oliveira, por me auxiliar com o software estatístico necessário à obtenção de dados divulgados pelo INEP.

A meus colegas das turmas de 2017 e 2018, pelos momentos compartilhados.

A todos os participantes desta pesquisa, pela doação de seu tempo.

À Banca de Qualificação e Defesa, Prof. José Fernandes da Silva e Prof. Frederico da Silva Reis, pelas sugestões para aprimorar este trabalho.

A todos muito obrigado!

Resumo

Esta pesquisa de Mestrado foi realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFOP. Ela teve por objetivo buscar soluções para a seguinte questão: *Como uma proposta de atividades pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma, da Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)?* Inicialmente, foi realizada breve análise documental: Constituição Federal de 1988, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Diretrizes Curriculares Nacionais, Parâmetros Curriculares Nacionais, Relatórios do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Base Nacional Curricular Comum e Currículo Referência de Minas Gerais. A seguir, foi feita a revisão da literatura, o que incluiu levantamento bibliográfico sobre o tema e estudo referente a conhecimento geométrico, avaliação da aprendizagem na sala de aula, avaliação de sistema (larga escala) e problema e situação-problema. Também referente a competências e habilidades e conhecimentos geométricos relativos a *espaço* e *forma* avaliados no ENEM. A pesquisa de campo foi feita em 2018, com cinco encontros realizados no período de seis meses. Os participantes eram professores de Matemática de escolas públicas de Ouro Preto, Minas Gerais, que examinaram, em encontros, com o fim de desenvolver habilidades relacionadas a conhecimentos geométricos de espaço e forma, as atividades construídas. Destaca-se que desta pesquisa, além da dissertação, resultou um produto educacional, ou seja, um pequeno livro que reúne sugestões de atividades que podem ser úteis à prática pedagógica de professores, licenciandos e pesquisadores interessados em conhecer melhor, sob certos aspectos, as provas do ENEM.

Palavras-chave: ENEM, avaliação, situação-problema, habilidade, conhecimento geométrico.

Abstract

This Master’s research was conducted at the UFOP Graduate Program in Mathematics Education. It aimed to find solutions to the following question: How can a proposal of activities enable the development of auxiliary skills to solve problem situations involving geometric knowledge of space and shape of the Reference Matrix of the National High School Exam (NHSE)? Initially, a brief documentary analysis was performed: Federal Constitution of 1988, Law Guidelines and Bases of National Education, National Curriculum Guidelines, National Curriculum Parameters, National High School Examination Reports (NHSER), Common National Curriculum Base and Reference Curriculum of Minas Gerais. The literature review was then performed, which included a bibliographic survey on the topic related to the study of geometric knowledge, classroom learning assessment, system assessment (large scale), problem, and problem-situation. It also referred to skills, abilities, and geometric knowledge related to space and shape assessed in the NHSE. The research field was conducted in 2018, with five meetings that were held within six months. Participants were mathematics teachers from public schools in Ouro Preto, Minas Gerais, who examined, in these meetings, the development of skills related to geometric knowledge of space and shape in the constructed activities. It is noteworthy that from this research, in addition to its dissertation, resulted na education product, which is a small book that brings together suggestions of activities that may be useful to the pedagogical practice of teachers, students, and reseachers who are interested in knowing better, under certain aspects, the NHSE assessment.

Keywords: NHSE, assessment, problem-situation, skill, geometric knowledge.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Siglas

AM-Aplicação de Conhecimento Matemático

ANDES-Associação Nacional dos Docentes do Ensino Superior

ANFOPE-Associação Nacional pela Formação do Profissional da Educação

ANPAE-Associação Nacional de Política e Administração Escolar

ANPED-Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação

ANRESC-Avaliação Nacional Rendimento Escolar

BIRD-Banco Internacional para Reconstrução e Desenvolvimento

CadÚnico-Cadastro Único para Programas Sociais

CAAE-Certificado de Apresentação para Apreciação Ética

CAPES-Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEB-Câmara de Educação Básica

CEP-Comitê de Ética e Pesquisa

CELPE/BRAS-Certificado de Proficiência em Língua Portuguesa

CNTE-Confederação Nacional dos Trabalhadores em Educação

CBC-Conteúdo Básico Comum

CRS-Compreensão da Realidade Social

CTS-Ciência, Tecnologia e Sociedade

C7S-Colégio 7 de Setembro

DC-Descrição Científica de Fatos e Processos

DEEMA-Departamento de Educação Matemática

DEEST-Departamento de Estatística

EM-Ensino Médio

ENCEJA-Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos

ENADE-Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

ENEM-Exame Nacional do Ensino Médio

FAFIC-Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Caratinga

FMI-Fundo Monetário Internacional

GTERP-Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas

G7-Grupo dos 7 países mais industrializados do mundo

ICEB-Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

IDEB-Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IFES-Instituições Federais de Ensino Superior

IFMG-Instituto Federal Minas Gerais

INEP-Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

LDB-Lei de Diretrizes e Bases (9394)

LDBEN-Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n.º 9394)

MEC-Ministério da Educação

OCEM-Orientações Curriculares do Ensino Médio

PAIUB-Programa de Avaliação Institucional da Universidade Brasileira

PARU-Programa de Avaliação da Reforma Universitária

PCN-Parâmetros Curriculares Nacionais

PCN+-Parâmetros Curriculares Nacionais + Orientações Educacionais Complementares

PCNEM-Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

PE-Plano de Ensino

PIBID-Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PISA-Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PNLD-Programa Nacional do Livro Didático

PPP-Projeto Político-Pedagógico

PROLIBRAS-Proficiência na Língua Brasileira de Sinais

REVALIDA-Revalidação dos Diplomas Médicos

SAEB-Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SINAES-Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Superior

TCLE-Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TCT-Teoria Clássica dos Testes

TDM-Teoria da Disciplina Mental

TRI-Teoria da Resposta ao Item

TRS-Transformação da Realidade Social

UFC-Universidade Federal do Ceará

UFLA-Universidade Federal de Lavras

UFMS-Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

UFOP-Universidade Federal de Ouro Preto

UNEC-Centro Universitário de Caratinga

UNESP-Universidade Estadual Paulista

UNIAN- Universidade Anhanguera

UNIASSEVI-Centro Universitário Leonardo da Vinci

UNINTER-Centro Universitário Internacional

UNIPAC-Universidade Presidente Antônio Carlos

UNOPAR-Universidade Norte do Paraná

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Minha primeira experiência como professor de Matemática se deu ainda na adolescência, aos 14 anos, ministrando aulas particulares para alunos que tinham dificuldades na disciplina. Durante o Ensino Médio, era requisitado por colegas de turma para ajudá-los nos momentos que antecediam as avaliações. Como isso era recorrente, fui convidado pelo diretor da escola em que estudava, no terceiro ano, para ministrar aulas particulares a alunos da 5.ª à 8.ª série (hoje do 6.º ao 9.º ano) do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio.

A facilidade em Matemática aliada às experiências positivas que tive ao ensiná-la levaram-me a escolher a profissão de professor. Já certo dessa escolha, em 1997, ingressei na Licenciatura Curta em Ciências Exatas, terminando em 1999. No final do ano seguinte, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Caratinga (FAFIC), Minas Gerais, hoje Centro Universitário de Caratinga (UNEC), completei a Licenciatura em Matemática.

Como profissional habilitado, prestei, em 2001, concurso para a Rede de Ensino do Estado de Minas Gerais para os cargos de professor dos anos finais de Ensino Fundamental e professor do Ensino Médio de Matemática. Tomei posse em 2002, tornando-me professor efetivo nos dois cargos.

Em 2005, concluí a Especialização em Matemática e Estatística na Universidade Federal de Lavras (UFLA), Minas Gerais. Em 2006, no segundo semestre, trabalhei como professor assistente da Universidade Presidente Antônio Carlos (UNIPAC) em Peçanha, Minas Gerais, lecionando Estatística para o curso de Pedagogia. Em 2014, ingressei no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), como professor supervisor do Instituto Federal Minas Gerais (IFMG), Campus São João Evangelista, ficando até 2016.

Com isso, trabalhando por cerca de 20 anos como professor, a maior parte do tempo no Ensino Médio, percebi como o ENEM atraía estudantes e chamava a atenção de famílias e pesquisadores.

Assim, com a proximidade da realização das provas, todos os anos, sentia a ansiedade dos alunos, principalmente os do 3.º ano do Ensino Médio. Então, tive necessidade de prosseguir com meu desenvolvimento profissional, principalmente no que se referia ao enfoque didático do conteúdo (SHULMAN, 1986), para encontrar maneiras adequadas de apresentá-lo aos alunos. Decidi, pois, realizar um estudo sobre o ENEM, que tem definido, de certa forma, os rumos do que se busca ensinar nas escolas de Ensino Médio do Brasil, por ter se tornado porta de entrada para a universidade.

Então, para iniciar o estudo, procurei uma publicação que apresentasse as questões de Matemática das provas do ENEM aplicadas no período de 2010 a 2015, encontrando a *Bíblia do ENEM* (2014, 2016), que indica uma competência e uma habilidade[1] da Matriz de Referência[2] do ENEM necessárias à resolução de cada questão. Com isso, pude observar que a habilidade *Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma* se manifestou 44 vezes. Quanto à cobrança das demais habilidades referentes à mesma competência, vi que uma teve 7 ocorrências, outra teve 8 e outra teve 10, o que significava que a habilidade *Resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma* estava sendo bem mais cobrada que as demais, permitindo conjeturar que podia ter sido considerada pelos idealizadores e elaboradores como muito importante, o que despertou em mim interesse de pesquisar sobre ela.

Na convivência com universitários, como professor supervisor do PIBID, tive a oportunidade de rever os levantamentos que realizava sobre as avaliações do ENEM e concluí que não se tratava de uma pesquisa nos moldes acadêmicos. Mesmo assim, fizeram com que despertasse o desejo de continuar minha formação docente, decidindo cursar o Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Assim, participei do processo seletivo no Departamento de Educação Matemática (DEEMA) do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB), da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), em 2016, apresentando o anteprojeto *Um estudo das situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma nas avaliações do ENEM no período de 2010 a 2015*. Aprovado, iniciei o curso no primeiro semestre de 2017.

Nessa ocasião, em conversa com a minha orientadora, comecei a discutir a possibilidade de transformar o anteprojeto no projeto de pesquisa para minha dissertação. Expliquei que meu interesse era pesquisar sobre o ENEM aplicado período de 2009 a 2017, pois houve alteração na Matriz de Referência. A alteração foi a seguinte: antes de 2009, havia cobrança de 5 competências gerais distribuídas em 21 habilidades referentes às áreas cobertas[3].

---

[1]Segundo Oliveira (2018, p.2), "competência é uma combinação de conhecimentos, motivações, valores, atitudes e emoções (e outros ingredientes de caráter social e comportamental) que podem ser mobilizados para gerar uma ação eficaz, em um contexto específico".
E, de acordo com Ferreira (199, p.1024), "habilidade é notável desempenho e elevada potencialidade em qualquer dos seguintes aspectos, isolados ou combinados: capacidade intelectual geral, aptidão específica, pensamento criativo ou produtivo, capacidade de liderança, talento especial para artes e capacidade psicomotora".
[2]O termo matriz de referência é utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala, para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas (Brasil, s/d, s/p).
[3] As áreas do conhecimento cobertas pelo ENEM são: Ciências Humanas e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Linguagens, Códigos e suas Tecnologias.

Em 2009, cada área passou a ter sua Matriz de Referência com competências e habilidades. Assim, o ENEM passou a contemplar, por exemplo, na prova de Matemática e suas Tecnologias, 7 competências e 30 habilidades, sendo que nas demais áreas também foram consideradas 30 habilidades. Como estava iniciando o Mestrado em 2017, decidi pelo interstício de 2009 a 2017. Além disso, pretendia gerar um produto educacional sobre essa temática.

Realizei novo levantamento, na ocasião usando dados oficiais fornecidos pelo Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Para obter, na página do INEP, o microdado[4], usei o software R core team, orientado pelo Prof. Anderson Castro Soares de Oliveira, que estava fazendo pós-doutorado no Departamento de Estatística (DEEST) do ICEB. Verifiquei que não foram divulgados os dados referentes à classificação das situações-problema de 2009 e 2010. Descobri também que a cobrança de quase todas as habilidades era semelhante quanto ao número de questões e que nas edições de 2011 a 2017 havia itens sobre *Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma*, o que indicava posição de relevância nessas provas.

Realizando breve análise de documentos oficiais (Constituição Federal de 1988, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Diretrizes Curriculares Nacionais, Parâmetros Curriculares Nacionais, Relatórios do Exame Nacional do Ensino Médio, Base Nacional Curricular Comum e Currículo Referência de Minas Gerais), observei que em todos eles existia implícita ou explicitamente menção a conhecimentos geométricos, requisitados em todos os níveis da Educação Básica:

> De qualquer ponto de vista que se a examine [a Geometria], trata-se de um tema singularmente fecundo, com um significado epistemológico reconhecido pelas mais variadas concepções filosóficas, como em Platão, Descartes, Kant ou Husserl, para citar apenas alguns exemplos (MACHADO, 1998, p. 137).

De fato, a Geometria é importante e necessária para descrever o mundo em que se vive a fim de compreender a sua relação com a humanidade, “podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto fundamental na formação dos alunos” (PASSOS, 2000, p.1).

[4]Microdado representa a menor fração de um dado e pode estrar relacionado a uma pesquisa ou avaliação. Pela agregação de microdados se constrói a informação. As bases de microdados estão organizadas de forma a serem compreendidas por softwares específicos, o que agiliza o processo de tratamento e cálculos estatísticos. No Brasil, o INEP é o maior produtor de microdados relativos à educação: Censo Escolar, Censo da Educação Superior, Prova Brasil, SAEB e ENEM são algumas das principais bases de microdados que disponibiliza em: https://academia.qedu.org.br/glossário/o-que-são-microdados/ (acessado em 02/11/2018).

Em épocas diferentes, pensadores destacaram a necessidade do conhecimento geométrico, que interfere até no pleno exercício da cidadania. Logo *Resolver situações-problema relativas à Geometria* é habilidade indispensável a qualquer estudante. Por essa razão, elaborei a questão de investigação: *Como uma proposta de atividades pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma, da Matriz de Referência do ENEM?*

Buscando uma resposta, esta dissertação se apresenta com quatro capítulos e as Considerais Finais. O Capítulo 1 apresenta o autor e as justificativas do estudo que conduziu ao problema a ser investigado. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica para a problemática de estudo. O Capítulo 3, a metodologia utilizada. O Capítulo 4, a pesquisa realizada, descrevendo, analisando e interpretando os dados. Nas Considerações Finais, busca-se resposta à questão de investigação. Por último, vêm Referências, Apêndices e Anexos.

Desta dissertação resultou um produto educacional. Trata-se de um pequeno livro que contém sugestões de atividades[5] que podem auxiliar no desenvolvimento de habilidades para resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*, segundo a Matriz de Referência do ENEM.

[5] Embora *tarefa* e *atividade matemática* não tenham o mesmo significado (VERDEJO e UCLÉS, 2016), para simplificar, neste trabalho, estão sendo usadas como se tivessem.

CAPÍTULO 2

DETERMINANDO A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA A PROBLEMÁTICA DE ESTUDO

Tem como objetivo fornecer uma revisão de literatura relacionada com o tema deste estudo, podendo haver espaços em pesquisas realizadas. Além disso, algum trabalho pode ser visto com outras lentes, até levando à descoberta de resultados. A revisão também busca apresentar a fundamentação teórica discutida nas pesquisas relacionadas ao ENEM e às questões que envolvem o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*. É importante, pois, estudar conhecimento geométrico, avaliação, avaliação em larga escala, bem como o advento das avaliações externas no Brasil, a exemplo do ENEM, e o seu desenvolvimento. E verificar o que significa para idealizadores e elaboradores das provas a definição de *problema* e *situação-problema*.

A revisão de literatura está relacionada aos seguintes tópicos:

a) conhecimento geométrico;
b) processo de ensino-aprendizagem e avaliação;
c) resolução de problema;
d) ENEM.

Para cada um desses tópicos se apresenta a fundamentação teórica com a revisão de literatura correspondente.

2.1 Algumas dissertações relacionadas ao ENEM no Banco de Teses da CAPES

O mapeamento de estudos e pesquisas no Banco de Teses da CAPES é um procedimento sugerido por diversos pesquisadores, como Borba e Araújo (2004). Foram feitas pesquisas para buscar dissertações e teses cujos temas estivessem relacionados ao tema desta pesquisa, isto é, investigações relacionadas ao ENEM.

Primeiramente, em 20 de maio de 2017, pelas palavras-chave ENEM AND GEOMETRIA, sem especificar o período, tendo sido encontrados 12 trabalhos, mas apenas 1 diretamente relacionado com o tema destacado. Assim, foi realizado outro levantamento, mas com as palavras-chave ENEM AND CONHECIMENTO GEOMÉTRICO, em 29 de dezembro de 2017, e foram encontrados 188 trabalhos.

Considerando o período de 2009 a 2017, chegou-se a 169 trabalhos, dos quais foram analisados os títulos. Em seguida, descartados os que não se relacionavam com o tema desta pesquisa, ficaram 22 trabalhos.

Lido o resumo das 22 dissertações, foi possível selecionar 9 com este critério: ter título que sugerisse o enfoque no ENEM e pelo menos uma das palavras-chave MATEMÁTICA, GEOMETRIA, CONHECIMENTO GEOMÉTRICO e SITUAÇÃO-PROBLEMA.

Na sequência, foi localizado o texto completo de cada um desses 10 trabalhos selecionados nos dois levantamentos feitos no Banco de Teses da CAPES. Os principais dados desses trabalhos se encontram no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1-Principais dados das dissertações selecionadas para o estudo envolvendo Geometria e Conhecimentos Geométricos no ENEM

Título da Dissertação	Autor / Ano	Orientador	Curso e Instituição	Principais Conclusões
Currículo de Geometria Espacial do Colégio 7 de setembro: influências do vestibular da Universidade Federal do Ceará e do Enem	Silvio Henrique Araújo Mota (2015)	Dr. Ruy César Pietropaolo	Mestrado em Educação Matemática- Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. S. P.	Ocorreram mudanças no 2.º e 3.º ano do Ensino Médio, como o número de aulas destinadas à Geometria Espacial teve aumento de aproximadamente 30%. O material didático passou a ser utilizado no sentido de possibilitar o desenvolvimento de habilidades e situações-problema, entre outras.
Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) como indutor da prática curricular de Professores de Matemática a partir da Perspectiva de Contextualização	Ana Queli Mafalda Reis (2012)	Dr.ª Cátia Maria Nehring	Mestrado em Educação nas Ciências- área Matemática- Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Ijuí. R. S	Mesmo havendo lei que permitia avaliação pública que assegurasse condições de mudanças, na escola, as ações desenvolvidas demonstravam indiferença à proposta. Os professores não se sentiam questionados em seu trabalho pelo fato de que o ENEM ainda não ter se consolidado como referência nacional para o desempenho dos alunos.
Ciência, Tecnologia e Sociedade/CTS na formulação de questões de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (2009 a 2011): quais as referências de contextualização	Renato de Queiroz Machado (2012)	Dr.ª Maria Guiomar Tomazello	Mestrado em Educação- Universidade Metodista de Piracicaba. Piracicaba. S. P.	Na formulação de questões do ENEM não havia contextualização que destacasse o exercício da cidadania, não podendo assim ser modelo para outras avaliações. Eram majoritariamente duas categorias de contextualização: aplicação do conhecimento Matemático (46%) e descrição científica de fatos e processos (47%) cobradas no período pesquisado.
O Enem no Contexto das Políticas para o Ensino Médio	Paulo Henrique Alves Machado (2012)	Dr.ª Elizeth Gonzaga dos Santos Lima.	Mestrado em Educação- Universidade do Estado de Mato Grosso - Cáceres-MT	As portarias do ENEM (438/98 e 109/2009) não citavam a LDB, no entanto sustentavam a reforma do Ensino Médio e a avaliação do ENEM.
Leitura, Interpretação e Resolução de Problemas em Matemática no contexto do Exame Nacional do Ensino Médio	Vania Gomes da Silva Ribeiro (2013)	Dr.ª Carmen Teresa Kaiber	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática- Universidade Luterana do Brasil- Canoas. R.S.	Em todas as questões do ENEM havia a exigência da competência de leitura e interpretação, o que mostrava dificuldades dos candidatos, apontando para a necessidade de um trabalho que envolvesse a resolução de problemas.

Geometria nas questões do Enem sob a ótica da Resolução de Problemas: um auxílio ao Trabalho Docente	Mário Guimarães Gomes (2017)	Dr. Mauro Lúcio Franco	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat-Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri-Teófilo Otoni. M.G.	Era possível afirmar que a metodologia de Resolução de Problemas podia representar uma estratégia eficaz no processo ensino-aprendizagem de Geometria e podia servir de auxílio ao trabalho do docente, de modo a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades deles esperadas.
Questões de Matemática da UFMS e Enem: uma análise da avaliação por conteúdos e por outras competências	Pedro Hiane (2011)	Dr. José Luiz Magalhães de Freitas	Mestrado em Educação Matemática-Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Campo Grande – MS	Existia alto índice de questões referentes ao Ensino Fundamental e a mudança de rumo do ENEM (após 2009) poderia provocar alterações na estrutura escolar do Ensino Médio, nos projetos pedagógicos das escolas e no trabalho em sala de aula dos professores.
Análise da abrangência da Matriz de Referência do Enem com relação às habilidades avaliadas nos itens de Matemática aplicados de 2009 a 2013	Edson Martins Ferreira (2014)	Dr. Mauro Luiz Rabelo	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat-Universidade de Brasília Brasília. D.F	Era possível visualizar de várias maneiras a Matriz de Referência, inclusive a respeito dos objetos de conhecimento avaliados, com abrangência em relação às habilidades nos itens pesquisados. A distribuição dos diferentes campos de conhecimento matemático da coleção de livros do Ensino Médio que se utilizou na análise não estava em sintonia com o ENEM.
Análise técnica da Matriz de Referência do Enem e dos itens de Matemática das edições de 2012 a 2014	Raul Bueno Lins Campos (2015)	Dr. Marcelo Pedro dos Santos	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat-Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife. PE	Foram considerados pontos positivos e negativos do ENEM, como privilegiar o pensamento e não a memorização de conteúdos e a falta de divulgação pelo INEP de um documento oficial e atualizado correspondente
As provas das quatro áreas do Enem vistas como Prova Única na ótica de modelos da Teoria da Resposta ao Item Uni e Multidimensional	Nara Núbia Vieira (2016)	Dr. Pedro Alberto Barbetta	Mestrado em Métodos e Gestão em Avaliação da Educação - Universidade Federal de Santa Catarina Florianópolis S.C.	Nas dimensões da prova destacavam-se duas características: raciocínio lógico e leitura e interpretação de textos. Os alunos, considerados com alta proficiência, dominam todas as áreas cobradas no ENEM. Havia abrangência da Matriz de Referência com relação às habilidades avaliadas nos itens pesquisados. O modelo bidimensional era mais apropriado para a geração das proficiências dos alunos.

Fonte: Dados do pesquisador

2.1.1 Currículo de Geometria Espacial do Colégio 7 de Setembro: influências do vestibular da Universidade Federal do Ceará e do ENEM (MOTA, 2015)

Trata-se da dissertação de Silvio Henrique Araújo Mota, que teve como objetivo "analisar a influência de Vestibulares da Universidade Federal do Ceará (UFC) e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) no currículo de geometria espacial do Colégio 7 de Setembro (C7S)" (MOTA, 2015, p. 6). Para isso investigou como se caracterizavam as propostas oficiais para o ensino da Geometria e analisou os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Curriculares do Ensino Médio (OCEM), as provas dos vestibulares da Universidade Federal do Ceará (UFC) no período de 2005 a 2010, do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no período de 2009 a 2013, além de planos de curso e provas do Colégio 7 de Setembro no período de 2005 a 2013.

Quanto à fundamentação teórica, realizou uma análise documental, principalmente com Sacristán (2000), Goodson (2008) e Perrenoud (2013), visando ao conceito *competência*.

Assim, buscou responder a três perguntas:

> 1. Houve mudanças no currículo de geometria espacial do Colégio 7 de Setembro no período de 2005 a 2013? Quais foram essas mudanças?
> 2. O programa de Matemática e as provas dos vestibulares da UFC influenciaram a elaboração do currículo de geometria espacial do C7S? Em caso afirmativo, quais foram essas influências?
> 3. O programa de Matemática e a prova do Enem influenciaram a elaboração do currículo de geometria espacial do C7S? Em caso afirmativo, quais foram essas influências? (MOTA, 2015, p. 12).

Após a análise dos resultados, Mota (2015) verificou que no ENEM a incidência das questões de Geometria, no período de 2009 a 2013, foi de 30% e de Geometria Espacial foi de 13%. Em relação ao vestibular da UFC, no período de 2005 a 2010, o percentual de questões de Geometria e o de Geometria Espacial foram 23% e 10%, respectivamente. Quanto à Geometria do C7S, foi detectado aumento de 30% na carga horária destinada à Geometria Espacial a partir de 2011, ano em que a UFC adotou o ENEM como fase única do seu processo seletivo.

É possível considerar que Mota, ao apresentar as conclusões, respondeu às perguntas propostas. Verificou que, no período de 2005 a 2013, ocorreram mudanças no 2.º e no 3.º ano do Ensino Médio. Por exemplo, em 2011, no 2.º ano, o número de aulas destinadas à Geometria Espacial passou de 21 para 27, aumento de aproximadamente 30%. Analisando o processo de ensino-aprendizagem, observou mudanças na função do professor, que passou a ser visto como mediador, e do material didático, que passou a ser utilizado no sentido de possibilitar o desenvolvimento de habilidades para resolver situações-problema. Além disso, o modelo de prova adotado de 2005 a 2010 passou a ser inspirado no processo seletivo da UFC. Destaca-se que os professores passaram a participar da elaboração do material didático com uma concepção fundamentada nos eixos metodológicos do ENEM. Em 2011 o C7S decidiu realizar todas as avaliações no modelo do ENEM.

Mas, nas Considerações Finais, Mota (2015) faz importante comentário sobre o currículo:

> temos que pensar numa proposta curricular que considere os problemas econômicos, o desemprego, a fome, a violência, a estrutura física das escolas, o objetivo imediato dos estudantes e, principalmente, a qualificação e a remuneração dos nossos professores (Mota, 2015, p. 101).

O autor espera que sua pesquisa possa motivar novos trabalhos, merecendo a atenção de professores e gestores.

2.1.2 Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como indutor da prática curricular de professores de Matemática a partir da Perspectiva de Contextualização (REIS, 2012)

Trata-se da dissertação de Ana Queli Mafalda Reis. As questões de investigação que nortearam a pesquisa foram:

> Considerando o Enem como uma política de reestruturação do currículo de Matemática no Ensino Médio, pautada no processo de contextualização do ensino, é possível identificarmos, nas práticas de docentes de Matemática atuantes no Ensino Médio, articulações desse processo com as Matrizes de Referência do Enem na área de Matemática e suas Tecnologias e na reestruturação do currículo escolar? No que se baseiam as ações docentes propostas de Matemática do Ensino Médio? (REIS, 2012, p.7).

Para isso, foi considerada a reforma curricular determinada pela articulação da LDBEN com o PCNEM (1999) e o PCN+ (2002) e influenciada pelas mudanças ocorridas no ENEM de 2009.

A dissertação possui três capítulos. O primeiro apresenta os passos das políticas públicas de Educação responsáveis pela reforma curricular conforme a Lei n.º 9.394/1996 e um estudo sobre o estado da arte de pesquisas que envolviam o ENEM. O segundo busca compreender o processo de reforma curricular por meio de duas perspectivas, o currículo e a pedagogia, apontadas por Young (2011). O terceiro analisa o Projeto Político-Pedagógico (PPP), o Plano de Ensino (PE) e as médias de desempenho dos alunos das duas escolas públicas do município de Ijuí, R.S. no ENEM de 2009 e 2010, tendo como sujeitos professores de Matemática dessas escolas.

A pesquisa (REIS, 2015) mostrou o que muitos estudos já apontavam: “pouco se tem observado em termos de mudanças no ensino após a LDBEN 9.394/1996” (REIS, 2012, p.102). Os professores apontaram diminuição da carga horária e falta de conhecimentos prévios oriundos do Ensino Fundamental como graves obstáculos que restringiam o desenvolvimento da base curricular. Uma de suas conclusões foi que, mesmo havendo uma lei que estabelecia uma avaliação pública para assegurar condições de mudanças, na escola as ações desenvolvidas demonstravam indiferença à proposta. Explicou o autor: “porque os professores não se sentem questionados em seu trabalho pelo fato de que o Enem ainda não se consolidou como referência nacional para o desempenho dos alunos”. E mais: “principalmente devido aos processos seletivos nas instituições públicas ainda permanecerem com maior regularidade com a cultura curricular da escola, através dos vestibulares” (REIS, 2012, p.102).

Acrescentou o autor o seguinte:

> mesmo que os professores considerassem o Enem como um indicador de qualidade e que isso implicasse questionamentos ao seu trabalho, os professores apresentam entendimentos superficiais e limitados para efetivar mudanças no ensino, ao ponto de comprometerem o processo de reforma curricular (REIS, 2012, p.102).

Reis (2012) também concluiu que resquícios do Movimento da Matemática Moderna traziam uma visão linear dos conteúdos como sendo fundamental na aprendizagem para o trabalho docente e a postura dos professores mostrou tendências tecnicistas, pois apresentavam ausência de formação continuada e não faziam reflexões sobre vivências.

E o autor ressaltou o medo dos professores em mudar de postura, sem saber exatamente o que fazer, temendo prejudicar os alunos, o que os levava muitas vezes a passar a carreia sem grandes alterações.

É possível observar que Mota verificou aumento de cerca de 30% na carga horária destinada à Geometria e que no 3º ano o ensino passou a ser voltado para o desenvolvimento de habilidades na solução de situações-problema. Além disso, no 2º ano a escola passou a incluir no plano de curso as competências da Matriz de Referência do ENEM (2009). Reis detectou diminuição da carga horária após a promulgação da LDBEN 9.396/1996 e graves obstáculos que restringiram o desenvolvimento da base curricular, como a falta de conhecimentos prévios dos alunos e o receio dos docentes em efetuar mudanças, o que contribuiu para que pouco se observasse em termos de influências do ENEM na prática curricular. A diferença de realidade entre a escola privada e a escola pública se manifestou, portanto, claramente, nas possibilidades de promoção de mudanças.

2.1.3 Ciência, Tecnologia e Sociedade/CTS na formulação de questões de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (2009 a 2011): quais as referências de contextualização (QUEIROZ MACHADO, 2012)

Trata-se da dissertação de Renato de Queiroz Machado, que tem este objetivo:

> fazer uma reflexão crítica sobre as referências de contextualização das questões de matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2009 a 2011[verificando] se o contexto apresentado está ou não introduzindo informações e/ou conhecimentos implicando a relação Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS)(QUEIROZ MACHADO, 2012, p.7).

O principal referencial teórico é Skovsmose (2000, 2001, 2006), além de Morais (2008), Duarte (2003), Fernandes (2010), Prestini (2005), Demo (2010), Monteiro (2001), para apresentar as concepções adotadas de contextualização em Matemática.

Quanto à metodologia, a pesquisa tem caráter descritivo e faz uso da análise de conteúdo. Assim, busca em Franco (2007) explicações para a análise de conteúdo, do pré-teste à categorização dos dados, que, segundo Franco, apoiado em Bardin (1977), pode ser "semântico (categorias temáticas); sintático (verbos, adjetivos); léxicos (classificação das palavras segundo seu sentido) ou ainda, expressivos (categorias que podem ser classificadas como diversas perturbações de linguagem)"(QUEIROZ MACHADO, 2012, p. 46).

As questões do ENEM do período de 2009 a 2011 foram selecionadas, analisadas, discutidas e depois categorizadas em: "1- Aplicação do conhecimento Matemático (AM); 2- Descrição científica de fatos e processos (DC); 3- Compreensão da realidade social (CRS); 4- Transformação da realidade social (TRS)"(QUEIROZ MACHADO, 2012, p.52).

Após a análise e discussão, o autor concluiu:

> a ocorrência majoritariamente de duas categorias de contextualização Aplicação do conhecimento Matemático (46%) e Descrição científica de fatos e processos (47%). Nessa segunda categoria, os elaboradores conseguem dar um passo além da aplicação pura e simples de conceitos de matemática (MACHADO, 2012, P. 157).

Machado destacou também: "na formulação de questões do ENEM não há uma contextualização adequada à ampliação da cidadania, não podendo assim ser modelo de contextualização para outras avaliações" (MACHADO, 2012, p. 158). Considerou ser uma avaliação diferenciada, pois havia perguntas criativas e informavas sobre questões importantes. Mas, para o autor, o ensino e a aprendizagem da Matemática deviam atender às necessidades do cidadão, tanto individuais quanto sociais.

2.1.4 O ENEM no Contexto das Políticas para o Ensino Médio (ALVES MACHADO, 2012)

Trata-se da dissertação de Paulo Henrique Alves Machado, que tem este objetivo: “compreender os determinantes do ENEM, analisando a Política de reforma do Ensino Médio e suas interfaces com a avaliação representada pelo exame, no contexto que vai da promulgação da LDB 9.394/96 até o Novo ENEM em 2009” (p. 7).

O autor busca compreender as Políticas Públicas de Educação por meio de documentos oficiais e o ENEM por meio de documentos que lhe concedem legitimidade. Toma como “marco inicial da pesquisa a promulgação da LDB 9.394/96, por entender que, a partir desse momento, dava-se a construção da reforma do EM e onde, portanto, encontrar-se-ia a gênese da atual política para o EM e do ENEM” (p. 15).

A dissertação apresenta cinco capítulos: o primeiro descreve os caminhos metodológicos percorridos; o segundo busca recuperar os determinantes e a trajetória histórica do Ensino Médio no Brasil; o terceiro faz uma reflexão sobre as determinações neoliberais a partir da década de 1990 nas políticas adotadas no Brasil em relação à educação e à avaliação; o quarto faz uma análise documental do Ensino Médio apoiando-se na categoria avaliação; o quinto, apoiando-se nas categorias trabalho e cidadania, faz nova análise documental.

A problemática do estudo é a seguinte:

> A avaliação do ENEM, sistematizada nos documentos que a estruturam, está sustentada na política do Ensino Médio? A política de reforma do EM, desenhada a partir da LDB 9394/96, de fato sustenta a avaliação do ENEM? Então quais determinantes da política que sustenta o ENEM podem ser identificados a partir dos documentos investigados? (ALVES MACHADO, 2012, p. 15).

Após o desenvolvimento da pesquisa, o autor chegou a estas conclusões: as portarias do ENEM (438/98 e 109/2009) não citavam a LDB, no entanto atendiam ao Inciso VI do Artigo 9. O Parecer CEB n.º 15/98 e os Incisos III e V do Art. 7.º da Resolução CEB n.º 03/98 sustentavam a política do Ensino Médio: “os princípios contidos nos documentos que sustentam a reforma do EM dão, também, sustentação para a avaliação do ENEM”(ALVES MACHADO, 2012, p. 130). No que se referia à terceira das perguntas apresentadas, o Parecer n.º 15/98 indicava trabalho e cidadania como “os dois principais contextos dentro dos quais a educação deve se dar” (ALVES MACHADO, 2012, p. 131). A Portaria n.º 109/2009, quanto ao ENEM, destacou: “seus objetos de avaliação são as competências e habilidade necessárias ao exercício da cidadania, o que faz pensar sobre a importância do mercado em um mundo onde o ser cidadão e o ser trabalhador se equalizam” (ALVES MACHADO, 2012, p. 131).

Nas Considerações Finais, o autor propõe aos professores que busquem preencher as lacunas da educação e que procurem construir uma sociedade feita pelos que trabalham. Mas que estes devem ressignificar os conceitos de trabalho e cidadania e lutar por seus direitos.

A pesquisa de Alves Machado (2012) vai da promulgação da LDB 9.394/96 ao Novo ENEM em 2009 e traz como uma das sustentações a Portaria n.º 109/2009, que apresenta este objetivo: avaliação de competências e habilidades necessárias ao exercício da cidadania. Quanto à dissertação de Queiroz Machado (2012), faz uma reflexão crítica das questões de Matemática do ENEM de 2009 a 2011 e conclui que, na formulação das questões, não havia contextualização adequada à ampliação da cidadania. Isso fazia conjeturar que, passados dois anos, as questões ainda não estavam adequadas ao propósito indicado na Portaria que instituiu o Novo ENEM.

2.1.5 Leitura, Interpretação e Resolução de Problemas em Matemática no contexto do Exame Nacional do Ensino Médio (RIBEIRO, 2013)

Trata-se da pesquisa de Vania Gomes da Silva Ribeiro, cujo principal objetivo é investigar as competências de leitura e interpretação na resolução de problemas matemáticos da Prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM manifestadas por estudantes do 3.º ano de uma escola pública.

Em sua investigação, ela utilizou os seguintes procedimentos para a coleta de dados: analisou a Prova de Matemática do ENEM de 2011, selecionou e organizou as questões que seriam trabalhadas, analisou a produção dos alunos, fez observações que foram registradas no diário de bordo e aplicou questionários. A análise da produção dos alunos, a principal fonte de dados, em três atividades, teve por base documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN+ (BRASIL, 2002), além das competências e habilidades definidas pelo ENEM (2009) na Matriz de Referência.

Realizada a investigação, Ribeiro (2013) concluiu que em todas as questões do ENEM se exigia competência em leitura e interpretação, com predominância de dados expressos em tabelas e gráficos. Quanto à Matriz de Referência do ENEM, todas as competências estavam presentes em 2011. As competências mais frequentes foram estas: 2-Utilizar conhecimento geométrico para realizar leitura e compreensão da realidade e agir sobre ela e 5-Modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas usando representações algébricas. As habilidades mais frequentes foram: 7-Identificar características de figuras planas ou espaciais; 8-Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma; 10- Identificar relações entre grandezas e unidades de medida; 19- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas; 24- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

É importante destacar o seguinte:

> as habilidades H1 (reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações), H5 (avaliar propostas de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos numéricos), H13 (avaliar o resultado de uma mediação na construção de um argumento consistente) e H14 (avaliar proposta de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas) não se fizeram presentes na prova em destaque (RIBEIRO, 2013, p. 120).

Nas Considerações Finais, a autora destaca: "estudantes investigados apresentam dificuldades com relação à leitura e interpretação [pois] embora consigam identificar o que o problema pede apresentam dificuldade em identificar os dados e condições postos no mesmo" (RIBEIRO, 2013, p. 122). E chama a atenção para a necessidade de um trabalho que envolva a resolução de problemas no que tange não somente à leitura e à interpretação, mas também a estratégias, procedimentos e conhecimentos.

2.1.6 Geometria nas questões do ENEM sob a ótica da Resolução de Problemas: um auxílio ao Trabalho Docente (GOMES, 2017).

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica e documental feita por Mário Guimarães Gomes, com este objetivo:

> subsidiar os docentes nas atividades de Matemática relacionadas ao conteúdo de geometria, tendo em vista a formação de alunos baseada nas habilidades e competências estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio) e pela Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).(GOMES, 2017, p. 13).

São cinco capítulos, dos quais o primeiro apresenta a questão de investigação:

> como as competências e habilidades discriminadas nos documentos citados [PCNEM, PCN + Ensino Médio e Matriz de Referência do ENEM], referentes ao conteúdo de geometria, podem ser trabalhadas pelo docente da disciplina de Matemática de modo significativo e contextualizado? (GOMES, 2017, p. 21).

E a metodologia: levantamento bibliográfico e análise documental, buscando caracterizar o estudo da Geometria, bem como as competências e habilidades que, segundo documentos oficiais, devem ser desenvolvidas pelos estudantes.

O segundo capítulo apresenta considerações sobre o ensino da Geometria, apoiando-se principalmente nos documentos oficiais e em Lorenzato (1995), além de "competências, habilidades e temas estruturadores de Matemática no contexto dos PCNEM e PCN + Ensino Médio, abordando-se especificamente o tema estruturador Geometria e medidas" (GOMES, 2017, p.22).

O terceiro capítulo faz uma análise da Metodologia de Resolução de Problemas e, mais especificamente, "uma análise da utilização do processo da resolução de problemas no contexto específico de geometria" (p. 23).

O quarto capítulo apresenta questões do ENEM de 2009 a 2016 "resolvidas com a utilização do método de Resolução de Problemas segundo Polya (2006)" (GOMES, 2017, p. 57).

O quinto capítulo (Considerações Finais) leva a esta conclusão:

> o trabalho constante do docente utilizando-se da resolução de situações-problema para o desenvolvimento de suas atividades de modo a despertar o interesse e iniciativa dos alunos, pode conduzir a uma abordagem relacionada a 'ensinar através da Resolução de Problemas', onde os conteúdos de Matemática poderão ser ensinados ao aluno e aprendidos pelo mesmo através da resolução das situações-problema (GOMES, 2017, p.123).

Em relação à resposta à questão de investigação, conclui:

> é possível afirmar que a metodologia de Resolução de Problemas pode representar uma estratégia eficaz no processo ensino-aprendizagem de geometria, e pode servir de auxílio ao trabalho do docente, de modo a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades deles esperadas, bem como garantir que esse processo ocorra de modo significativo e contextualizado (GOMES, 2017, p. 124).

O autor ressalta que as questões que foram apresentadas e resolvidas representavam um ponto de partida para professores na busca da Metodologia de Resolução de Problemas e sugere como proposta para futuras pesquisas, a aplicação prática da metodologia mensurando contribuições do trabalho docente.

Ribeiro (2013) investigou as competências de leitura e interpretação de textos na resolução de problemas da Prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM de 2011. A pesquisa foi realizada com alunos do 3.º ano de uma escola pública**.** Ao analisar os resultados encontrados, concluiu que existia necessidade de realização de pesquisas que envolvessem a resolução de problemas e não apenas a leitura e interpretação deles. Com isso, sugeria a realização de pesquisas sobre estratégias para a resolução de problemas.

Gomes (2017) realizou uma pesquisa bibliográfica e documental para "subsidiar os docentes nas atividades de Matemática relacionadas ao conteúdo de geometria, tendo em vista a formação de alunos baseada nas habilidades e competências estabelecidas" (p.13). Para isso, selecionou, apresentou e resolveu questões do ENEM de 2009 a 2016 que envolviam a competência 2 (Utilizar o conhecimento geométrico para a realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela) da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (GOMES, 2017), utilizando as fases de resolução propostas por Polya (2006). E concluiu que a estratégia para resolução de problemas empregada podia ser eficaz e auxiliar o docente "de modo a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades deles esperadas" (Gomes, 2017, p.12). Talvez tenha feito tal conclusão sem conhecer a dissertação de Ribeiro (2013), que apontou a necessidade de um trabalho envolvendo resolução de problemas.

Portanto, embora não ficasse claro como seguir as fases formuladas por Polya para a resolução de problemas, Gomes (2017) concluiu que segui-las podia ser uma sugestão para o que propõe Ribeiro (2013).

2.1.7 Questões de Matemática da UFMS e ENEM: uma análise da avaliação por conteúdos e por outras competências (HIANE, 2011).

Trata-se da pesquisa de Pedro Hiane, que buscou "analisar [a partir dos enunciados das questões] as provas de Matemática da UFMS, estruturadas para avaliar conteúdos específicos, e as do ENEM, que valorizam outras competências e habilidades" (HIANE, 2011, p.6). O autor analisou as provas da UFMS de1993. Em seguida, analisou as provas tanto da Universidade Federal de Santa Maria (UFMS) quanto do ENEM, de 1999, 2001, 2005 e 2008. Em 2009, ano em que a UFMS "utilizou o Enem como primeira fase de seu vestibular", somente a do ENEM (HIANE, 2011, p.27).

Para fundamentação teórico-metodológica, usou estudos de Perrenoud (1999) sobre avaliação, competências e habilidades e a Análise de Conteúdo de Bardin (2009), além de documentos oficiais editados a partir de 1996: Fundamentação Teórico-Metodológica do ENEM e Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Na pesquisa bibliográfica, após breve histórico, o autor mostra o seguinte: “desde o Período Imperial, quando se refere às provas de seleção, interesses de integrantes das elites predominavam sobre os interesses coletivos” (HIANE, 2011, p.150).

Quanto aos vestibulares, destaca:

> sofreram alterações quanto ao tipo de apresentação das questões (múltipla escolha, somatório, abertas, discursivas e, mais recentemente, contextualizadas, em provas que avaliam conteúdos programáticos ou competências/habilidades), a criação de nota mínima para aprovação, e a exigência de listas de livros para leitura (HIANE, 2011, p. 150).

Segundo Hiane (2011), no Exame Vestibular de 1993 só se apresentaram questões que visavam a avaliar conteúdos específicos, prática comum na época. E o autor acrescenta: “contextualização e competências /habilidades não estão representadas, pois não encontramos nenhuma questão contextualizada” (p.60). Porém, em 1999, houve “alterações buscando se aproximar do Enem, a memorização de fórmulas tornou-se desnecessária” (p. 81). Em 2001, foi usada “a prova do Enem como substituição à prova de conhecimentos gerais” (p. 99).

Prosseguindo com suas observações, Hiane (2011) relatou que em 2005 a UFMS “retirou de seu vestibular o Enem, que podia ser aproveitado como prova de conhecimentos gerais” (p. 122); por fim, em 2008, exigiu o “uso de fórmulas matemáticas, apesar de que as Orientações Curriculares recomendarem que se deve evitar as memorizações excessivas” (p. 138).

Hiane (2011) destaca que, em todas as edições do ENEM que analisou, estavam presentes questões relacionadas ao Ensino Fundamental (de 35% a 50%). E acrescenta:

> caso esse percentual continue alto, os responsáveis pelas políticas educacionais do MEC deverão estar atentos a possíveis modificações, induzidas pelos conteúdos das provas do ENEM, nos currículos escolares, nos conteúdos dos livros didáticos e, consequentemente, nas práticas docentes nesse nível de escolaridade (HIANE, 2011, p.153).

Entretanto observa que, nas edições do ENEM analisadas, nunca se encontraram ao mesmo tempo conteúdos de Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Tratamento da Informação, Números e operações e Trigonometria.

Nas Considerações Finais faz uma observação pontual:

> no princípio, o ENEM foi criado como um instrumento para analisar o Ensino Médio, uma ferramenta de avaliação tanto de estudantes quanto de instituições educacionais. No entanto, desde 2009 passou a ser utilizado como vestibular unificado nacionalmente, assumindo assim outro objetivo. Essa mudança de rumo do ENEM

> poderá provocar alterações na estrutura escolar do Ensino Médio, nos projetos pedagógicos das escolas e também no trabalho em sala de aula dos professores (HIANE, 2011, p. 153).

Em vista disso, sugeriu estudos sobre os impactos que essas mudanças podiam provocar em currículos escolares, manuais escolares e tudo que se relacionasse ao novo objetivo do ENEM.

2.1.8 Análise da abrangência da Matriz de Referência do ENEM com relação às habilidades avaliadas nos itens de Matemática aplicados de 2009 a 2013 (FERREIRA, 2014).

Trata-se da pesquisa de Edson Martins Ferreira, que tem como objetivo geral "analisar a abrangência da Matriz de Referência do ENEM com relação às habilidades avaliadas nos itens de matemática aplicados nas provas de 2009 a 2013" (p.14). Para tanto, ele busca responder às seguintes perguntas: "Em que medida a avaliação está coerente com o propósito estabelecido na Matriz? Qual a abrangência dos itens aplicados no que diz respeito às competências de área e às habilidades estabelecidas na Matriz? De que maneira a distribuição dos itens por competência de área está relacionada com a distribuição dos campos de conhecimento matemático tradicionalmente presentes nos livros didáticos?".

A análise de conteúdo foi feita com base em Bardin (1977). E a análise documental com esta indicação: "Relatório Pedagógico do ENEM de 2008, Portaria do MEC nº 109, de 2009, Matriz de Referência para o ENEM – Matemática e suas Tecnologias, Guia de Livros Didáticos PNLD 2012" (p. 15).

Além da análise das questões das provas de Matemática do Novo ENEM, referente ao período de 2009 a 2013 foi avaliada uma coleção de Matemática do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), relacionando-a com os conhecimentos exigidos no ENEM de 2013.

Ferreira (2014) chegou a esta conclusão: "[é possível] visualizar de várias maneiras a abrangência da Matriz de Referência, mesmo no que diz respeito aos objetos de conhecimento avaliados" (p.53). E mais: "há abrangência da matriz com relação às habilidades avaliadas nos itens pesquisados (p.53)". Merece também destaque o seguinte:

> a distribuição dos diferentes campos de conhecimento matemático da coleção de livros do ensino médio que utilizamos em nossa análise não está em sintonia com o exame, já que os dados desse estudo apontaram para uma maior valoração de alguns conhecimentos em relação a outros (FERREIRA, 2014, p. 53).

Mas o autor acrescenta não ser possível generalizar, pois não analisou, por limitação de tempo, todas as obras aprovadas pelo PNLD, indicando que existiam muitos aspectos que podiam ser explorados e que ampliariam os estudos que realizou sobre o ENEM.

Hiane (2011) analisou questões de Matemática referentes a 5 edições do ENEM entre 1999 a 2009. Observou que em todas as provas havia grande número de questões, de 35% a 50%, referentes ao Ensino Fundamental. E nas Considerações Finais afirmou, caso esse índice permanecesse alto: “os responsáveis pelas políticas educacionais do MEC deverão estar atentos a possíveis modificações” (p.153) nos currículos, conteúdos e práticas docentes. Isso levou a considerar o ENEM uma avaliação geral, com respeito à Matemática, já que apresentou, no período considerado, 35% a 50% das questões referentes ao Ensino Fundamental, embora fosse difícil um problema de Matemática envolver somente um tipo de conhecimento do conteúdo: pertencente ao Ensino Fundamental ou ao Ensino Médio.

Ferreira (2014) analisou questões de Matemática do ENEM de 2009 a 2013 e pôde observar, mesmo sem generalizar, que os livros didáticos do PNLD que avaliou não estavam em sintonia com o ENEM quanto à distribuição dos campos de conhecimento matemático.

2.1.9 Análise técnica da Matriz de Referência do ENEM e dos itens de Matemática das edições de 2012 a 2014 (CAMPOS, 2015).

Trata-se da pesquisa de Raul Bueno Lins Campos, que teve como finalidade “apresentar ao docente do ensino básico uma análise de dados e informações diversas a respeito da área de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), focando as edições de 2012, 2013 e 2014” (p.7).

Para isso, o autor divide a pesquisa em três partes. Na primeira, apresenta o ENEM, da criação em 1998 até 2014; na segunda se volta para a Matriz de Referência da Prova de Matemática e suas Tecnologias e procura confrontar os conteúdos previstos para o Ensino Médio com os exigidos, analisando diversos itens no período mencionado, e na terceira parte apresenta os resultados obtidos das análises.

Nas Considerações Finais, Campos (2015) considera como ponto positivo o ENEM ser baseado numa Matriz de Referência que contempla competências e habilidades e suas questões passarem por testes antes de serem validadas. Além disso, privilegia a o pensamento e não a memorização de conteúdos e o seu resultado é calculado pela Teoria de Resposta ao Item.

Por outro lado, Campos (2015) considera como pontos negativos a falta de conteúdos básicos, inerentes à construção do conhecimento, e a falta de divulgação pelo INEP de um documento oficial e atualizado revelando dados, como os Relatórios Pedagógicos.

O autor observa que, no período considerado, foi cobrada a mesma habilidade em questões semelhantes, o que tornava previsível a existência desse tipo de questão em provas posteriores. Com isso, Campos (2015) sugeria que os docentes trabalhassem essas questões com seus alunos. O autor aponta a necessidade de mais pesquisas sobre outras áreas do ENEM: "espera-se que ocorram mais pesquisas deste tipo, pois esta análise deve estar em constante atualização e renovação, servindo de referência tanto para os que vão realizar o ENEM, como para os docentes" (CAMPOS, 2015, p. 74).

2.1.10 As provas das quatro áreas do ENEM vistas como Prova Única na ótica de modelos da Teoria da Resposta ao Item Uni e Multidimensional (VIEIRA, 2016)

Trata-se da pesquisa de Nara Núbia Vieira, que tem este objetivo geral: "identificar modelos da Teoria de Resposta ao Item (TRI) que se ajustem bem a uma prova agregada de quatro áreas do Enem, verificando como interagem os itens, áreas de conhecimento e avaliados" (p. 22).

Na revisão de literatura, é apresentado um histórico de avaliações educacionais no Brasil, destacando o ENEM e alguns trabalhos que utilizaram a TRI em exames de larga escala. Quanto aos procedimentos metodológicos, trabalha com os microdados do ENEM de 2012, disponíveis no site do INEP.

Para isso, buscou os dados de um modelo unidimensional e verificou que a medida unidimensional gerada podia ser "representada pela média aritmética das notas das quatro provas objetivas calculadas pelo Inep" (p. 9). A seguir, verificou que nas dimensões da prova se destacavam duas características: raciocínio lógico e leitura e interpretação de textos.

Nas Considerações Finais, destaca: "na seção que trata do modelo unidimensional que todas as áreas do conhecimento podem ser, em termos matemáticos, agregadas e gerar uma medida unidimensional de proficiência" (p. 81). E acrescenta:

> ao ajustar o modelo, a análise de componentes principais sobre a matriz de correlação tetracórica dos itens apresentou que o maior autovalor é muito superior aos demais, demonstrando uma dimensão dominante o que ratifica a hipótese de que a prova agregada das quatro áreas pode ser considerada essencialmente unidimensional (p. 81).

O autor também observa que os alunos considerados de alta proficiência dominavam as áreas cobradas no ENEM, considerado essencialmente unidimensional. Entretanto, pela análise de modelos mais complexos, verificou a predominância das proficiências de raciocínio lógico e leitura e interpretação de textos, o que sugeriu o modelo bidimensional mais apropriado para a geração das proficiências dos alunos.

Observa-se, pois, que Campos (2015) e Vieira (2016) divergem quanto aos dados das provas do ENEM. Campos indica a falta de publicação pelo INEP de Relatórios Pedagógicos atualizados, o que de fato aconteceu e dificultou a pesquisa. Com isso, destacou a impossibilidade de acesso aos dados da prova, o que parecia ser um equívoco, pois podiam ser obtidos dos microdados. O que podia ter ocorrido foi dificuldade em acessar os microdados, que se encontravam na página do INEP. Essa dificuldade podia ter ocorrido pela necessidade da utilização de softwares estatísticos não gratuitos. Entretanto Vieira (2016) os utilizou em sua pesquisa.

2.1.11 Resultado da leitura dos textos completos de cada uma das 10 dissertações

Os trabalhos analisados são dissertações de Mestrado Acadêmico ou Mestrado Profissional realizado de 2011 a 2017, sendo 6 em instituição pública e 4 em instituição particular. Quase a metade era da Região Sul ou da Região Sudeste e nenhuma na Região Norte do país.

As pesquisas tinham relação com o ENEM: influência dele e de alguns vestibulares sobre o currículo e a prática curricular, discussão sobre a formulação de questões e habilidades e competências referentes à Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias, comparação de conteúdos de Matemática de livros didáticos com os cobrados, apresentação da Metodologia Resolução de Problemas como alternativa para o desenvolvimento de habilidades necessárias para resolver situações-problema, comparação das competências e habilidades cobradas com as da Matriz de Referência de Matemática, além de aspectos ligados à legalidade, considerados os documentos oficiais.

Entre as conclusões apresentadas estão as seguintes: em uma escola particular (C7S), o número de aulas para a Geometria foi aumentado e os professores se sentiram questionados quanto à prática; em uma escola pública não ocorreu o mesmo, embora a legislação permitisse condições de mudanças.

Quanto às questões do ENEM, as conclusões indicam que foram contextualizadas e em algumas edições mostraram alto índice de questões referentes ao Ensino Fundamental, porém não pareciam contribuir para a construção da cidadania. E que foram cobradas todas as competências, porém nem todas as habilidades da Matriz de Referência de Matemática. Além disso, apontaram que a Metodologia de Resolução de Problemas podia representar estratégia eficaz no processo ensino-aprendizagem e que faltaram Relatórios Pedagógicos atualizados a cada ano. Sendo o ENEM realizado anualmente, era de esperar que o INEP editasse sempre um Relatório Pedagógico sobre os resultados do ano anterior.

Uma das dissertações permitiu identificar desconhecimento da existência de microdados publicados pelo INEP, o que prejudicou os resultados. Embora o desconhecimento da existência desses microdados não se justificasse, o acesso a eles podia ser difícil devido à necessidade de utilizar softwares pagos. Além disso, mesmo que o acesso fosse conseguido, a falta de padronização na exposição nas tabelas podia dificultar a análise.

Após a análise dessas dissertações relacionadas ao ENEM, à Geometria e ao Conhecimento Geométrico, portanto ao objeto de estudo desta pesquisa, segue-se uma seção dedicada ao Conhecimento Geométrico.

2.2. Conhecimento geométrico

Para apresentar como surgiram os conhecimentos geométricos e sua importância, tomam-se como fundamento Machado (1998) e Gazire (2000). E, para apresentar os níveis de raciocínio hierárquicos e sequenciais do modelo de van Hiele, consideram-se diversos pesquisadores, relacionando-os a diversas habilidades necessárias ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Em seguida, aborda-se o conhecimento geométrico de *espaço* e f*orma* segundo documentos oficiais. Por fim, considera-se, na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (ENEM), a competência *utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela, assim como as habilidades a ela relacionadas.*

2.2.1 Primórdios

Para Machado (1998), os primeiros conhecimentos geométricos surgiram de resultados empíricos relacionados às necessidades humanas da época, como construções arquitetônicas, cálculos de áreas e volumes, medições de terra, o que indica “que este ramo da Matemática é muito importante para a formação do cidadão” (GAZIRE, 2000, p. 73). Ainda segundo Gazire (2000), Platão mandou afixar na porta de sua Academia “Não entre se ignora Geometria” e, indagado sobre a ocupação de Deus, respondeu: “Deus geometriza constantemente”. De fato, este ramo da Matemática tem um significado reconhecido por diversas concepções filosóficas a partir de Platão (MACHADO, 1998).

Portanto, muitas são as formas de confirmação da importância da Geometria e do conhecimento advindo dela, o conhecimento geométrico.

> O conhecimento geométrico foi o primeiro a ser sistematizado, em trabalho monumental realizado por Euclides cerca de três séculos antes de Cristo. Em Os Elementos, toda a gama de conhecimentos geométricos práticos, conhecidos e desenvolvidos desde os egípcios, foi organizada em um incipiente e promissor sistema formal, com a distinção entre noções primitivas e definições, entre postulados e teoremas, servindo de modelo para a sistematização do conhecimento em outras áreas (VIDIGAL, 2016, p.18).

Além disso, nenhum assunto “presta-se mais à explicitação da impregnação entre a Matemática e a Língua Materna bem como a uma estruturação compatível da ação docente do que a Geometria” (MACHADO, 1998, p. 137).

E o autor explica:

> a interpretação do trabalho euclidiano na perspectiva do momento presente sugere que Euclides teria compreendido plenamente o fato de que a estruturação do conhecimento geométrico deveria começar por uma assepsia na linguagem, com o esclarecimento das noções utilizadas de modo intuitivo (MACHADO, 1998, p. 138).

Como essas noções decorrem umas das outras, não é possível defini-las sem articulá-las. Fundamentadas em algumas ideias, reconhecidas como lógicas, elas foram instituídas como “noções primitivas, e a partir delas foram elaboradas definições para todas as demais noções geométricas” (MACHADO, 1998, p. 138). Algumas proposições foram aceitas, chamadas *postulados*, e, com base nelas, por meio de argumentos, foram estabelecidos os *teoremas*. Euclides realizou a sistematização dos conhecimentos geométricos em Os Elementos, superando a simples coleta de dados e técnicas (GAZIRE, 2000).

Segundo Machado (2009, p.31), “o sistema formal elaborado por Euclides para a Geometria (...) [tinha] como termos primitivos as noções de ponto, reta e plano, definindo novos termos a partir desses”. Euclides enunciou os cinco *postulados*.

> P.1. É possível traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
> P.2. Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma linha reta
> P. 3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada.
> P. 4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.

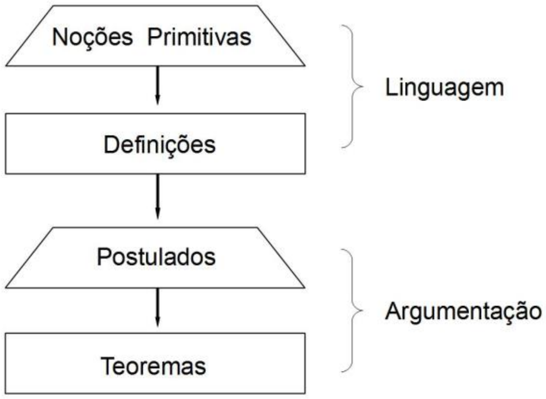
> P. 5. Se uma reta cortar duas outras de modo que os dois ângulos interiores de um mesmo lado tenham soma menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzarão, se prolongadas indefinidamente, do lado da primeira reta em que se encontram os dois ângulos citados (MACHADO, 2009, p. 31).

Machado (2009, p.31) mostra que Euclides também assumiu outros cinco princípios, os *axiomas*, mais amplos, "de natureza que julgava lógica e que seriam utilizados em todas as matérias e não somente na Geometria" (MACHADO, 2009, p. 31).

> A.1. Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
> A.2. Se parcelas iguais forem somadas a quantias iguais os resultados obtidos serão iguais.
> A.3. Se quantias iguais forem subtraídas de quantias iguais, os restos obtidos serão iguais.
> A.4. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.
> A.5. O todo é maior que cada uma das partes (MACHADO, 2009, p. 32).

A Figura 1, a seguir, mostra esquematicamente a estruturação da Geometria feita por Euclides.

Figura 1-Estruturação da Geometria operada por Euclides



Fonte: Machado (1998, p. 138.)

Apesar da importância, desde a Antiguidade existiam críticas à obra de Euclides. Havia desconfiança de que fosse possível fazer demonstração do quinto postulado por ele proposto. Realmente, passados 2000 anos, todas as tentativas fracassaram (Gazire, 2000): "o quinto postulado não é uma consequência lógica dos demais; e, o que é importante, ele é indispensável para a construção da Geometria de Euclides" (GAZIRE, 2000, p. 113).

As críticas ao trabalho de Euclides conseguiram mostrar que havia imperfeições. Gazire (2000) destaca considerações de alguns autores:

> Clavius notou a ausência de um postulado garantindo a existência da quarta proporcional; Leibnitz, por sua vez, apontou o fato de que Euclides admite sem justificação que duas circunferências, cada uma das quais passando pelo centro da outra, têm ponto comum; Gauss atraiu a atenção sobre o papel desempenhado pela noção de um ponto situado entre dois pontos, noção essa que não é definida (GAZIRE, 2000, p. 110).

Gauss, segundo Gazire (2000), pode ter sido o primeiro a ter entendimento da Geometria não euclidiana:

> compreendeu que eram inúteis as tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides, a partir dos outros quatro. Podia-se, entretanto, construir outro sistema geométrico completamente diverso, simplesmente refutando o quinto postulado de Euclides e propondo outro em seu lugar (GAZIRE, 2000, p. 113).

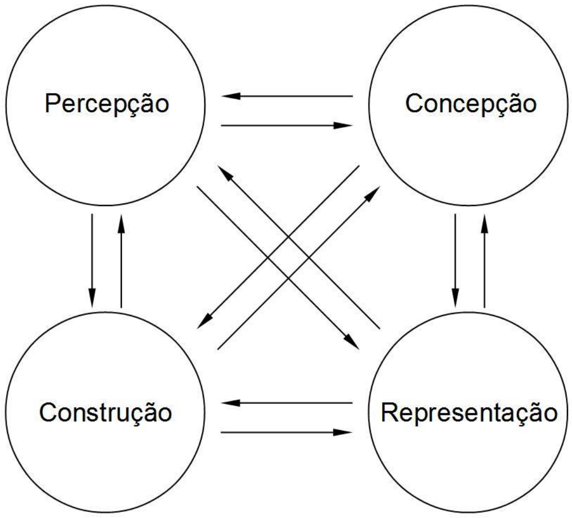
As críticas propiciaram diversas revisões: muitos matemáticos construíram trabalhos rigorosos sobre os fundamentos da Geometria, fazendo-a ser reestruturada. De acordo com Gazire (2000), o trabalho de Hilbert foi o mais completo, pois influenciou não só a Geometria, mas toda a Matemática do século XX,

> tendo apresentado, quanto ao sistema utilizado de postulados, discussões relativas à consciência, independência e categoricidade, e, inclusive, apontado novas Geometrias pela alteração do sistema original, bem como as consequências algébricas dos teoremas de Desargues e de Pappus de Alexandria (GAZIRE, 2000, p. 112).

Com muito trabalho e reorganização na Geometria de Euclides surgiram “novas Geometrias: Geometria Absoluta, Geometria Afim, Geometria Projetiva, Geometria Analítica, Geometria Vetorial, Geometria de Transformações, Geometria Diferencial, Geometria Integral, etc.” (GAZIRE, 2000, p. 119). E, pela importância dada ao conhecimento geométrico na constituição do conhecimento matemático, fundamental para a evolução da sociedade, alguns pesquisadores buscaram caracterizá-lo.

Machado (1998, p.142) caracteriza o desenvolvimento do conhecimento geométrico em quatro etapas, *percepção*, *construção*, *representação* e *concepção*: “articulam-se mutuamente, configurando uma estrutura a partir da qual, de modo metafórico, pode-se aprender o significado e as funções do ensino da Geometria”. Mas o autor considera que é possível um trânsito natural entre as etapas, havendo uma via de mão dupla entre elas. A Figura 2, a seguir, expressa sua visão.

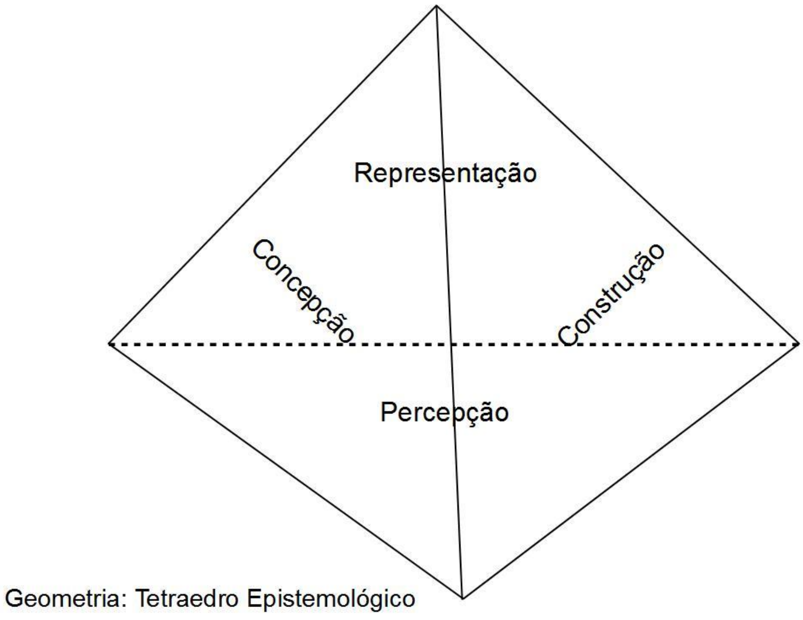
Figura 2-Faces que caracterizam o conhecimento geométrico



Fonte: Machado (1998, p. 143).

Como salienta Machado (1998), as etapas não são fases que se sucedem, pois interagem e por isso podem ser representadas simbolicamente por um tetraedro, ilustrado na Figura 3.

Figura 3-Tetraedro Epistemológico



Fonte: Machado (1998, p. 143).

As faces do tetraedro alimentam-se mutuamente:

> são como átomos em uma estrutura com características moleculares, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, qualquer uma das faces desse tetraedro tem um significado muito restrito (MACHADO, 1998, p.144).

E Lauro (2007) explica cada uma das faces:

> -A percepção refere-se à observação e à manipulação de objetos materiais – atividades sensoriais – e à caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta. A percepção ocorre por meio de atividades empíricas. Este processo precisa ser desenvolvido desde as séries iniciais do ensino e relaciona-se diretamente com os demais.
> -A construção refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico. A construção pode ocorrer com a utilização de massas de modelar, sabão em pedra, madeira, acrílico, papel, varetas, por exemplo. Em certo sentido, a construção reforça a percepção, bem como esta última estimula a construção.
> -A representação refere-se à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos. Neste sentido, fazemos referência ao Desenho Geométrico, bem como à Geometria Projetiva e à Geometria Descritiva. Em qualquer um desses contextos, a representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção.
> -A concepção refere-se à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e da teorização. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico; ao exercício da lógica, aos elementos conceituais, onde tem predomínio as definições formais, o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações, sejam elas formais ou informais. A concepção é favorecida pela percepção, representação e construção, mas também favorece essas dimensões (LAURO, 2007, p.26-27).

Após o longo período em que se desenvolveu o conhecimento geométrico, caracterizado por Machado (1998) nas quatro etapas (percepção, construção, representação e concepção), representadas no tetraedro, e pela explicação de suas faces por Lauro (2007), é possível prosseguir e apresentar o modelo proposto por van Hiele para os níveis de raciocínio necessários à compreensão de conceitos geométricos.

2.2.2 Habilidades a partir dos níveis de van Hiele e em documentos oficiais

Dois pesquisadores holandeses, o casal Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geoldof, enquanto trabalhavam como professores de Geometria do Curso Secundário, na Holanda, preocupados com a aprendizagem dos alunos, procuraram identificar causas das dificuldades. Como resultado de suas pesquisas, criaram “um modelo que consiste em um esquema de compreensão do aluno através de níveis de raciocínio hierárquicos e sequenciais” (VIEIRA, 2010, p. 25). Esses níveis são: *visualização* ou *reconhecimento*, *análise*, *ordenação* ou *dedução informal*, *dedução formal* e *rigor*.

Na tese de doutorado, Nasser (1997) apresenta com detalhes as características de cada um desses níveis, incluindo exemplos, o que mostra o Quadro 2 a seguir:

Quadro 2-Classificação e características dos níveis de raciocínio de van Hiele e exemplos proposto por Nasser (1997)

Nível	Classificação	Características	Exemplos
0	Visualização ou reconhecimento	Neste nível o aluno visualiza objetos que estão à sua volta, introduzindo desta forma noções de conceitos geométricos. Através desta visualização o aluno percebe as formas geométricas como um todo (aparência física), não pelas suas propriedades ou partes. Nesta fase o aluno ainda não é capaz de tamanha percepção, pois seu vocabulário geométrico está pouco desenvolvido, ou seja, seria incapaz de perceber nas figuras geométricas características como ângulos ou que os lados opostos são paralelos.	Classificação de quadriláteros, (recortes) em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios, porém somente pelo aspecto visual.
1	Análise	Para o aluno, este nível é marcado pelo início de uma análise de conceitos e características de figuras geométricas. A partir disto, o aluno reconhece que as figuras são divididas em partes. No nível de análise ainda não há uma explicação nas relações existentes entre as propriedades. Não são capazes de distinguir relações entre as figuras e não são capazes de definir conceitos.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
2	Ordenação ou Dedução Informal	Alunos deste nível conseguem produzir relações entre as propriedades das figuras, surgindo assim deduções simples. Há a capacidade de decisões das propriedades das figuras e o reconhecimento das classes das figuras. Neste nível, porém, os significados das deduções não são compreendidos como um todo. São capacitados para acompanhar as demonstrações formais, mas não conseguem alterar a ordem lógica e nem provas das deduções com novas formas.	Descrição do quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos, O aluno deste nível é capaz de concluir que o retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.
3	Dedução Formal	O significado da dedução das teorias geométricas é compreendido de uma forma mais complexa. A partir deste nível é empregado o sistema axiomático. O aluno se sente capaz em construir demonstrações e novas formas de desenvolver suas deduções. Não utilize muito rigor matemático em suas derivações.	Demonstrações de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
4	Rigor	Dentro deste nível o aluno é capacitado a construir noções de várias questões dentro dos sistemas axiomáticos, isto é, há possibilidade de estudarem as	Estabelecimento e demonstração de teoremas em geometria finita.

		geometrias não-euclidianas, neste nível a geometria é vista em um plano abstrato.	

Fonte: Nasser (1997) apud Vieira (2010, p. 26)

Vieira (2010) mostra que Hoffer (1981) identifica cinco tipos de habilidades que o aluno deve possuir para entender Geometria, em cada um dos níveis do modelo de van Hiele: *visuais*, *verbais*, *de desenho*, l*ógicas* e *aplicadas.*

Ao cruzar essas cinco habilidades com os cinco níveis, Hoffer encontrou 25 cruzamentos, que mostram o desenvolvimento do aluno em cada habilidade e em cada nível. É o que mostra o Quadro 3, a seguir

Quadro 3-Relações entre habilidades de Hoffer e níveis de van Hiele.

Nível / Habilidade	Visualização ou Reconhecimento	Análise	Ordenação ou Dedução Informal	Dedução Formal	Rigor
Visual	Reconhece figuras diferentes de um desenho. Reconhece informações rotuladas numa figura.	Percebe as propriedades de uma figura como parte integrante de uma figura maior.	Reconhece interrelações em diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre uma figura para deduzir outras informações.	Reconhece suposições injustificadas feitas através do uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos.
Verbal	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentenças que descrevem figuras.	Descreve acuradamente várias propriedades de uma figura.	Define palavras precisa e concisamente. Formula sentenças mostrando interrelações entre figuras.	Entende a distinção entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado num problema e o que se pede para achar ou fazer.	Formula extensões de resultados conhecidos. Descreve vários sistemas dedutivos.
Desenho	Faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas.	Traduz numa figura a informação verbal dada. Usa as propriedades	Dadas certas figuras, é capaz de construir outras figuras relacionadas	Reconhece quando e como usar elementos auxiliares numa figura. Deduz a partir de	Entende as limitações e capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictoriamente

		de figuras para desenhar ou construir as figuras.	as figuras dadas.	informação dada como desenhar ou construir uma figura específica.	conceitos atípicos em vários sistemas dedutivos.
Lógica	Percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras. Entende a conservação da forma de figura sem posições diferentes.	Entende que figuras podem ser classificadas em tipos diferentes. Percebe que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras.	Entende qualidades de uma boa definição. Usa propriedades de figuras para determinar se uma classe de figuras está contida numa outra classe.	Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir consequências a partir de informação dada.	Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
Aplicações	Identifica formas geométricas em objetos físicos.	Reconhece propriedades geométricas de objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou num modelo.	Entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	É capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e da natureza.

Fonte: Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28)

As habilidades *visualização*, *desenho*, *argumentação lógica* e *de aplicação* são indicadas pelos PCN (BRASIL, 1999) na busca de soluções de problemas, podendo ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria. Com isso, foram organizadas orientações para escolas e professores sobre a abordagem dos conhecimentos geométricos e sua construção pelos alunos num período considerado adequado.

Conforme os PCN (BRASIL, 1997), “a Aritmética e a Geometria formaram-se a partir de conceitos que se interligavam [como no tetraedro de Machado]. Talvez, em consequência disso, tenha se generalizado a ideia de que a Matemática é a ciência da quantidade e do espaço” (BRASIL, 1997, p.24). Os conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental foram organizados em 4 blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. No bloco denominado Espaço e Forma, a Geometria é vista como “um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente” (BRASIL, 1997, p.39), inclusive as crianças, pois elas gostam de se movimentar, com jogos e brincadeiras que podem ser aproveitadas pelos professores.

É importante, pois, destacar o que diz Lorenzato (1995):

> As crianças devem realizar inúmeras experiências ora com o próprio corpo, ora com objetos e ora com imagens; para favorecer o desenvolvimento do senso espacial é preciso oferecer situações onde elas visualizem, comparem e desenhem formas [...] é uma etapa que parece mero passatempo, porém é de fundamental importância (LORENZATO, 1995, p.8).

Em relação aos conteúdos indicados para o Primeiro Ciclo de Alfabetização, os PCN de 1997 definem como conceituais e procedimentais para Espaço e Forma a localização e movimentação de pessoas no espaço, a descrição com relação a pontos de referência, o dimensionamento, a representação e interpretação da posição no espaço, o reconhecimento de objetos do espaço físico e objetos geométricos - esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos e a comparação e construção de formas geométricas (Brasil, 1997). Uma descrição completa dos conteúdos conceituais e procedimentais encontra-se no Anexo 1.

> O trabalho com Espaço e Forma centra-se, ainda, na realização de atividades exploratórias do espaço. Assim, deslocando-se no espaço, observando o deslocamento de outras pessoas, antecipando seus próprios deslocamentos, observando e manipulando formas, os alunos percebem as relações dos objetos no espaço e utilizam o vocabulário correspondente (em cima, embaixo, ao lado, atrás, entre, esquerda, direita, no mesmo sentido, em direção contrária) (BRASIL, 1997, p.57, grifos do documento).

Sobre os conteúdos indicados para o Segundo Ciclo de Alfabetização e relacionados no Anexo 2, os PCN de 1997 definem como conceituais e procedimentais para Espaço e Forma a ampliação dos vistos no Ciclo anterior. De acordo com os PCN de1997, enquanto no Primeiro Ciclo é primordial indicar atividades para que o aluno seja incitado a progredir na aptidão de estabelecer pontos de referência em seu entorno, para efeito de localização, o trabalho de localização, no Segundo Ciclo, pode ser aprofundado por meio de atividades que manifestam a possibilidade de se utilizarem malhas, diagramas, tabelas e mapas. A escola pode usar atividades que se relacionam com outras áreas, como a Geografia, a Astronomia, a Educação Física, para desenvolver o estudo de *espaço* e *forma*. Nesse sentido, desenvolver o pensamento geométrico começa pela visualização: "as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades" (BRASIL, 1997, p. 82).

Quanto aos PCN de Matemática de 1998, referem-se ao Terceiro e ao Quarto Ciclo da Alfabetização: "mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos" (BRASIL, 1998, p. 59). Acrescenta-se que, para cumprir seus propósitos matemáticos, em relação à Geometria,

> enfatizam a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial; destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações; apresentam uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições (BRASIL, 1998, p. 60).

Os PCN de1999 referem-se ao Ensino Médio, incluindo conteúdos úteis à vida e ao trabalho. Na Parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, manifestam a busca de interdisciplinaridade e contextualização. Fazem, pois, esta proposta:

> um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade (BRASIL, 1999, p.4).

O conhecimento matemático tem no Ensino Médio um direcionamento:

> no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade(BRASIL, 1999, p.41).

O trabalho adequado com Geometria pode desenvolver "as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas" (BRASIL, 1999, p. 44), para que o aluno possa "usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca" (BRASIL, 1999, p. 44).

Todos estes conhecimentos desempenham importante papel:

> Ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo (BRASIL, 1999, p.44).

Prosseguindo com a intenção de promover o diálogo entre professores e escola sobre a prática docente, o MEC, em 2002, lançou os PCN+ (BRASIL, 2002) e, em 2006, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) organizam a Matemática, em 4 blocos, trabalhados de forma articulada: Números e Operações, Funções, Geometria, Análise de Dados e Probabilidade.

Sobre o estudo da Geometria, a orientação é esta:

> deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes (BRASIL, 2006, p.75).

Os PCN recomendam um percurso para todas as escolas, sugerindo em que época e de que forma se constroem os conhecimentos geométricos. Mas alguns estados criaram os próprios documentos, regionalizando o aconselhamento sobre o que deve ser seguido pelas escolas e pelos docentes. No Estado de Minas Gerais, o Conteúdo Básico Comum (CBC) desempenha esse papel (MINAS GERAIS, 2005).

O CBC de Matemática do Ensino Fundamental (MINAS GERAIS, 2005) organiza os conhecimentos matemáticos em 4 eixos: Números e Operações, Álgebra, Espaço e Forma e Tratamento de Dados. O eixo Espaço e Forma está organizado em 2 temas: o primeiro, dedicado às Relações Geométricas entre Figuras Planas, envolve 11 tópicos; o segundo, dedicado às Expressões Algébricas, envolve 6 tópicos, sugeridos para 4 anos de estudos.

O CBC do Ensino Médio (MINAS GERAIS, 2005) define o primeiro ano como o da formação básica, o segundo como o de aprofundamento e o terceiro como o da consolidação da formação. A parte dedicada à Matemática se divide em 3 eixos temáticos: Eixo Temático I – Números, Contagem e Análise de Dados; Eixo Temático II – Funções Elementares e Modelagem; Eixo Temático III – Geometria e Medidas.

O Eixo Temático III define 3 tópicos para o primeiro ano, 9 para o segundo ano e 7 para o terceiro ano.

Sobre a Geometria no Ensino Médio, o CBC indica o que deve ser estudado, levando em conta 3 aspectos:

> O tratamento formal, lógico-dedutivo dos fatos referentes a figuras planas e espaciais, o desenvolvimento de técnicas de medição indireta (usando semelhança de triângulos ou trigonometria) e a algebrização da geometria através da introdução de um modelo para a geometria euclidiana plana (geometria analítica) (MINAS GERAIS, 2005, p. 37).

Outro documento apresentado pelo MEC para direcionar o Ensino Médio são as Matrizes de Referência do ENEM, compostas de competências e habilidades.

Na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias, a segunda competência é *utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela*.

A competência se divide em 4 habilidades:

- Habilidade 6–Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Habilidade 7–Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Habilidade 8–Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Habilidade 9–Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

A terceira competência é *Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano*. Ela também apresenta uma habilidade relacionada à Geometria, a Habilidade 14: *Avaliar a proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas*.

A quarta competência é *Modelar e resolver problemas que envolvem variações socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas*. Ela também apresenta uma habilidade relacionada ao conhecimento geométrico, a Habilidade 22: *Utilizar conhecimentos algébrico-geométricos como recurso para a construção de argumentação*.

Mais recentemente, em 20 de dezembro de 2017, foi homologada pelo Ministro da Educação José Mendonça Filho a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL , 2017, p. 7).

A BNCC indica: “a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2017, p.271).

Inicialmente a BNCC tratava apenas do Ensino Fundamental e depois foi incluída a parte relativa ao Ensino Médio, homologada em 14 de dezembro de 2018 pelo Ministro da Educação Rossieli Soares da Silva.

Com respeito à adequação dos currículos estaduais à BNCC do Ensino Fundamental, o Estado de Minas Gerais, em 2018, promulgou o Currículo Referência de Minas Gerais. Nele o currículo de Matemática “foi estruturado tendo em vista a formação plena do estudante, em que se busca, dentre outras características, a sua autonomia e o desenvolvimento do pensamento matemático” (MINAS GERAIS, 2018, p. 661).

São cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Em todas existem indicações do que se espera que o aluno saiba após cada ano de escolaridade.

Pelo que foi visto, os documentos oficiais mencionados apresentam o ensino da Geometria e a construção do conhecimento geométrico como extremamente necessários à formação dos cidadãos e à percepção do mundo (espaço) em que vivem e sobre o qual podem e devem atuar. Talvez seja o motivo de questões relacionadas ao conhecimento geométrico estarem tão presentes no ENEM.

Como a avaliação faz parte da aprendizagem, as próximas seções discutem o processo de uma e da outra, lembrando que o ENEM é uma avaliação de larga escala, portanto diferente da avaliação da aprendizagem na sala de aula.

2.3. Processo de ensino-aprendizagem e avaliação

Segundo o Dicionário de Filosofia (ABBAGNANO, 2003), a palavra *processo* vem do latim *processus* e um dos significados apontados é *procedimento, maneira de operar ou de agir*. Com base em outros dicionários (KOOGAN, HOUAISS, 1999; DICIONÁRIO SALAMANCA, 1996), destaca-se que *processo é um conjunto de ações sucessivas realizadas com a intenção de conseguir um resultado*. Portanto processo é alguma forma de induzir algo a acontecer, sendo possível compreender o processo de ensino como ações dirigidas ao ensino e processo de aprendizagem como ações direcionadas à aprendizagem. Assim, processo de ensino-aprendizagem pode ser compreendido como ações dirigidas ao ensino para a aprendizagem.

No processo de ensino-aprendizagem o professor realiza ações e o aluno também. De acordo com Vygotsky (1978) e a teoria histórico-cultural, a interação entre os diferentes indivíduos é fundamental para o processo de desenvolvimento humano, pois eles são membros de uma cultura e herdeiros de um patrimônio material e simbólico. Portanto, para se apropriarem de suas conquistas, tanto psicológicas quanto materiais, necessitam da mediação de outros mais experientes e capazes (TOSTA, et al. 2010).

Consideradas as palavras *ensino*, *aprendizagem* e *avaliação*, é possível considerar o significado de cada uma separadamente, de duas juntas e uma separada (ensino-aprendizagem e avaliação) e das três juntas (ensino-aprendizagem-avaliação). Cada caso remete a uma forma de pensar e ver. Pironel e Vallilo (2016) explicam algumas possibilidades:

> 1.Pode ocorre ensino e aprendizagem sem que exista uma avaliação desse processo;
> 2. Pode haver ensino e avaliação sem que tenha havido aprendizagem; e
> 3.Pode haver aprendizagem e avaliação dessa aprendizagem, sem que ela tenha acontecido a partir do ensino (PIRONEL e VALLILO, 2016, p. 279-280).

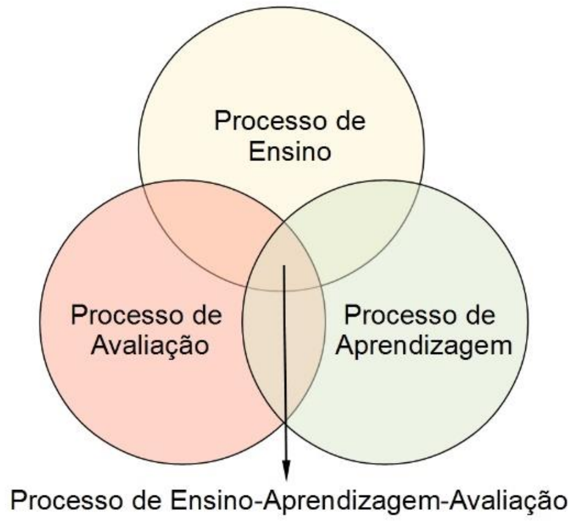
De fato as palavras *ensino, aprendizagem* e *avaliação* têm significado próprio, mas, sendo associadas, podem ocorrer diferentes interpretações. Onuchic e Allevato (2011) apontam que, no século XX, se compreendeu que "ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente" (p.80). Com o passar do tempo, outros pesquisadores foram surgindo. Assim, afirma Viana (2008) sobre alguns deles: "reconhecem a avaliação da aprendizagem como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem" (VIANA, 2015, p. 182). Porém Buriasco e Soares (2008) fazem outra consideração: "as tarefas de aprendizagem devem se constituir, ao mesmo tempo, em tarefas de avaliação, uma vez que a avaliação é parte integrante da rotina das atividades escolares e não uma sua lacuna" (BURIASCO e SOARES, 2008, p.110).

Após muitos estudos, comunidades de pesquisa em Educação Matemática começaram a repensar o conceito de *avaliação* nos espaços de *ensino*, "a partir da compreensão da necessidade de adotar os princípios da avaliação contínua e formativa" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.80). E o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado por Lourdes de la Rosa Onuchic, na UNESP - Rio Claro, passou a empregar a palavra composta *ensino-aprendizagem-avaliação*. Explica-se:

> ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.81).

A Figura 4 ilustra o processo ensino-aprendizagem-avaliação.

Figura 4-Processo de ensino-aprendizagem-avaliação



Fonte: Pironel e Onuchic (2016) apud Pironel e Vallilo (2017, p. 280).

Assim, conforme Onuchic e Allevato (2011), o aluno analisa seus "próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz" (p.81). E o professor "avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário" (p.81).

Volta-se a Onuchic e Allevato (2011):

> o GTERP assumindo a concepção de trabalhar Matemática através da resolução de problemas (...) passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula [que passou] a entender como uma metodologia (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.81).

Na metodologia apresentada, "o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os seus alunos como co-construtores desse conhecimento" (ONUCHIC, 2008, p.8). Porém existe uma compreensão mais atualizada sobre *avaliação*: "é constituída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário" (ONUCHIC, 2008, p.8).

Após a discussão do processo de *ensino* que visa à *aprendizagem*, vem a discussão de *avaliação*, quanto à perspectiva histórica e quanto à natureza.

2.3.1 Avaliação em perspectiva histórica

Segundo Depresbiteris (1998), os exames surgiram como instrumento de controle social, por volta de 2205 a. C., para selecionar homens para trabalhar no serviço público, ou seja, não surgiu no ambiente escolar, como uma questão educativa.

Viana (2015a) afirma que apenas no século XIX o exame foi implantado no contexto escolar como instrumento que utiliza notas para medir e rotular. Nesse sentido, o teste é entendido como instrumento de constatação e mensuração que não objetiva a investigação. Portanto se torna incompleto, não observando o desenvolvimento do aluno: presta-se unicamente ao controle, incluindo alguns e excluindo outros. Nota-se que, tanto Depresbiteris (1998) quanto Viana (2015a) constatam que os exames servem para controlar, o que torna possível uma seleção, oferecendo oportunidades apenas a alguns.

Também segundo Depresbiteris (1998), "tendo por objetivos substituir os exames orais por escritos, utilizar poucas questões gerais, ao invés de um número maior de questões específicas; e buscar padrões mais objetivos do alcance escolar", no século XIX, Horace Mann criou um sistema de testagem (DEPRESBITERIS, 1998, p. 25). E, no princípio do século XX, a aplicação de testes era a principal característica da avaliação educacional, imprimindo um caráter exclusivamente instrumental ao processo de avaliação.

Ralph W. Tyler cunhou a expressão avaliação da aprendizagem, que, segundo Vianna (1989), influenciou fortemente a teoria e a prática a partir de 1930. Por outro lado, a avaliação da aprendizagem tem sido considerada de diversas formas: como parte integrante ou como parte final de um processo, em posição tradicional de postura classificatória baseada em padrões previamente tomados como referência (BRADFIELD e MOREDOCK,1963). Isso mostra a visão de uma época em relação a julgar um valor. Haydt (1988) faz apontamentos nesse sentido:

> avaliar é julgar ou fazer a apreciação de alguém ou de alguma coisa, tendo como base uma escala de valores [ou] interpretar dados quantitativos e qualitativos para obter um parecer ou julgamento de valor, tendo por base padrões ou critérios (HAYDT,1988, p.10, apud ROMÃO, 2005, p. 56).

Romão (2005) considera que Haydt, Bradfield e Moredock seguem a mesma linha de posição tradicional, com a preocupação de construir provas e testes para realizar uma classificação fidedigna.

Visões atuais mostram a avaliação não só como parte final, mas como parte de um processo. Para Luckesi (2011), a avaliação não tem como objetivo a classificação, pois é diferente de julgamento. Nesse sentido, Gadotti (1987, p. 9) considera que "(...) avaliar é também planejar, estabelecer objetivos, etc.".

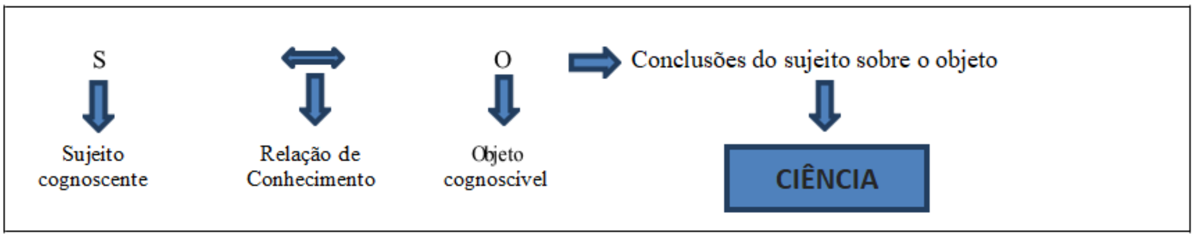
Para Luckesi (2011, p.205), julgamento é "um ato que distingue o certo do errado, incluindo o primeiro e excluindo o segundo. A avaliação tem por base acolher uma situação, para então (e só então), ajuizar a sua qualidade, tendo em vista dar-lhe suporte de mudança, se necessário".

Mas há variadas definições de avaliação, cada uma de acordo com perspectivas teóricas e metodológicas de seus autores. As perspectivas de avaliação do paradigma positivista, por exemplo, diferem substancialmente das perspectivas do paradigma dialético. Romão (2005) mostra que as concepções de avaliação em educação se dividem em dois grandes grupos, com concepções e visões de mundo antagônicas: positivistas e dialéticas.

> se encararmos a vida como algo dado, tendemos para uma epistemologia positivista e, consequentemente, para um sistema educacional perseguidor de 'verdades absolutas e padronizadas'. Se pelo contrário, encaramos a vida como um processo, tendemos para uma teoria dialética do conhecimento e, por isso mesmo, engendradora de uma concepção educacional preocupada com a criação e a transformação (ROMÃO, 2005, p.58).

Segundo o autor, os positivistas concebem a "ciência como um quadro pronto e acabado de axiomas, postulados, descrições, definições, conceitos, interpretações, teorias e leis, aplicáveis ao conhecimento de parcela da realidade" (ROMÃO, 2005, p.28). As verdades científicas são absolutas e não admitem contestações, a objetividade se opõe à subjetividade e se valida com juízos e a própria realidade objetiva. Ao analista é necessário o distanciamento, evitando que se envolva e afete a objetividade das afirmações. O diagrama apresentado por Romão (2005) para explicar o conceito positivista está na Figura 5, a seguir.

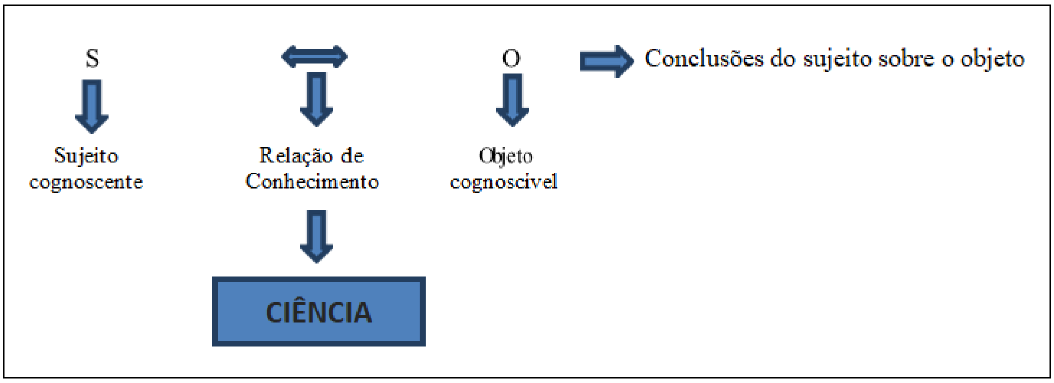
Figura 5-Explicação do conceito positivista de ciência



Fonte: Romão (2005, p.29).

Em contrapartida à perspectiva positivista está a dialética, segundo a qual “a ciência não significa adequação perfeita dos juízos à realidade, nem é um conhecimento absolutamente certo a orientar uma ação isenta de riscos” (ROMÃO, 2005, p.30). Não há verdades absolutas, não constitui um quadro pronto e acabado o conjunto de afirmações sobre um problema. O distanciamento do cientista em relação aos fatos é impossível. Um diagrama apresentado por Romão (2005) para explicar a concepção dialética de ciência está na Figura 6, a seguir.

Figura 6-Explicação da concepção dialética de ciência



Fonte: Romão (2005, p.34)

Após a apresentação na perspectiva histórica, a avaliação vai ser apresentada do ponto de vista da natureza.

2.3. 2 Natureza da avaliação

Quanto à natureza, Basso (2009) classifica a avaliação em qualitativa e quantitativa. A *qualitativa* se fundamenta na satisfação dos processos didáticos e não nos resultados obtidos. Ela busca identificar o tipo de aprendizagem e os conteúdos em que os alunos apresentam mais ou menos dificuldades. A *quantitativa* se fundamenta em parâmetros quantificáveis utilizados para verificar o grau de desconexão entre os resultados obtidos e os esperados e busca identificar mais o produto que o processo.

Gimenez (1997) e Basso (2009) classificam a avaliação segundo o período de tempo em que é realizada. Basso (2009) indica a realização, no início de um processo (curso, disciplina ou conteúdo), da avaliação *diagnóstica*: “com ela se faz uma exploração inicial que traz dados referentes à sua [do aluno] situação familiar, atitudes, interesse, grau de amadurecimento para abordar tarefas escolares” (BASSO, 2009, p.11).Durante o processo de ensino e aprendizagem, o autor (2009, p.11) indica a avaliação *formativa*, que serve para "controlar a aprendizagem de forma diagnóstica ou reguladora para se aprender com os erros cometidos e, a partir daí, conseguir melhores resultados". Portanto a avaliação *formativa* acompanha o desenrolar do processo de ensino e aprendizagem. Para o término de parte do processo ou o final de uma etapa, Basso (2009, p.12) indica a avaliação *somativa*, de que resulta promoção para novos estágios ou reprovação: "Nessa forma de avaliação, geralmente se avalia mais os produtos ou resultados do que o processo levado para obter tais resultados.".

Retornando à avaliação *diagnóstica*, é possível inferir de Rabelo (1998, p. 72) que se trata de um tipo de avaliação que busca diagnosticar o que o aluno sabe, se tem os pré-requisitos necessários para a construção de novos conhecimentos. E o autor (1998, p. 72) cita Ausubel (1980): "se eu tivesse de reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos".

Depresbiteris (2004) faz referência à função formativa da avaliação, afirmando:

> O ato de avaliar começa a ser encarado mais em sua função formativa, que deve permitir a compreensão da situação em que se encontra o educando, deve estar inserida obrigatoriamente na continuidade da aprendizagem e ter uma atitude de apoio a diferentes possibilidades de ação. Assim, a confiança dos educandos e o envolvimento de cada um deles em sua própria avaliação são essenciais para o bom funcionamento do sistema educativo (DEPRESBITERIS, 2004, p.37).

Silva (2010) se refere à avaliação *formativa* acrescentando o adjetivo regulador e parece complementar Depresbiteris (2004), definindo-a como:

> um processo sistemático e intencional de acompanhamento da relação entre o planejamento, o ensino e a aprendizagem, para compreender as necessidades dos aprendentes com a preocupação de dar ao professor as informações para criar e recriar situações didáticas provocadoras de aprendizagens (SILVA, 2010, p. 60).

Dessa forma, Silva (2010) e Depresbiteris (2004) demonstram preocupação quando se referem à necessidade de proporcionar condições de aprendizagem. Depresbiteris (2004) também se refere à auto avaliação ao considerar que "a avaliação formativa é justamente aquela em que o educando, vai ele mesmo, refletir sobre suas ações em termos de sucessos e lacunas" (DEPRESBITERIS, 2004, p.37).

Por outro lado, Santos e Pinto (2003, p.32), consideram que, na visão dos alunos, a avaliação é somente avaliação *somativa,* pois "o seu caráter desligado do processo de ensino-aprendizagem, mas ao mesmo tempo visto como um momento de prestação de contas e, como tal, [é] indutor eventual de preparação para essa mesma prestação (...)".

Porém Viana (2002, 2013, 2015a), em vez de considerar vários tipos de avaliação, analisa os papeis que a avaliação deve desempenhar, isto é, suas funções.

> (...) a avaliação tem que cumprir diferentes funções que auxiliam professor e alunos a elevar o nível do resultado de suas atividades até um nível de independência. Portanto a avaliação é um sistema de atividades. Com isso, o processo [avaliatório] deve ser mais amplo do que apenas avaliar o rendimento dos alunos, pois está diretamente relacionado com o desenvolvimento e crescimento cognitivo. Como processo, deve estar adaptado às necessidades dos alunos (VIANA, 2015a, p.183).

Assim, a autora (2015) considera importante que, no processo, o sistema de atividades curriculares elaboradas para a aprendizagem, assim como os recursos, as estratégias e os resultados das atividades, sejam analisados por meio de interações discursivas na sala de aula.

Viana (2002) considera fundamentais, entre as muitas classificações das funções da avaliação encontradas na literatura, a *de diagnóstico*, a *educativa*, a *de controle* e a *projetiva*.

Quanto à função diagnóstica, Viana (2002, 2015) considera que revela avanços, atrasos, dificuldades, facilidades e possíveis causas ou a natureza dos sucessos ou insucessos dos estudantes. Contudo o diagnóstico não pode ser reduzido ao conhecimento do que o aluno sabe ou não sabe utilizar. Para a autora, com base em Zilberestein (2000, p.36), o diagnóstico "inclui também o aprofundamento em como o aluno aprende, que hábitos de estudo possui que métodos de estudo emprega, se desenvolve métodos de autocontrole [e] se tem desenvolvidas ações de autoavaliação". Além disso, Viana (2015a, p.182) afirma "o diagnóstico não deve ser realizado apenas na fase inicial do trabalho avaliatório, mas de maneira contínua, que permita conhecer o estágio do desenvolvimento individual e grupal (...)".

Para a autora (2002), a função educativa da avaliação é vista como suporte para identificar as potencialidades dos alunos e dar-lhes oportunidade de aprimorar o aprendizado, conhecendo o processo avaliativo. Segundo a ela, esta função está sendo cumprida quando ocorrem "atitudes positivas do professor e dos alunos, atenção às diferenças individuais, bom relacionamento entre professor e alunos, atenção às condições objetivas e subjetivas detectadas e entendimento dos termos e conceitos empregados" (2015a, p.183).

E quando os alunos têm esse entendimento, aumenta a capacidade de controlar o próprio processo de aprendizagem. Tem lugar, então, a autoavaliação.

> Na autoavaliação o aluno reflete sobre a sua aprendizagem, conferindo os objetivos da disciplina, com responsabilidade, mas sem redes para o controle e, sobretudo sem medo de sanções. Desse modo, a prática avaliativa não será solitária, de responsabilidade única do professor, mas um compromisso professor/aluno/grupo

(VIANA, 2013, p.38).

Viana (2002) também se refere à natureza democrática da avaliação, sugerindo ser necessária a participação de todos os sujeitos afetados por ela e do professor como elemento central, mas não exclusivo.

Sobre a função de controle, Viana (2002) e Valle Lima (2000) explicam que se relaciona com a aprendizagem, pois se busca confrontar o objetivo planejado com o alcançado para revelar as partes frágeis e fortes do processo (de aprendizagem) dos alunos e do grupo e conscientizá-los. Com isso, depois da comparação feita entre os objetivos previstos e os obtidos, é possível informar aos professores se existe ou não a necessidade de reorganização do processo de ensino e aprendizagem. Viana (2002) afirma que, de posse das informações obtidas, os professores devem planejar medidas para sanar as dificuldades.

A função projetiva da avaliação consiste em "projetar as ações futuras e as novas atividades curriculares e pedagógicas de acordo com as necessidades dos alunos e do contexto de aprendizagem" (VIANA, 2015a, p.183). Mas tendo em vista a concretização da função diagnóstica e da função de controle.

Para Viana (2015a),

> a partir do grau de efetividade alcançada, o professor pode determinar a inclusão de determinadas formas organizativas, métodos e meios de ensino, isto é, projetar novas ações. Então existe a necessidade de elaboração de um plano para a obtenção de determinados objetivos, tendo em vista os já alcançados (VIANA, 2015a, p.185).

Com isso, a autora (2002) sugere uma forma de avaliar centrada principalmente no diagnóstico do estágio do desenvolvimento individual e grupal, na autoavaliação, na valoração do trabalho conjunto, para a orientação e ajuda necessária, de acordo com os objetivos desejados.

Nesta seção se discutiu a avaliação da aprendizagem na sala de aula. Na sequência, outro tipo de avaliação é apresentado: a avaliação de sistemas ou de larga escala.

2.3.3 Avaliação de sistemas (larga escala)

Ao mostrar o advento das avaliações de larga escala no Brasil, bem como os indutores de política pública, além dos grupos que a discutem, cita-se Luckesi (2013):

> Até finais dos anos 1980 e inícios dos anos 1990, predominantemente, na prática

> educativa, considerávamos que o responsável pelo fracasso escolar era o educando. Era ele que não desejava ou não investia em sua aprendizagem, por isso era eventualmente ou sucessivamente reprovado (LUCKESI, 2013, s.p).

Mas é necessário que a avaliação se integre ao processo de transformação do ensino e da aprendizagem para contribuir para o desenvolvimento do aluno, pois “a avaliação não é um valor em si e não deve ficar restrita a um simples rito da burocracia educacional” (VIANNA, 2005, p. 16). E o fracasso escolar não é somente culpa do aluno, pois o sistema educativo também pode ser responsável. Daí pensar em “práticas avaliativas que fossem para além da aprendizagem em sala de aulas, chegando, hoje às práticas de avaliação institucional e de larga escala” (LUCKESI, 2013, s.p).

O MEC, movido por incentivo de agências financiadoras transnacionais, começou a desenvolver estudos sobre as avaliações externas na década de 80. De fato, a avaliação de larga escala pode embasar políticas públicas relativas ao sistema educacional, interferindo nas redes educacionais com o objetivo de aperfeiçoá-lo. A ideia é que “a avaliação permitiria detectar os entraves do sistema, facilitando o melhor direcionamento de recursos segundo os problemas detectados” (BARBOSA, 2013, p.15).

Por outro lado, Silva (2010) credita ao alinhamento entre o sistema educacional e os princípios do mercado financeiro internacional o processo de reestruturação política dos Estados, tornando a educação de qualidade uma mercadoria. O G-7 (grupo dos sete países mais industrializados do mundo) e as grandes agências internacionais de fomento (Fundo Monetário Internacional-FMI, Banco Mundial, Banco Internacional para Reconstrução e Desenvolvimento-BIRD e outras) exercem pressão sobre os governos que deles recebem financiamentos. As políticas propostas pelas agências internacionais em relação à educação foram discutidas por grupos, como a Associação Nacional pela Formação do Profissional da Educação-ANFOPE, a Associação Nacional de Política e Administração Escolar-ANPAE, a Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação-ANPED, a Confederação Nacional dos Trabalhadores em Educação-CNTE.

Em 1982, a Associação Nacional dos Docentes do Ensino Superior (Andes) propôs a avaliação institucional, como recurso subsidiário da melhoria do desempenho de cada instituição. Em 1983, o MEC instituiu o Programa de Avaliação da Reforma Universitária (PARU). Em 1993, foi criado o Programa de Avaliação Institucional da Universidade Brasileira (PAIUB). Em 1996, foi implantado o Exame Nacional de Curso, popularmente denominado Provão, que, em 2004, se transformou no Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Superior (SINAES).

Luckesi (2013), prosseguindo as informações, diz que o Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB) foi criado em 1988, aplicado inicialmente em 1990 e aperfeiçoado com a Prova Brasil em 2005 e com o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) em 2007. Quanto ao Ensino Médio, foi implantado em 1998 o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que em 2009 se tornou o Novo ENEM.

Para Vianna (2003), essas avaliações desempenham um papel relevante, pois "traduzem uma visão de fora e supostamente isenta em relação a possíveis idiossincrasias próprias dos sistemas educacionais" (VIANNA, 2003, p.17-18). Portanto são recomendáveis. Elas representam um trabalho não comprometido com a administração escolar. Vê-se, pois, que a avaliação em larga escala pode e deve embasar políticas públicas relativas ao sistema educacional, buscando aperfeiçoá-lo. Daí a apresentação de algumas avaliações do sistema educacional brasileiro.

2.3.3.1. Avaliações do Sistema Educacional Brasileiro

No Brasil, embora estados e municípios tenham sistemas próprios de avaliação para seus sistemas educacionais, há uma autarquia federal vinculada ao MEC que cuida da Avaliação do Sistema Educacional Brasileiro. Trata-se do Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que realiza estudos e pesquisas e é responsável pelo ENEM. Também são de responsabilidade do INEP os seguintes processos de avaliação: Avaliação Nacional Rendimento Escolar (ANRESC), Prova Brasil, Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), Revalidação dos Diplomas Médicos (ReVALIDA), Prova Nacional de Concurso para o Ingresso na Carreira Docente, Certificado de Proficiência na Língua Brasileira de Sinais (PROLIBRAS) e Certificado de Proficiência em Língua Portuguesa (CELPE-BRAS).

As avaliações externas, em especial o ENEM, tomaram dimensão ampla. Como o objetivo do ENEM é avaliar as competências e as habilidades desenvolvidas pelo aluno ao longo da escolaridade básica e as questões são baseadas em problemas e situações-problema, a próxima seção trata da Resolução de Problemas.

2.4. Resolução de Problemas

2.4 .1 Histórico

De acordo com Morais e Onuchic (2014), tinha destaque, na passagem do século XIX para o XX, a Teoria da Disciplina Mental (TDM), segundo a qual a mente humana é uma coleção de capacidades, de modo que o treinamento de uma determina transferência para as demais. Em 1902, no artigo *A influência da melhoria em uma função mental sobre a eficiência de outra função*, Edward Lee Thorndike e Robert Sessions Woodworth buscaram verificar se o que a TDM afirmava de fato ocorria e os resultados da pesquisa apresentaram elementos robustos que contradiziam a TDM.

Anos após a realização da pesquisa, Thorndike direcionou seus esforços para desenvolver uma nova teoria, o Conexionismo. De acordo com ela, o processo de ensino compreende passos: Lei do Efeito, Lei da Prontidão ou da Maturidade Específica e Lei do Exercício ou da Repetição (MORAIS e ONUCHIC, 2011). A Lei do Exercício ou da Repetição se destacou como "aquela que deveria ser repensada, tendo em vista a necessidade de se considerar o processo de ensino-aprendizagem e não somente o produto, como nos exercícios de repetição" (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p. 21).

Com isso, segundo Morais e Onuchic (2011), surgiram outras teorias que passaram a orientar o cenário da educação, pois "a ênfase do ensino de Matemática, a partir da segunda metade da década de 1930 até por volta do final da década de 1940, nos Estados Unidos, esteve sobre os 'processos' de aprendizagem e não somente sobre os 'produtos'." (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p.22 grifos do autor). "Foi nesse cenário que vimos a Resolução de Problemas se constituir como teoria, pelas mãos do matemático e pesquisador George Polya[6]" (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p.22), que publicou, em 1945, o livro *A arte de resolver problemas* (traduzido e publicado no Brasil pela Editora Interciência).

Em 1975 ocorreu o Primeiro Seminário de Pesquisa em Resolução de Problemas em Educação Matemática, na Universidade da Georgia. No final dos anos 70 do século XX, essa teoria foi se consolidando e ganhou lugar de destaque nos currículos dos Estados Unidos e na sequência em outros países (MORAIS E ONUCHIC, 2011). Buscando formas de ensinar Matemática, discussões no campo da Educação Matemática ocorreram em várias partes do mundo, buscando aperfeiçoar o processo.

Dizem Onuchic e Allevato (2004):

---

[6]George Polya (1978, 1997) é "considerado por pesquisadores como marco oficial da constituição da teoria Resolução de Problemas" (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p.26).

> o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores) respondeu àquela preocupação com uma série de recomendações para o progresso da Matemática escolar nos anos 80, no documento An Agenda for Action[7] (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 215-16, apud NCTM, 1980).

E a primeira das recomendações diz: resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar dos anos 80.

Segundo Onuchic e Allevato, (2004), em 1989 o NCTM, buscando uma reforma para a Educação Matemática, publicou *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*[8]. A publicação foi projetada para

> falar àqueles muito próximos de poder tomar decisões sobre o currículo de Matemática: professores, supervisores e promotores de materiais instrucionais e currículo e descreve a Matemática que todos os estudantes devem saber e ser capazes de fazer (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 217).

No ano seguinte, o National Science Foundation[9] (NST) "financiou uma coleção, em larga escala, de projetos de materiais instrucionais para todos os níveis de ensino: elementar, médio e secundário. Surgiu uma nova geração de currículos alinhados com os Standards" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 217).

Em 1991, segundo Onuchic e Allevato, (2004), o NCTM publicou *Professional Standards for Teaching Mathematics*[10], que "ilustra caminhos pelos quais os professores podem estruturar as atividades em sala de aula, de modo que os alunos possam aprender a Matemática descrita em *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 217).

Também segundo Onuchic e Allevato (2004), o NCTM, em 1995, publicou Assessment Standards for School Mathematics[11]: "contém os princípios em que professores e educadores se apoiem para construir práticas de avaliação que ajudem no desenvolvimento de uma Matemática forte para todos" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 217).

Dizem Onuchic e Allevato (2004), abordando sobre o contexto dos Standards que

> houve uma série de críticas à reforma proposta pelos Standards (...)..O NCTM [então em meio a críticas e sugestões], após uma década de aplicação das ideias defendidas nos Standards (...) produziu a publicação Principles and Standards for School Mathematics[12], que foi lançada em abril de 2000 (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004,

[7] Uma Agenda para Ação, tradução do pesquisador.
[8] Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática, tradução do pesquisador.
[9] Fundação Nacional de Ciências, tradução do pesquisador.
[10] Padrões Profissionais para o ensino da Matemática, tradução do pesquisador.
[11] Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar, tradução do pesquisador.
[12] Princípios e Padrões para a Matemática Escolar, tradução do pesquisador.

> p. 217).

Esse lançamento, conhecido como Standards 2000[13], destaca:

> Seis **Princípios** a serem seguidos dentro de seu trabalho: **Eqüidade; Currículo; Ensino; Aprendizagem; Avaliação; e Tecnologia** (...). Respeitando esses princípios são apresentados cinco **Padrões de Conteúdo: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; e Análise de dados e Probabilidade** (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 218, grifos do autor).

Esses padrões indicam o conteúdo a ser trabalhado pelos professores. Mas existem outros cinco padrões: "**Padrões de Processo: Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões;** e **Representação,** que realçam os caminhos de se adquirir e usar o conhecimento do conteúdo trabalhado" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 218, grifos do autor).

Segundo Morais e Onuchic (2014), Schroeder e Lester, em1989, já haviam discutido as três abordagens a respeito de resolução de problemas:

> Ensinar "sobre" resolução de problemas é trabalhar com o método proposto por Polya (1945/1995) ou alguma pequena variação dele; no ensino "para", o professor se concentra sobre as formas de como a Matemática a ser ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros ou não rotineiros. Nessa abordagem, embora a aquisição de conhecimento matemático tenha uma importância primeira, o maior propósito da aprendizagem de matemática é ser capaz de utilizá-la; no ensino "via" resolução de problemas, problemas são válidos não só com o propósito de se aprender matemática, mas, também, com o significado primeiro de fazer Matemática (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p 29-30, apud SCHROEDER e LESTER, 1989).

Dizem Morais e Onuchic (2014):

> O ensino de tópicos matemáticos começa com uma situação-problema que incorpora aspectos-chave desse tópico e técnicas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. O objetivo da aprendizagem matemática é o de transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p 29-30, apud SCHROEDER e LESTER, 1989).

Muito se tem falado sobre resolução de problemas. No Brasil, por exemplo, os PCN, "apoiados em ideias dos Standards do NCTM" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 218), tratam do assunto. É o que mostra a próxima seção.

2.4.2 Resolução de problemas

---

[13] Padrões 2000, tradução do pesquisador.

A história da humanidade evidencia que o homem está sempre resolvendo problemas:

> O homem é um dos animais capazes de modificar as suas condições de vida. Diferente das outras espécies anda ereto e produz suas ferramentas para a transformação das coisas e das circunstâncias. Assim, desde os primórdios resolve problemas para suprir suas necessidades (Viana, 2015b, p.169).

Por isso sempre se preocupou com a solução de problemas, resolvendo situações e desafios cotidianos ou usando a razão pura. Assim, para muitos pesquisadores, resolver problemas é uma atividade natural do ser humano (VIANA e GOMES, 2007).

> Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como um animal que resolve problemas; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte do nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim (POLYA, 1978, 1997, p. 2).

Segundo Viana (2015b), criava-se matemática para resolver problema. Mas, na Educação Matemática, se resolve problema para aprender matemática: “a atividade matemática é parte essencial de quase toda profissão: comércio, administração, previsão do tempo, arquitetura, engenharia, medicina, economia são apenas alguns exemplos” (VIANA, 1992, p.2).

Portanto é necessário que a escola enfoque a resolução de problemas, buscando alfabetizar matematicamente o aluno, para que, sendo capaz de compreender e transformar a realidade, agindo sobre ela, contribua para a construção de sua cidadania, conforme destacam os PCN (BRASIL, 1997,1998, 1999) e BNCC (BRASIL, 2017).

Stanic e Kilpatrick (1989) consideram que três temas gerais caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática: “resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte” (p. 12). E cada um traz um olhar diferente. O primeiro, resolução de problemas como contexto, tem pelo menos cinco subtemas: resolução de problemas como justificação, resolução de problemas como motivação, resolução de problemas como atividade lúdica, resolução de problemas como veículo e resolução de problemas como prática. E cada um dos subtemas faz parte de um contexto específico para o aluno.

Quanto à resolução de problemas como capacidade, Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam: “colocar a resolução de problemas na hierarquia das capacidades a adquirir pelos alunos conduz a certas consequências para o [seu] papel no currículo” (p.14). Uma das consequências se mostra em “distinções hierárquicas entre resolver problemas de rotina e problemas não rotineiros" (p. 15), pois, segundo os autores, somente os alunos com capacidade de nível elevado resolvem satisfatoriamente os problemas não rotineiros.

Para a resolução de problemas como arte, Stanic e Kilpatrick (1989) indicam:

> Emergiu do trabalho de George Polya, que reviveu no nosso tempo a ideia da heurística (a arte da descoberta). Matemáticos antigos como Euclides e Pappus e mais recentes como Descartes, Leibnitz e Bolzano, discutiram métodos e regras para a descoberta e invenção em Matemática, mas as suas ideias nunca tiveram grande eco nos currículos escolares (STANIC e KILPATRIC, 1989, p. 15).

Dizem os autores: "ficou para Polya a tarefa de reformular, estender e ilustrar várias ideias acerca da descoberta matemática de tal modo que os professores as pudessem compreender e usar" (STANIC e KILPATRIC, 1989, p. 15)

Os autores falam da resolução de problemas como arte:

> a mais defensável, mais justa e mais prometedora. Mas ao mesmo tempo é o tema mais problemático porque é o mais difícil de operacionalizar em manuais escolares e salas de aula. O problema para os educadores matemáticos que acreditam que a resolução de problemas é uma forma de arte é como desenvolver esta capacidade artística nos estudantes (STANIC e KILPATRIC, 1989, p. 17).

E Allevato e Onuchic (2009), com referência aos PCN (1997), afirmam:

> apontam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles, como um dos propósitos do ensino de Matemática; indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula (ALEVATTO e ONUCHIC, 2009, p.5).

Onuchic (1999) completa: "através da resolução do problema, os professores vão fazer as conexões entre os diferentes ramos da matemática gerando novos conceitos e novos conteúdos" (p. 215).

Considerando o problema como ponto de partida para a aprendizagem, resolver um problema pressupõe que o aluno "elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos" (BRASIL, 1998, p.40). A BNCC (2017) traz 10 competências gerais para a Educação Básica, das quais duas mencionam resolver problemas, a segunda e quinta competência.

Segunda competência:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências,

> incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e **resolver problemas** e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2017, p. 9, grifo do pesquisador)

Quinta competência:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, **resolver problemas** e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017, p. 9 grifo do pesquisador).

Resolver problemas é o tema do livro que George Polya escreveu em 1945, traduzido no Brasil, em 1978, com o título *A arte de resolver problemas.* Polya apresenta as conhecidas quatro fases que devem ser executadas durante a resolução de qualquer problema: compreender o problema, estabelecer um plano, executar um plano e examinar a solução obtida.

Mas Polya (1978) também alerta:

> Regras de descoberta infalíveis, que levem à resolução de todos os problemas matemáticos, seriam mais preciosas do que a pedra filosofal, em vão procurada pelos alquimistas. Tais regras fariam milagres, mas não há milagres. Encontrar regras infalíveis aplicáveis a toda sorte de problemas é um velho sonho filosófico, que nunca passará de sonho (POLYA, 1978, p.133).

Por isso, pensando haver padrões para resolver problemas, os alunos, às vezes, reclamam sobre questões de provas, dizendo ao professor: "*Este tipo de problema, não foi resolvido em classe*." Em eventos, é costume algum participante pedir formas de ensinar a resolver problemas, como se existisse uma fórmula mágica (DUTRA e VIANA, 2013).

D'Ambrosio (2008) parece concordar com Polya (1978) e com Dutra e Viana (2013) ao comentar interpretações das sugestões de Polya, que, às vezes, são vistas como receita para resolver problema:

> A interpretação muito limitada do trabalho de Polya resultou em propostas curriculares que (nos anos 1960 a 1990) transmitiam aos alunos uma visão da resolução de problemas como um procedimento seguindo passos determinados. As propostas curriculares incluíam a resolução de problemas como um capítulo ou como atividades independentes. A proposta decompunha a resolução de problemas em quatro subatividades (...). A análise mais profunda do trabalho de Polya nos mostra uma visão de resolução de problemas muito mais rica do que a que foi assumida nas propostas curriculares. Polya estudava o trabalho de investigação dos matemáticos e propunha um ensino que criasse oportunidades para que os alunos se comportassem como matemáticos, investigando problemas abertos e desafiantes para todos (D'AMBROSIO, 2008, p.1).

Dante (2009) também concorda, compreendendo que as etapas sugeridas por Polya podem orientar o processo, mas não são regras, e que o processo de resolver problema é mais complexo, não se limitando a seguir instruções.

Por outro lado, Pozo (1980) considera:

> a solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. Assim, ensinar os alunos a resolver problemas, supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar, por si mesmas respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto, ou pelo professor (POZO, 1980, p. 9).

Completando, Schoenfeld (1996) propõe estratégias para resolver problemas, não como modelos, mas como ferramentas para o desenvolvimento de outras, para que o aluno resolva problemas diferentes dos resolvidos. Isso porque é necessário fazer com que ele perceba que a Matemática faz com que as coisas tenham sentido e ele seja capaz de modelar, simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar empregando a linguagem matemática:

> – ou, seja, atividades *com sentido matemático (mathematical sense making)*, é aquilo que a Matemática realmente é. Na verdade, fazer sentido deveria ser a principal actividade da escola. Das artes à literatura, à Física, o que deveria ser aprendido são múltiplos caminhos de ver o mundo, e os variados instrumentos interdisciplinares e perspectivas que nos ajudam a entendê-lo. Isto é, em resumo, a minha esperança para a resolução de problemas (SCHOENFELD, 1996, p.12, grifo do autor e tradutor).

Echeverría (1998), baseando-se em Mayer (1983), retoma Polya (1978), considerando que os quatro passos ditados por ele podem ser resumidos em dois grandes processos: tradução e solução do problema. “Traduzir um problema matemático consiste em transformar a informação que consta nesse problema em termos matemáticos com os quais o aluno ou a pessoa que quer resolver a tarefa possam lidar” (ECHEVERRÍA, 1998, p.53).

Quanto ao processo de solução, realizada a tradução, começa o processo de solução, no qual se “exige um conhecimento heurístico[14]ou estratégico que nos ajude a estabelecer as metas e os meios para alcançá-las” (ECHEVERRÍA, 1998, p.60). Para o processo de solução Echeverría (1998) oferece sugestões, citando fatores não matemáticos que podem influenciar na dificuldade de tradução de problemas matemáticos:

---

[14]Heurístico significa que serve para encontrar, descobrir. Procedimento estratégico proveniente da intuição cujas limitações são conhecidas (POLYA, 1978).

> 1.Diferenças no significado de uma mesma expressão na linguagem cotidiana (mais ambígua e contextual) e na linguagem matemática (mais precisa).
> 2.Diferentes significados matemáticos de uma mesma expressão ou palavra, (por exemplo, "é").
> 3.Ordem e forma de apresentação de dados.
> 4.Presença de dados irrelevantes para a solução do problema.
> 5.Caráter hipotético dos problemas matemáticos ("dados matemáticos" diante de "dados reais").
> 6.Diferença entre as teorias pessoais e as teorias matemáticas (ECHEVERRÍA, 1998, p.53).

Echeverría (1998) também indica técnicas que podem ajudar a compreensão de problemas matemáticos:

> 1.Expressar o problema com outras palavras. Explicar aos colegas em que consiste o problema.
> 2.Representar o problema com outro formato (gráficos, diagramas, desenhos, com objetos, etc.)
> 3.Indicar qual é a meta do problema.
> 4.Apontar onde reside a dificuldade da tarefa. Separar os dados relevantes dos não relevantes.
> 5.Indicar os dados com os quais contamos para resolver a tarefa.
> 6.Indicar quais os dados que não estão presentes, mas que são necessários para resolver a tarefa.
> 7.Procurar um problema semelhante que já tenhamos resolvido.
> 8.Analisar inicialmente alguns exemplos concretos, quando o problema é muito geral.
> 9.Procurar diferentes situações (cenários, contextos, tarefas, etc.) nas quais esse problema possa ter lugar (ECHEVERRÍA, 1998, p.59).

Os autores consultados falaram sobre resolução de problemas, mas o que é problema? A seção seguinte apresenta definições de diversos pesquisadores.

2.4.2.1. Problema

Desde a Antiguidade, na história egípcia, chinesa e grega, são encontrados registros de problemas matemáticos. O Papiro de Ahmes, por exemplo, é uma coleção de problemas. E em livros de Matemática sempre foram encontrados problemas. O problema é importante na Educação Matemática, pois, segundo Onuchic (1999, p.199), "problemas de matemática têm ocupado um lugar central no currículo de matemática escolar desde a Antiguidade". Mas é necessário definir problema, mas a definição pode variar de acordo com o pensamento do autor/pesquisador.

Viana (1992), apoiando-se nas ideias de Lester e Charles (1982), considera:

> um problema é uma tarefa para a qual: 1.O indivíduo que a enfrenta deseja ou necessita

> encontrar uma solução. 2. O indivíduo não conhece de imediato um procedimento que lhe permitirá conhecer completamente a situação. 3. O indivíduo deve procurar uma maneira de resolver a situação (VIANA, 1992, p.3).

Lester e Charles (1982) enfatizam que existem

> três componentes cruciais de um problema: (a) um desejo ou necessidade por parte do solucionador de problemas para atingir um objetivo, (b) o fato de que o objetivo não pode ser direta ou imediatamente alcançado, e (c) o fato que um esforço consciente é feito para alcançar o objetivo[15] (LESTER e CHARLES, 1982, p. 5, tradução do pesquisador).

Corroborando esse ponto de vista, Onuchic (1999, p.215) afirma: “Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”.

Nesse sentido, o problema serve para gerar novos conceitos e novos conteúdos: “um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 7, grifo dos autores).

Pozo (1994) concorda com a visão de Leste e Charles (1982) e Viana (1992): “[para] falar da existência de um problema, a pessoa que está resolvendo esta tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta” (POZO, 1994, p.48).

Para Dante (2009), o problema deve fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolvendo o raciocínio, enfrentando situações novas e tendo oportunidade de se desenvolver com as aplicações da Matemática. O problema pode tornar as aulas mais interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias de resolução e liberar a sua criatividade.

Onuchic e Allevato, (2004), baseando-se em van de Walle (2001), consideram que o problema “é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta" (p. 221).

Para Viana (1992), o fato de não saber resolver não faz com que a tarefa seja problema. E uma tarefa de repetição de modelos não é problema, pois não contém desafios. O que é problema para um pode deixar de ser para outro, se não houver interesse por resolvê-lo.

Observa-se que os autores mencionados nesta pesquisa têm ideias que levam a uma

---

[15] “emphasizes three crucial components of a problem: (a) a desire or need on the part of the problem solver to attain a goal, (b) the fact that the goal cannot be reached directly or immediately, and (c) the fact that a conscious effort is made to reach the goal”.

convergência: não haver meios imediatos para a resolução do problema. Lester e Charles (1982), Viana (1992), Pozo (1994) e Onuchic (1999), além disso, destacam que quem resolve o problema deve ter interesse ou necessidade.

São várias as classificações de problema. Dante (2009), por exemplo, em livro direcionado a professores do Ensino Fundamental I, ou seja, do 1.º ao 5.º ano, faz a seguinte classificação:

> Exercícios de reconhecimento,
> Exercícios de algoritmos,
> Problemas-padrão (simples e compostos),
> Problemas-processo ou heurísticos,
> Problemas de aplicação,
> Problemas de quebra-cabeça (p. 24-28).

Para *problemas-processo ou heurísticos*, Dante (2009, p. 25) indica que em geral "não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução".

Para *problemas de aplicação*, Dante (2009, p. 27-28) diz que em geral "são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados sob a forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse".

Para *problemas de quebra-cabeça*, Dante (2009, p. 28) explica que "geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, (...) [de se encontrar] alguma regularidade, que é a chave da solução". Podem enquadrar-se nas definições de problema anteriormente apresentadas, mas, como os quebra-cabeças, em geral, não são do gosto de todos os alunos, não são considerados problemas para alguns.

Segundo Lester e Charles (1982), Viana (1992), Pozo (1994) e Onuchic (1999), alguns dos tipos de problemas mencionados na classificação de Dante (2009) não podem ser aceitos como problemas. Entretanto os *exercícios de reconhecimento*, os *exercícios de algoritmos* e os *problemas-padrão* exigem apenas que as pessoas que os resolvem usem algum conhecimento de nível elementar, identificando ou lembrando algum conceito ou alguma fórmula. Segundo Dante (2009), esses três tipos não necessitam de estratégias desconhecidas para a resolução. Portanto, de acordo com as definições de Lester e Charles (1982), Viana (1992), Pozo (1994) e Onuchic (1999), eles não devem ser considerados problemas.

A determinação da solução de um problema pode ser afetada por fatores, como estresse e motivação. Lester e Charles (1982) concluem: "o solucionador de problemas deve ter motivação suficiente e falta de estresse e/ou ansiedade para permitir o progresso em direção a uma solução"[16] (p.10, tradução do pesquisador). Além disso, estes autores (1982) indicam que existem três tipos de conjuntos de fatores que interagem entre si:

> 1.Fatores de experiência, tanto ambientais como pessoais
> 2.Fatores afetivos, como interesse, motivação, pressão, ansiedade e assim por diante
> 3.Fatores cognitivos, como capacidade de leitura, capacidade de raciocínio, habilidades computacionais e assim por diante[17] (LESTER e CHARLES, 1982, p. 10, tradução do pesquisador).

Lester e Charles (1982) exemplificam cada conjunto de fatores. Para os fatores de experiência: idade, bagagem de conhecimentos matemáticos trazidos, familiaridade com estratégias de solução, familiaridade com o contexto e conteúdo do problema; para os fatores afetivos: estresse, pressão, tolerância à ambiguidade, interesse, motivação, ansiedade para desempenhar, perseverança, resistência ao fechamento prematuro; para os fatores cognitivos: memória, habilidade de leitura, habilidade espacial, habilidade computacional, habilidade analítica, habilidade lógica.

Lester e Charles (1982) apresentam esta classificação:

1. Exercícios de treinamento (repetição): "fornecem aos alunos a prática de usar um algoritmo e ajudá-los a manter o domínio dos fatos computacionais básicos." (p.10, tradução do pesquisador).
2. Problemas de tradução simples: "proporcionam aos alunos experiência em traduzir situações do mundo real em expressões matemáticas. Eles reforçam a compreensão dos estudantes sobre conceitos matemáticos e ajudam a manter a proficiência computacional." (p.10, tradução do pesquisador).
3. Problemas de tradução complexa: "proporcionam aos alunos a mesma experiência que os problemas de tradução simples, com exceção de que mais que uma tradução ou operação pode estar envolvida na resolução." (p.10, tradução do pesquisador).
4. Problemas processo: "processos inerentes ao pensamento e à solução de um problema: servem para desenvolver estratégias gerais para entender, planejar e resolver problemas, bem como avaliar tentativas de solução." (p.10, tradução do

---

[16] The problem solver must have sufficient motivation and lack of stress and/or anxiety to allow progress toward a solution.

[17] 1. Experience factors, both environmental and personal
2. Affective factores, such as interest, motivation, pressure, anxiety, and so on
3. Cognitive factores, such as reading ability, reasoning ability, computational skills, and so on

pesquisador)

5. Problemas de aplicação:

> fornecem uma oportunidade para os alunos usarem uma variedade de habilidades matemáticas, processos, conceitos e fatos para resolver problemas realistas. Eles fazem os alunos se conscientizarem do valor e da utilidade da matemática em situações-problema cotidianas (p.10, tradução do pesquisador).

6. Problemas de quebra-cabeças:

> permitem que os alunos tenham a oportunidade de se engajarem em matemática recreativa, potencialmente enriquecedora. Eles apontam a importância da flexibilidade em atacar um problema e o valor de olhar para os problemas a partir de várias perspectivas[18] (LESTER e CHARLES,1982, p. 10, tradução do pesquisador).

Quanto às situações apresentadas e explicadas por Lester e Charles (1982), observa-se que nem todas estão de acordo com as definições de Onuchic (1999), Pozo (1994), Viana (1992). Mas, comparando os tipos de problemas indicados por Dante (2009) e as situações apresentadas por Lester e Charles (1982), encontra-se uma correspondência, indicada no Quadro 4, a seguir.

Quadro 4 - Quadro comparativo da classificação de Dante (2009) e de Lester e Charles (1982)

Dante (2009)	Lester e Charles (1982)
Exercícios de reconhecimento	Exercícios de treinamento (repetição)
Exercícios de algorítmos	

[18]1. Drill exercises provide students with practice in using an algorithm and help them maintain mastery of basic computational facts.
2. Simple translation problems provide students with experience in translating real-world situations into mathematical expressions. They're in force students' understanding of mathematical concepts and help maintain computational proficiency.
3. Complex translation problems provide students with the same experience as the simple translation is involved and more than one operation may be involved.
4. Process problems lend themselves to exemplifying the processes inherent in thinking through and solving a problem. They serve to develop general strategies for understanding, planning, and solving problems, as well a evaluating attempts at solutions.
5. Applied problems provide an opportunity for students to use a variety of mathematical skills, processes, concepts, and facts to solve realistic problems. They make students aware of the value and usefulness of mathematics in everyday problem situations.
6. Puzzle problems allow students an opportunity to engage in potentially enriching recreational mathematics. They point out the importance of flexibility in attacking a problem and the value of looking at problems from various perspectives.

Problemas-padrão simples	Problemas de tradução simples
Problemas-padrão compostos	Problemas de tradução complexa
Problemas-processo ou heurísticos	Problemas de processo
Problemas de aplicação	Problemas de aplicação
Problemas de quebra-cabeça	Problemas quebra-cabeças

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Tanto Dante (2009) quanto Lester e Charles (1982) consideram que os problemas de aplicação são situações-problema que podem mostrar aos alunos a utilidade da Matemática. Assim, o tema da próxima seção é situação-problema.

2.4.3 Situação-problema, competências e habilidades

A expressão situação-problema pode ser considerada polissêmica, pois não há consenso sobre o seu significado. Assim, Dante (2003) explica:

> Problemas de aplicação que retratam situações reais do dia a dia que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos (...). Podem ser apresentados na forma de projetos a serem resolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a Matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse (DANTE, 2003, p.20).

O autor (2009) afirma: “situação-problema ou problema-processo (...) é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução” (p.48).

Definição diferente é apresentada por Meirieu (1998):

> [Situação-problema é] uma situação didática[19]na qual se propõe ao sujeito uma tarefa [pergunta, problema] que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. É essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação problema, e se dá ao vencer o obstáculo na realização da tarefa (MEIRIEU, 1998, p.192).

Conclui-se dessa definição que a situação-problema tem como objetivo uma aprendizagem, que se dará quando o sujeito cumprir a tarefa solicitada.

Macedo (2002) considera situação-problema desta maneira:

---

[19]Para Meirieu (1998), situação didática é uma situação de aprendizagem elaborada pelo professor que fornece, por um lado, os materiais que permitem recolher informação e, por outro lado, uma instrução-alvo que permite colocar o sujeito em situação de projeto.

> uma situação de aprendizagem [que] coloca um desafio intelectual, algo a ser superado. Ela pede antecipação dos resultados, planejamento, correr riscos, portanto, reflexão, tematização, disputa, enfrentamento de conflitos, tensões, paradoxos, alternativas diversificadas ou argumentações (MACEDO, 2002, p. 120).

E acrescenta: “as situações-problema propõem uma tarefa onde o sujeito deve mobilizar recursos, ativar esquemas e tomar decisões” (p. 125). E diz também: “tomar decisões é mais do que resolver um problema, pois implica mobilizar valores, estabelecer raciocínios, enfrentar dilemas e decidir pelo que se julga melhor, mais justo, mais condizente para o sujeito e para a sociedade à qual pertence” (p. 127).

Indicando que há relação entre situação-problema e competência, Macedo (2002) considera que “competência é saber mobilizar recursos afetivos [e] cognitivos” e, citando Le Boterf (1974, 2000), apresenta estas características:

> saber agir, saber dizer, saber comunicar, saber fazer, saber explicar, saber compreender, saber encontrar a razão, ou seja, a competência é aquilo que organiza e que, portanto, dá base para que algo possa realizar-se enquanto representação, pensamento, ação, compreensão ou sentido (MACEDO,2002, p.123-124).

Então, para enfrentar uma situação problema, são necessárias competências, que, por sua vez, “manifestam-se em um conjunto, por meio da articulação de diversas habilidades” (ALESSANDRINI, 2002, p.164).

Para habilidade, Oliveira (2018) dá esta explicação:

> A possibilidade de um indivíduo concretizar algo, seja isso uma operação matemática, uma interpretação de texto ou de um desenho. Assim, para que uma habilidade seja posta em prática, é preciso ofertar situações de aprendizagem que proporcionem desenvolvimento cognitivo, afetivo e social (OLIVEIRA, 2018, p. 2).

Machado (2002) explica que uma “competência está sempre associada a uma mobilização de saberes. Não é um conhecimento ‘acumulado’, mas a virtualização de uma ação, a capacidade de recorrer ao que se sabe para realizar o que se deseja o que se projeta” (MACHADO, 2002, p. 145, grifos do autor).

Dos documentos oficiais, a BNCC (2017, p. 8) e o Currículo Referência de Minas Gerais (2018) definem competência “como mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana”.

Mas Alessandrini (2002) alerta: “os conceitos de habilidades e competências apresentam especificidades conforme a ótica pela qual os analisamos (...) [dessa forma] não se trata de uma definição linear” (ALESSANDRINI, 2002, p. 165).

Porém, de qualquer forma, “competências, situações-problema, e habilidades sempre foram questões fundamentais para nossa sobrevivência em todos os sentidos” (MACEDO, 2002, p.124).

A seguir, apresenta-se situação-problema, competências e habilidades segundo os documentos que tratam do ENEM.

2.4.3.1 Situação-problema, competências e habilidades nos documentos do ENEM

Em 2005, no contexto do ENEM, o documento *Fundamentação Teórico-Metodológica* explica:

> uma situação-problema define-se por uma questão que coloca um problema, ou seja, faz uma pergunta e oferece alternativas, das quais apenas uma corresponde ao que é certo quanto ao que foi enunciado. Para isso, a pessoa deve analisar o conteúdo proposto na situação-problema e recorrendo às habilidades (ler, comparar, interpretar, etc.) decidir sobre a alternativa que melhor expressa o que foi proposto (MACEDO, 2005, p.30).

No caso, é possível compreender situação-problema como uma questão de múltipla escolha cujo objetivo é verificar se o sujeito que está sendo examinado possui determinada(s) competência(s) e/ou habilidade(s). Observa-se que essa definição é diferente da que foi dada por Macedo em 2002.

O Relatório Pedagógico 2000 (BRASIL, 2001) traz definição de para competência e habilidade

> Competências são modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. As habilidades são especificações das competências estruturais em contextos específicos, decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do “saber fazer”. Por meio das ações e operações, as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova reorganização das competências (BRASIL, 2001, p.11).

As competências e habilidades são requeridas no ENEM por situações-problema que são apresentadas como questões de múltipla escolha e o candidato, para resolvê-las, tem de recorrer a habilidades. Portanto recorre também a conhecimentos prévios na busca de solução.

Em *Fundamentação Teórico-Metodológica*, Macedo (2005) afirma que uma das características importantes de uma competência é, “segundo Perrenoud, desafiar o sujeito a mobilizar os recursos no contexto de situação-problema para tomar decisões favoráveis ao seu objetivo ou metas” (MACEDO, 2005, p.29-30), isto é, resolver a questão.

Ainda se referindo a competências e habilidades, Macedo (2005) diz que não são natas. São desenvolvidas na escola, na família e na sociedade. Algumas, mais específicas, na escola. Particularmente a habilidade de resolver situações-problema envolvendo conhecimento geométrico de *espaço* e *forma,* tratada neste trabalho. Portanto as situações-problema trazem um desafio, algo que só é efetivamente solucionado se o resolvente manifestar um conjunto de habilidades necessárias, consolidadas em uma competência adquirida durante sua formação.

No ENEM, “utilizam-se três eixos organizadores na elaboração dos itens da prova: a contextualização, a situação-problema e a interdisciplinaridade” (BRASIL, 2005, p.67).

Guimarães (2005, p.68) destaca: “sempre que possível, as questões do Enem exigirão a articulação de aspectos da vida local com os processos sociais mais amplos por meio da busca de relações entre conteúdos que se encontram na interface entre diversas disciplinas”. Nesse sentido, as respostas às situações-problema envolvem conhecimentos interdisciplinares, pois o contexto os envolve. Compreende-se, então, que o ENEM também visa à interdisciplinaridade. Em relação à contextualização, “tem como pressuposto que os conteúdos aprendidos devem estar a serviço da inteligência e do resgate dos sentidos e significados humanos presentes nos conteúdos escolares” (BRASIL, 2005, p.67).

A situação-problema, como eixo organizador, busca resgatar “a capacidade de inquietar-se, primeira condição para o movimento no sentido da aprendizagem significativa[20]”. (BRASIL, 2005, p.67). A interdisciplinaridade mostra que as questões “exigirão a articulação com aspectos da vida”, (BRASIL, 2005, p.67), ou seja, as respostas não podem ser obtidas com outra perspectiva. Essa é a razão pela qual as situações-problema sempre compuseram o ENEM, assunto da próxima seção.

---

[20]A aprendizagem significativa é uma das condições defendidas por Piaget para um método pedagógico ser construtivo. Significativa porque expressa essa categoria da paixão: deixar-se, como sujeito a ser atravessado por um objeto; por isso, estar envolvido, interessado, ativo, em tudo o que corresponde a sua assimilação. (MACEDO, 2005, p.25)

2.5 Exame Nacional do Ensino Médio

O ENEM foi criado pela Portaria MEC n.º 438, de 28 de maio de 1998, no governo de Fernando Henrique Cardoso, sendo Paulo Renato Souza o Ministro da Educação. O Artigo I apresenta os objetivos do ENEM:

> I – conferir ao cidadão parâmetro para auto avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;
> II – criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;
> III – fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;
> IV – constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio (BRASIL, 1998, p.178).

Alves Machado (2012) dá esta explicação:

> O ENEM surge após a promulgação da LDB e está sendo considerado como a mais completa avaliação em larga escala da Educação Básica (EB), se for levado em conta sua abrangência ao currículo da EB. No entanto, poucos estudos foram desenvolvidos sobre os determinantes [por exemplo, habilidades, competências, eixos] desse exame, que apresenta tantas finalidades (ALVES MACHADO, 2012, p. 14).

No Relatório Final do Exame Nacional do Ensino Médio de 1998 (BRASIL, 1999) encontra-se a seguinte consideração:

> As tendências internacionais, tanto em realidades mais próximas da nossa como nas mais distantes, acentuam a importância da formação geral na educação básica, não só para a continuidade da vida acadêmica como, também, para a atuação autônoma do indivíduo na vida social, com destaque para sua inserção no mercado de trabalho, que se torna mais e mais competitivo. Essa formação deve ser compreendida como uma sólida aquisição dos conteúdos tradicionais das ciências e das artes associada ao desenvolvimento de estruturas capazes de operacionalizá-los no enfrentamento de problemas apresentados pela realidade social, cada vez mais complexa, e numa dinâmica de tempo progressivamente acelerada (BRASIL, 1999, p.8).

Quanto à estruturação, o Relatório Pedagógico do ENEM - 2001 (relativo a 2000) explica que foi construída “uma matriz que indica a associação entre os conteúdos, competências e habilidades básicas próprias ao jovem e ao jovem adulto, na fase de desenvolvimento cognitivo e social correspondente ao término da escolaridade básica” (BRASIL, 2001, p. 12).

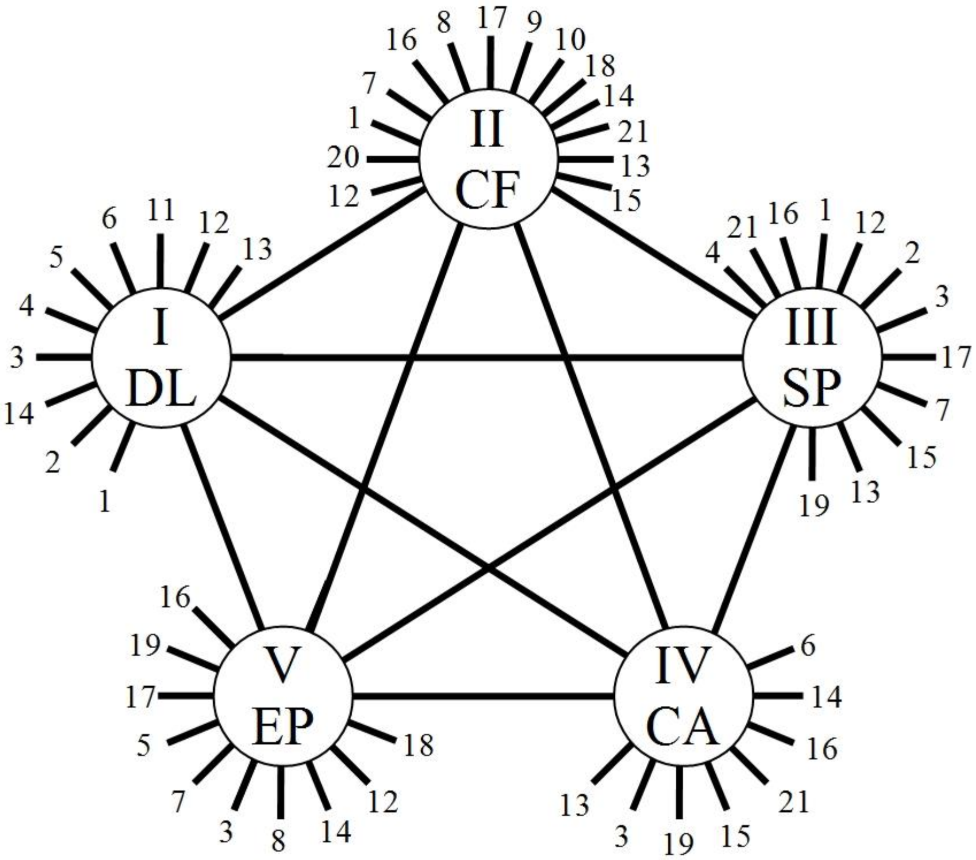
O mesmo documento indica “como referências norteadoras: a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Parâmetros Curriculares Nacionais, as Diretrizes do Conselho Nacional de Educação sobre a Educação Básica e os textos da reforma do ensino médio”

(BRASIL, 2001, p.12).

No período de 1998 a 2008, o ENEM era realizado em um único dia e tinha 63 questões interdisciplinares, nas quais se cobravam 21 habilidades (cada habilidade era exigida em 3 questões), relacionadas a 5 competências (BRASIL, 2001). Em resumo, nesse período foram requeridas 5 competências e 21 habilidades, detalhadas no Anexo 3.

No mesmo período, foi usada a Matriz de Análise de Desempenho, que, ilustrada na Figura 7, a seguir, associa a cada uma das 5 competências várias habilidades.

Figura 7-Matriz de Análise de Desempenho



I. Dominar Linguagens
II. Compreender fenômenos
III. Enfrentar situações-problema
IV. Construir argumentações
V. Elaborar propostas

Fonte: Relatório Final do ENEM (1998, p. 17).

Em 2009, no governo de Luís Inácio Lula da Silva, sendo Fernando Haddad o Ministro da Educação, foi introduzido, com o objetivo de unificar a seleção para entrada nas universidades federais, novo formato, o Novo ENEM. O INEP, pela Portaria n.º 109, de 27 de maio de 2009, estabeleceu procedimentos e cronograma, definindo a nova fase:

> Oferecer uma referência para que cada cidadão possa proceder à sua auto realização com vistas às suas escolhas futuras, tanto em relação ao mundo do trabalho quanto em relação à continuidade de estudos; estruturar uma avaliação ao final da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos exames de acesso aos cursos profissionalizantes, pós-médio e à Educação Superior; promover a certificação de jovens e adultos no nível de conclusão do ensino médio; promover avaliação do desempenho acadêmico das escolas de ensino médio, de forma que cada unidade escolar receba o resultado global; promover avaliação do desempenho acadêmico dos estudantes ingressantes nas Instituições de Educação Superior (BRASIL, 2009,p.56-63).

Com a Portaria MEC n.º109, de 2009, foram ampliados os objetivos em relação à Portaria MEC n.º 438, de 1998. Com isso, o número de questões passou de 63 para 180, isto é, além da redação, 45 para cada área do conhecimento. E a realização para 2 dias seguidos, sábado e domingo. E houve reformulação das Matrizes de Referência, tendo por base as Matrizes de Referência do Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos[21] (ENCCEJA), que é estruturada em quatro áreas do conhecimento, ou seja, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e uma proposta de Redação, Matemática e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Analisando o novo formato para o ENEM, Campos (2015) o definiu da seguinte forma:

> o Novo ENEM é uma prova interdisciplinar, extremamente contextualizada, que contempla, em sua maioria, conteúdos do ensino fundamental, e não traz uma distribuição uniforme, no que diz respeito ao número de questões por competência, habilidade e eixo cognitivo[22] (CAMPOS, 2015, p. 7).

Conforme o Relatório Pedagógico do ENEM de 2009-2010 (BRASIL, 2014, p.7), as novas Matrizes de Referência apresentam os seguintes eixos cognitivos comuns a todas as áreas:

> I. Dominar Linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer o uso

---

[21]"A Matriz de Competências e Habilidades que estrutura o ENCCEJA considera, simultaneamente, as competências relativas às áreas de conhecimento e às que expressam as possibilidades cognitivas de jovens e adultos de compreender e realizar tarefas relacionadas a essas áreas (competências do sujeito)." (BRASIL, s/d, s/p).

[22]"Eixos cognitivos são as competências do sujeito que, associadas às competências apresentadas nas disciplinas e áreas do conhecimento do Ensino Fundamental e Médio, se referem ao domínio de linguagens, compreensão de fenômenos, enfrentamento e resolução de situações-problema, capacidade de argumentação e elaboração de propostas. Dessas interações resultam, em cada área, habilidades que serão avaliadas por meio de questões objetivas (múltipla escolha) e pela produção de um texto (redação)." (BRASIL, s/d, s/p).

> das linguagens matemática, artística, e científica e das línguas espanhola e inglesa.
>
> II. Compreender os fenômenos (CF): construir e aplicar os conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
>
> III. Enfrentar situações-problemas (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
>
> IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
>
> V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural (BRASIL, 201, p.7-8).

Segundo a Matriz de Referência do ENEM de 2009 (Anexo 2), a estrutura mantém as quatro áreas de conhecimento, mas amplia as competências específicas para cada área. Passa de 21 habilidades para todas as áreas para 30 para cada uma, perfazendo 120, além da redação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) afirmam:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, verifica-se o potencial que um tema tem em permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria disciplina (BRASIL, 2000, p.255).

Em 2009, para a análise dos itens das provas, teve início a utilização de métodos estatísticos baseados na Teoria Clássica dos Testes (TCT) e na Teoria da Resposta ao Item (TRI), o que é assim justificado:

> levam em consideração, por exemplo, a distribuição das respostas dos participantes, o grau de dificuldade de cada item e o acerto casual (...) o cálculo das proficiências dos participantes do Exame com base na TRI (...) foi estabelecida a Escala de Proficiência do ENEM, com média correspondente a 500 e o desvio-padrão 100 (BRASIL, 2010,p.9).

O candidato não fazia avaliações por disciplinas, mas por áreas do conhecimento: 1. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, englobando Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira, Educação Física e Artes. 2. Ciências Humanas e suas Tecnologias, englobando História, Geografia, Filosofia e Sociologia. 3. Ciências da Natureza e suas Tecnologias, englobando Biologia, Física e Química. 4. Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2014).

O Quadro 5 mostra a nova quantidade de competências.

Quadro 5 - Quantidade de Competências por áreas

Matriz de Referência	Quantidade de Competências
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	9
Ciencias Humanas e suas Tecnologias	6
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	8
Matemática e suas Tecnologias	7

Fonte: Elaborado pelo pesquisador segundo o Relatório Pedagógico do ENEM 2009-2010, Brasil (2014).

No período de 2009 a 2016, o primeiro dia era dedicado às avaliações de Ciências Humanas e Ciências da Natureza e o segundo às avaliações de Linguagens e Matemática, além da redação. O INEP divulgava os resultados individuais e por escola até 2016.

Em 2017, em 9 de março, no governo de Michel Miguel Elias Temer Lulia, sendo José Mendonça Bezerra Filho o Ministro da Educação, foram anunciadas mudanças na aplicação das provas, que passaram a ser realizadas em 2 domingos consecutivos. Além disso, o MEC deixou de divulgar os resultados por escola, os cadernos de prova passaram a ser personalizados, a redação a ser realizada no primeiro dia, a isenção da taxa de inscrição a ser verificada pelo Cadastro Único para Programas Sociais[23] (CadÚnico).

No final do governo Temer, em 20 de novembro de 2018, o MEC anunciou mudanças para o ENEM para 2021. Diz o jornal O Globo:

> passará a cobrar, no primeiro dia, os conteúdos gerais básicos, previstos na Base Nacional Comum Curricular (...). No segundo dia, o candidato fará um exame de assuntos específicos, conforme a área que ele optar, vinculada à graduação que pretende cursar (O GLOBO, 2018, s. p).

Também em 2018, Oliveira e Pereira, ao pesquisar *Interferências dos sistemas de avaliação externos no currículo do ensino médio das escolas da XV Coordenadoria Regional de Educação (CREDE), região Inhamuns – Ceará,* fizeram importantes conclusões sobre o tema. Ao analisar exames de larga escala, como o ENEM e o ENADE concluíram:

> estes exames não têm cumprido o papel de indutor da qualidade da educação brasileira conforme largamente anunciado e prometido pelos governos que os implantaram (...) [no entanto] têm sido extremamente eficazes como indutores dos currículos escolares que passaram a se ajustar mais em função dos

[23]Sistema que contém informações sobre famílias brasileiras de baixa renda, ou seja, aquelas que possuem meio salário mínimo por pessoa participante.

> conteúdos e formatos das provas do que dos próprios projetos político-pedagógicos das escolas (OLIVEIRA e PEREIRA, 2018, s.p.).

Quanto à última reforma do Ensino Médio, feita pela Medida Provisória n.° 746/2016, indicada pelo IDEB, que demonstrou a estagnação das notas desde 2011, Oliveira e Pereira (2018, s. p) afirmam: “a instituição da reforma via medida provisória (goela abaixo como se costuma dizer popularmente) tem causado muita discussão e revolta entre os educadores de todo o país”. E destacam “uma comprovação do peso que as avaliações externas têm sobre a mudança e reformulação dos currículos dos sistemas de ensino brasileiro”.

Assim, observa-se como o ENEM tem influenciado o currículo e consequentemente as aulas de Matemática. No entanto a experiência tem mostrado que muitas vezes nas aulas apenas há preocupação de preparação para as provas, desviando-se da finalidade da escola, que é criar cenários propícios para a construção de conhecimentos.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo tem por objetivo mostrar o caminho do pensamento utilizado para a construção deste trabalho, pois a metodologia inclui “simultaneamente a teoria da abordagem (o método), os instrumentos de operacionalização do conhecimento (as técnicas) e a criatividade do pesquisador (sua experiência, sua capacidade pessoal e sua sensibilidade)” (MINAYO, 2009, p. 14).

Tem de haver, pois, a questão de investigação, que permite conhecer o objetivo e o objeto de estudo, o tipo de abordagem, as técnicas de coleta de dados, o contexto, o local e a população-alvo:

Como uma proposta de atividades pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma, da Matriz de Referência do ENEM?

Assim, o objetivo é desvendar como uma proposta de atividades pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma, da Matriz de Referência do ENEM. Portanto é preciso examinar que tipos de habilidade são necessários para resolver situações-problema, particularmente as que envolvem o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma* da Matriz de Referência do ENEM. Como consequência, é o objeto de estudo. Feito isso, julga-se ser possível elaborar atividades que possibilitam o desenvolvimento dessas habilidades auxiliares e responder à questão de investigação.

3.1. Pesquisa

A palavra pesquisa significa “indagação que se faz de uma coisa para conhecimento de sua realidade e circunstâncias” (GARCÍA-TALAVERA, 2014, p. 415). Chizzotti (2006) define:

> busca sistemática e rigorosa de informações, com a finalidade de descobrir a lógica e a coerência de um conjunto, aparentemente, disperso e desconexo de dados para encontrar uma resposta fundamentada a um problema bem delimitado, contribuindo para o desenvolvimento do conhecimento de uma área ou em problemática específica (CHIZZOTTI, 2006, p. 19).

E acrescenta: “um esforço durável de observações, reflexões, análise e sínteses para descobrir as forças e possibilidades da natureza e da vida, e transformá-las em proveito da humanidade” (CHIZZOTTI, 2006, p. 19).

Assim, a pesquisa científica busca fundamentar-se em teorias, métodos e análises. Cada pesquisador, após análise do que foi estudado, usa os critérios que julgar mais adequados para apresentar suas confirmações.

Nas Ciências Humanas e Sociais, a pesquisa pode ser classificada em quantitativa, qualitativa e mista, de acordo com os fundamentos teóricos e metodológicos, práticas e formas de coleta de dados, análises e abordagens.

Na pesquisa qualitativa, a fonte de dados é o ambiente natural e o principal instrumento é o pesquisador. Os dados são predominantemente descritivos; a preocupação com o processo é maior do que com o produto; os focos de atenção especial do pesquisador são o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida; a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo (LÜDKE e ANDRÉ, 2013).

Além disso, "o termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível." (CHIZZOTTI, 2006, p. 28).

Quanto aos instrumentos, Chizzotti (2006) explica para a pesquisa qualitativa: "necessários para se atingir o conhecimento, devem estar nos meios de se coletar informações vividas pelos atores humanos dos fatos e qualquer paradigma deve recorrer à intuição humana e à inferência interpretativa." (CHIZZOTTI, 2006, p. 28).

É importante destacar o seguinte:

> O investigador depara-se com a necessidade de transcrever auscultações realizadas aos participantes e registradas em vídeo, bem como transcrever integralmente as gravações de áudio das entrevistas realizadas. Seguidamente os textos resultantes das transcrições são transformados em formato eletrônico tendo em vista a sua exploração com o apoio de um software adequado (ARAÚJO et al, 2008, p.17)

Os instrumentos de coleta de dados são entrevista, diário de campo, análise documental e grupo focal. A produção de diferentes tipos de dados tem por objetivo validar a pesquisa por meio da triangulação (YIN, 2005).

De acordo com Lüdke e André (2013, p.8-9), na pesquisa relacionada à educação, há

> propostas de abordagens, com soluções metodológicas diferentes na tentativa se superar pelo menos algumas das limitações sentidas na pesquisa até então realizada em educação. Assim surgiram a pesquisa participante, ou participativa, ou ainda emancipatória, a pesquisa-ação, a pesquisa etnográfica ou naturalística e [o] estudo de caso (LÜDKE e ANDRÉ, 2013, p. 8-9).

Assim, considerando as características de um estudo qualitativo, a presente pesquisa pode ser classificada como estudo de caso qualitativo, o que se justifica a seguir.

3.2. Estudo de caso

André (2005) e Chizzotti (2006), apoiando-se em Hamel (1993), dizem que o estudo de caso remonta aos estudos antropológicos de Malinowski e membros da Escola de Chicago[24], no final do século XIX e início do século XX. Para André (2005), o estudo de caso em educação apareceu em manuais de metodologia de pesquisa das décadas de 60 e 70 do século XX, com um sentido muito estrito: estudo descritivo de uma unidade.

Nessa época, pensava-se que o estudo de caso serviria como fase preparatória de trabalhos e muitos pesquisadores realizaram estudo de um caso e não estudo de caso: "não atendiam os princípios das abordagens qualitativas, que constituem os fundamentos do estudo de caso". Retratavam superficialmente a realidade (ANDRÉ, 2005, p. 14). A autora, fundamentando-se em Stake (1994), afirma: "estudo de caso não é uma escolha metodológica, mas uma escolha do objeto a ser estudado" (ANDRÉ, 2005, p.16).

De acordo com Yin (2005), o estudo de caso é definido como uma investigação empírica que estuda um fenômeno contemporâneo. Além disso, é uma estratégia adequada a questões do tipo *como* e *por quê*: "quando o pesquisador tem pouco controle sobre os acontecimentos e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real" (p.19). O caso é definido como o fenômeno que ocorre em um contexto ligado com ênfase em múltiplas dimensões e inclui a natureza conceitual, o tamanho social, a localização física e a temporalidade do caso (Miles et al., 2014).

A unidade caso é definida por Miles e Huberman (1994) como um tipo de fenômeno que ocorre em um contexto delimitado e específico. É, na verdade, a unidade de análise. De acordo com Yin (2009), a unidade de análise define a unidade de caso como um evento, um indivíduo, um grupo ou uma organização.

Então, levando-se em consideração a abordagem de Yin (2005), nesta pesquisa o fenômeno é a Habilidade 8 da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (Matriz de Referência do ENEM, que é o contexto).

Yin (2005) explicita que, no estudo de caso, os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. Assim, ressalta-se que os limites devem ser esclarecidos, pois, para a resolução de situações-problema relacionadas com o conhecimento geométrico de

---

[24]A *Escola de Chicago*, rótulo aplicado a um grupo de sociólogos investigadores com funções docentes e discentes no Departamento de Sociologia da Universidade de Chicago, nos anos vinte e trinta, contribuiu para o desenvolvimento do método de investigação designado por qualitativo (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

espaço e *forma*, as habilidades da Matriz de Referência podem ser consideradas insuficientes. Também de acordo com Yin (2005), no estudo de caso é necessário delimitar aspectos mais específicos para subsidiar a compreensão da realidade (sobre o que estudar).

A unidade de análise refere-se ao que vai ser estudado, pois está relacionada com o objeto, o fenômeno, a entidade, o processo, os eventos ou os conceitos que os pesquisadores estão interessados em examinar (WESSELS, PAUW, THANI, 2014). A unidade de análise ou a unidade de caso deste estudo é, pois, a Habilidade 8.

É preciso lembrar que se selecionaram habilidades auxiliares com o intuito de facilitar a compreensão de aspectos relacionados à Habilidade 8: *Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.* A peculiaridade deste caso consiste, pois, na explicitação de habilidades auxiliares. E a discussão de habilidades contidas na Matriz de Referência do ENEM que podem ser requeridas na resolução de determinada situação-problema.

Confirma-se que esta pesquisa, ao relacionar habilidades auxiliares para a Habilidade 8 da Matriz de Referência do ENEM, pode ser considerada um estudo de caso, pois se caracterizou a peculiaridade de inserção no contexto de resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma.*

Em contrapartida, a motivação da escolha do estudo de caso como técnica para a construção desta pesquisa foi a especificidade do desenvolvimento de habilidades auxiliares que possibilitassem a elaboração de raciocínios lógicos para resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*.

3.3 Bases teórica e metodológica

Inicialmente, destaca-se a necessidade de caracterizar o conjunto de atividades identificado como atividades exploratórias:

> didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59)

Assim, as atividades exploratórias executadas em cada Encontro realizado nesta pesquisa buscaram trabalhar habilidades com a finalidade de auxiliar a resolução de situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*.

Martins Júnior e Reis (2016) explicam:

> As atividades exploratórias permitem aos professores e alunos criarem oportunidades para explorar determinados conceitos, observando o que acontece de regular durante o processo de indução e dedução de informações, bem como, permitir que haja uma dinâmica no ensino e na aprendizagem (MARTINS JÚNIOR e REIS, 2016, p.6).

Então, para explorar conhecimentos geométricos de *espaço* e *forma*, decidiu-se trabalhar com Geometria Plana e Geometria Espacial. Para isso, foram realizados dois Encontros para cada tema. Além desses, para analisar os resultados obtidos nos quatro Encontros, foi realizado um 5.º Encontro, o Grupo Focal. Para o 1.º Encontro, abordou-se o assunto Triângulos; para o 2.º Encontro, Áreas; para o 3.º Encontro, Prismas e Pirâmides e para o 4.º Encontro, Corpos Redondos. Além disso foram propostas atividades livres, o que pode ser justificado.

> A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática (PONTE, BROCADO e OLIVEIRA, 2006, p. 71).

Essas atividades buscavam consolidar o conhecimento geométrico, o que também pode ser justificado.

> O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo (FAINGUELERNT, 1999, p.53).

No desenvolvimento do pensamento ligado à Geometria, a imagem, de fato, facilita a compreensão: “uma imagem visual não somente organiza os dados à mão em estruturas significativas, mas também é um importante fator que guia o desenvolvimento da solução” (FAINGUELERNT, 1999, p.42).

Arcavi (2003), reunindo definições de Zimmermann e Cunningham (1991, p.3) e Hershkowitz et al. (1989, p.75), destaca:

> A visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens e diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de representar e comunicar informações,

> pensar sobre, e desenvolver e avançar entendimentos previamente desconhecidos[25] (ARCAVI, 2003, p. 217 – tradução do pesquisador).

Segundo Arcavi (2010), Bishop (1989) destacou a distinção entre o substantivo e o verbo. Isso porque visualização remetia ao objeto, buscando o que visualizar, as imagens visuais, enquanto *visualizar* remetia ao processo, à habilidade, buscando como visualizar.

Fainguelernt (1999) e Bishop (1989) consideram que as habilidades visuais podem ser ensinadas, portanto o professor deve oferecer oportunidades para a realização de experiências adequadas. Sendo assim, nos Encontros realizados houve atividades com essa orientação, como visualizar, perceber, intuir, além de outras indispensáveis à resolução de situações-problema envolvendo conhecimentos geométricos de *espaço* e *forma*.

3.4 Instrumentos e técnicas para a coleta de dados

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p.98), "a escolha da forma de coleta de dados deve estar de acordo com a natureza do problema ou questão de investigação e dos objetivos da pesquisa". Em vista disso, para a produção de dados, foram considerados compatíveis com o tipo de pesquisa quatro instrumentos/técnicas: *observação, entrevista individual, grupo focal* e *análise documental*. Para registrar as informações, foram utilizados *gravação em áudio e vídeo, anotação registrada no diário de campo, microdado*[26] do INEP relativo ao ENEM e *registro documental* das atividades propostas (feito no papel pelos participantes).

Na sequência é detalhada e justificada a decisão da selecionar cada uma dessas técnicas.

3.4.1. Diário de campo

Diário de campo ou de bordo é um caderno em que se anotam informações resultantes

---

[25]Texto original: "Visualization is the ability, the process and product of creating, interpreting, use of and reflecting upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown and advancing understandings."

[26]Microdado: é a menor fração de um dado e pode estar relacionado a uma pesquisa ou avaliação. Pela agregação de microdados é construída a informação. As bases estão organizadas de forma a serem compreendidas por softwares específicos, o que agiliza o processo de tratamento e cálculos estatísticos. No Brasil,o Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) é o principal produtor de microdados relativos à Educação. Censo Escolar, Censo da Educação Superior, Prova Brasil, SAEB e ENEM são algumas das principais bases de microdados do INEP. (disponível em: https://academia.qedu.org.br/glossario/o-que-sao-microdados/ acessado em 02/11/2018)

das atividades realizadas, feitas de preferência logo após o episódio ou até durante, para mais fidedignidade da informação. Trata-se de um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações, pois é nele que o pesquisador "faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos" (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 119).

Foi selecionado para auxiliar na produção de dados necessários à busca de respostas para a questão de investigação, porque registrou observações feitas pelo pesquisador que não estavam registradas junto aos documentos elaborados pelos participantes nas atividades dos Encontros. Foram observações referentes a condutas dos participantes: satisfação, interesse, interrogação ou até mesmo decepção. Essas observações não ficaram registradas nos protocolos dos participantes.

Tudo isso ofereceu possibilidades de analisar a importância da atividade realizada, no desenvolvimento de habilidades para solucionar situações-problema.

3.4.2. Entrevista

Sendo "o procedimento mais usual no trabalho de campo, (...), trata-se de uma conversa a dois com propósitos bem definidos." (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 120).

Na investigação qualitativa as entrevistas "podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas." (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 134). Servem para aproximar o entrevistador e o participante da pesquisa, ajudando a compreender as opiniões sobre o assunto e a possibilidade de encontros futuros. Também para "averiguar, identificar e opinar sobre fatos ou fenômenos, além de determinar, pelas respostas individuais, a conduta previsível em certas circunstâncias; descobrir os fatores que influenciam ou que determinam opiniões, sentimentos e condutas." (ANDRADE, 2003, p.146).

Como a entrevista é feita com diálogo, pode aproximar uma pessoa de pouco preparo com uma de muito. Elas podem se expressar com naturalidade, o que faz surgirem dados que talvez não apareçam em outras formas de pesquisa (FIORENTINI E LORENZATO, 2012).

A entrevista se classifica em *estruturada, semiestruturada* e *não estruturada* ou *aberta*. Na estruturada as perguntas são precisas e o pesquisador não se desvia delas; na semiestruturada existe a possibilidade de inclusão de falas que não se encontram no roteiro e na aberta não existe um roteiro de questões, o que pode dar ao entrevistador liberdade para abordar o assunto e ao entrevistado para se expressar fora de perguntas determinadas (FIORENTINI E LORENZATO, 2012).

Nesta pesquisa, a entrevista semiestruturada foi considerada a mais adequada, devido à flexibilidade, o que, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), determina certa atuação pesquisador:

> pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem deles e, até mesmo, formular questões não previstas inicialmente (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 121).

Os autores lembram a etimologia da palavra *entrevista*: é formada de entre ("expressa a relação de lugar no espaço que separa duas pessoas ou coisas") e *vista* ("ato ou efeito de ver").

Nesta pesquisa, o objetivo foi conhecer a importância dada pelos participantes ao ENEM e ao conhecimento geométrico e a opinião dos alunos sobre o conhecimento geométrico. Serviu também para saber se os respondentes estavam dispostos a colaborar com o pesquisador participando dos Encontros que seriam realizados e testando as atividades propostas. Portanto as perguntas se referiam à importância atribuída pelos professores respondentes ao ENEM, para saber se acompanhavam os resultados de seus alunos e ex-alunos, se em sala de aula usavam questões do ENEM e se estas refletiam o que os alunos aprendiam. E se consideravam importante o conhecimento geométrico, para a formação dos alunos e a realização de atividades relacionadas ao conhecimento geométrico de espaço e *forma* e se as questões do ENEM eram compatíveis com o que os alunos aprendiam em sala de aula.

3.4.3. Grupo focal

É uma técnica de pesquisa que, segundo Morgan (1997) apud Gondim (2003, p. 151), "coleta dados por meio das interações grupais ao se discutir um tópico especial sugerido pelo pesquisador. Como técnica, ocupa uma posição intermediária entre a observação participante e as entrevistas em profundidade".

Gondim (2003, p. 151), com base em Bogardus (1926) e Lazarsfeld (1972), considera "a noção de grupos focais apoiada no desenvolvimento das entrevistas grupais". Porém ele explica que existe diferença entre o papel do entrevistador grupal e o do moderador de um grupo focal.

> O entrevistador grupal exerce um papel mais diretivo no grupo, pois sua relação é, a rigor, didática, ou seja, com cada membro. Ao contrário, o moderador de um grupo focal assume uma posição de facilitador do processo de discussão, e sua ênfase está nos processos psicossociais que emergem, ou seja, no jogo de interinfluências da

> formação de opiniões sobre um determinado tema (GONDIM, 2003, p. 151).

Barbour (2009, p.13), referindo-se a pesquisas qualitativas, considera que os pesquisadores "são uma parte importante do processo de pesquisa, seja em termos de sua própria presença pessoal na condição de pesquisadores, seja em termos de suas experiências de campo e com a capacidade de reflexão que trazem ao todo, como membros do campo que está estudando".

Nesta pesquisa, o grupo focal foi utilizado como uma técnica para compreender mais profundamente que habilidades eram necessárias para a realização das atividades propostas em cada Encontro. Além disso, em vista da natureza qualitativa da pesquisa, recorreu-se a esta técnica como meio de reunir informações para saber que atividades o grupo considerava necessárias para o desenvolvimento de habilidades.

Destaca-se que somente P_3 esteve presente em todos eles e que, como professor experiente, de certa forma influenciava o grupo. Quando um participante estava impossibilitado de participar do Encontro, enviava seu texto sobre as atividades que realizou individualmente, sem possibilidade de discuti-las com os demais.

Portanto o grupo focal foi realizado pela necessidade de reunir mais uma vez os participantes da pesquisa para que pudessem discutir sobre as habilidades desenvolvidas nas atividades, em todos os encontros, dirimindo possíveis dúvidas.

3.4.4. Análise documental

Lüdke e André (2013, p. 44-45) afirmam: "a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja completando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema". Afirmam também que serve para a busca de informações factuais nos documentos, a partir de questões ou hipóteses de interesse.

E, apoiando-se em Holsti (1969), mostram três situações em que o uso da análise documental é apropriado (p.46). A primeira ocorre "quando o acesso aos dados é problemático, seja porque o pesquisador tem limitações de tempo ou de deslocamento". (Seria buscar conhecer a habilidade necessária a cada questão do ENEM indicada e divulgada pelo INEP. A dificuldade foi conhecer e utilizar um software específico, para o que foi necessária a ajuda de um estatístico.). A segunda ocorre "quando se pretende ratificar e validar informações obtidas por outras técnicas de coleta", como a entrevista. E a terceira ocorre "quando o interesse do pesquisador é estudar o problema a partir da própria expressão dos indivíduos”. Isso foi feito pelos participantes da pesquisa para analisar os registros documentais das atividades realizadas nos Encontros. Também foram analisados os registros documentais[27] feitos por alguns participantes sobre as atividades realizadas individualmente em casa.

3.5 Análise e interpretação

Uma vez levantados, os dados devem ser analisados a fim de serem interpretados. Quanto à análise de dados, Bogdan e Biklen (1994) explicam que envolve organização: “divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 205).

Fiorentini e Lorenzato (2012) corroboram as ideias de Bogdan e Biklen (1994), explicando que a análise das informações é uma etapa essencial para a pesquisa. Nessa fase a organização dos dados é fundamental: “sem ela a separação do material em categorias ou unidades de significado, torna-se difícil o confronto das informações, a percepção das regularidades, padrões e relações pertinentes” (p. 133).

Yin (2005) destaca: “análise de dados consiste em examinar, categorizar, classificar em tabelas, testar ou, do contrário, recombinar as evidências quantitativas e qualitativas para tratar as proposições iniciais de um estudo” (p. 137).E (2005, p. 137) recomenda: “cada estudo de caso deve se esforçar para ter uma estratégia analítica geral”. Portanto o pesquisador deve desenvolver essa estratégia para tornar compreensíveis as informações colhidas nos dados e poder interpretá-los.

3.6 Contexto e participante

A pesquisa foi realizada em Ouro Preto, Minas Gerais, com professores da Rede Estadual de Ensino.

3.6.1 Ouro Preto

---

[27]“Os registros documentais podem ser considerados como documentos que contêm informações que auxiliam os pesquisadores a tomarem e comunicarem as suas decisões, bem como registrarem os temas que são de interesse dos participantes do estudo e da instituição educacional.” (LEEDY e ORMROD, 2001 apud Cruz (2018, p. 62).

Para apresentar Ouro Preto, é importante lembrar que, em 1931, a cidade foi tombada pelo prefeito João Batista Ferreira Veloso e que dois anos depois foi declarada Monumento Nacional pelo presidente Getúlio Vargas. Assim, em 1938 ocorreu o tombamento federal. Em 1980 veio a inscrição pela UNESCO no Patrimônio Cultural da Humanidade, o primeiro bem brasileiro a se tornar monumento mundial (SANTOS, 2011).

Ouro Preto está localizada na Serra do Espinhaço, na Zona Metalúrgica de Minas Gerais (Quadrilátero Ferrífero), com 1245 Km^2 de área, altitude de 1150 m, tendo como o ponto mais alto do município o Pico do Itacolomi com 1772 m de altura (OURO PRETO, s.d.).

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2010, a população do município é de 69.598 habitantes, incluídos os 12 distritos: Cachoeira do Campo, Amarantina, Glaura (Casa Branca), São Bartolomeu, Santo Antônio do Leite, Rodrigo Silva, Miguel Burnier, Engenheiro Correia, Santa Rita, Santo Antônio do Salto, Antônio Pereira e Lavras Novas (OURO PRETO, s.d.).

No município há 14 escolas da Rede Estadual de Ensino, sendo que 7 oferecem somente o Ensino Fundamental, 6 oferecem o Ensino Fundamental e o Médio e 1somente o Ensino Médio. A Rede Municipal de Ensino possui 16 escolas do Ensino Fundamental, além de creches e escolas infantis. Na Rede Particular de Ensino há um conjunto de 11 escolas: Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Técnico. Há também escolas infantis e creches (INEP, s.d).

Quanto ao Ensino Superior, a cidade é sede da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), originária da reunião das centenárias Escola de Minas e Escola de Farmácia, e o Instituto Federal Minas Gerais, oriundo da Escola Técnica Federal de Ouro Preto. Atualmente a UFOP oferece 52 cursos de Graduação, sendo 47 presenciais e 5 a distância, 6 cursos de Especialização, 30 cursos de Mestrado, sendo 23 Acadêmicos e 7 Profissionais e 13 cursos de Doutorado (UFOP, 2018).

O ensino na modalidade a distância é oferecido pela UFOP, pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER), pelo Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSEVI), pela Universidade Norte do Paraná (UNOPAR) e pela Universidade Anhanguera (UNIAN).

3.6.2 Participantes

O pesquisador responsável por esta pesquisa é professor de Matemática da Rede Estadual de Ensino com experiência de 22 anos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A orientadora, professora titular da UFOP, iniciou a docência no Ensino Superior em 1978, na

Universidade de Brasília (UnB), tendo ingressado na UFOP em 1980, na Escola de Minas. Atualmente se encontra aposentada do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da UFOP. Os demais participantes desta pesquisa eram 5 Professores de Matemática que lecionavam em 4 escolas da Rede Pública de Ensino de Ouro Preto, Minas Gerais. Após uma entrevista, aceitaram a participação.

Por motivo de Ética, os participantes e as escolas de origem tiveram codificação alfanumérica. Os nomes eram conhecidos somente pelo pesquisador e pela orientadora.

Para conhecer a opinião dos participantes da pesquisa a respeito do ENEM e caracterizá-los foi realizada uma entrevista com eles. O resultado encontra-se a seguir.

3.6.3 Entrevista

Os participantes foram designados por P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5. Todos responderam que consideram o ENEM uma forma de selecionar candidatos para o ingresso em universidade, pública ou privada. P_2 recordou que antes o ENEM também servia para certificar o candidato, permitindo receber o Certificado do Ensino Médio. P_4 considerou que o ENEM era uma forma de avaliar o desempenho das escolas nesse nível de ensino, mas que na ocasião era usado apenas para selecionar candidatos. P_3 considerou que o ENEM, de fato, selecionava candidatos para a universidade, porém que atualmente era mais democrático (justo), pois permitia a todos realizá-lo em sua própria cidade (Na verdade podia ser uma cidade nas proximidades da cidade do candidato.). Ele comparou o ENEM com o anterior, o Vestibular, considerando o primeiro o melhor sistema, que, mesmo assim, necessitava de aperfeiçoamento. Todos os participantes consideraram que o ENEM tinha importância. Variava de entrevistado para entrevistado o motivo dessa importância. P_2 e P_4 consideraram ser importante haver um exame igual para os candidatos do país inteiro e cada candidato poder escolher qualquer curso que lhe interessasse e não apenas um como no Vestibular. P_4 considerou essa escolha um pouco problemática, pois, embora poder escolher fosse bom, o candidato podia escolher um curso com uma procura menor, cuja entrada exigia menos pontos, para depois mudar de curso e, assim, ocupar a vaga daquele que de fato o desejasse para permanecer e se formar.

Dos cinco entrevistados apenas P_3 disse acompanhar os resultados do ENEM. Ele disse que acompanhava resultados de colegas e também da escola. Disse estar interessado especificamente nos resultados de seus alunos para saber como estava o trabalho que desenvolvia. Considerava fundamental saber se eles estavam sobressaindo, suas dificuldades e se estava contribuindo para que eles tivessem condições de serem aprovados. Os demais explicaram que acompanhavam algumas provas, mas, em geral, não buscavam os resultados por não lecionarem para turmas do terceiro ano do Ensino Médio. P_4 e P_1 disseram que, embora não trabalhassem com turmas do terceiro ano do Ensino Médio, acompanhavam as questões de Matemática e as utilizavam nas aulas, isto é, no preparo das aulas. P_4 disse também que acompanhava os resultados da escola em que lecionava. Os demais professores que lecionavam para o Ensino Fundamental divergiam na justificativa para não usarem as questões do ENEM em suas aulas. P_2 considerava que elas eram complexas e os alunos não tinham as habilidades necessárias para resolvê-las, enquanto P_5 considerava a existência de questões do ENEM próprias para o Ensino Fundamental, porém, por misturarem Álgebra com Geometria, seus alunos teriam dificuldades em resolvê-las e por isso priorizava o uso do livro didático.

Os entrevistados julgavam importante o conhecimento geométrico. Disseram que na vida prática havia muita Geometria e que isso podia possibilitar passar do concreto para o abstrato. P_4 disse: “[o] conhecimento geométrico, como um todo na matemática está em nosso redor. O aluno tem que conhecer bem o espaço no qual ele está inserido, acho que o conhecimento geométrico é importante para isso.”

Todos os entrevistados indicaram que o aluno não considerava importante o conhecimento geométrico, porém P_3 disse: “talvez no início ele não consiga enxergar [a importância]. Tem dificuldade no início, mas às vezes vai percebendo aos poucos.”. P_3explicou também que cabia ao professor mostrar a importância com aplicações, incentivar e desenvolver no aluno o gosto pela Geometria e compreender suas dificuldades, pois podia ser que necessitasse de aprender coisas novas que dependessem de algo que não aprendeu no ano anterior. Os demais deram justificativas de o aluno não ver importância no conhecimento geométrico. Por exemplo: P_2 considerava que o aluno não tinha maturidade, devido a não conhecer o processo histórico do desenvolvimento da Geometria. P_5 que o aluno não sabia onde devia usar o conhecimento geométrico e P_4 que o aluno não compreendia as fórmulas.

Os participantes, exceto P_3 e P_5, disseram que, em geral, promoviam em sala de aula atividades concernentes ao conhecimento geométrico, relacionadas a questões do ENEM. Todos justificaram as afirmações, porém nem sempre de modo claro. P_1 disse que procurava contextualizar conteúdos fazendo associações de Geometria com Álgebra. P_2 explicou: “trabalho princípios básicos para tentar desenvolver habilidades, exaustivamente, etapa por etapa”. P_4 confirmou “trabalhar com questões do Enem, questões da prova Brasil, questões de vestibulares antigos”, mas também questões de concursos para profissões que os alunos diziam desejar seguir. Ele disse que explicava aos alunos: “no mínimo numa prova desta eles vão estar utilizando [estes conteúdos].”. E mais: “estas questões são ótimas para a gente [usar] dentro de sala de aula”.

Entre os participantes que disseram que em geral não promoviam em sala de aula atividades concernentes ao conhecimento geométrico, relacionadas a questões do ENEM, P_5 disse que abordava muito pouco o conhecimento geométrico em sala de aula. E P_3 explicou:

> dá para aprender mais sobre isto [promover em sala de aula, atividades concernentes ao conhecimento geométrico], discutir e formular questões que levam mais ao raciocínio; às vezes as questões da gente são de uma aplicação mais direta, questões que não contemplam tanto o raciocínio. E o livro didático às vezes atrapalha, tem aquela matéria e umas questõezinhas de aplicação (P_3).

Os participantes opinaram de forma divergente sobre a hipótese de o ENEM refletir o que os alunos aprendiam em Geometria sobre *espaço* e *forma*. P_5 considerou que as questões não refletiam o que eles aprenderam e que era necessário efetuar mudanças na forma de ensinar ou na abordagem do assunto pelo ENEM. P_2 considerou que as questões refletiam as baixas notas, porque era necessário o raciocínio lógico e várias habilidades para se desenvolver uma questão do ENEM, mas “os alunos não sabendo fazer os links entre as habilidades e, primeiro não sabendo abstrair a questão, [mesmo] tendo o raciocínio lógico, não conseguem resolver”. P_3 e P_4 consideraram que em parte o ENEM refletia o que os alunos aprenderam sobre o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma* em sala de aula. P_3 destacou:

> a Geometria pode ser ensinada de uma forma tão agradável... que o aluno tenha prazer de fazer (...) o professor ainda aborda muito mais a parte de álgebra, aritmética e às vezes... um pouco de tratamento da informação e deixa de lado a geometria ou deixa para o final, isto é uma discussão antiga”(P_3).

P_3 ainda explicou: “a Geometria espacial trabalhada desde a educação infantil tem que ter continuidade no fundamental, para que, quando os alunos chegarem ao ensino médio, consigam entendê-la, desenvolvê-la.” Para P_4 destacou a interferência de diferentes fatores: “tempo, número de questões e logísticas”. E disse que era necessário fazer mudanças para que o ENEM refletisse melhor o que os alunos tinham de conhecimento geométrico. P_1, disse que não tinha certeza de que o ENEM refletia ou não o conhecimento dos alunos em Geometria.

Em resumo: verificou-se que os participantes consideravam a importância do ENEM e o viam como uma forma de selecionar candidatos para ingresso nas universidades, públicas ou privadas. Apenas um disse acompanhar os resultados do ENEM, destacando estar interessado especificamente nos resultados de seus alunos, para saber como estava o trabalho que desenvolvia. Embora todos julgassem que o conhecimento geométrico era importante, os motivos de pensar assim variavam. Contudo indicavam que os alunos não reconheciam essa importância. Um pontuou que aos poucos os alunos podiam ir reconhecendo a relevância desse tipo de conhecimento, cabendo ao professor incentivar isso. Ainda que todos reconhecessem a importância do ENEM, apenas três deles disseram que, em geral, promoviam em sala de aula atividades concernentes ao conhecimento geométrico relacionado a questões do ENEM. Sobre a hipótese de o ENEM refletir o que os alunos aprendiam de conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*, as opiniões foram diversas. Ao final da entrevista esses participantes confirmaram participar da pesquisa.

Na sequência, o Quadro 6 mostra as características dos cinco participantes da pesquisa, quanto a formação, experiência docente e faixa etária.

Quadro 06 - Caracterização dos participantes da pesquisa

	Faixa Etária		Experiência Docência (Anos)		Formação		
	29-40	41-52	Fund II	Médio	Licenciatura	Especialização	Mestrado
P_1	X		5	7	Matemática Federal	Não possui	Educação Matemática (em andamento)
P_2	X		4	3*	Matemática Federal	EducaçãoMatemática (em andamento)	Não possui
P_3		X	30	26	Matemática Privada	Não possui	Não possui
P_4	X		5	8	Matemática Federal	1.Novas Tecnologias no Ensino de Matemática 2.Tutoria em EAD 3.Administração Escolar: supervisão, orientação e inspeção 4.Ensino de Matemática	Educação Matemática
P_5		X	5	1	Matemática Federal	Não possui	Não possui

*meses

Fonte: Dados do pesquisador

3.7. Procedimentos metodológicos

O projeto de pesquisa foi encaminhado para o Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da UFOP, que, após análise, o autorizou em 16 de novembro de 2017, conforme CAAE número 79263717. 7. 0000. 5150.

Em dia previamente marcado com a direção de cada uma das 5 escolas contatadas, foi entregue o Convite (Apêndice 1), para a participação dos professores de Matemática na pesquisa. Em seguida foram esclarecidos os detalhes da pesquisa para haver a permissão

(Apêndice 2).

Todos os professores de Matemática dessas escolas, duas no centro, uma em bairro periférico e uma em um bairro próximo ao centro, foram convidados, mas somente cinco aceitaram participar da pesquisa. Os demais explicaram que não poderiam participar por falta de horários disponíveis. Mesmo assim, havia representantes de 4 escolas convidadas. Todos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndice 3) no dia 8 de dezembro de 2017.

3.7.1 Encontros

O pesquisador e a orientadora organizaram as atividades a serem realizadas nos Encontros. Elas eram de natureza exploratória e procuravam desenvolver habilidades relacionadas à resolução de situações-problemas envolvendo o conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*. E trabalhar pré-requisitos necessários à resolução das situações-problema propostas em questões do ENEM. Portanto as questões selecionadas dessas provas eram propulsoras de atividades que foram pensadas para relembrar ou desenvolver habilidades relacionadas aos tópicos programados.

Houve 5 Encontros, sendo 4 para atividades práticas e 1 para o Grupo Focal. No 1.º Encontro, 4 atividades; no 2.º Encontro, 6 atividades; no 3.º Encontro, 5 atividades; no 4.º Encontro, 6 atividades, umas desenvolvidas individualmente em casa,

O 1.º Encontro foi realizado em 18 de abril de 2018, quarta-feira, à tarde, na Escola Estadual de mais fácil acesso para os participantes, em virtude de ser um período de greve. Foram realizadas atividades de Geometria Plana relativas a Triângulo, e todos os participantes se encontravam presentes, o que não ocorreu nos seguintes. O texto relativo às atividades está no Apêndice 4.

Os outros três Encontros foram realizados no sábado, no período matutino, em sala cedida pelo DEEMA, no ICEB, UFOP.

O 2.º Encontro foi em 5 de maio de 2018, também com atividades de Geometria Plana, no caso Área do Círculo. Apenas 2 dois participantes estavam presentes, em vista de reposição de aulas ou de motivos pessoais. Os participantes ausentes receberam, nas escolas, o texto relativo às atividades propostas, que foram realizadas em casa. Os registros documentais referentes foram devolvidos uma semana depois, para serem analisados pelo pesquisador. Os textos estão no Apêndice 5.

O 3.º Encontro foi realizado em 26 de maio de 2018, sábado, sobre Geometria Espacial, com atividades relativas a Prismas e Pirâmides. Os 5 participantes estavam presentes. Os textos das atividades estão no Apêndice 6.

O 4. º Encontro foi realizado em 16 de junho de 2018, sendo trabalhadas atividades de Geometria Espacial relativas a Corpos Redondos. Três participantes estavam ausentes. Eles receberam os textos das atividades em casa, devendo enviar as respostas após uma semana. Os textos se encontram no Apêndice 7.

A seguir, no Quadro 7, está o cronograma dos Encontros, com as atividades propostas, descrições e objetivos.

Quadro 7-Cronograma dos Encontros com as atividades propostas

Encontro	Data	Duração	Descrição	Objetivos
1.º	18/04/2018	2h30	Atividades sobre Triângulo Jogo dos 7 erros Atividades de simetria Atividades sobre construção de Quadrado e Triângulo Atividades sobre Cálculo de Área Atividades sobre observação e cálculo Questões do ENEM	Desenvolver habilidades de percepção e de desenho. Reconhecer outras habilidades relacionadas ao desenvolvimento de atividades sobre triângulos.
2.º	5/05/2018	2h	Atividades sobre Círculo Reconhecendo o π Situação 2.2 Situação 2.3 Relembrando Área do Círculo Situação 2.5 Situação 2.6 Questões do ENEM	Desenvolver habilidades de construção e concepção. Reconhecer outras habilidades relacionadas ao desenvolvimento de área do círculo.
3.º	26/05/2018	2h 30	Atividades sobre Prisma e Pirâmide Construção de Poliedro Desenho de Poliedro Observação de Poliedro Desenho do Tronco da Pirâmide Observação do Globo Questões do ENEM	Desenvolver habilidades de percepção e representação. Reconhecer outras habilidades relacionadas ao desenvolvimento de atividades sobre Prisma e Pirâmide
4.º	16/06/2018	2h	Atividades sobre Corpos Redondos Construção de Paralelepípedo Volume do Cilindro Princípio de Cavalieri Volume da Pirâmide Volume do Cone Volume da Esfera Questões do ENEM	Desenvolver habilidades de construção e concepção. Reconhecer outras habilidades relacionadas ao desenvolvimento de atividades sobre Corpos Redondos.
5.º	15/09/2018	2h	Análise e discussão dos resultados encontrados individualmente, por participante, sobre as habilidades percebidas emcada uma das atividades realizadas nos encontros, habilidades que auxiliaram no desenvolvimento da	Compreender melhor que habilidades eram necessárias para a realização das atividades propostas em cada encontro.

			habilidade de *resolver situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma.*	

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

CAPÍTULO 4

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES, ANÁLISE DOS DADOS E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo são descritos os Encontros e as atividades que compuseram cada um deles, bem como é feita a análise dos dados obtidos e a interpretação dos resultados.

Gomes (2016, p. 73), apoiando-se em Wolcott (1994), fala a respeito da descrição dos dados e da respectiva análise, destacando que as opiniões dos informantes devem ser fiéis, como se os dados falassem por si próprios, e diz: "na análise o propósito é ir além do descrito, fazendo uma decomposição dos dados (...) buscando as relações entre as partes que foram decompostas".

Quanto à interpretação dos resultados, Gomes (2016) diz: "pode ser feita após a análise ou após a descrição – buscam-se sentidos das falas e das ações para se chegar a uma compreensão ou explicação que vão além do descrito e analisado." (GOMES, 2016, p. 73).

E Borba, Almeida e Gracias (2018) consideram que, na fase analítica, deve transparecer a criatividade do autor e sua voz deve dialogar com a voz teórica e a literatura que consultou. Dizem eles sobre esse entrelaçamento de vozes:

> A voz da literatura quase some, já a voz dos dados – seja a voz dos professores, dos alunos envolvidos e dos participantes da pesquisa que estejam ai colocadas – é fortemente destacada a partir da voz do autor, que entrelaça, tece e analisa mantendo viva a voz teórica (BORBA, ALMEIDA e GRACIAS, 2018, p. 81).

No 1.º Encontro e no 2.º Encontro, foram trabalhados tópicos da Geometria Plana, como Triângulos e Área do Círculo. No 3.º Encontro e no 4.º Encontro foram trabalhados tópicos da Geometria Espacial, como Pirâmides e Corpos Redondos.

A seguir, apresenta-se a descrição, a análise dos dados e a interpretação dos resultados obtidos em cada um dos Encontros.

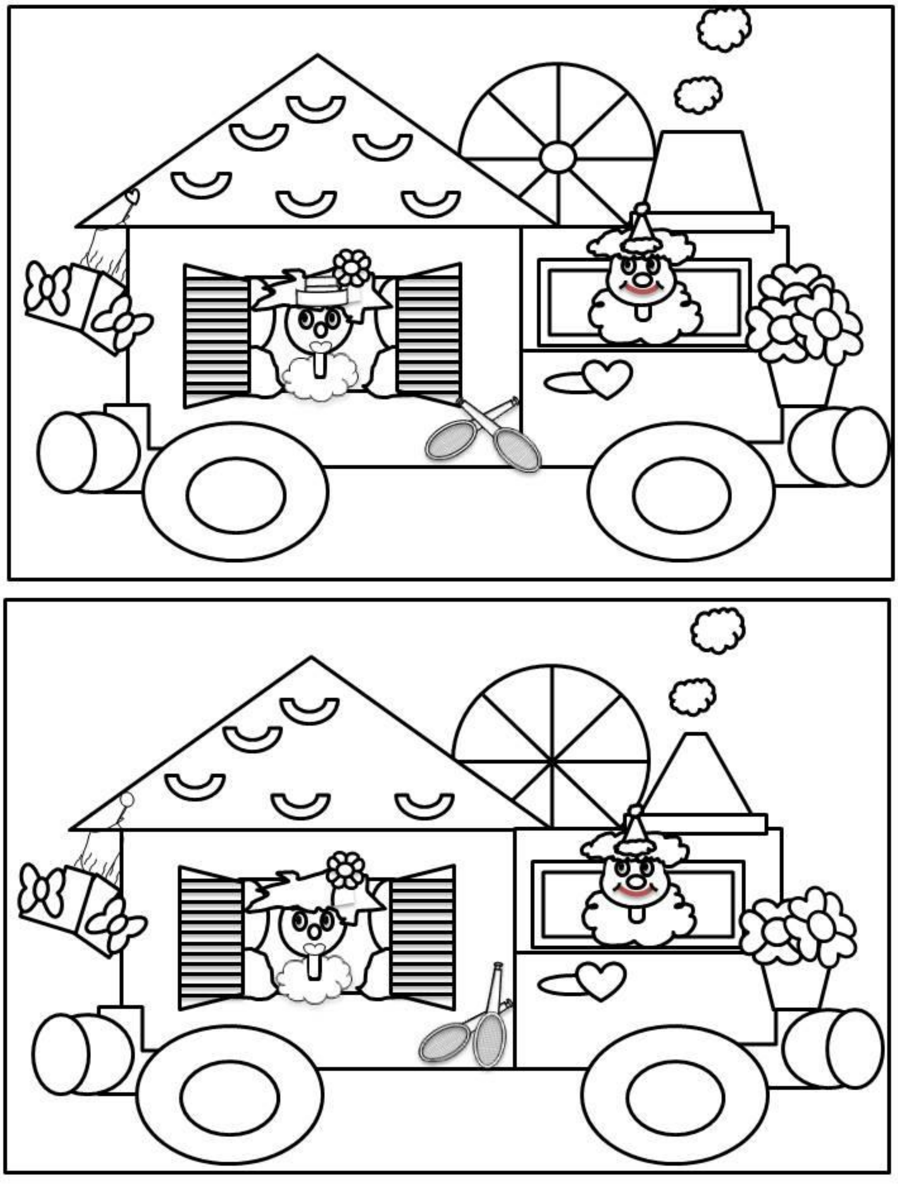
1.º Encontro

Em 18 de abril de 2018, às 13h30, reuniram-se, nas dependências de uma das escolas contatadas, quatro participantes desta pesquisa. Inicialmente, o pesquisador pediu autorização para fazer a gravação em áudio, com que todos concordaram.

Primeira Atividade do 1.º Encontro

Era composta de Jogos dos Sete Erros. Assim, foram entregues a cada participante duas folhas contendo três figuras. A Figura 8, a seguir, apresenta a primeira parte da atividade.

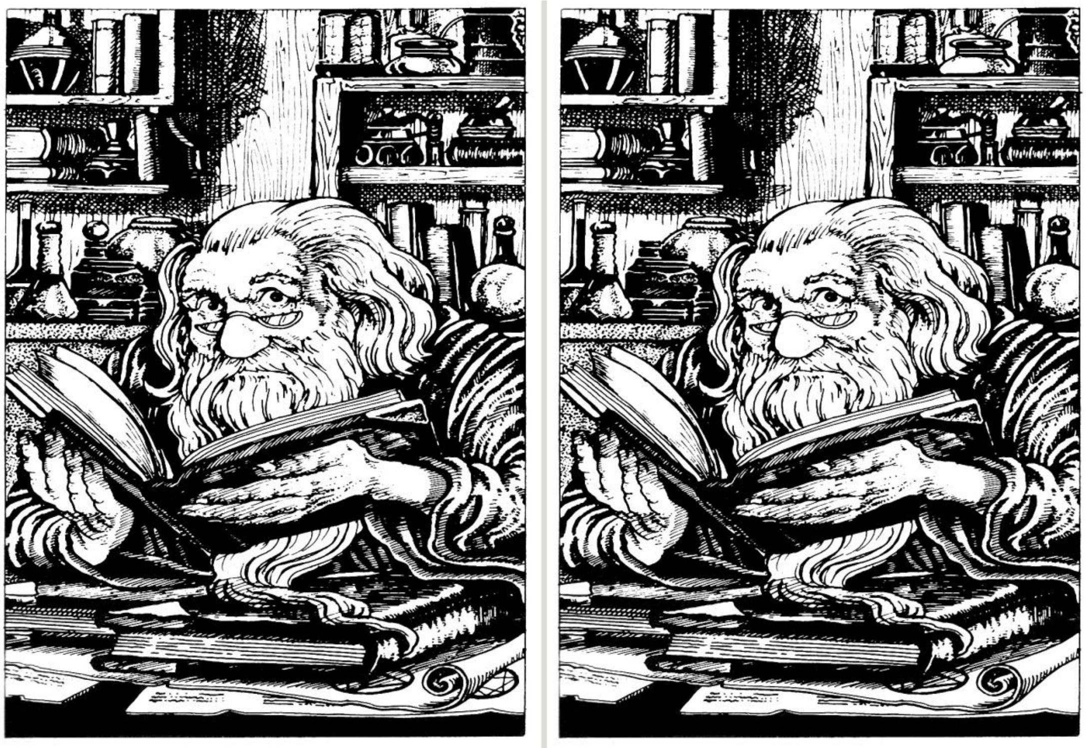
Figura 8-Primeiro Jogo dos Sete Erros



Fonte: http://azcolorir.com/jogos-do-para

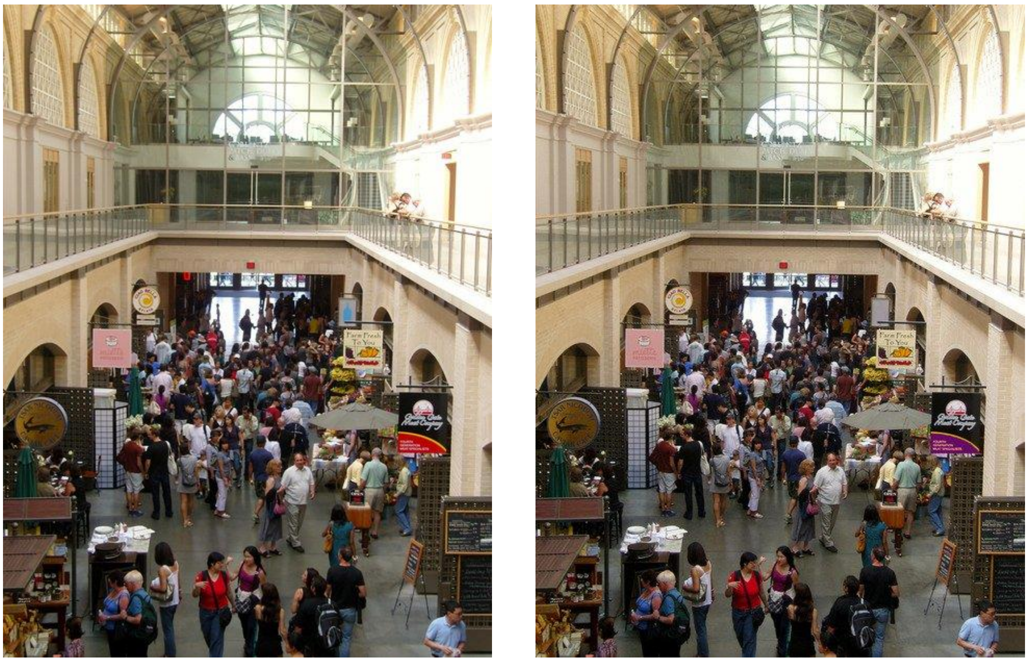
Figuras 9-Segundo Jogo dos Sete Erros   Figura 10-Terceiro Jogo dos Sete Erros

Segundo Jogo dos Sete Erros



Fonte:https://www.google.com.br/search?q=jogo+dos+sete+erros&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=2ahUKEwjY992fn9TeAhXEDJAKHYojCzYQ7Al6BAgAEBs&biw=1366&bih=631

Terceiro Jogo dos Sete Erros



Fonte: https://rachacuca.com.br/raciocinio/sete-erros/ferry-marketplace-sao-francisco/

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Os participantes começaram a dialogar, aproximando-se uns dos outros:

> P_3: (baixinho): Um, dois, três, quatro, cinco... (contando quantos erros havia achado).
> P_5: os primeiros a gente vê de cara, depois fica difícil.
> P_3: eu já cheguei no quinto, você está aí também?
> P_5: Tô!
> P_3: os outros dois são maldade.

Continuando o diálogo:

> P_4: Dois, quatro, seis... falta um!
> P_3: Olha, você está mais rápido do que eu.
> P_5: Mais rápido do que eu!
> P_2: Achei!
> P_4 para P_3: Passa cola!
> P_5: Tem uma coisa mínima aqui, será que essa coisa mínima aqui. Será que é essa coisa mínima, mínima?
> P_3: É essa coisa aqui no cantinho?
> P_5: É.
> P_3: Ela é 'detalhes'.
> P_5: Então fechou.
> P_3: Então eu que estou morrendo aqui.
> P_2: Não, é não... Eu achei esta coisa mínima primeiro. É outro lugar.
> P_5: Mas já deu 7.
> P_4: Já deu 7.
> P_2: Então eu não consegui ver 1.
> P_3: Eu também estou apanhando.
> P_5: A raquetezinha...
> P_2: Ah! Tá.
> P_5: Fechou...

Pode-se inferir que a habilidade de visualização estava atrelada à comparação de cada parte das figuras em cada um dos três Jogos dos Sete Erros. Durante a realização do Grupo Focal, os participantes concordaram: as habilidades de visualização e comparação foram as mais importantes para o desenvolvimento da atividade. Por exemplo, $P_{5:}$ "Com certeza visualização e comparação". $P_{1:}$ "Se for escolher duas: visualização e comparação, talvez".

Corroborando essa interpretação, Hoffer (1981) apud Vieira (2010) diz que, pela habilidade visual, as pessoas reconhecem figuras diferentes de um desenho, bem como as informações rotuladas numa figura. Foi o que ocorreu nos três Jogos dos Sete Erros.

Em relação à habilidade de comparação, à qual os participantes se referiram com base no estabelecimento de paralelos entre duas figuras, infere-se que ela pode auxiliar no desenvolvimento das cobradas na Matriz de Referência do ENEM, a Habilidade 6-*Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua* *representação no espaço bidimensional* e a Habilidade 7-*Identificar características de figuras planas ou espaciais*. Nos Jogos de Sete Erros vê-se a localização de objetos, as características e a representação no espaço bidimensional. Confirmam os PCN (BRASIL, 1997): "o trabalho com Espaço e Forma centra-se, ainda, na realização de atividades exploratórias do espaço. (...) observando e manipulando formas, os alunos percebem as relações dos objetos no espaço" (p.57).

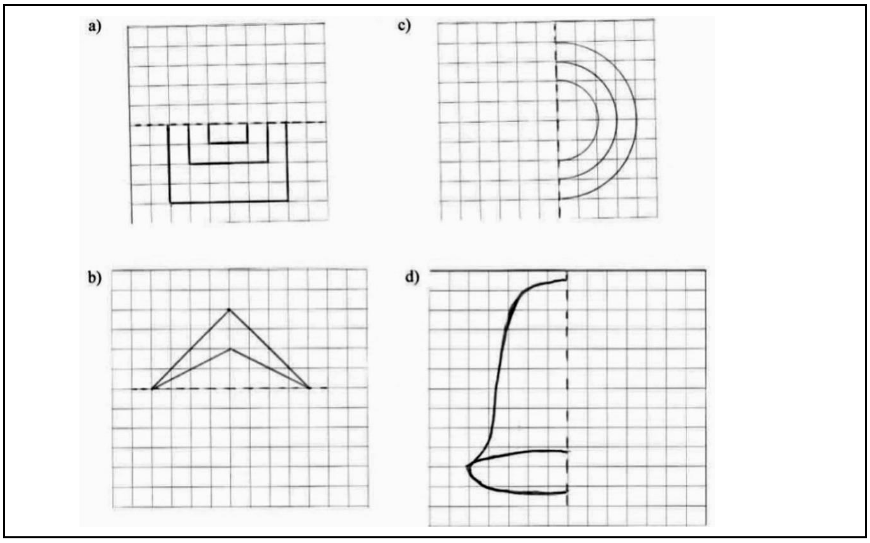
A atividade, além de ser lúdica, auxiliou na busca de detalhes, no exame de cada parte do todo para compará-la, não deixando de ser um exercício de lógica, pois compreendeu semelhanças e diferenças. Por exemplo, P_5: "Os primeiros [erros] a gente vê de cara, depois fica difícil. Tem uma coisa mínima aqui, será que essa coisa mínima aqui. Será que é essa coisa mínima, mínima?" E P_5 novamente; "com este colorido vai ser impossível. (...) ficará bem mais difícil de ver." P_3: "elas [as atividades] são detalhes." Corroborando essa interpretação, Hoffer (1981) apud Vieira (2010) confirma que, pela habilidade lógica, as pessoas percebem que há diferenças e semelhanças entre figuras.

Assim que acabaram de executar a primeira atividade, os quatro participantes conferiram os erros marcados e começaram a realizar a segunda atividade do 1.º Encontro.

Segunda Atividade do 1.º Encontro

Foram apresentados desenhos para serem completados com ajuda da malha quadriculada. Para o item c, foram disponibilizados compassos. A Figura 11, a seguir, mostra as etapas executadas.

Figura 11-Desenhos para completar



Fonte: construção do pesquisador

Desenvolvimento e interpretação das ações

Enquanto começavam a atividade, os participantes iam comentando sobre a realização. Por exemplo, P_4: “(...) não consigo completar nem com régua.” E P_3: “Não precisa de ser perfeito não.”

As observações do caderno de campo mostram que P_3 virou parte da folha e que, com a projeção do desenho do item a, dobrou e conseguiu marcar o ponto médio do lado do quadrado. P_2 e P_4 contaram a quantidade de quadrados na malha para fazer o desenho simétrico. Os quatro participantes começaram a construir as figuras, porém, como P_5 não utilizou o compasso e não contou os quadrados, não obteve desenhos simétricos nos itens b e c.

Lembra-se que Machado (1998) considera a representação uma etapa que caracteriza o desenvolvimento do conhecimento geométrico, enquanto Lauro (2007, p. 27) diz o seguinte: “a representação refere-se à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos”.

É importante notar que, durante a realização da atividade, houve observações sobre os desenhos feitos pelos participantes:

> P_3: Esta pequenininha é ruim de fazer no compasso (reclamando do semicírculo de menor raio).
> P_5: Vamos ver se vai dar...

Essas falas mostram que eles tiveram dificuldades que foram sanadas, pois, com exceção de P_5, os outros realizaram a tarefa com sucesso, indicando que conseguiram desenhar esquemas. Hoffer (1981) apud Vieira (2010) explica que é através da habilidade de desenho que as pessoas fazem esquemas de figuras, identificando cuidadosamente as partes dadas, em qualquer nível de aprendizagem da Geometria.

Assim que acabaram a atividade, P_2, P_3 e P_4 passaram para a seguinte, enquanto P_5 ainda continuou nela. Só depois iniciou a terceira atividade.

Terceira Atividade do 1.º Encontro

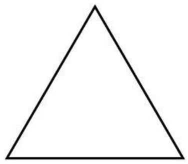
Foi solicitado marcar pontos médios de figuras e construir figuras semelhantes. O Quadro 8 apresenta o texto e as figuras.

Quadro 8-Atividades sobre construção de quadrados e triângulos

1) Dado o quadrado abaixo, marque o ponto médio de cada lado e, unindo-os por um segmento de reta, forme um novo quadrado. Repita o procedimento com o novo quadrado três vezes consecutivamente.

Em seguida, identifique quantos triângulos se formam na construção de cada novo quadrado.

2) Com o triângulo equilátero abaixo, marque o ponto médio de cada lado e forme um novo triângulo equilátero. Repita o procedimento com o novo triângulo mais duas vezes.



Fonte: construção do autor

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

No princípio da atividade, os participantes fizeram comentários. Por exemplo, P_5: "Pode ser no olho mesmo?" (Queria saber se podia fazer sem usar régua). A seguir eles começaram a realizar a atividade. Ao contar os desenhos que fez, P_3 descobriu que fez mais do que foi pedido: "Me empolguei.". P_2 indagou: "Como vocês fizeram para achar o ponto médio certinho? Eu peguei pelo tamanho da caneta." P_4 respondeu: "Eu usei três dedos e peguei a metade do dedo do meio..." P_5: "Cada um usou uma coisa, eu fui ao olho mesmo. Não pode não?" P_2: "Três dedos... é legal a sua ideia." E com os três dedos marcou um ponto. O diálogo teve prosseguimento:

> P_2: Ficou mais fácil que a minha...
> P_5: Três dedos.
> P_2: É, mas os três dedos dele são caprichados.
> P_5: É. É isso que estou olhando aqui...
> P_2: Mas a ideia dele ficou legal, ficou mais fácil para achar. Eu não estava muito errado não, só dá mais trabalho.

Na atividade, buscou-se trabalhar o raciocínio proporcional sugerido nos PCN (BRASIL,1999). A ideia para achar o ponto médio foi manifestada por P_4: “Eu usei três dedos e peguei a metade do dedo do meio.” E mostrou literalmente o que tinha na mão. O ponto médio foi o ponto de partida e o de chegada nessas atividades exploratórias, demonstrando que os participantes criaram uma medida para determinar o ponto médio, ao marcar cada vértice, o que possibilitou a construção da figura seguinte. Infere-se que a abordagem estava relacionada com a habilidade de desenhar.

De acordo com Hoffer (1981) apud Vieira (2010), pela habilidade de desenhar, no nível de análise proposto por van Hiele, as pessoas traduzem numa figura a informação verbal dada e a usam para desenhar ou construir outras figuras. No nível de ordenação ou dedução informal (como utilização dos dedos para determinação do ponto médio), as pessoas são capazes, a partir de certas figuras dadas, de construir outras relacionadas.

No caderno de campo está registrado que P_4 sugeriu que a figura referente à quarta atividade fosse colocada de lado. Que P_3 e P_4 aguardaram P_2 e P_5 terminarem, o que P_2 fez logo depois. Que foi pedido que socializassem a segunda atividade e a terceira, antes do começo da quarta.

Sobre a segunda atividade, item a, P_3 comentou: “O item a foi tranquilo, é só completar com simetria mesmo”. E os demais concordaram com ele.

Foram dadas respostas a perguntas feitas sobre o item b. P_2: “Complicou um pouquinho.” P_5: “Complicou um pouquinho mais.” P_3: “Você tem que contar os quadradinhos...” E todos responderam que conseguiram concluir o item b.

O item c envolvia o uso do compasso e motivou algumas respostas. P_5: “Ah! Eu não consegui fazer.”; P_2: “Sem o compasso...”; P_3: “Sem o compasso não iria sair.”. Indagados sobre o item d, todos confirmaram que com o papel quadriculado era possível fazer. Sobre a terceira atividade, P_2, P_3 e P_4 disseram que era simples e que a cada novo quadrado construído se formavam 4 triângulos. P_5 continuava a realizar a atividade, quando os outros três participantes iniciaram a quarta.

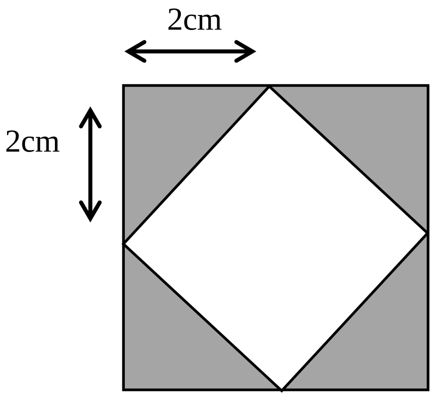
Quarta Atividade do 1.º Encontro

Foi pedido aos participantes que resolvessem questões relativas a áreas. O Quadro 9 apresenta o texto e as figuras.

Quadro 9-Quarta Atividade do 1.º Encontro

1) Retirado de Dante (2005, p. 181).

Observando a figura a seguir, responda:

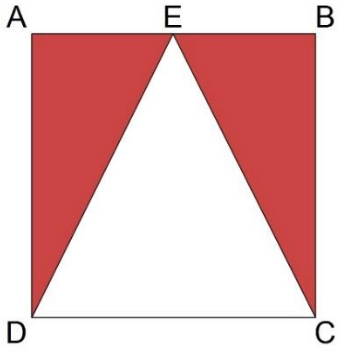


a) Qual é a área de da parte colorida na figura?

b) Qual é a área da parte não colorida da figura?

2) Este item, elaborado pelo pesquisador, tem duas partes envolvendo área de triângulos e de quadrados.

Parte 1) Observe a figura apresentada a seguir, que é um painel quadrado de duas cores. Nomeando os vértices de ABCD e o ponto médio de AB, faça o que se pede:



a) Explique por que o triângulo DEC é isósceles.

b) Calcule a área do triângulo AED, considerando que o lado do quadrado mede 4 unidades, e compare com a do triângulo EBC.

c) Considerando que o lado do painel mede 4 m, que a parte vermelha custa R$30, 00 o m^2 e a parte branca R$20,00 o m^2, determine o valor do painel.

Parte 2) Ao criar o logotipo para um cursinho, um desenhista projetou uma figura que é o resultado da retirada de um triângulo isósceles de outro triângulo isósceles. O triângulo inicial possui 6 cm de base e 4 cm de altura. O que foi retirado tem a mesma altura e 1/3 da base do primeiro, ficando localizado no meio do desenho. Determine a área resultante.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Os participantes, em silêncio, calcularam, demonstrando que o item 1 da quarta atividade era um simples exercício de cálculo. Assim que o concluíram, iniciaram o item 2.

Após alguns instantes, começou o diálogo sobre o item 2 da quarta atividade.

> P_2: Posso fazer assim, lado CB igual o lado AD, AB é igual a 2 vezes AE, logo o triângulo [DEC]... "Mostra para P_3 e conclui: "O lado ED é congruente ao lado EC.
> P_3: É congruência também... é congruência de triângulos. Não deixei mais explicação não. Mas eu acho... não sei... se fosse para o aluno, mesmo que ele não lembrasse da congruência, levaria ele a entender isso de uma maneira muito tranquila! A gente que já é engessado demais... A gente até explicou aqui, acho que o aluno explicaria com o jeitinho mais dele ali, que a congruência ele não ia lembrar ...
> P_4: Gente, eu não falei nada de congruência...
> P_3: É.
> P_2 sorriu
> P_3 (sorrindo): Mas é porque a gente fica muito...
> P_4: Eu pensei na congruência.
> P_3: Mas no fundo você pensa Zé. Você não precisa necessariamente... esta...
> P_4: Isso aqui eu conseguiria fazer sem saber congruência.
> P_3: Consegue, é isto que eu estou te falando... Que é bom também...

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) indicam que o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática deve ser trabalhado adequadamente, "devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo" (p.95).

Por exemplo, a explicação de P_2 sobre sua resolução é: "Posso fazer assim, lado CB igual o lado AD, AB é igual a 2 vezes AE, logo o triângulo [mostrando o triângulo DEC para P_3 e conclui...] o lado ED é congruente ao lado EC.". Confirma-se o que Hoffer (1981) apud Vieira (2010) explica: pela habilidade visual, no nível de dedução formal, as pessoas usam informação sobre uma figura para deduzir outras informações; pela habilidade lógica, no nível de análise, as pessoas percebem que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras; pela habilidade de aplicações, no nível de dedução formal, as pessoas são capazes de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas.

Após P_2, P_3 e P_4 finalizarem a segunda parte da quarta atividade, chegou P_1, que havia comunicado esse atraso. Então recebeu as folhas relativas às atividades já apresentadas, para que as realizasse. Enquanto isso, P_3 dava uma explicação a P_5. Logo em seguida, enquanto P_1 começava a desenvolver as atividades propostas, P_2, P_3, P_4 e P_5 liam silenciosamente a segunda parte da quarta atividade.

Depois que finalizaram a segunda parte da quarta atividade, no diário de campo se registrou um momento de descontração entre P_2, P_3, P_4. Este, que observava a questão de P_3, falou: “Eu já não ia tirar o total.”

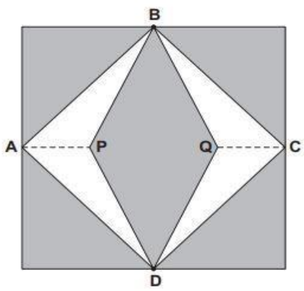
> P_3: Não, você aí já perdeu meio ponto.
> P_4: Já perdi.
> P_2: Eu num...
> P_3: Já perdeu... meio ponto...eu não tem dó não.
> P_4: Eu dou 75%.
> P_3: Bonzinho...
> P_4: Não.
> P_3(sorrindo): Eu sou professor... iniciei no século passado.
> P_2(sorrindo): Então... então... nem tudo é bondade.

Depois P_2, P_3, P_4 e P_5 conversaram um pouco sobre assuntos relacionados ao dia a dia, à docência e às práticas, enquanto aguardavam P_1 realizar algumas atividades propostas. Passado algum tempo, foram entregues duas situações-problema do ENEM aos quatro, para que procurassem responder à pergunta final. Eles leram atentamente a primeira situação-problema e começaram a desenvolvê-la. Segundo informações do diário de campo, P_1 ainda estava finalizando as atividades anteriores. Só depois recebeu a folha contendo as duas situações-problema do ENEM, que se encontram no Quadro 10 e no Quadro 11.

Quadro 10-Primeira questão do ENEM utilizada no Primeiro Encontro

Questão 1- ENEM 2012

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$50,00om^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

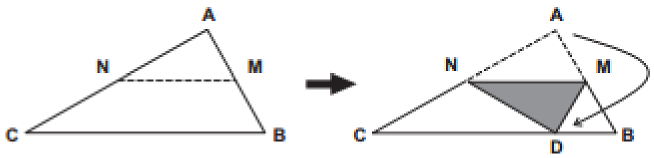
A) R$22,50
B) R$ 35,00
C) R$ 40,00
D) R$ 42,50
E) R$ 45,00

Fonte: INEP (2018, s.p.)

Quadro 11-Segunda questão do ENEM utilizada no 1.º Encontro

Questão 2 – ENEM 2012

Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

a) CMA e CMB.
b) CAD e ADB
c) NAM e NDM.
d) CND e DMB.
e) CND e NDM.

Fonte: INEP (2018, s.p.).

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

No princípio da atividade, P_3 deu uma sugestão aos colegas:

> P_3: Fazer aqui na mão... Porque no ENEM não tem calculadora não.
> P_5: Não tem.
> P_3: Tem que fazer... não adianta chorar.

Quando acabaram de resolver a primeira questão, P_2 observou que P_5 resolveu de forma diferente. P_2 para P_5: "Podia ter colado de você que era mais fácil". P_2 observou que P_5 usou um raciocínio que levou mais rapidamente à conclusão da questão. P_4 se lembrou de uma atividade e disse: "Estou me lembrando deste aqui." (E mostrou o desenho da segunda atividade.). E continuou: "Do mesmo jeito que eu fiz este (desenho da atividade) eu fiz este (desenho da situação-problema)."

Ressalta-se que a segunda atividade, que estava relacionada ao desenho, surtiu efeito na memória de P_4, pois a observação feita mostrou que a percepção do desenho auxiliou no desenvolvimento da questão.

P_2 começou a mostrar para P_5 como efetuou os cálculos: "Multiplica meio por meio... aí você depois vai multiplicar por 4, então... 4 vezes, aí este pedacinho você calcula tudo".

> P_5: isto aqui não é um losango?

> P_2: Então..., mas não pensa assim não...
> P_5: Eu não posso calcular de um losango não?
> P2: Pensa assim, como se fosse uma parte e depois você vai multiplicar por 4.
> P5: Mas se eu souber fazer a área do losango não fica mais fácil não?
> P3: Eu não acho, não...
> P2: Eu também não acho não... mas... é porque você vai ter que saberá altura dele primeiro.
> P5: As diagonais...
> P4: E tem que saber a fórmula do losango.
> P2: Se bem que é 'dezão' vezes 'dezinho' dividido por 2. É um vezes o outro dividido por 2.
> P5: No caso...
> P2: 1 vezes meio dividido por 2, que vai dar justamente 12 e 25, na hora que você subtrai de 1 vai dar justamente o 37,5 multiplicado por 2 vai dar 75. O seu jeito é mais fácil.
> P5: Eu pensei ... o problema era lembrar desta formula do losango. Gente...
> P2: Eu até gostei... vou fazer de novo por aí.

Ao compararem as soluções da situação-problema, P_2 compreendeu que as duas formas estavam certas, porém, graças a P_5, chegou mais rapidamente ao resultado. P_3 também afirmou isso a P_5: "Seu jeito era mais fácil". E P_2 refez a questão do modo como foi feito por P_5.

> P_2: Você viu o final.
> P_5. É. Eu enxerguei a figura.
> P_2: E eu fui fazendo passo a passo... Você viu o tanto de contas que eu fiz pra ver o que você fez.
> P_5: Eu fiz aqui, só que eu só enxerguei a figura do meio.

Nota-se na fala de P_5 a percepção da figura: "É eu enxerguei a figura...". De fato, Hoffer apud Vieira (2010) explica que, pela habilidade visual no nível de análise, as pessoas percebem as propriedades de uma figura como parte integrante de uma figura maior.

Os cinco participantes conferiram a resposta, depois que concluíram a resolução das situações-problema. Todos chegaram à resposta correta. Então começaram a responder às perguntas sobre as cinco atividades do Encontro. Escreveram individualmente as impressões e depois as socializaram.

1. Como você avalia a primeira atividade, isto é, o Jogo dos Sete Erros? Você crê que ela pode desenvolver habilidades de visualização? Explique.

2. Você acredita que as atividades relativas à simetria podem facilitar habilidades de visualização? Explique.

3. Em sua opinião, que habilidades podem ser desenvolvidas pelas atividades sobre construção de quadrados e triângulos encaixados? Explique.

4. Na Atividade 4 e na Atividade 5, o cálculo de área de figuras envolvendo quadrados e triângulos pode desenvolver habilidades de visualização?

Depois de apresentadas essas perguntas, P_1 finalizou as atividades propostas, sendo pedido que aguardasse os outros participantes para socialização de ideias. Quando todos acabaram de responder às perguntas, correu o seguinte diálogo:

> P_2: O jogo facilita... ajuda.
> P_5: Que com o Jogo dos Sete Erros você tem que observar muito uma figura e a outra.
> P_4:...além da concentração...
> P_5: Com certeza.
> P_3: Você tem que ficar atento aos detalhes.
> P_1: Você fica mais... depois que você passa por essa... você fica olhando o Jogo dos Sete Erros, quando você pega uma questão desta você olha tudo, procura ver todos os detalhes. Eu não tenho muito costume de escrever, aí... eu fui colocando aqui para facilitar... acho que muito veio disto de ficar analisando cada uma das cores [do Jogo dos Sete Erros], cada uma das figuras, cada um dos detalhes ...e escrever, acho que ajuda.

Analisando a fala de P_1, é possível associar a habilidade lógica (Quadro 3, p. 46), proposta por Hoffer (1981) apud Vieira (2010), no nível de visualização ou reconhecimento.

Após essas considerações, os participantes responderam à pergunta sobre a opinião referente à segunda atividade.

> P_4: Eu gostei... para mim serve... que está aqui por exemplo (E mostrou o item b da segunda atividade sobre simetria.) eu usei como base para resolver a primeira questão lá (questão do ENEM). A mesma coisa que eu fiz aqui eu fiz naquela (O raciocínio do desenho).
> P_2: O meu raciocínio foi parecido mesmo... Aí eu fui lá e usei proporção.
> P_3: Tudinho...
> P_4: Exatamente.
> P_5: É uma boa, porque a gente tem que observar, tem que contar os quadradinhos pra ver... a distância de um e de outro. Ajuda muito. Acho que com certeza.
> P_1: Eu compartilho o que o pessoal falou... Eu acho que o pessoal abordou tudo aí.

Ao observar a fala de P_5, nota-se a habilidade de desenho no nível de ordenação ou dedução informal (Quadro 3, p. 46). Hoffer (1981) apud Vieira (2010) indica que, dadas certas figuras, as pessoas são capazes de construir outras relacionadas às figuras dadas.

Na sequência, foi indagado sobre a terceira atividade. Os participantes responderam:

> P_4: A primeira coisa que eu pensei foi no ponto médio, depois do ponto médio quando você está construindo você vai vendo ... outras figuras se formando também... você vai vendo simetria... aí você vai dividindo e você pode ver cálculo de área também...
> P_5: Facilita...
> P_4: Porcentagem da figura, só triângulos..., só quadrados ...
> P_2: Eu fui fazendo o contrário... Eu fui fazendo o reverso para poder fazer as contas, fui separando por blocos diferentes, para conseguir fazer as diferenças...

> P_5: Quando você tem uma figura dentro da outra igual está ali, você separa por figuras... fica mais fácil na hora de fazer o cálculo da área por exemplo... para o aluno isto é muito bom.
> P_1: Então... acho que o essencial para se resolver a questão é fazer o desenho, para você ter a visualização...então... até quando você falou eu tinha lido uma coisa completamente diferente... Tem um lado bom e um lado ruim... porque eu já fui viciado [em resolver exercícios mecanicamente naquilo... Eu já fui imaginando outra coisa aqui quando eu fui resolver e fui fazendo as atividades e fui imaginando outra coisa... Aí , depois que eu parei para ler... vi que era um pouco diferente... Aí eu fiz o desenho...Aí sim eu tive uma noção do que era, do que realmente estava pedindo... As vezes a gente fica tão viciado, vai acostumando com os exercícios iguais... Então eu acho que facilitou para a compreensão do problema.

Machado (1998) caracteriza o desenvolvimento do conhecimento geométrico em quatro etapas, sendo que uma delas é a representação (Figuras 2, p. 43 e Figura 3, p. 43). Lauro (2007) indica que a representação se refere à reprodução feita por meio de desenhos. Assim, P_1 disse: “Acho que o essencial para se resolver a questão é fazer o desenho, para você ter a visualização...”. E Hoffer (1981) apud Vieira (2010) explica que pela habilidade de desenho se fazem esquemas de figuras identificando as partes dadas, o que se traduz na fala de P_2: “Fui separando por blocos diferentes...”

Quanto à habilidade de visualização, mencionada por P_1, os PCN+ (2002) destacam que ela e a de desenho são importantes para a compreensão e construção de modelos para a resolução de questões de Matemática e de outros ramos do conhecimento.

Após os comentários sobre a terceira atividade, foi indagado sobre a quarta, isto é, se elas poderiam desenvolver a habilidade de visualização. Respostas:

> P_4: Na minha opinião sim...Porque para fazer, por exemplo, a 4, eu fiz como se fosse mesmo a projeção dos lados aqui... dividi a figura em quatro, entendeu? Fiz como se fosse... usei a simetria desta diagonal deste triângulo aqui dentro para poder calcular a área. Então nem precisou na verdade da fórmula de área de triângulo não...Usei só a de retângulo mesmo...e já calculei, tanto na 4 quanto na 5. Fiz a mesma coisa.
> P_3: Tanto na questão do ENEM... já foi direto ...
> P_4: Exatamente.
> P_2: Foi direto nas proporções...
> P_4: Para não perder tempo.

Os PCN (1999) indicam que é importante trabalhar fatos concretos, observáveis e mensuráveis e que, por meio do entendimento, do raciocínio proporcional, se desenvolvem habilidades referentes ao reconhecimento de tendências. Por exemplo, P_4 disse: “Eu fiz como se fosse mesmo a projeção dos lados aqui... dividi a figura em quatro (...) usei a simetria desta diagonal deste triângulo aqui dentro para poder calcular a área”. Quanto à habilidade de aplicações, no nível de dedução formal, Hoffer apud Vieira (2010) explica que as pessoas são capazes de resolver problemas que relacionam objetos. Isso foi feito por todos os participantes.

No final do 1.º Encontro, foi solicitado aos participantes que se manifestassem sobre o conjunto de atividades realizadas, na busca de saber se elas poderiam contribuir para desenvolver o raciocínio lógico. Todos responderam afirmativamente. As ideias de P_3 e P_4 foram compartilhadas pelos demais.

> P_4: Eu achei a ordem bacana! Primeiro você colocou só a parte de visualização, depois a gente foi começando a fazer simetria, completando para depois partir para o cálculo de área. A gente podia até usar as experiências anteriores que a gente fez nas outras atividades pra gente fazer as últimas.
> P_3: São pré-requisitos.

Nos dias que se seguiram ao 1.º Encontro, foram transcritas as respostas dadas por escrito às perguntas apresentadas. Primeira pergunta: Como você avalia a primeira atividade, isto é, o Jogo dos Sete Erros? Você crê que ela pode desenvolver habilidades de visualização. Explique. Todos os participantes responderam afirmativamente. Na sequência, algumas respostas.

> P_1: Sim, pois ela contribui para que se possa ter uma visão mais ampla da situação apresentada, fazendo assim, que nos atente a cada detalhe.
> P_2: Sim, pois é importante que o aluno tenha a visão do todo para fazer a parte.
> P_3: Acredito, pois é necessário visualizar imagens e figuras. É preciso desenvolver a visão de espaço, áreas, comprimento, simetria e outros.

Segunda pergunta: Você acredita que as atividades relativas à simetria podem facilitar habilidades de visualização? Explique.

Os participantes responderam afirmativamente. Na sequência, algumas respostas.

> P_3: Acredito, pois é necessário desenvolver a visualização de figuras congruentes ou semelhantes.
> P_4: Sim. Por meio da simetria podemos ver os padrões presentes em determinadas figuras e também em diversas situações cotidianas.
> P_5: Sim. Para fazer atividades relativas à simetria, temos que observar com mais critérios, então as habilidades de visualização são importantes.

Terceira pergunta: As atividades sobre construção de quadrados e triângulos encaixados podem desenvolver algumas habilidades? Na sequência, algumas respostas:

> P_5: A construção de quadrados e triângulos encaixados ajuda a visualizar as medidas dos lados, os pontos médios, facilitando os cálculos das medidas.
> P_2: Habilidades: Noção de proporção e Visualização.

Os demais participantes se referiram a certos conteúdos, como cálculo de áreas e de ponto médio.

Quarta pergunta: Na Atividade 4, o cálculo de áreas de figuras envolvendo quadrados e triângulos pode desenvolver habilidades de visualização?

Todos responderam afirmativamente. Na sequência, algumas respostas.

> P_1: Sim, pois conseguimos calcular as áreas sem a necessidade de fórmulas.
> P_3: Com certeza. Essas atividades facilitam a visualização, levando a várias maneiras diferentes de encontrar o resultado, principalmente através de encaixes.
> P_5: Sim. Visualizamos melhor as medidas dos lados enxergamos melhor as figuras, conseguimos calcular mais facilmente as áreas.

Quinta pergunta: Quais habilidades vocês julgam necessárias para resolver as duas questões do ENEM que foram propostas?

P_2, P_4 e P_5 citaram a habilidade de visualização e conteúdos ligados à Geometria. P_3 citou visão espacial e conteúdo. P_1 citou somente conteúdo.

> P_1: Semelhança de triângulos e áreas de figuras planas, propriedades dos triângulos, simetria.
> P_2: Sim, cálculo aritmético e geométrico, habilidade de visualização.
> P_3: Cálculo de áreas – quadrado, losango e triângulo; Visão espacial – ponto médio; Saber definição de triângulo isósceles.
> P_4: Saber calcular a área de triângulo; classificação de triângulos quanto aos lados; simetria; cálculo aritmético; visualização.
> P_5: Cálculo aritmético, Geometria, habilidade de visualização.

A interpretação das respostas mostrou que os participantes tinham dificuldades no reconhecimento de habilidades, evidenciando uma lacuna no entendimento quanto à explicitação das diferenças entre conteúdos e habilidades. Algumas respostas dadas mostraram que, mesmo citando a Habilidade H7 (*Identificar características de figuras planas ou espaciais*), os participantes não manifestaram de forma clara a sua concepção. Por exemplo, P_1 citou: “Semelhança de triângulos e áreas de figuras planas, propriedades dos triângulos, simetria”. Inferiu-se, pois, a necessidade de “concretizar o que significa, no âmbito do ensino de Matemática, o desenvolvimento de competências e habilidades” (PCN+, 2002, p. 108), o que indicava uma formação continuada que tivesse como objeto a discussão do assunto.

2.º Encontro

Foi realizado em 5 de maio de 2018, como previsto. Porém, contatados os participantes no dia anterior, 3 avisaram que não poderiam comparecer. Mesmo assim, a data foi mantida devido às dificuldades de encontrar uma adequada a todos, em virtude da reposição de aulas, por causa da greve de professores ocorrida no primeiro semestre. Assim, às 9h, apenas P_3 e P_4 compareceram às dependências do ICEB III da UFOP. Receberam as boas-vindas e pouco depois as folhas contendo as atividades do dia.

Como a primeira atividade requeria barbante, cola e uma folha com circunferências impressas, tudo isso foi entregue aos participantes. O Quadro 12 contém o texto explicativo para a primeira parte das atividades.

Quadro 12-Reconhecendo π

Com o barbante que foi fornecido, meça o comprimento (C) e o diâmetro (d) do primeiro círculo apresentado na folha. Compare o comprimento do círculo com o do diâmetro e divida o maior pelo menor. Faça o mesmo com os demais círculos. Em seguida, cole os barbantes nas circunferências correspondentes. Complete o quadro com os números obtidos das divisões e com os que foram apresentados.

Comprimento da Circunferência		Diâmetro	C/d =
1.ª	1,57 m	0,5 cm	
2.ª	3,14 m	1 cm	
3.ª	6,28 m	2 cm	
4.ª	12,56 m	4 cm	
5.ª			
6.ª			
7.ª			
8.ª			

Fonte: construção do autor.

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Após a leitura do texto, P_3 e P_4 começaram a medir e anotar no Quadro, observando que os resultados dos cálculos não eram iguais, pois as medições não coincidiam. Foi observado o seguinte diálogo:

> P_4: Eu achei 24.8.
> P_3: O meu não chegou nisto não.
> ....
> P_3: A minha deu 8 (referindo-se à medida do diâmetro).
> P_4: A minha deu 7.9.

Eles perguntaram se podiam usar calculadora, sendo respondido que sim. E começaram as observações sobre os cálculos.

> P_3: O meu deu 3.1.
> P_4: O meu deu 3.139 (referindo-se ao resultado do comprimento dividido pelo diâmetro, na circunferência maior, cujo diâmetro é 8 cm).

Quando foram executar os cálculos relativos à segunda circunferência, P_3 deu dica a P_4: “Quanto mais esticar melhor...”. Logo divulgaram os resultados. P_3: “O meu deu 18.9 [referindo-se ao comprimento da segunda circunferência]”. P_4: “18.8...”

P_3 e P_4 foram medindo e calculando os resultados das divisões referentes às outras circunferências. Ao chegarem à última, cujo raio era 1 cm, disse P_3: “Este pequenininho aqui é ruim de medir.” E P_4: “Este aqui deu muito ruim. Esta foi a mais difícil de fazer.” E P_4: “Começar desta... (a penúltima circunferência) e colocar uma maior (indicando uma com raio maior que 4 cm).” P_3 observou que os resultados de seus cálculos foram diferentes dos de P_4, mas chegaram ao resultado aproximado de 3 unidades e alguma coisa.

Em seguida, ao colarem os barbantes sobre as circunferências:

> P_4: Acho que se fizesse com linha colorida fica mais bonito.
> P_3: Principalmente o diâmetro.
> P_3: Tem um barbante colorido!
> P_4: Isto aqui vai além da Matemática, isto aqui.
> P_3: Habilidade...

Observando a fala de P_4 (“Isto aqui vai além da Matemática, isto aqui.”), nota-se a valorização da atividade proposta. Segundo Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28), pela habilidade *aplicações no nível de ordenação ou dedução informal* se “entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos”.

P_3 disse: “Habilidade...”. Essa fala pode remeter a qualquer uma das habilidades propostas por Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28): visual, verbal, desenho, lógica e aplicações. Dependendo do ângulo de observação, a atividade podia sugerir o desenvolvimento de qualquer uma das habilidades em algum nível e de forma implícita.

Após completarem o Quadro 12 da primeira atividade do 2.º Encontro, os participantes passaram para o que está indicado no Quadro 13, a seguir.

Quadro 13-Continuacão de Reconhecendo π

Certamente, os números que você encontrou se aproximam de 3,1415, que é constante e denominado π. Sabe-se que C = π.d (mas o diâmetro d contém duas vezes o raio r). Assim, o comprimento da circunferência é dado pela fórmula C = 2 πr. Tendo em vista isso desenvolva as questões: 1. Uma pessoa, por recomendações médicas, estabeleceu andar 12 voltas em torno de um canteiro circular de raio igual a 10 metros, todos os dias, próximo a sua casa. Quantos metros, aproximadamente, ela percorre diariamente dando essas voltas? 2. Segundo o Inmetro, o raio do círculo central de um campo de futebol deve medir 9,15 m. Buscando fazer uma homenagem ao diretor de um clube de futebol, o técnico decidiu calcular a medida da semicircunferência do círculo central do campo, com o intuito de posicionar todos os atletas nessa linha. Se o técnico adotar 3 como aproximação para π, qual medida vai encontrar para a semicircunferência?

Fonte: construção do autor

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Depois que acabaram de desenvolver as situações, P_3 observou a resposta de P_4.

> P_4: Então... semicircunferência, metade da circunferência. Nós dois não batemos... entendemos a mesma coisa, eu entendi que é semicircunferência, que é meia circunferência... O que você entendeu?
> P_3: Aí seria 2π r, mas como é metade πr.
> P_3: Eu estou achando que você fez tanta conta.
> P_4: Eu fiz a circunferência e dividi por 2, eu devia ter dividido por 2 antes de fazer.
> P_3: Mas aí já era..., mas é bom você ter feito diferente.

Ambos chegaram ao mesmo resultado, porém simplificando a operação em momentos diferentes.

> P_3: O aluno talvez fosse fazer assim também.
> P_4: Ah!... Com certeza ia fazer. Você está muito treinado.

Lembra-se que os PCN (1997) destacam “respeito pelo pensamento do outro, valorização do trabalho cooperativo e do intercâmbio de ideias, como fonte de aprendizagem” (p. 58) entre os conteúdos atitudinais a serem desenvolvidos.

Em seguida foram entregues aos participantes as atividades cujo texto se encontra no Quadro 14.

Quadro 14-Relembrando áreas de círculos com uso de circunferências concêntricas e feixe de paralelas

4. Relembrando áreas de círculos.

Observe a figura 1 e a figura 2 a seguir.

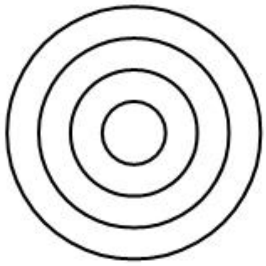


Figura 1

Figura 2

A Figura 1 apresenta circunferências concêntricas. A Figura 2, um feixe de segmentos paralelos que têm as medidas das circunferências. A Figura 2 lembra o formato de um triângulo, cuja área pode ser calculada por esta fórmula: (b.h) / 2. Como a base do triângulo tem a medida do comprimento da circunferência ($2\pi r$) e a altura tem a medida do raio da circunferência (r), a área é $2(\pi r.\ r)/2 = \pi r^2$. Dessa forma, a área da circunferência de raio maior também deve ser πr^2.

Com a fórmula da área do círculo, resolva as duas questões apresentadas a seguir.

5. De acordo com a Confederação Brasileira de Futebol de Salão (CBFS), no centro da quadra de futsal deve haver um círculo com raio de 3 metros. Qual é a área desse círculo?

6. Ao pensar na imagem de um CD, temos a ideia de duas circunferências concêntricas. Se o raio da maior medir 5,9 cm e o da menor medir 1,8 cm, qual será a área da coroa circular formada?

Fonte: construção do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Em pouco tempo os dois participantes concluíram a resolução das situações apresentadas. E começaram a dialogar.

> P_4: No Ensino Fundamental eu faço todos os cálculos no quadro, sem calculadora; no Médio não, tem a calculadora.
> P_3: Agora... eles [os alunos] não veem a mínima graça em achar a resposta em π. A gente trabalha na Geometria Espacial no Ensino Médio. Eles acham uma coisa assim...

> longe... fora da realidade. Então... é melhor você falar considerem redondo, eles não conseguem visualizar... Tem lá um volume, sei lá..., $8\pi cm^3$, agora se colocar lá 8 vezes 3 dá 24, aí para eles faz sentido.

Observando a fala de P_3 ("eles não conseguem visualizar..."), o que estaria diretamente ligado a não conseguir perceber? A percepção é uma das quatro faces do Tetraedro Epistemológico apresentado por Machado (1998), no qual o autor caracteriza o desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Foi perguntado sobre o que observavam pelo fato de o aluno não compreender quando a resposta era deixada em π. Os participantes informaram.

> P_4: Eles não compreendem não, quando deixa o π do lado. Eu gosto de trabalhar substituindo mesmo os valores. Ou antes...
> P_3: Eu acho que no Fundamental tem que trabalhar arredondando mesmo. Agora no Médio...
> P_4: No Médio já dá para entender.
> P_3: Podia tentar incluir mais...

Para o Ensino Fundamental II, os PCN de 1998 esperam que os conteúdos "façam sentido para o momento de vida presente e que ao mesmo tempo favoreçam o aprendizado". E também indicam:

> é necessária a utilização de metodologias capazes de priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses (...) [buscando], o desenvolvimento do espírito crítico capaz de favorecer a criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas (BRASIL, 1998, p. 6).

Os PCN de 1999 referentes ao Ensino Médio explicam:

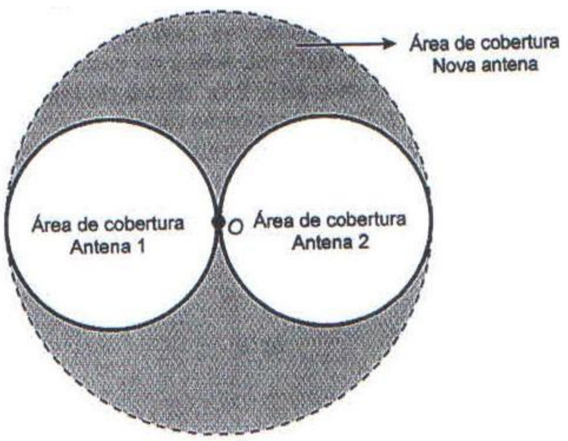
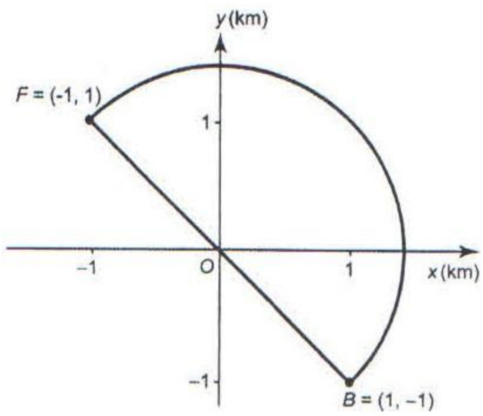
> O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível (BRASIL, 1999, p. 44).

Depois que os participantes responderam sobre π, foi perguntado o que achavam da forma como foi apresentada a justificativa para a área do círculo. P_4: "É interessante. Estes tipos de demonstrações assim eu gosto, estas 'mostrações' eu gosto de fazer todas..., quase todas". E P_3: "*Isto é bem bacana*. Pode ser que eles tivessem dificuldade no segundo exercício de aplicação da fórmula de área do círculo." P_3 sugeriu que se colocasse um desenho na segunda atividade da área do círculo, o que, segundo ele, facilitaria compreender a questão.

De fato, a ilustração poderia facilitar o entendimento da questão. Segundo Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p.28), pela habilidade visual, no nível de visualização ou reconhecimento, se "reconhece informações rotuladas numa figura". Logo o oferecimento de uma figura pode aguçar a percepção de quem vai resolver a questão.

A seguir, foi entregue aos participantes a atividade seguinte, constituída de duas questões do ENEM, como mostra a Quadro 15.

Quadro 15-Questões do ENEM referentes a círculos

(ENEM 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.  O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em a) 8π b) 12π c) 16π d) 32π e) 64π	(ENEM 2016) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.  Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro. Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$. O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de a) 1260 b) 2520 c) 2800 d) 3600 e) 4000

Fonte: Inep (2018, s. p.)

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Os dois participantes resolveram em silêncio, mas depois concluíram, conferiram as respostas.

> P_4: Você já terminou esta?
> P_3: Terminei.
> P_4: Encontrou 8?
> P_3: Encontrei 8π.
> P_3: 2520?
> P_4: 2520!
> P_4: Fala baixinho: questãozinha legal!

Depois foi perguntado o que observaram dessas questões.

> P_4: Interessante.
> P_3: É uma questão que assim...
> P_4: Deixa eu ver o que você fez de cálculo na questão.
> P_3: Eu fiz mais direto, o aluno... Eu não mostrei, por exemplo, como eu cheguei no raio... claro que em relação ao aluno eu ganhei tempo, mas como raciocínio nós usamos... o teorema de Pitágoras ali...
> P_4: Achar a raiz de 2
> P_3: A raiz de 2...
> P_4: A gente olha para o 1 e já sabe.
> P_3: É. O próprio exercício ajuda também. Mas o cara também tem que ter conhecimento para lembrar... aqui o quilômetro é igual a 1000 metros.

Observa-se que na contextualização das situações-problema se cobraram conhecimentos prévios, relativos ao Teorema de Pitágoras e à transformação de unidades de medida, conteúdos que aluno de Ensino Médio já deveria dominar, visto que são desenvolvidos no Ensino Fundamental.

Na sequência, foram apresentadas perguntas relativas às atividades propostas[28] no 2.º Encontro.

1.Você acha que a primeira atividade, reconhecendo π, é interessante e suficiente para que o aluno recorde a fórmula do comprimento da circunferência? Justifique a resposta.

Os participantes responderam afirmativamente:

> P_4: Considero que sim, no Quadro as aproximações foram bem próximas do 3,14 e, embora não seja demonstração da fórmula, mas uma ‘mostração’, isto é bem válido, com certeza ajuda na memorização, além disso o aluno manuseia e mede os barbantes para chegar à resposta.
> P_3: Gostei, acho que o aluno vai fazer isso com boa vontade... rapidinho... vai ter prazer em fazer... e pode até fazer com o colega do lado... vai ser uma atividade

[28] Estão incluídas as respostas enviadas por escrito por P_1, P_2 e P_5, que não puderam realizar presencialmente as atividades do 2.º Encontro.

> agradável, com bons resultados... Eles recordando... uns que nunca deram muita atenção para o π, outros que já ouviram falar... Para alguns vai ser até novidade.
> P_1: Leva à percepção do número irracional π, através da aproximação. (...) Os alunos podem verificar a relação e o valor aproximado de π de forma prática.
> P_2: uma forma empírica, o aluno pode recordar os cálculos para obter a fórmula do comprimento [da circunferência].
> P_5: é mais fácil [aprender] quando se consegue observar o que está acontecendo.

Essas respostas mostraram que os professores consideraram que a atividade podia levar ao desenvolvimento, explicitamente, das habilidades percepção e memorização e, implicitamente, das habilidades construção e concepção.

2. O que você acha das atividades apresentadas para uso da fórmula do comprimento da circunferência? Você crê que são suficientes para memorizá-la? Justifique a resposta.

> P_4: Eu achei a primeira tranquila... só resolver mesmo... e na segunda tinha que levar em consideração e saber o que é uma semicircunferência e visualizar a 'demonstração' das fórmulas ajuda na memorização.
> P_3: Eu acho que eles 'garrariam'[29], eles conseguiriam fazer, talvez alguns... a semicircunferência ali..., mas com a conversa na sala de aula, a gente vai orientando (...), mas são atividades interessantes e fazem com que os alunos pensem na aplicação da fórmula.
> P_5: acontecimentos do cotidiano [auxiliam a aumentar o interesse do aluno].
> P_1: poderiam ser melhor trabalhadas se os alunos tivessem que encontrar também a medida do raio e do diâmetro.
> P_2: para memorizar é importante medir, cortar e colar.

Observa-se nas falas de P_3 e P_4 preocupação quanto ao significado da palavra semicircunferência, pois sem isso a atividade estaria inviabilizada. P_3 sugeriu que, no caso, o professor poderia orientar o aluno. Entretanto o assunto semicircunferência deveria ter sido tratado no Ensino Fundamental. De fato, os PCN de 1999 indicam que no Ensino Fundamental os alunos devem se aproximar de muitos campos do conhecimento matemático para que no Ensino Médio estejam em condições de:

> Utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade (BRASIL, 1999, p. 40).

Essas respostas mostram que os professores consideraram que a atividade podia levar ao desenvolvimento das habilidades de visualização, memorização e aplicação de forma explícita e de forma implícita a habilidade de concepção.

---

[29] Significa não conseguiriam resolver.

3.Você acha que, na atividade relembrando π, área de círculos tem sentido? Julga que vale a pena utilizá-la para mostrar e recordar a fórmula da área do círculo? Justifique a resposta.

P_1, P_2, P_3 e P_4 responderam afirmativamente e justificaram.

> P_3: Eu acho que ajuda, quebra esta coisa de fórmula jogada, vale muito a pena utilizar para mostrar a fórmula. Ele [o aluno] vai até usá-la com mais facilidade em questões deste tipo.
> P_4: Visualizar a área do círculo por meio da área englobada por circunferências concêntricas é uma boa jogada. Eu gosto muito desta mostração. Eu acho isto bem válido. Uma coisa é o aluno ouvir falar, outra coisa é ele estar vendo. Tem hora que é ver pra crer.
> P_2: de fato, de uma forma racional e empírica constrói-se a fórmula da área.
> P_1: é uma maneira simples e prática de associá-la com o cálculo de uma área conhecida.

No entanto P_5, diferente dos demais, considerou a atividade desinteressante, dizendo que a forma apresentada era "muito complexa e de difícil entendimento para o aluno. Melhor seria investir em situações mais simples e de fácil entendimento." Mas não apresentou sugestão de uma situação mais simples.

Assim, os participantes consideraram que a atividade podia levar ao desenvolvimento da habilidade de visualização. O "ver pra crer" citado por P_4 explicitava a ideia de compreender o raciocínio que levava à fórmula.

4.Você crê que as duas atividades sobre a área do círculo estão bem formuladas? Em caso negativo, dê sugestões para melhorá-las.

Quanto à primeira atividade, todos a consideraram bem formulada. Porém fizeram observações a respeito da segunda. Por exemplo, P_4: "A primeira foi mais fácil, mais tranquila. Quanto à segunda, creio que o aluno poderia apresentar uma dificuldade, isto é, não saber o que seria a coroa circular... o CD... eu fico preocupado com este negócio de CD, porque às vezes a gente pensa que todo mundo sabe, mas tem gente que não sabe; só pensaria em trocar o exemplo." Mas P_2 e P_3 sugeriram apenas que se inserisse a figura de um CD.

Pelas falas, observa-se a preocupação participantes com o reconhecimento da coroa circular no CD, pois, se o aluno não conhecesse o formato do CD, poderia não conseguir imaginar circunferências concêntricas. Isso poderia ser evitado com a sugestão de P_4, isto é, que se levasse um CD para a turma ver.

As respostas mostram que P_2, P_3 e P_4 apresentaram preocupação com o não reconhecimento da figura (coroa), ou seja, com a ausência da habilidade de aplicação no nível de visualização ou reconhecimento, proposta por Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28).

5. Você acha que elas são suficientes para relembrar a fórmula de área do círculo?

Embora P_1, P_2, P_4 e P_5 considerassem que as atividades eram suficientes para relembrar a fórmula, P_3 sugeriu que, para melhor entendimento e fixação da fórmula, se aumentasse a quantidade de questões.

6. As atividades realizadas contribuem para desenvolver habilidades para solucionar as questões do ENEM resolvidas neste Encontro? Justifique.

Pelas respostas dadas, observa-se que todos os participantes consideraram que as atividades realizadas contribuíram para o desenvolvimento de habilidades. P_3: "Os alunos depois de fazerem estas atividades vão conseguir observar direto, coisa que se não as fizessem não observariam." Nota-se o que Lauro (2007) diz sobre percepção, construção e representação, pois a construção das circunferências usando barbantes possibilitou perceber relações entre suas medidas (comprimento e raio) e representá-las com uma constante. P_1: "Facilitam a relembrar as fórmulas de área e comprimento da circunferência, além de ajudar na compreensão visual." P_5: "para desenvolver as atividades os alunos precisam saber as fórmulas para o cálculo do comprimento e área do círculo, que foram bem trabalhados nas atividades."

P_2 se referiu às atividades Reconhecendo π: "pois nos dão habilidades para desenvolver as atividades seguintes." P_4: "Na segunda seria necessária uma complementação (...) não sei se deveríamos lembrar... dar alguma atividade... fazer alguma outra coisa, talvez relembrar o Teorema de Pitágoras antes de apresentar a questão."

E, de fato, a Matemática tem dessas coisas: caso o aluno não conhecesse ou não lembrasse o Teorema de Pitágoras, provavelmente não resolveria a situação-problema.

A respeito da compreensão visual, ela é necessária para deduzir novas informações e, assim, desenvolver a habilidade lógica. No caso, aluno usa informações sobre uma figura para deduzir outras (Quadro 3, p. 46).

7. Elas foram suficientes? Justifique.

P_1, P_2 e P_3 julgaram que as atividades propostas foram suficientes para resolver as situações-problema. Por outro lado, P_4 e P_5 apontaram serem necessários outros conhecimentos, no caso o Teorema de Pitágoras.

Depois que os participantes comentaram todas as respostas, o pesquisador agradeceu a presença deles, tendo marcado a data do próximo Encontro.

3.º Encontro

Ocorreu nas dependências do ICEB III da UFOP, em 26 de maio de 2018, com início às 8h30. Estavam presentes P_1, P_3, P_4 e P_5. Após os cumprimentos habituais, foram apresentados os textos referentes às atividades do dia e, em folhas de papel, as planificações do tetraedro, da pirâmide quadrangular, do tronco de pirâmide e do hexaedro.

A primeira atividade foi construir poliedros e o texto referente a ela se encontra no Quadro 16 a seguir.

Quadro 16-Primeira atividade do 3.º Encontro

Com as folhas que foram entregues, recortem as figuras, dobrem onde está pontilhado e usem a cola para construir os poliedros. Em seguida complete:

Figura	Número de vertices	Números de arestas	Número de faces
Tetraedro			
Pirâmide Quadrangular			
Tronco de Pirâmide			
Hexaedro			

Fonte: Arquivo do pesquisador

Depois de ler as instruções, os participantes começaram a dialogar sobre a construção dos poliedros.

> P_3: Tem o papel cartão, tem de várias cores (sugerindo opções para o material).
> P_5: Engraçado..., a gente olha assim e pensa que é fácil, mas não é tão fácil não...
> P_3: Esta atividade vem no quarto ano do Fundamental...
> P_4: No sexto ano tem.
> P_5: Eu nunca fiz... eu nunca fiz esta atividade. Para mim está sendo ótimo.

Segundo Lauro (2007), as atividades de construção reforçam a percepção, devendo ser desenvolvidas já nas séries iniciais, o que confirmou P_3, ao afirmar ser a atividade própria do quarto ano do Ensino Fundamental. Porém nem sempre é o que ocorria, como se pode constatar na fala de P_5: “Eu nunca fiz esta atividade.”

Pouco tempo depois, enquanto os participantes recortavam as folhas e as colavam montando os poliedros, chegou P_2, justificando o atraso. Ele recebeu as folhas do Encontro. Durante a realização da primeira atividade, foi perguntado aos participantes se eles tinham o costume de realizar atividades semelhantes em suas aulas.

> P_5: Não, eu não tenho...
> P_2: Eu costumo trabalhar com frações no sexto ano. Eu faço dobraduras. No sétimo eu também pego um pouquinho de dobraduras do sexto só para introduzir conteúdo.
> P_3: Eu faço oficinas. Nós já até fizemos, eu e P_4. Nós fizemos um trabalho na escola com sólidos.
> P_1: Tem muito tempo que eu não faço. Talvez eu consiga fazer este ano, porque eu voltei a trabalhar com Ensino Fundamental. É muito difícil.

Pelas respostas dadas, nem todos faziam atividades relacionadas à construção e os que faziam não as utilizam com frequência.

> P_5: Não... Nunca trabalhei...as salas são cheias...
> P_3: Na realidade a gente tem até vontade de fazer isso...
> P_5: A gente tem essa vontade de fazer mas...
> P_3: Há uma distração muito grande.
> P_5: E dependendo da turma... com tesoura na mão... eu fico com medo!
> P_3: Às vezes a gente abre a escola num dia de sábado e faz uma oficina, com um grupo menor. Trabalhamos juntos, eu, P_4 e mais dois professores. E ficou agradável. Este ano, talvez a gente faça de novo.

Os dois participantes, portanto, consideravam que havia dificuldades em trabalhar com atividades desse tipo. E P_5 manifestou receio: “com tesoura na mão... eu fico com medo”, indicando implicitamente o comportamento dos alunos como uma barreira, enquanto P_3 indicava: “há muita distração”. Mas falou na realização de oficinas aos sábados como uma possível solução para trabalhar dessa forma.

As respostas dos participantes refletiram condições de trabalho dos professores na Rede Estadual de Ensino, que normalmente não são adequadas, pois a legislação atual determina quarenta alunos por turma no Ensino Médio. Além disso, as salas em geral não constituem espaço adequado à realização de atividades diferentes de aulas expositivas. E, para conseguir salário compatível com as necessidades, o professor tem que trabalhar em muitos expedientes, o que reduz o tempo para pesquisar sobre propostas inovadoras. Para completar as dificuldades, nas escolas falta material adequado.

Os participantes conversaram um pouco sobre escolhas de turmas e horários em escolas. P_1 começou a completar o Quadro, enquanto os demais estavam acabando de construir os últimos poliedros. E se lembrou de uma frase mnemônica para lembrar a fórmula de Euler:

> P_1: Vamos fazer amor a dois... (V + F – A = 2, fórmula de Euler), você se lembra do professor que falou...
> P_4: Ele era bobo de mais...
> P_2: Vocês estão zoando...
> P_1: Não...é a fórmula, você vai verificar... Vamos – vértice, Fazer – faces, Amor – arestas.

Em seguida, P_4 foi ler o texto da segunda atividade e todos começaram a manusear os sólidos construídos e olhá-los de cima. A segunda atividade está apresentada no Quadro 17.

Quadro 17-Desenhos representando vistas de cima

Olhe e desenhe a vista de cima de cada figura. Responda de acordo com os desenhos feitos. Em quais figuras vistas de cima se veem todas as arestas?

Tetraedro	Hexaedro
Pirâmide Quadrangular	Tronco de Pirâmide

Fonte: Arquivo do pesquisador

Durante a realização da segunda atividade os participantes fizeram comentários.

> P_1: No hexaedro você vê um quadrado.
> P_5: Gente, eu não sei desenhar! Não sei desenhar não... (E ficou observando P_1 desenhar.)
> P_3: Eu fico querendo fazer... É por causa dessa parte do desenho arquitetônico... Eu acabo sendo meio chato. É porque eu fiz Edificações. Tinha um professor lá que eu sou doido com ele até hoje. Desenhar é bacana de mais.

Segundo Lauro (2007), atividades semelhantes a essa se referem à representação (uma das faces apresentadas por Machado no Tetraedro Epistemológico), que é feita por meio de desenhos de objetos percebidos ou construídos. De acordo com Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28), a habilidade de desenho no nível de ordenação ou dedução informal indica que "dadas certas figuras, o estudante é capaz de construir outras figuras relacionadas as figuras dadas".

Enquanto P_5 manifestava dificuldade quanto ao Desenho Geométrico, P_3 demonstra entusiasmo: "Eu fico querendo fazer...". De acordo com Lauro (2007, p. 27), "a representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção". Como P_5 manifestou na atividade anterior que nunca havia feito construção, é possível afirmar, com base em Lauro (2007), que essa lacuna o prejudicou na realização da atividade. O oposto ocorreu em relação a P_3: como já trabalhava com oficinas e fez o Curso Técnico em Edificações, a representação dos sólidos foi favorecida pela sua percepção e construção.

> P_5: Eu estou copiando do P_1.
> P_3(a P_5): Tem umas habilidades que talvez você não tenha.
> P_5: Eu não tenho, não...

Oliveira (2018) considera a habilidade como a possibilidade de um indivíduo concretizar algo, podendo ser um desenho entre outras atividades.

P_5 olhou para os desenhos de P_4:

> P_5: P_4, você gosta de desenho?
> P_4: Não...
> P_5: Eu sou péssima.
> P_4: Eu fiz Desenho Técnico!

P_3 achou estranho P_4 não gostar de desenhar e ter feito desenho técnico.

> P_3: P_4 você fez Desenho Técnico e não gosta?
> P_4: Não! O professor 'xingava' demais. Eu não me lembro mais do nome dele... Ele 'xingava' muito. A minha letra nunca foi bonita... Eu com 15 anos de idade eu até tremia, tinha medo dele.

P_3 e P_4 fizeram o Curso Técnico, no entanto desenhar para P_3 se tornou um prazer e para P_4 o mesmo não ocorreu. Ambos apontaram um professor como a causa disso. A seguir, P_2 falou que não estava conseguindo encontrar tudo que foi pedido. P_4: "Onde você está?" P_2: "No número de arestas." P_4 começou a auxiliar P_2: "Faz assim... conta com ele [hexaedro] parado." P_4 mostrou as quatro arestas de cima: "Embaixo também tem quatro, agora é só contar as laterais.

> P_2: Pessoal, isto aqui não é só um pontinho não.
> P_3: Olha de cima. Imagina você de cima aqui.
> P_2: Ah!

> P_3: Olha de cima assim... O que você está enxergando?
> P_2: Estou enxergando que eu não sei nada.
> P_3: É como se fosse uma planta baixa.

De acordo com Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28), na habilidade de aplicações o aluno "identifica formas geométricas em objetos físicos". P_3 conseguiu visualizar os desenhos e tentou explicar a P_2: "É como se fosse uma planta baixa.". Ele queria que P_2 pudesse associar algo que provavelmente conhecia, com o intuito de facilitar a compreensão.

Enquanto P_1, P_3 e P_4 aguardavam P_2 e P_5 finalizar a atividade 2, P_3 comentou:

> Seria interessante aquela ideia... a gente ter umas escolas aqui com menos alunos no Fundamental. É interessante o menino ficar mais tempo na escola, mas... não vai ser uma Escola da Ponte, criar um nome aqui para o Brasil. Seria com oficinas... criar o menino lá dentro. O menino ia desenvolver as habilidades. Você dá um triângulo retângulo, por exemplo, com as medidas dos catetos... 6 e 8, pedindo a hipotenusa, o menino para lá... e deixa a fórmula, então a resposta da 100. Você pergunta: Faz sentido 100? Se aqui tem 6 e aqui tem 8, faz sentido 100?... Se ele tivesse trabalhado aqui com a régua, desenhado esse triângulo, olha que bacana: ele ia perceber isso! [referindo-se ao erro]. Muitas vezes ele faz o cálculo mecânico.

P_3 mostrou a necessidade de serem menores as turmas para que o professor pudesse dar mais atenção a cada aluno. Também indicou que o aluno devia ter mais tempo para aprender, o que manifestou de forma explícita: "criar o menino lá dentro". P_3 também falou do uso da régua, que auxiliaria o estudante a desenvolver a percepção: "o menino ia desenvolver as habilidades (...) Se ele tivesse trabalhado aqui com a régua, desenhado esse triângulo, olha que bacana ele ia perceber isto!". P_5, após a fala de P_3, comentou: "Isto é bom até para quem vai se formar como Professor de Matemática. A gente às vezes também vai mecanicamente. A gente ensina do jeito que a gente aprendeu...". Segundo Lauro (2007), a percepção ocorre por meio de atividades empíricas e relaciona-se diretamente com a construção, a representação e a concepção.

Reis (2012), afirma que o medo que os professores têm de mudar de postura pode prejudicar os alunos, o que os leva muitas vezes a passar a carreira sem grandes alterações. Com isso, vão ensinando sempre da forma como aprenderam.

Depois que responderam à pergunta da atividade 2 (Em quais figuras vistas de cima se veem todas as arestas?), foi entregue a cada participante um dos poliedros de Platão e pedido que o segurasse. A Figura 12, a seguir, mostra os sólidos.

Figura 12-Poliedros de Platão

Fonte: Arquivo do pesquisador

O Quadro 18, a seguir, apresenta o texto da atividade 3.

Quadro 18-Terceira atividade do 3.º Encontro

Observe os poliedros que foram entregues (poliedros de Platão).

a) Se você notou neles alguma característica específica, diga qual.

b) Indiquequantas faces, vértices e arestas possui cada um.

Poliedro	Número de Faces (F)	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	F + V – A
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Não foi coincidência a expressão F + V – A =? É a Fórmula de Euler. Escreva-a.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Foi pedido a cada participante revezar com os demais o poliedro entregue. Depois da análise, devia responder às perguntas da atividade. Também foi sugerido que, para o icosaedro, uma pessoa o segurasse para facilitar a contagem. P_3: “Só porque eu sou o mais velho, você me deu o mais difícil...” (Sorriu brincando.)

Foi pedido que fizessem juntos. P_5 passou para P_3 o hexaedro e começaram a dialogar:

> P_3: Hexaedro!
> P_5: Nossa ... ele tem muita coisa.
> P_3: Bonitinho de mais!
> P_5: Eu não gosto muito de Geometria não.... É um mal...
> P_3: Você tem que quebrar isto. Isso é maravilhoso. É muito melhor do que a Álgebra.
> P_5: Eu prefiro... mil vezes. Mesmo com a quantidade de contas da Álgebra.
> P_3, (olhando para o hexaedro): Você esquece as contas.
> P_5: Bonito é...

P_4 e P_2 estavam analisando o dodecaedro e P_1, o icosaedro. P_1 disse a P_3: “O icosaedro tem 20 faces”. P_3: “E quantas arestas? Vértices?” P_1 foi contando e chegou a 12 vértices.

> P_3: 12 vértices.
> P_1: E as arestas?
> P_3: Vamos ver se a gente chega nas 30.
> P_1: 1, 2, 3, 4, 5. 5 aqui, com 5, 10 indicando as de baixo. (Foi manuseando e contando.)

P_5 e P_3 ajudaram P_1 a contar as arestas

> P_5: Com 5 aqui... (e indica um lado), 15.
> P_3: 10 e 10 , 20.
> P_1: Agora conta aqui (girando o sólido): 1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10. Dá 30.
> P_5: 30.
> P_3: Está certo!
> P_2: Gente, me ajuda aqui, eu não consegui entender por que o tetraedro são 6 faces, 4 faces... onde ele está?
> P_3: Olha ele aqui.
> P_2: É por isso... eu estou olhando o hexaedro.
> P_1 a P_4: Você contou aqui (pegando o dodecaedro).
> P_4: Vértices contei 24.
> P_1: 24 vértices?
> P_4: Não sei... eu contei 24. Conta de novo.

P_3 começou a contar junto com P_1 e P_4.

> P_3: Vocês estão com dúvida?
> P_4: Eu estou.
> P_3: Mentira!...Vamos lá: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, embaixo, 10.
> P_1 (contando ao lado): 1,2,3,4,5,6. Com mais 6 aqui, 12.
> P_2: Não... 22.

P_3: 22.
P_1: 6 e 6, 12 com 10, 22.
P_3: O que está faltando aí então?
P_4: Nada...
P_4: Arestas... conferir...
P_3: Arestas, vamos lá.
P_3: 1 embaixo e 1 em cima.
P_1: 5 embaixo e 5 em cima.
P_4: Arestas?
P_3: Não... eu estou falando faces.
P_4: Faces é 12 com 12.
P_3: 12?
P_5: É uma em cima e uma embaixo.

P_4 apoiou o dodecaedro na mesa e foi rodando-o e contando as faces.

P_1: Vocês estão contando o quê gente?
P_4: Faces.
P_1: As faces a gente já contou ...12.
P_3: É porque eu fiquei na dúvida.
P_4: Agora falta aresta.
P_1: Vértices foi 22 mesmo?!
P_4: É.
P_3: Agora vamos contar as arestas.
P_4: 5 (apontando para a parte de cima) com 5, 10; com 5, 15. (Foi contando até 30.)
P_2: Dá 32.
P_3: Tem alguma coisa errada.

P_3 pegou o sólido, começou a contar e chegou a 30.

P_3: Vamos rever o número de vértices.
P_4: Vamos começar do roxo que a gente não conta ele de novo. (Começou a contar com a ajuda de P_3 e chegaram a 20).
P_3: Deu certo agora, fechou!
P_4: O número de arestas é 30.
P_5: Estou colando de vocês.
P_3: Pode colar...

Todos trabalharam em equipe e, depois que analisaram cada um dos poliedros de Platão, foram completando o Quadro da letra b. Na sequência, foram respondendo às perguntas. Depois foi apresentado um novo sólido e pedido que todos o pegassem e observassem, para a atividade quatro.

Apresenta-se a seguir o texto da atividade quatro no Quadro 19.

Quadro 19-Atividade com Tronco de Pirâmide

Faça um desenho do que é visto do sólido apresentado.

Visto de cima	Visto de baixo
Visto da lateral esquerda	Visto da lateral direita
Parte da frente	Parte de trás

Fonte: Arquivo do pesquisador

Logo no início da atividade, P_1 perguntou: “Isto é um cartucho de impressora?”. Foi respondido que sim (encapado). P_5: “Eu só vou dar conta se eu tirar a foto e colar.” Foi sugerido a P_5 olhar com calma, vendo cada face indicada.

> P_1 para P_4: Você fez como se fosse uma coisa só?
> P_4: Não... eu tenho que desenhar isto aqui do lado mas não sei como vou colocar isto aqui.
> P_5: Beleza... eu consigo ver, só não consigo desenhar.
> P_3: Desenha o quadrado. O que mais você está vendo de cima?
> P_5(sorrindo): Bom... além do quadrado eu ainda vejo alguma coisa aqui do lado.
> P_4 a P_5: Desenha uma aba, alguma coisa assim.

P_1 pegou o sólido e ficou em pé. P_5 também.

> P_1: Olha aqui de cima... esquece as linhas... Planifica isto aqui... Imagina isto aqui um plano só. Você não está vendo um retângulo... (E mostrou com a mão as laterais).
> P_5: Entendi o que você quis dizer.

Observa-se que P_5, apesar de manifestar habilidade visual no nível de visualização ou reconhecimento, pois reconhecia figuras diferentes de um desenho, manifestou dificuldade na habilidade de desenhar, pois tinha dificuldade de fazer esquemas de figuras identificando as partes. Por exemplo: “Eu só vou dar conta se eu tirar a foto e colar”. E também: “Eu consigo ver, só não consigo desenhar.”

Em outro momento, P_1, que estava sentado na frente de P_4, levantou o sólido de modo que via uma lateral, enquanto P_4 via a outra.

> P_4: Então... não dá para ver outra coisa não.
> P_1: Eu estou vendo um retângulo.
> P_5: A gente vê um retângulo, porém com um desvio em cima.
> P_3: Este de baixo aí eu colocaria fundo...
> P_1 (segurando o sólido): Esta é a lateral direita ou esquerda?
> P_3: Você tem que se basear no desenho. (Foto que estava na folha de atividade).
> P_3: Poderia pôr uns números nele (o sólido), para não ter dúvida na hora, ou escrever na frente LD, LE...Acho que facilitaria a visualização.

Como os participantes estavam sentados em torno da mesa, cada um tinha uma visão diferente do sólido, logo a observação de P_3 foi pertinente, pois a identificação de cada lado facilitaria a visualização independentemente de onde estivesse sentado cada participante.

Enquanto iam realizando a atividade de desenho, o diálogo prosseguia:

> P_4: Confesso..., eu gosto é de Álgebra. Eu gosto é de Álgebra, tá.
> Geometria não gosto muito não...
> P_2: Também não gosto muito não.
> P_5: Eu sou igual a P_4.
> P_1: Então você está igual a seus alunos com isso aí.
> P_4: Eu falo para eles quando eu dou Geometria Espacial, isso aqui...
> P_1: Vai dar Álgebra para um menino de sexto ano. Coloca na cabeça dele.

Nessas falas se observou que P_2, P_4 e P_5 declaram não gostar muito de Geometria, uma das temáticas do Ensino Fundamental, que deve ser ensinada em todos os anos, segundo o Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2018). Portanto o professor tinha de tomar cuidado ao abordar um assunto de que declarava não gostar, pois corria o risco de transformar coisas simples em complexas aos olhos dos alunos, além de influenciá-los por ser para eles um referencial.

Quando todos os participantes confirmaram ter concluído a atividade quatro, foi entregue um globo para a quinta atividade e indicado que deviam tirá-lo da base e manuseá-lo com as pontas dos dedos.

A Figura 13, a seguir, apresenta um dos participantes manuseando o globo.

Figura 13-Participante localizando a linha do Equador

Fonte: Arquivo do pesquisador

O Quadro 20 apresenta o texto, as cinco perguntas e a imagem referentes à quinta atividade.

Quadro 20: Quinta atividade do 3.º Encontro

Usando o globo que foi entregue, faça o que é pedido.
a) Localize a linha do Equador e, em seguida, a linha do Trópico de Câncer e a linha do Trópico de Capricórnio. Geometricamente o que se pode falar sobre elas?

b) Localize a linha que corresponde ao Meridiano de Greenwich. O que se pode observar geometricamente, comparando-o com os demais meridianos?

c) Retire o globo do apoio e segure com as pontas dos dedos indicadores. Observe de cima. Em seguida, apoie-o na mesa de modo que você veja a linha do Equador de forma perpendicular. Depois responda: Existe alguma posição que possibilite ver a linha do Equador sobreposta a si mesma?

d) Segure novamente o globo e localize o Brasil. Observe as linhas verticais que o cortam (os meridianos). Existe alguma posição em que é possível ver que a linha do meridiano consegue ficar sobreposta a si mesma?

e) Há um ponto a 13 km da cidade de Quito, no Equador, conhecido por *Metade do Mundo,* que registra a latitude de 00º 00’ 00’’. É no encontro da linha do Equador, que deu origem ao nome do país, com o meridiano a 80º a oeste do meridiano de Greenwich. Usando as informações, procure esse ponto no globo, colocando este em uma posição que permita que o ponto esteja no centro do globo. Observe de cima para construir o que você está vendo, o ponto e a projeção do globo, marcando a linha do Equador e o meridiano que o corta, sendo permitido usar o compasso.

Imagem de ponto de latitude 00º 00’ 00’’ na cidade de Quito, Equador

Fonte: Arquivo do pesquisador

No começo da quinta atividade, foi lida a primeira pergunta para os participantes (Localize a linha do Equador, em seguida localize a linha do Trópico de Câncer e a linha do Trópico de Capricórnio. Geometricamente o que se pode falar sobre elas?)

P_1 e P_4 seguraram o globo, cada um de um lado, e localizaram a linha do Equador. P_1: “São paralelas...” P_3 completou e questionou: “Paralelas e equidistantes também. Mais nada não?!” P_1: “Em relação à linha do Equador.”

P_4, após observar que a segunda pergunta se referia ao meridiano de Greenwich, segurou o globo e em seguida leu a pergunta (Localize a linha que corresponde ao Meridiano de Greenwich. O que se pode observar geometricamente, comparando este meridiano com os demais?) E mostrou o Meridiano de Greenwich a P_1, que estava sentado à sua frente:

> P_1: Eles são perpendiculares?!
> P_4: São perpendiculares à linha do Equador.
> P_3: São paralelos e equidistantes também.” (E começou a escrever a resposta.)
> P_1: Pediu para comparar com os demais meridianos.
> P_3: Espera aí.... com paralelas aqui agora, estamos falando besteira. Epa, epa, epa... Estamos falando bobagem.
> P_4: São paralelas se olharmos só aqui...
> P_3: Não são paralelas não. Estamos falando besteira. (Mostrando que eles davam volta no globo.)

P_3 e P_2 observaram que erraram e apagaram as respostas

> P_3: Eles vão...
> P_4: Nós focamos só no meio.
> P_3: Eles vão se tocar em dois pontos... Olha o que vai acontecer aqui... (Mostrando os polos) Eles não são paralelos...
> P_3: Eles vão ter dois pontos comuns... os pontos: norte e sul... os dois extremos e vão ser equidistantes... Olha... Ele passa para lá a mesma quantidade que ele passa para cá. (Indicando com o dedo.)
> P_1: Eles partem da mesma origem. É isso?!
> P_3: Eles seriam os extremos comuns! Não sei se é este o termo... E a mesma distância que passa de um lado, passa do outro.
> P_3: Você vai imaginando aí... (E gira o lápis para explicar.)

P_1 segura o globo e o observa, olhando para o polo norte, diz:

> P_4: Eles não terminaram de fechar, mas fecha aí. (Referindo-se às linhas que descreviam os meridianos.)
> P_3: Eles vão ter sempre dois pontos comuns, os dois extremos comuns. Não sei se posso colocar assim... vamos usar os termos: polos. Eu acho que fica bom.
> P_2: Eu acho que a gente tinha que explicar o porquê da abertura e do fechamento.
> P_3: Não... está pedindo para a gente falar o que podemos observar geometricamente. Possuem dois polos comuns e... , ao cortar estes dois polos irão manter a mesma distância.
> P_2: São 24 linhas para dividir o globo em 360...
> P_1: Para dividir em faixas iguais.
> P_2: A gente poderia falar que existem 24 linhas equidistantes, eu queria falar em questão de grau...
> P_3: Do jeito que ele está de um lado, ele está do outro... O mesmo ângulo com o meridiano de Greenwich. O mesmo ângulo que ele faz de um lado, ele vai fazer do outro.
> P_2: É... será que entraria?
> P_3: Sim...faz sentido, porque... (Mostra no globo.) O mesmo ângulo que faz de um lado, faz do outro.
> P_2 para P_1: O que você colocou?
> P_1: Então... ele divide em setores circulares iguais.
> P_2: Seria legal então escrever: possuem dois polos em comum e divide o globo em setores circulares...
> P_3: De mesma área.
> P_2: Imaginação é tudo!
> P_3: E de mesmo grau com Greenwich.

Desenvolvida a segunda pergunta (letra b), foi possível observar que todos os participantes usaram a habilidade visual no nível de análise, pois foram percebidas as propriedades de uma figura como parte integrante de uma figura maior. E também no nível de dedução formal, pois foi usada a informação sobre uma figura para deduzir outras informações. Além da habilidade de visualização, manifestou a habilidade de aplicações no nível de reconhecimento, pois se identificaram formas geométricas em objetos físicos. Um exemplo é a fala de P_2: “Imaginação é tudo!”. Implicitamente houve referência às habilidades mencionadas para a compreensão do globo. Outra habilidade observada foi a percepção. P_3, ao observar o globo, percebeu que tinham tirado conclusões precipitadas quanto a serem paralelas as retas:

“Estamos falando besteira (...) Estamos falando bobagem.” Novamente P_3: “Do jeito que ele está de um lado, ele está do outro...” Isso manifestou implicitamente a simetria em relação ao meridiano de Greenwich.

Dando continuidade à atividade, foi informado que todos deveriam manusear o globo para desenvolver a terceira pergunta. P_3 leu a terceira pergunta: Retire o globo do apoio e segure com as pontas dos dedos indicadores. Observe de cima. Em seguida, apoie-o na mesa de modo que você veja a linha do Equador de forma perpendicular. Depois responda: Existe alguma posição que possibilite ver a linha do Equador sobreposta a si mesma?

P_2 recebeu o globo de P_4 e ficou observando.

> P_4: Sobreposta a ela mesma?!
> P_3: Olha para o globo e comenta: Por isso que este aí é bom... (pois é transparente) Porque os outros você não vai ver...
> P_4: É isso que eu pensei.
> P_2 disse: Assim não tem como ver a linha do Equador. (Colocou o dedo no polo norte e apoiou o globo na mesa.)

P_4, girou o globo para que P_2 pudesse observar.

P_4, com as pontas dos dedos, segurou o globo, que ficou perpendicular à mesa.

> P_5 leu: Apoie na mesa de modo que fique perpendicular.
> P_2: Então... pediu para observar de cima.
> P_4: Ache a posição aí...
> P_3: Põe na mesa de modo que veja a linha do Equador de forma perpendicular.
> P_2: A mim?
> P_3: Sim.
> P_2: Em seguida responda...
> P_3: Existe alguma posição?... Que você vê a linha do Equador sobreposta a ela mesma?

P_2 viu e passou para P_1.

> P_1: O globo tem que ser transparente! (Naturalmente era importante saber que o globo tinha de ser transparente.)
> P_4: Se não fosse, não teria jeito não, mano.

P_1 passou o globo para P_5, que observou e o passou para P_3.

> P_2: Engraçado, na minha cabeça a resposta está se formando e a gente fica numa insegurança para colocar!

P_3 se levantou para ver melhor o globo e falou:

> P_3: A gente vê o pessoal de Geografia penando para fazer cartografia e às vezes a gente ouve: Eu passo aperto para dar esta aula.

Por essa fala, entendeu-se que alguns professores demonstravam dificuldade ao trabalhar com o globo. A atividade exigiu a habilidade de aplicações proposta por Hoffer (1981) apud Vieira (2010) nos cinco níveis de van Hiele.

> P_1 a P_3: Você consegue ver onde ela [a linha] se sobrepõe? A linha do Equador sobreposta a ela mesma?!...
> P_3 responde: Tampa um olho! Na verdade, eu tenho que estar em cima certinho, do ponto de vista certinho. De qualquer outra posição eu vejo, desde que eu não esteja em cima certinho, de qualquer outra posição eu vejo. De lado eu vejo...do outro lado eu vejo... isso!
> P_4: É o contrário.
> P_5: Acho que é o contrário do que você falou. É em cima dela mesma.
> P_3: Desde que eu fique em cima, a minha visão fica exatamente em cima.
> P_1: É só seguir a orientação dada.
> ....
> P_3: Existe, quando olhada de cima, ao olhar diretamente.
> P_3 (justifica sua resposta sendo seguido pelos demais e termina a atividade dizendo): Achei muito interessante isto!

Na sequência foi lida por P_5 a quarta pergunta (letra d): Agora, segure novamente o globo e localize o Brasil. Observe as linhas verticais que o cortam (os meridianos). Existe alguma posição em que se faz possível ver que a linha do meridiano consegue ficar sobreposta a si mesma?

> P_2 prontamente: O raciocínio é o mesmo do outro.
> P_5: É isto que eu pensei, é a mesma coisa do outro.
> P_1: Depende... Observe as linhas... Você vai olhar as linhas.
> P_2: Você não pode olhar só uma, será?!
> P_1: Não... são as linhas. Você vai olhar se a linha do meridiano consegue ficar sobreposta...
> P_5: De cada meridiano separado.

P_1 ficou de pé e segurou o globo de forma que o meridiano de Greenwich ficou perpendicular à mesa, e o observou. P_5 se levantou para enxergar de cima o globo.

> P_1: Olha... a gente vai ver o que a gente está vendo aqui.
> Para P_5: O que a gente está vendo aqui? Um círculo... bem aqui.

P_2 pediu que aguardassem para fazerem juntos.

Todos os participantes responderam a pergunta com facilidade e passaram para a quinta pergunta.

P_3 leu a quinta pergunta: Há um ponto a 13 km da cidade de Quito, no Equador conhecido por “Metade do Mundo”, que registra a latitude de 00º 00’ 00’’. É o encontro da linha do Equador, que deu origem ao nome do país, com o meridiano a 80º a oeste do meridiano de Greenwich. Usando as informações, procure este ponto no globo, colocando este em uma posição que permita que o ponto esteja no centro do globo. Observe de cima para construir o que você está vendo: o ponto e a projeção do globo, marcando a linha do Equador e o meridiano que o corta, sendo permitido usar o compasso.

Imediatamente P_1 colocou o globo no meio da mesa e mostrou o ponto de latitude 00º00’00” no Equador. E disse: “Aqui está visível. Então a gente vai ver o que a gente está vendo aqui. (mostra com o dedo). Um círculo é a visão que a gente tem, o meridiano que passa por ele, o único referencial é o Greenwich”.

O pesquisador explicou: um meridiano é uma linha imaginária que percorre a superfície do globo de polo a polo (de sul a norte). Nas produções cartográficas eles são apresentados de maneira a representar, melhor, o tema trabalhado. Os fusos horários fazem uso de meridianos com 15º de distância para estabelecer limites teóricos de tempo. No globo, por opção do autor, os meridianos estão apresentados de 10º em 10º, já os fusos horários apenas nos múltiplos de 60º.

Então P_3 observou: “pede-se para a gente desenhar”. E P_1 confirmou: “Desenhar isto aí”.

Cada participante pegou o compasso e começou a desenhar. E eles iam conversando.

> P_1: Então... O que você está vendo aí?
> P_3: Marcando a linha do Equador.
> P_1: A visão que a gente tem...
> P_3: Dá o centro certinho... Você vai desenhar o círculo, vai dividir... é isto.
> P_4: Eu não estava conseguindo abstrair...

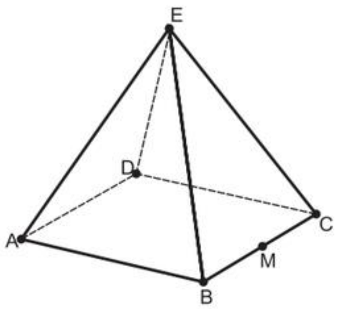
Segundo Lauro (2007, p.26) “a percepção pode ocorrer por meio de atividades empíricas”. A atividade proposta buscou trabalhar, de certa forma, habilidades, como a percepção e a visualização. Esta atividade buscou desenvolver a abstração.

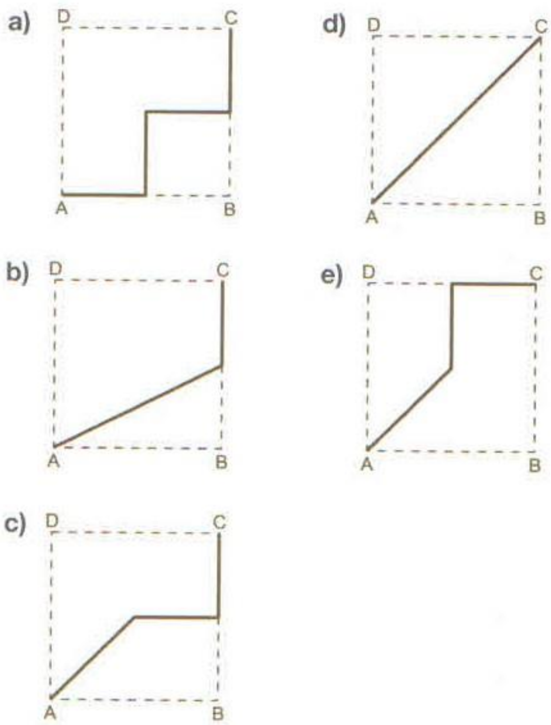
> P_4: Eu não estava conseguindo abstrair....
> P_5: Eu não vou conseguir!

Dada as dificuldades em fazer o desenho, foi sugerido a P_5 que segurasse na parte de cima do compasso e firmasse para poder fazer o círculo, sem mexer nas hastes durante a construção. P_5 propôs fazer rascunho atrás da folha. Só depois começou a desenvolver o desenho.

As questões retiradas do ENEM estão no Quadro 21.

Quadro 21-Questões do ENEM no Terceiro Encontro.

<table>
<tr>
<td>
(Enem 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.


O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto m, e depois de M a C.
O desenho que Bruno deve fazer é


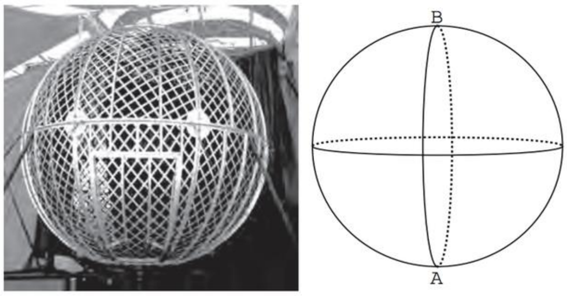
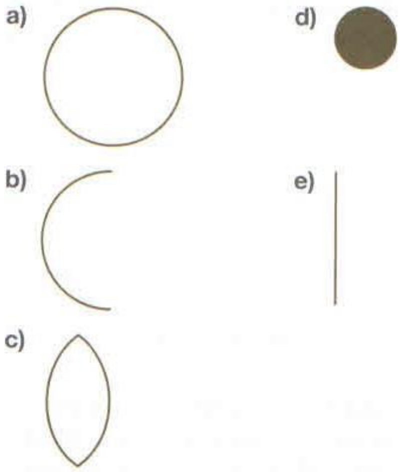
</td>
<td>
(Enem 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.


Figura 1 Figura 2
Na figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.
Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em:29 fev.2012
A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é MELHOR representada por


</td>
</tr>
</table>

Fonte: INEP (2018, s.p).

Os participantes leram e resolveram com facilidade o primeiro item e comentaram

> P_3: Está fácil.
> P_5: É...
> P_3: Até aí tranquilo...
> P_4: É este aqui... a letra c... eu fui por eliminação.
> P_3: Você foi por eliminação.
> P_4: Eu estou achando que é este.
> P_3: Aí ele vai te perguntar a ideia da visão lá... te ajuda.

Cada participante acabou de solucionar a primeira situação-problema proposta e passou para a segunda. O desenvolvimento foi imediato.

> P_5: Letra e.
> P_4: Letra e.
> P_5: Pensando na questão do globo.

Depois os participantes responderam a perguntas feitas pelo pesquisador a respeito das atividades realizadas. Primeira pergunta: Você considera importante construir os poliedros para compreender e localizar as faces, vértices e aresta? Por quê? P_1, P_3, P_4 e P_5 apontaram o desenvolvimento da habilidade visualizar/visualização em suas respostas.

> P_1: Eu acho que os alunos precisam deste contato... para melhor visualização. Não adianta você apresentar a figura planificada ou fazer a projeção... o desenho dela. É interessante na construção dos conceitos, e a gente vê em geometria que é importante que o aluno participe desta construção. Que ele construa o sólido, que ele visualize cada elemento, cada característica dos poliedros.

P_3: "Considero importante a construção, pode nos ajudar a visualizar, entender o que é face, o que que é aresta, o que que é vértice (...) na hora que o aluno vai dobrar a face; ele vai sentindo a aresta, vai dobrando e vai enxergando isto." P_2 considerou importante a construção dos poliedros afirmando: "a prática auxilia e muito a fixação de conteúdos". E P_4: "a manipulação ajuda a identificar e visualizar os vértices e as arestas". Concordando com os demais, P_5 considerou "importante a construção dos poliedros para melhor visualização e compreensão das figuras, principalmente arestas e vértices".

P_2 não mencionou diretamente a importância da construção, mas deixou implícito considerar que a prática auxilia na fixação de conteúdo. Lauro (2007, p. 26) afirma que "em certo sentido, a construção reforça a percepção". Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28) reconhece a importância da habilidade visual em cada um dos níveis propostos por van Hiele.

Foi perguntado na segunda atividade: Você acredita que desenhar os sólidos vistos de cima é um procedimento que auxilia na compreensão da projeção ortogonal? Por quê? Todos aceitaram que auxiliava na compreensão da projeção ortogonal.

> P_1: É a representação do que você vê.
> P_2: A compreensão das partes para construir este sólido facilita muito a visualização em 2D e 3D.
> P_4: Eu acho que é necessário até um pouco de abstração para você conseguir imaginar um sólido por completo. Você olhar para ele sob determinadas posições e ver como que ele seria no todo, a partir daquela posição ali é muito importante.
> P_3: Ajuda sim, pois é possível visualizar, inclusive desenhar a projeção; vai ter uma aplicação lá na física... a gente tem as forças lá... muitas vezes o professor pede para o aluno projetar aquela força e ele não sabe o que é uma projeção.
> P_5: De cima percebemos melhor os pontos principais da figura.

Nessas respostas são destacadas duas habilidades: representação e visualização. Como representação, Lauro (2007, p. 27) faz referência “à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos”, o que é abordado em aulas de Desenho Geométrico, favorecendo outras habilidades, como a percepção e a visualização. A visualização, tanto bidimensional quanto tridimensional, facilita a compreensão e, como disse um dos participantes, tem aplicação também em outra área do conhecimento, como a Física.

Terceira pergunta: Você encontra alguma utilidade na manipulação dos poliedros? Se considera, quais? Se não considera, por quê? Todos os participantes afirmaram que havia muita utilidade na manipulação dos poliedros.

> P_1: Ao manipular os poliedros podemos perceber melhor suas características, conseguimos visualizar de maneira mais clara cada um dos seus elementos.
> P_5: Podemos perceber, ver e contar as faces, arestas e vértices, facilitando a compreensão das figuras.
> P_4: Pois é necessário identificar todos os lados e as posições do sólido. Também é bom para trabalhar a planificação do tronco.

É importante destacar o que diz P_2:

> Há muita utilidade na manipulação dos poliedros: tanto a construção quanto a manipulação. Isto é muito importante porque a imagem mental que você faz no quadro é uma, mas a imagem mental que você tem quando você está tocando... tem uma área da matemática que fala sobre isto: a multimodalidade... quando você toca, vê, sente o cheiro de algo... à fixação e <u>a construção desta imagem fica muito melhor</u>. (grifo do pesquisador)

É importante também destacar o que diz P_3:

> podemos entender a planificação, como são formados [os poliedros] possivelmente vai facilitar muito os cálculos para que não aconteça aquela coisa: fez e não entendeu. Acho que isso é fundamental, se possível trabalhar desde pequenininho, desde o fundamental um, [que o estudante] já comece a conviver com espaço, não só com a geometria plana. Hoje vários professores já desenvolvem isso no ensino fundamental, o que posteriormente facilitará cálculos de volume e áreas.

Por essas respostas, nota-se que as habilidades de percepção e visualização são pontos marcantes nas atividades de manipulação. A percepção, conforme apontou P_3, é indicada por Lauro (2007, p. 26) como um processo que "precisa ser desenvolvido desde as séries iniciais do ensino".

Quarta pergunta: A atividade 3.4 pode auxiliar na habilidade de visualização? Explique sua resposta. Todos concordaram com o lado positivo dessa atividade, como P_2:

> fazer a representação das partes ajuda a visualizar melhor. Quando você pega o tronco e o recorta em partes, a construção reversa se torna muito mais fácil, quando você pega as partes e constrói o todo, ou pega o todo e vai construindo as partes, é superimportante.
>
> P_4: é necessário identificar todos os lados e as posições do sólido.
> P_5: vendo a figura de ângulos diferentes, conseguimos observar separadamente as partes que compõem a figura.
> P_1: é bom para você trabalhar também a planificação, você enxerga as características...
> P_3: foi feita a visualização de vários ângulos: de cima, de baixo, de frente, de trás e laterais.

Essas justificativas indicaram que a atividade em consideração servia para desenvolver habilidades de representação e construção. Lauro (2007) entende que são habilidades ligadas diretamente à percepção e à concepção. Segundo Machado (1998), fazem parte do Tetraedro Epistemológico (p.43), com o qual se pode compreender e aprender Geometria.

Quinta pergunta: Você vê alguma utilidade na atividade 3.5 (relativa ao globo)? Se vê, qual? Se não vê, por quê? Todos os participantes encontraram utilidades. P_1 e P_3: "aplicação na Matemática e também na Geografia." P_3 se referiu à Cartografia. Mas não especificaram as aplicações. P_2 e P_4 falaram da possibilidade de observar "o paralelismo entre os trópicos". P_5 indicou poder notar "pontos equidistantes e setor circular".

Sexta pergunta: Você pode sugerir alguma atividade relativa ao globo e à circunferência para desenvolver a habilidade de visualização espacial?

> P_4: comparar as horas em diferentes regiões ao redor do globo.
> P_5: a distância em graus entre elas, trabalhar com os alunos a parte de Circunferência e setores circulares.
> P_3: podemos explorar alguns pontos em relação ao meridiano de Greenwich os ângulos e sua localização [latitude].

4.º Encontro

Foi realizado nas dependências do ICEB III da UFOP, em 16 de junho de 2018, data prevista. Em vista disso, na véspera, foram contatados os participantes, mas P_2 e P_4 não puderam confirmar a presença devido a motivos particulares. Assim, o texto das atividades que seriam realizadas foi enviado para as respectivas escolas. Como foram recebidas as respostas uma semana depois, estão descritas junto com as dos outros participantes. As atividades tiveram início às 8h30.

Após os cumprimentos habituais, foram distribuídos 18 cubos de mesma medida para uso comum e 7 folhas para uso individual contendo os textos das atividades a serem realizadas. Uma folha continha a planificação de um paralelepípedo e as demais apresentavam textos de explicação. O da primeira atividade está no Quadro 22, a seguir.

Quadro 22-Primeira atividade do 4.º Encontro

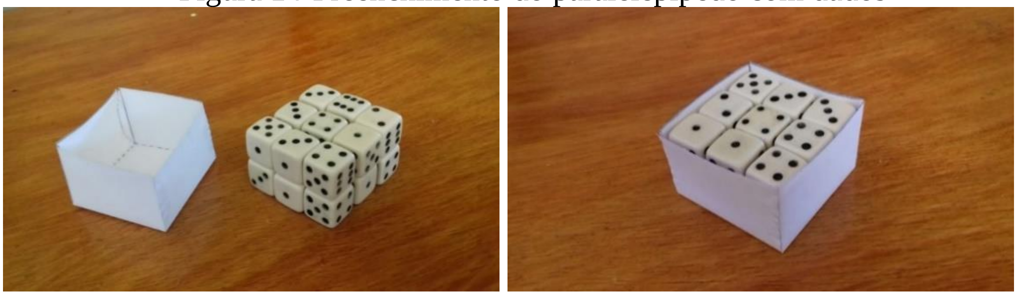
1. Com a folha que foi entregue, construa um paralelepípedo. 1.1. Para calcular o volume do paralelepípedo, use os cubos (dados) de uma unidade de volume (uv) cada e preencha-o com eles. Vamos analisar a situação. Para preencher o paralelepípedo devem ser utilizados 18 cubos de uma unidade de volume (uv) cada. Logo o volume do paralelepípedo é 18 uv, pois são 9 cubos embaixo e 9 em cima e 9 é igual a 3 vezes 3, que é a área da base do paralelepípedo. A altura do paralelepípedo é igual a 2 uc (unidade de comprimento). E 18 uv é igual a 9 ua (unidade de área) vezes 2 uc. É possível imaginar que o volume do paralelepípedo pode ser expresso pelo produto: área da base vezes a altura, isto é, V = a.b.c. Outro modo de obter o volume é sobrepor c retângulos unitários de base ab, preenchendo a caixa. V= a.b.c Embora sem ter sido demonstrado, mas mostrado por meio de exemplo, conclui-se que o volume do paralelepípedo pode ser calculado com a fórmula: área da base x altura. Exercício de aplicação da fórmula Uma piscina de brinquedo de criança tem as seguintes dimensões: 10 cm de comprimento, 4 cm de largura e 5 cm de profundidade. Qual é o volume de água que ela pode conter?

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Depois que foi lida a primeira atividade, P_3 preencheu com os dados o paralelepípedo que montou. A Figura 14, a seguir, apresenta uma fotografia da construção feita por P_3.

Figura 14-Preenchimento do paralelepípedo com dados



Fonte: Arquivo do pesquisador

P_1 e P_5 observaram a construção feita por P_3 e iniciaram a aplicação da fórmula indicada. Instantes depois, todos chegaram à resposta certa.

Na sequência, foi pedido que os participantes lessem os textos referentes às outras atividades do dia. P_5 leu o texto que se encontra no Quadro 23, a seguir.

Quadro 23-Segunda atividade do 4.º Encontro

Vamos calcular o volume do cilindro. Vocês vão preencher a caixa cilíndrica com os círculos que foram entregues, sendo que a área de cada um é πr^2. Analogamente ao volume do paralelepípedo, o volume do cilindro é igual à área da base x a altura. No caso, a área do círculo é πr^2 x a altura. Assim o número de círculos determinou a altura h do cilindro construído. Então o volume do cilindro é πr^2x h.
Exercício de aplicação da fórmula
Uma latinha de refrigerante tem formato cilíndrico. Se a altura da latinha é 10 cm e o raio da circunferência do fundo mede 3 cm, calcule o volume de refrigerante que ela pode conter.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição do desenvolvimento e das interações

Logo após a leitura realizada por P_5, P_1 pegou os círculos e os colocou sobrepostos uns aos outros. Em seguida os colocou dentro de uma caixa cilíndrica, conforme a Figura 15, a seguir.

Figura 15-Preenchimento da caixa cilíndrica com círculos

Fonte: Arquivo do pesquisador

P_1 disse aos colegas: “Assim vemos o volume.” Depois, em silêncio, realizaram a atividade proposta, comentando os resultados obtidos: 6280 m^2.

Depois P_3 leu o texto relativo à terceira atividade, que se encontra no Quadro, 24 a seguir.

Quadro 24-Terceira atividade do 4.º Encontro

Porém, foi feito apenas uma ilustração, mas, de fato a área do cilindro é $\pi r^2 h$, conforme será mostrado pelo Princípio de Cavalieri.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), "aluno de Galileu e professor em Bolonha, é célebre por seu trabalho *Geometria indivisibiliuscontinuorum nova quadam ratione promota"*, escrito em 1635 no qual expõe o seu método dos indivisíveis (intermediário entre o de exaustão dos gregos e os de Newton e Leibiniz). De forma que o tamanho relativo de dois sólidos ou superfícies poderia ser encontrado pela soma de uma série de planos ou retas (CAJORI, 2007, p.229). Isto é o conhecido Princípio de Cavalieri, na verdade um teorema: "Se dois sólidos tem alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nesta razão" (BOYER, 1996, p. 227).

Em uma linguagem mais apropriada a aluno do ensino médio pode ser utilizado a seguinte versão simplificada: Axioma (Princípio de Cavalieri)

Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

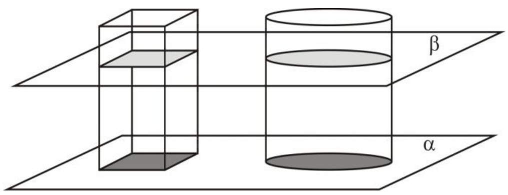
Isto pode ser ilustrado (figura 16) com dois montes de moedas de mesmo tamanho e mesma altura. Manipulando algumas moedas para a direita ou para a esquerda, o volume ocupado pelas moedas permanece constante.

Figura 16 - Ilustração do Princípio de Cavalieri

Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=AwrE18yH7x9bcc0Ajg_z6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

A figura 17, a seguir mostra que poliedros e corpos redondos mesmo apresentando características diferentes podem apresentar volumes iguais.

Figura 17: Princípio de Cavalieri relacionando o volume de dois sólidos.



Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=AwrE18yH7x9bcc0Ajg_z6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

Exercício de aplicação do Princípio de Cavalieri

O volume de um cilindro cujo raio da base mede 10 cm e cuja altura mede 20 cm é igual ao de um paralelepípedo de base quadrangular cujo lado mede $\sqrt{314}$ cm e cuja altura mede 20 cm. Considere $\pi = 3,14$.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Antes da aplicação do Princípio de Cavalieri, os participantes manusearam as moedas disponíveis para melhor visualização. Formaram diferentes sólidos com o mesmo monte de moedas. As imagens apresentadas na Figura 18 mostram as construções.

Figura 18-Construção feita com moedas para ilustrar o Princípio de Cavalieri

Fonte: Arquivo do pesquisador

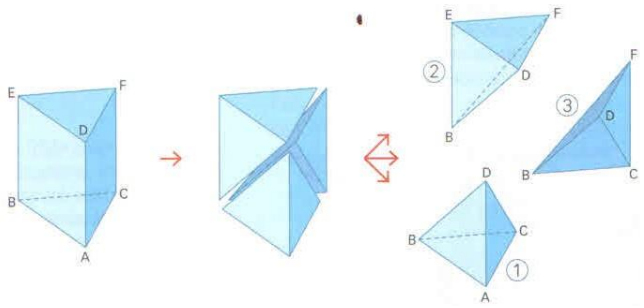
Assim que acabaram de aplicar o Princípio de Cavalieri, P_3 comparou os resultados obtidos com os do exercício anterior: “Este também dá 6280”.

Após concluírem a atividade, passaram à seguinte. Para isso, P_3 leu o texto da quarta atividade, que se encontra no Quadro 25, a seguir.

Quadro 25-Quarta atividade do 4.º Encontro

Volume da Pirâmide
Observe as figuras a seguir que ilustram volume da Pirâmide

Figura 19-Decomposição do prisma mostrando volume da pirâmide



Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 72)

Observe que do prisma foram recortadas 3 pirâmides, com as mesmas dimensões. Logo o volume de cada uma delas é 1/3 do volume do prisma que lhes deu origem. Como o volume do prisma é área da base x altura, o volume da pirâmide é base x altura dividido por 3. Então
$V_{\text{pirâmide}} = (b.h)/3$

Exercício de aplicação da fórmula

Uma forma de picolé tem o formato inusitado de uma pirâmide triangular cuja altura mede 8cm e cuja base mede $3cm^2$. Qual é o volume de líquido para encher a forma?

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Assim que P_3 leu a atividade, o pesquisador perguntou aos participantes se haviam entendido o processo, recebendo resposta afirmativa. Então foi pedido que resolvessem o exercício de aplicação da fórmula. P_1 compartilhou uma de suas experiências de sala de aula:

> Eu fiz com arroz... coloquei os alunos para construir uma pirâmide e um paralelepípedo com a mesma base e altura. Em seguida preenchi com arroz a pirâmide. Despejei o conteúdo no paralelepípedo. Novamente preenchi a pirâmide com arroz e em seguida despejei no paralelepípedo. Fiz isso mais uma vez e assim preenchi totalmente o paralelepípedo. O que significa que o paralelepípedo construído contém três vezes o conteúdo da pirâmide construída (P_1).

O grupo ficou curioso e perguntou de que material foram construídos os moldes dos sólidos. P_1 explicou que foram feitos de cartolina, mas que o laboratório de Matemática da Escola já possuía os sólidos de material plástico: “E então você pode preenchê-los com água ou outro material.”

Durante o exercício de aplicação da fórmula, prosseguiu o diálogo:

> P_1: Uma forma de picolé... este é diferente. Este picolé é diferente.
> P_3: Aqui já deu a área da base, ficou fácil. Difícil é os alunos calcularem a área da base.
> P_5: Com certeza.
> P_3: A gente tem que começar lá na Geometria Plana para começar...

Percebeu-se pela fala de P_3 que a Geometria Plana era um conhecimento prévio necessário. De fato, é proposto pelo Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2018) abordar primeiro a Geometria Plana para em seguida a Espacial.

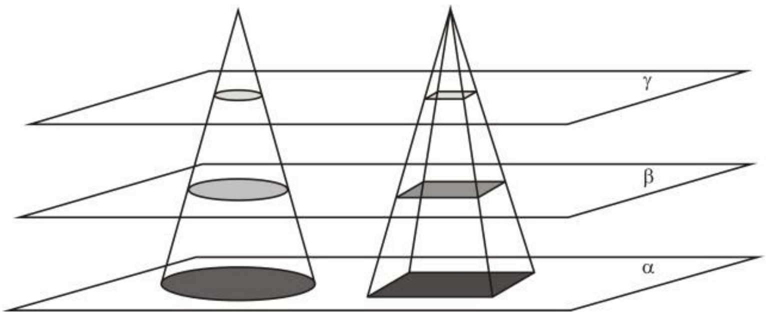
Concluída a atividade, foi pedido aos participantes uma avaliação. Eles disseram que acharam fácil. Na sequência foi lida a quinta atividade, cujo texto se encontra no Quadro 26, a seguir.

Quadro 26-Quinta atividade do 4.º Encontro

Volume do Cone

Observe a figura 20 a seguir.

Figura 20: Ilustrando o volume do Cone com o Princípio de Cavalieri



Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images; _ylt=A2KLfRbU7R9bRlkA4DLz6Qt.; _ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cone (V_c) é igual ao volume da pirâmide (V_p), isto é , V_p = (área da base x altura) /3. Como a área da base do cone é πr^2, o volume do cone é $V_c = \pi r^2/3$.

Exercício de aplicação da fórmula

Qual é o volume de um sorvete no formato de cone cujo raio da base mede 3 cm e cuja altura mede 8 cm?

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Durante a atividade, os participantes fizeram comentários.

> P_1: Esta atividade eu já fiz isto com doce de leite.
> P_5: De canudinho?
> P_1: Então... a gente media aproximado. Eu levava uma lata de doce de leite e os canudinhos e a gente queria saber quantos canudinhos davam...
> P_1: Fácil.
> P_5: Principalmente pensando que depois a gente ia comer o canudinho.
> P_3: Legal está!

Destacou-se o uso de uma situação divertida, para tornar a aprendizagem prazerosa. Portanto houve preocupação em contextualizar o conteúdo. A postura do professor combinava com as sugestões da BNCC:

> contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas (BRASIL, 2017, p. 16)

Os participantes comentaram sobre a dificuldade de realizar atividades com um número elevado de alunos.

> P_3: Não pode ter muito menino não. As oficinas para a gente fazer com um número legal, no máximo com 10 alunos, para a gente ficar mais próximo... A não ser que você tivesse mais um monitor para dividir o grupo.
> P_1: Com 30, 40 alunos não dá.
> P_3: 30 é difícil, mesmo. Não dá. Para você acompanhar o raciocínio do aluno.
> P_1: Enquanto você está explicando aqui um já pegou a lata e correu para lá para comer escondido.
> P_3: Até para você poder fazer de forma mais dinâmica, mais agradável...
> P_5: Na escola de P_1 há poucos alunos por turma.

Na realidade, na maioria das escolas estaduais as salas de aula do Ensino Fundamental têm 35 alunos em média e as do Ensino Médio 40, conforme determina a legislação atual. O número de alunos acaba dificultando a realização de oficinas. Seria muito bom se houvesse número suficiente de monitores ou estagiários participantes de programas, como o PIBID, que pudessem atuar em todas as escolas auxiliando e aprendendo a ser professor. A realidade é diferente. Poucas escolas estão localizadas em cidades onde há cursos de formação de professores. Além disso, quando existem, as bolsas são insuficientes.

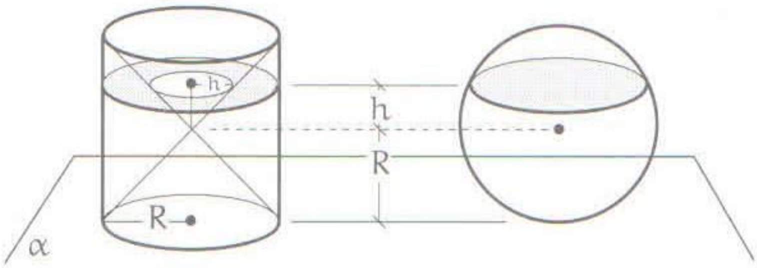
E os participantes, já em silêncio, concluíram a atividade, sem dúvidas. Concluída a quinta atividade, P_5 leu a sexta, cujo texto se encontra no Quadro 27, a seguir.

Quadro 27-Sexta atividade do 4.º Encontro

Volume da Esfera

Também constitui uma aplicação do Princípio de Cavalieri. “Para isso se imagina um sólido de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nele tenham áreas iguais. Em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2-h^2)$. Mas essa é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h.” (LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO,1998, p. 268).

Figura 21: Ilustrando o volume da esfera com o Princípio de Cavalieri



Fonte: Lima et al (1998, p. 268)

"Consideremos então uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C (chamado *clepsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C" (LIMA et al 1998, p.268-269).

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura 2R subtraído de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$\pi R^2 2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{4}{3}\pi R^3$ que é o volume da esfera.

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Exercício de aplicação da fórmula.

Calcule o volume de água necessário para encher um aquário de formato esférico até a metade, de modo a poder colocar nele um peixe ornamental, sabendo que o raio do aquário mede 15 cm.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Descrição e interpretação do desenvolvimento das ações

Os participantes começaram a fazer os cálculos e passaram a trocar ideias.

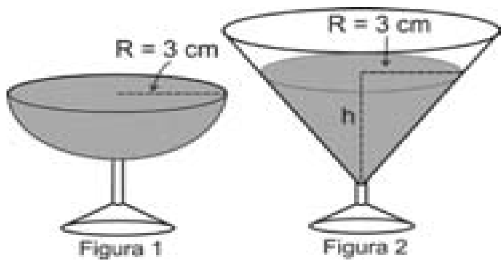
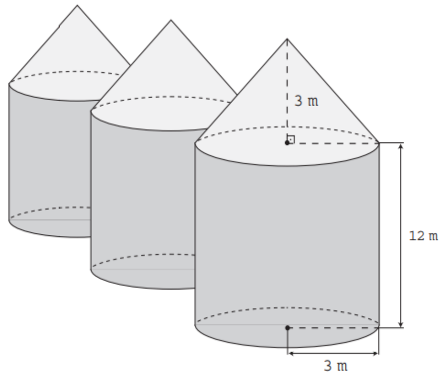
P_1: 4 500?
P_3 para P_1: Você usou calculadora?
P_1: Não.
P_3: Você fez 15^3 sem calculadora?!
P_3: E é 4 500, você está bom. Só que é a metade.
P_1: É a metade?
P_3: É a metade. Olha: Calcule o volume de água para encher um aquário de formato esférico até a metade. Então este é o formato que ele quer.
P_5: Ou seja, tem que ler o problema por que se não... dá a resposta errada.
P_3: É verdade.

No diálogo, destacou-se a importância da leitura atenta, para evitar um equívoco. A calculadora também apareceu como instrumento, pois o importante era usar corretamente as informações. Diz a BNCC (2017): "no tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras" (BRASIL, 2017 p.268).

Os participantes, concluída a atividade, começaram a desenvolver as questões do ENEM que foram apresentadas. Elas estão no Quadro 28, a seguir.

Quadro 28: Questões do ENEM no 4.º Encontro

(ENEM 2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de	(ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3.

cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.  Considere: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ Sabendo que a taça com formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de a) 1,33 b) 6,00 c) 12,00 d) 56,52 e) 113,04	Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.  Utilize 3 como aproximação para π. O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é a) 6 b) 16 c) 17 d) 18 e) 21.

Fonte: INEP (2018, s.p.)

Os participantes leram essas duas questões, começaram a comentar.

> P_5: Que legal... o da esfera é fácil, o do cone tem que calcular esta altura.
> P_3: O exercício deu as fórmulas.
> P_5: O cone tem que calcular a altura.
> P_3: Primeiro calcular a esfera. Você tem que saber o ... concorda?
> P_5: Como é que é?
> P_3: Primeiro você calcula da esfera, o hemisfério...
> P_5: O da esfera é tranquilo, eu tenho r (raio)... Beleza.
> P_3: É metade também...
> P_5: Por isso que ele deu aquele [referindo-se ao exercício de aplicação].

Os comentários sobre os procedimentos revelaram que acharam fácil e logo fizeram conexão com a atividade anterior. Vale lembrar que o exercício não associava diretamente hemisfério com esfera, mas P_3 fez essa associação. P_5 se lembrou da atividade feita anteriormente, achando fáceis essas situações-problema apresentadas no ENEM: “O da esfera é tranquilo... Por isso que ele deu aquele...”.

Os participantes continuaram o diálogo.

> P_3 para P_5: Você calculou o volume da esfera?
> P_5: Sim.
> P_3: Deu 36, o hemisfério é meio, então dá 18.
> P_5: Aí eu vou igualar o volume do cone, ou seja, 1/3 de πr^2 é igual a 18π.

A relação entre esfera e hemisfério foi automática para os participantes que estavam familiarizados com esses termos. P_5, ao explicar para o colega, ressaltou a necessidade de comparar os volumes, visto que a questão exigia esse raciocínio na resolução.

Logo depois começaram a desenvolver a segunda questão do ENEM, prosseguindo o diálogo.

> P_1: Neste caso, a aproximação para π é 3...
> P_3: Lembrando que os meninos não têm calculadora, vamos calcular o volume dos silos.
> P_1: Assim como eles não podem usar, eu não vou usar calculadora.

Foi percebido que usar $\pi=3$ facilitava o cálculo, visto que no ENEM não era permitido o uso da calculadora. Cobrou-se, pois, a manifestação do entendimento sem efetuar longos cálculos, o que contribuía para a otimização do tempo na prova.

P_1 concluiu os cálculos e aguardou P_3 e P_5 terminarem.

> P_1: 18 viagens?... 17,55 aí, 18 viagens mínimas.
> P_3: Deu 17,55, então o número mínimo vai ser 18 viagens. Não pode ser 17 viagens e deixar de transportar o restante.
> P_5: Foi o que eu achei.

Em prosseguimento, os participantes foram responder às perguntas de avaliação. E foi pedido que cada um lesse uma pergunta e que todos respondessem. As perguntas e respostas[30] se encontram a seguir.

P_3 leu a primeira pergunta: Você considera que utilizar os cubos de uma unidade de volume para calcular o volume de um paralelepípedo é importante para desenvolver a habilidade de identificar características de figuras planas ou espaciais? Por quê?

Todos consideraram ser importante utilizar os cubos de uma unidade de volume para calcular o volume de um paralelepípedo. E justificaram.

> P_3: Ajuda a perceber o preenchimento dos espaços e consequentemente o conceito de volume.
> P_5: Ele vai visualizar...
> P_1: de forma prática a noção de volume...

---

[30] Foram colocadas as respostas dadas e enviadas (por escrito) por P_2, e P_4, que não puderam participar. do Encontro.

> P_2: fazer a transposição do abstrato para o concreto.
> P_4: os alunos terão uma noção maior de volume e de suas propriedades dos sólidos.

Observou-se pelas respostas dadas que as habilidades de percepção e visualização foram necessárias para o desenvolvimento da atividade.

Na sequência, P_1 leu a segunda pergunta: O preenchimento da caixa cilíndrica com os círculos para fornecer ao aluno uma ideia de como foi obtida a fórmula para o cálculo do volume do cilindro pode desenvolver a habilidade de visualização e comparação? Por quê?

Observaram-se divergências nas respostas dadas. P_1, P_2, P_3 e P_4 responderam afirmativamente, justificando.

> P_1: A partir desta atividade ele [o aluno] constrói o cilindro e vai ver ali quantos discos vão ocupar aquele espaço. P_4: o aluno consegue visualizar o preenchimento do cilindro, compreendendo melhor a fórmula.
> P_2: somente a apresentação da fórmula não auxilia na fixação do conteúdo.
> P_3: Pode desenvolve esta habilidade [visualização e comparação], pois se percebe este crescimento [que gera o volume].

No entanto P_5 manifestou pensamento diferente:

> Eu acho que vai depender do aluno, alguns vão conseguir ver... entender o procedimento, outros não.

Nas respostas dadas, a habilidade de construção surgiu como complementação à visualização e comparação, o que auxiliou na percepção e compreensão do volume. P_5 considerou que nem todos iam conseguir entender o processo, o que talvez a falta da habilidade de concepção explique. Lauro (2007) considera que com o raciocínio lógico-dedutivo é possível compreender elementos conceituais com demonstrações formais ou informais.

Após os comentários para a segunda pergunta, P_5 leu a terceira: Você considera que utilizar o Princípio de Cavalieri para justificar a fórmula do cálculo do volume de sólidos pode desenvolver a habilidade de comparação? Por quê?

As respostas dadas revelaram opiniões divergentes. Enquanto P_1, P_2, P_3 e P_4 consideraram que o uso do Princípio de Cavalieri auxiliava no desenvolvimento da habilidade de comparação, P_5 discordou. P_3, por exemplo, apresentou esta justificativa: "facilita a percepção com o preenchimento de espaço, consequentemente o cálculo do volume. Então ao comparar, você vai percebendo este processo.".

E P_5, que considerou comparar elementos de formas diferentes como difícil, pois não era possível encontrar diferenças ao se comparar um objeto consigo mesmo, disse o seguinte:

“Para a maioria dos alunos quando você compara mais de um elemento, torna-se difícil visualizar... entender.”.

Na sequência, P_3 leu a quarta pergunta: A atividade com o uso de moedas para ilustrar o Princípio de Cavalieri pode ajudar no desenvolvimento de alguma habilidade? Justifique sua resposta.

Todos consideraram que a atividade com o uso de moedas podia ajudar no desenvolvimento de alguma habilidade. A visualização foi citada explicita ou implicitamente por todos. As justificativas variaram.

> P_3: Pode muito. Eu achei que isto aqui vai chamar a atenção, até pelo visual. É uma maneira concreta que facilita muito a visualização pois você vai juntando moedinhas, vai empilhando, vai mostrando...
> P_1: Você usa a mesma quantidade de moedas iguais e vai deformando... modificando, enquanto do outro lado você consegue comparar assim.
> P_5: Eu já acho que ajuda... porque é uma coisa só, as moedas. O aluno vai conseguir visualizar e entender o cálculo do volume das figuras. Acho que quando você compara coisas com formato diferente o entendimento fica mais difícil.
> P_5, prosseguindo: Quando os objetos possuem a mesma forma a compreensão se torna mais fácil, pois, para comparar formas que podem ficar iguais a visualização se torna mais simples, pois requer menos abstração.

Portanto poder pegar nas moedas e manipulá-las, produzindo formas distintas da pilha original, estimulou a criatividade e auxiliou na compreensão de volume. Outras habilidades observadas nas falas de forma implícita foram a percepção e a construção. Lauro (2007) as caracteriza assim:

> a percepção refere-se à observação e a manipulação de objetos materiais (...) e à caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta. A construção refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico (LAURO, 2007, p. 26).

Em seguida, P_1 leu a quinta pergunta: Quais habilidades você acredita que podem ser desenvolvidas com as ilustrações dos cortes nos prismas para obtenção da fórmula do volume da pirâmide? Por quê?

Duas habilidades foram mencionadas pelos participantes: comparação e visualização. P_3 chegou a destacar o efeito da atuação delas: “você vai identificar as características das figuras planas”. Hoffer (1981) apud Vieira (2010, p. 28) considera que é pela habilidade visual no nível de análise que se “percebe as propriedades de uma figura como parte integrante de uma figura maior” e pela habilidade de desenho no nível de visualização que se “faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas”. Pela habilidade lógica no nível de visualização é que se “entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes”. É pela habilidade de aplicações no nível de ordenação ou dedução informal que se "entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos". Esta também remete à ideia de comparação quando indica relações.

Após responderem à quinta pergunta, P_5 leu a sexta: Você acha que o uso do Princípio de Cavalieri é suficiente para que o aluno aceite a fórmula para o cálculo do volume do cone? Por quê?

Os participantes responderam que podia ajudar na aceitação da fórmula, porém P_3 indicou que havia necessidade de "mais uma série de exercícios...".

Foi pedido a P_1 e P_3 que dessem um exemplo de como fazer essa exploração.

> P_1: Atividades práticas... não só exercícios. Por exemplo: Vamos ver se é 1/3 mesmo? Baseando no Princípio de Cavalieri você pega dois sólidos de mesma base e mesma altura e compara.
> P_3: Buscar mais atividades concretas para visualizar, além dos exercícios.
> P_1: Eu acredito vendo! Eu me lembro de uma experiência que eu fiz, de verificar a relação do raio, comprimento da circunferência e o diâmetro. Eu falei com os alunos: vocês podem pegar uma moeda e um pneu que vai dar no mesmo. Esta relação é a mesma. Então o aluno pergunta: Como que um negócio grandão vai dar o mesmo que um pequeno? Então, falei: A razão é sempre a mesma. A gente pega na prática. Agora eu aceito.
> P_3: "É preciso fazer."
> P_1: "Acho que falta um pouco disto, a gente ver na prática como que funciona."

Os participantes mencionaram atividades práticas e atividades concretas como auxílio necessário para levar o aluno a aceitar a fórmula. ("Eu acredito vendo." e "É preciso fazer.") Essas atividades práticas e/ou concretas podem estar na face do Tetraedro Epistemológico de Machado[31] (1998) denominada construção. Segundo Lauro (2007, p. 26), "refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados". O autor afirma que "a construção reforça a percepção", o que provavelmente é desenvolvido com a manipulação de objetos.

Após as respostas dadas para a sexta pergunta, P_3 leu a sétima: Você considera que a explicação que foi dada para o cálculo do volume da esfera é suficiente para o aluno aceitar a fórmula? Justifique sua resposta. Você pode dar alguma sugestão de outra explicação?

Pelas respostas dadas, as opiniões foram contraditórias. P_1, P_3 e P_5 (presentes ao Encontro) responderam negativamente e P_2 e P_4 responderam afirmativamente.

> P_3: "é difícil de trabalhar... eles misturam a [Geometria] Plana com a Espacial."
> P_5: "eles confundem muito esfera com círculo."
> P_1: "falta um pouquinho de prática,"

[31]O Tetraedro Epistemológico de Machado se encontra na página 43.

Uma possível explicação para essa confusão é a falta de trabalhar a Geometria desde as séries iniciais. Alguns alunos revelam fragilidades em relação à Geometria ainda no Ensino Médio, demonstrando que não desenvolveram habilidades que auxiliam na compreensão da Matemática desse nível.

Foi pedido aos participantes presentes que sugerissem outra explicação.

> P_3: “Não tenho não. Acho que ainda é um campo a ser explorado.”
> P_1: “Uma sugestão, acho que cabe o que a gente respondeu na anterior, de prática, de verificar isto na prática mesmo. Não ficar só no plano como a gente está.”

A seguir, foi indagado como fazer.

> P_1: “Não sei, vamos pensar...”
> P_3: “Tecnologia, por exemplo... Me ajudem!”
> P_5: “Computador.”
> P_1: “GeoGebra.”
> P_3: “Pode ser um campo.”
> P_5: “Acho que vai ser bem melhor que esta forma que vem sendo usada.”
> P_3: “Este é um campo que pode ajudar. Outros caminhos...”
> P_1: “Estes sólidos mesmo que a gente estava comentando, que tem aquele buraquinho para gente colocar água, virar um no outro...”
> P_5: “Talvez usando isto..., fique mais real.”

Os três participantes se referiram ao uso de tecnologia, que a BNCC apresenta como uma das dez competências gerais da Educação Básica.

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017, p. 9)

Também foi perguntado se viam alguma possibilidade de, sem usar o computador, oferecerem alguma explicação para o volume da esfera. P_1 disse que não via possibilidade e os outros dois participantes concordaram.

P_2 e P_4 (participantes que realizaram em casa as atividades) consideraram que a explicação que foi dada para o cálculo do volume da esfera era suficiente para que o aluno aceitasse a fórmula.

> P_2: “os cortes circulares do cilindro ajudam a compreender melhor [a fórmula] do volume da esfera.”
> P_4: “[os alunos] compreendem a fórmula a partir dos cortes nos prismas.”

Depois P_1 leu a oitava pergunta: As atividades que foram realizadas neste encontro podem ser suficientes para o desenvolvimento de habilidades necessárias para que o aluno resolva questões do tipo das do ENEM que foram abordadas? Justifique. E ele mesmo respondeu.

> Eu volto a insistir nesta mesma tecla, podem ser suficientes, você tem alunos que conseguem aceitar a fórmula do volume do sólido pela demonstração algébrica, mas eu ainda insisto, bato na tecla que a fórmula tem que ser associada à prática de manuseio..., pegar o sólido, trabalhar o sólido..., de ver, de ver cada... de visualizar. Isto complementa (P_1).

Outra pergunta: Você acha interessante apresentar aos alunos todos os sólidos abordados neste Encontro?

> P_1: "Sim...sim, fazendo a planificação, a construção... usar palitinhos como arestas".

A prática de manuseio indicada por P_1 corresponde às atividades sensoriais descritas por Lauro (2007), quando se busca a manipulação de objetos e sua caracterização.

Os outros participantes também responderam afirmativamente, com justificativa.

> P_5: "a maioria das questões vão desenvolver as habilidades e ajudar os alunos a entender as questões do ENEM. Tudo que você vê e toca é muito melhor."
> P_3: "Acho que estas atividades facilitam muito na percepção dos sólidos, ajudam também no cálculo do volume."
> P_4: "as questões exigem conhecimentos que foram trabalhados nas atividades."
> P_2: "para que eu fizesse as questões foram suficientes. Logo para as outras acredito que também."

Todos acharam interessante ter o sólido nas mãos. P_3 mencionou a habilidade percepção, que, segundo Lauro (2007, p. 26), "precisa ser desenvolvida desde as séries iniciais do ensino". Relaciona-se diretamente com a construção, a representação, e a concepção.

O Currículo Referência de Minas Gerais (2018) indica o que se espera de cada área. Quanto à Matemática, que

> forneça aos estudantes o desenvolvimento de algumas habilidades como o letramento matemático, a resolução de problemas, a investigação, a visualização, a percepção e a argumentação. Essas habilidades possibilitarão que os estudantes estabeleçam conexões com várias áreas do saber (MINAS GERAIS, 2018, p. 654).

Após os comentários dos três participantes sobre cada uma das perguntas, foi concluído o Encontro com agradecimentos e um convite para o Grupo Focal, para dirimir dúvidas relacionadas aos Encontros.

5.º Encontro (Grupo Focal)

Foi realizado como técnica adicional para explorar melhor o tema investigado, a fim de produzir dados necessários para completar os advindos dos Encontros anteriores. Assim, foi útil para reunir informações quanto a questões que, embora discutidas, ficaram inconclusas em vista do desenvolvimento de atividades individuais de participantes que estiveram ausentes. Isso porque, em alguma das atividades, o foco pode ter sido desviado e em grupo os participantes podiam mudar ou complementar as ideias sobre algo não percebido em algum dos Encontros (GONDIM, 2003; BARBOUR, 2009). Assim, com esses objetivos, o 5.º Encontro (Grupo Focal) foi realizado em 15 de setembro de 2018, das 9 h às 12 h, nas dependências do ICEB da UFOP.

Após os cumprimentos de praxe, o pesquisador agradeceu a presença dos participantes e devolveu os documentos por eles produzidos nas atividades realizadas em cada Encontro. E iniciou a conversa indagando: Vocês acreditam que as atividades propostas e realizadas nos Encontros podem desenvolver habilidades relacionadas ao conhecimento geométrico de espaço e forma? Os participantes foram unânimes na resposta afirmativa, especificando que as atividades eram atraentes e levaram a situações-problema do cotidiano, pois foram usados desenhos, dobraduras, jogos e construções, começando pela visualização, que foi fundamental.

Continuando, o pesquisador perguntou: Quais habilidades vocês acham que foram desenvolvidas? Mas P_1 precisou de um esclarecimento ("Quando você fala em habilidades, você fala em habilidades do ENEM?") O pesquisador respondeu que podia ser da Matriz de Referência do ENEM ou alguma outra que não constasse dela.

> P_1: "Pode ser da Matemática ou fora da Matemática?" (Foi respondido que sim.)
> P_4: "A parte de interpretação, principalmente na parte de problemas, ler e interpretar... isto pra mim é fundamental."

Continuando a conversa, o pesquisador destacou: P_4 falou em leitura e interpretação, mas quais são as habilidades? P_3 e P_1 responderam que seria a visualização e P_4 disse comparação. Então foi perguntado: Visualização e comparação são as habilidades principais? P_5 confirmou que sim.

E o pesquisador prosseguiu: Vocês observaram que uma ou duas habilidades se destacaram em cada atividade. De que forma e por quê? Por que em determinado bloco apareceu determinada habilidade? Ela se destacou em qual atividade? Por exemplo, no 1.º Encontro foi desenvolvida alguma habilidade em alguma atividade específica?

P_1 respondeu que no Jogo dos Sete Erros foram desenvolvidas visualização e comparação, mas que depois houve atividades de simetria. E complementou:

> P_3: "Se você reparar, está visualizando e também comparando. Depois segue a do triângulo também. Você vai dividindo, reduzindo...".
> P_1 completou: "Aí você trabalha mais propriedades das figuras."
> P_5 explicou: "Está trabalhando simetria."

O pesquisador continuou, indagando: E na segunda atividade, aquela que começa com a questão Reconhecendo π? Quais habilidades vocês destacariam?

P_4 disse:

> A segunda eu tinha falado interpretação, porque eu fiquei pensado que você tinha que ler, entender toda a situação, imaginar..., por exemplo a possibilidade de onde pode se localizar a antena, para depois ver o que se poderia fazer na parte matemática das atividades. A mesma coisa no outro ali da galeria subterrânea. (P_4)

O pesquisador voltou a perguntar: Então do 2.º Encontro o que mais ficou foi ler e interpretar?

> P_4: "Seria. Se você colocasse mesmo de operações matemáticas, foram coisas simples, só que para você realizar você teria que compreender toda a situação. Se você não compreendesse uma frase, você não saberia o que fazer."
> P_1: "Acho que enfoca muito também a fórmula. Para memorizar, para aceitar... demonstrar a fórmula."
> P_3: "Isto provocou um pouco através desta tabela, comparou... Poderia usar comparação aqui também."

O pesquisador prosseguiu: Seria uma comparação para depois uma dedução?

> P_3: "É, para chegar à formula. A fórmula não foi assim... do nada. Não foi jogada, foi uma busca, uma percepção de como se chegaria à fórmula."

Outra pergunta do pesquisador: Então no caso deste 2.º Encontro entra percepção?

> P_3: "Entra também a percepção, porque nós fomos construindo uma tabela para chegar nesta fórmula."

Na sequência, foi perguntado pelo pesquisador: E quanto ao 3.º Encontro? Os participantes mencionaram localização e visualização. O diálogo apresentou justificativas.

> P_4: "As atividades em si já levam ... da 3.5 para a frente já levam você a pensar nesta questão de localização, com exemplos práticos. Igual ao da letra f, que trabalha... falando da linha do Equador e do meridiano de Greenwich."
> P_3: "Das questões do ENEM..."

> P_4: “Isto. E as duas questões do ENEM estão dentro disto.”
> P_1: “E neste caso aqui é diferente das outras de observação, de visualização, etc. Aqui nestas figuras a gente teve a experiência de poder manipular o objeto para poder visualizar melhor.”
> P_5: “Visualizar ... a gente desenhando.”
> P_1: “A gente manipulava ele para poder visualizar.”

Então foi perguntado se seria no caso uma percepção espacial.

> P_1: “Isso. Fazer a caixa, observar.”

A BNCC (2017) revela preocupação com trabalhar no 6.º ano do Ensino Fundamental a habilidade *quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial* (BRASIL, 2017, p. 303).

Na sequência, o pesquisador perguntou: E o 4.º Encontro? P_3 e P_5 indicaram a habilidade de resolver situações-problema e comentaram que houve conhecimento geométrico o tempo todo. Mas houve outras respostas.

> P_4: “As atividades foram de comparação e houve resolução... teve contextualização nesta questão da região agrícola.”
> P_1: “Por causa do Princípio de Cavalieri eu acho que a mais marcante foi a de Comparação.”

Em seguida, o pesquisador pediu que analisassem as atividades realizadas em cada Encontro, mas considerando a segunda competência da Matriz de Referência do ENEM (*Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela*). Habilidades correspondentes:

> H6-Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
> H7-Identificar características de figuras planas ou espaciais.
> H8-Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
> H9-Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano (BRASIL, 2009, s.p.)

O pesquisador explicou aos participantes que essas atividades foram planejadas com base nas questões do ENEM que seriam usadas no final de cada Encontro. Foram construídas com o intuito de saber se e como poderiam possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a habilidade *resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma*, que é a questão de investigação desta pesquisa.

Foi por esse motivo que o pesquisador pediu que analisassem novamente essas atividades, mas partindo das habilidades apresentadas na Matriz de Referência do ENEM.

1.º Encontro-O pesquisador perguntou sobre a atividade Jogo dos Sete Erros[32], querendo saber se as habilidades desenvolvidas por ela estavam incluídas, ou não, na Matriz de Referência do ENEM. (P_1 e P_3 classificaram essa atividade como H7.) Depois ele quis saber sobre a segunda atividade, que era de simetria[33].

> P_1: “Esta atividade pode ser útil para H8.”

Prosseguindo, o pesquisador indagou: E a terceira atividade deste bloco[34]?

> P_3: “A terceira já tem identificação de características de figuras planas. Já tem ponto médio aqui. Envolve a questão de resolver situação-problema, a terceira também tem H8.”

As perguntas iam sendo apresentadas e as respostas iam surgindo. Sendo assim, foi perguntado pela quarta atividade[35], a que envolvia cálculos. P_1, P_3 e P_5 a classificaram como H8, mas foram questionados por P_4.

> P_4: “Mas vocês acham que isso é uma situação-problema?”
> P_3: “Foi uma situação.”
> P_4: “Eu colocaria como cálculo... cálculo aritmético só.”
> P_3: “Pode ser uma situação-problema, você pode criar um probleminha.”

A seguir foi indagado sobre a quinta atividade: observação e cálculo. P_3 também a classificou como H8.

2.º Encontro-Após a fala de P_3, teve início a conversa sobre este Encontro. O pesquisador lembrou que a atividade inicial foi Reconhecendo π[36] e perguntou: Como vocês viram as atividades 1, 2 e 3[37]? Elas desenvolveram habilidades que se encaixam na Matriz de Referência do ENEM? Quais? Ou desenvolveram outras?

> P_1: “H8 e H9 que eu vejo isto aqui.”
> P_4: “H8 eu vejo... “
> P_1: “Já entra em problemas do cotidiano...”

---

[32] As atividades se encontram nas páginas 104 e 105.
[33] A atividade se encontra na página 107.
[34] A atividade se encontra na página 109.
[35] A atividade se encontra na página 111.
[36] A atividade se encontra na página 120.
[37] As atividades se encontram nas páginas 120 e 122.

P_4: “H9 também.”
P_5: “H9...”

Então foi perguntado se nas atividades 1, 2 e 3 as habilidades desenvolvidas foram H8 e H9. P_4 apenas considerou a 2 e a 3. Em vista disso, foi perguntado se a atividade 1 correspondia a alguma dessas habilidades.

P_1: “Comparação... porque foi comparando aí... o comprimento de circunferência com o diâmetro para chegar à mesma razão. A razão entre eles para chegar ao mesmo resultado.”

Em seguida indicada a atividade 4[38].

P_4: “Eu teria que imaginar o círculo como um triângulo...”

Em razão dessa reposta, o pesquisador quis saber se era uma habilidade de imaginação ou abstração.

P_4, confirmou e justificou: “Você tentar visualizar o círculo como um triângulo.”
P_5 completou: “Isto é para abstrair mesmo.”

Depois o comentário foi direcionado para a atividade 5 e a atividade 6.

P_1: “Assim como as outras...”
P_3: “H8 e H9.”

3.º Encontro - Na sequência, passaram a ser discutidas as habilidades desenvolvidas no Encontro. P_3, P_4 e P_5 indicaram H7. Então o pesquisador perguntou: Todas as atividades[39] desenvolveram esta habilidade?

P_4: “Não... até a 4[40].”

P_3 confirmou. O pesquisador perguntou: E a 4? P_3 indicou a H6. O pesquisador continuou: Seria H7 e H6? P_5 confirmou e P_3 citou H7. E a 5[41]?

P_1: “Aí entra também o H6 e o H9. Vai utilizar conhecimento geométrico de espaço e forma e situações cotidianas.”

---

[38] A atividade se encontra na página 123.
[39] As atividades se encontram na página 120, 122, 123.
[40] A atividade se encontra na página 123 .
[41] A atividade se encontra na página 123.

4.º Encontro- O pesquisador perguntou: E em relação a este Encontro, como vocês veem as atividades? Vocês consideram que desenvolveram habilidades? Se for o caso, quais habilidades? São da Matriz de Referência do ENEM?

> P_1: "Bom... a gente teve que fazer um paralelepípedo..."
> P_3: "Então já entra na questão..."
> P_1: "A primeira atividade de planificação... H6 aí, você fez o contrário... a representação depois a figura."

Foi lembrado o uso de uma figura bidimensional transformada em tridimensional.

> P_3: "Então está na H6, está na H7, que são figuras espaciais também, que tem características dela para calcular o volume."
> P_1: "E depois o H8 e o H9."
> P_5: "Usa quase todas..."
> P_1: "Eu acho que ela pega todas, que contempla todas as habilidades."

Mas o pesquisador interferiu: Desenvolve as 4 habilidades?

> P_5: "Sim."
> P_3: "Todas 4."
> P_1: "Eu fiquei pensando só em achar..."
> P_3: "A H8? Resolver situação-problema que envolva o conhecimento geométrico de espaço e forma. Aí você tem espaço e forma o tempo todo."
> P_5: "E tem a situação-problema também... que você precisa resolver."

O pesquisador devolveu aos participantes os textos produzidos por eles sobre as atividades que realizaram em casa. Cada participante tinha respondido a quatro perguntas abertas e, no final, considerou, para as quatro questões do ENEM que foram apresentadas, a utilização de habilidades para resolvê-las. E depois encaixaram essas habilidades na classificação H6, H7, H8 e H9 da segunda competência da Matriz de Referência de Matemática do ENEM[42].

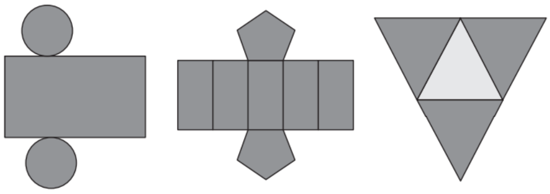
O quadro 29, a seguir, apresenta a primeira situação-problema do ENEM.

---

[42] Encontram-se especificadas na página 51.

Quadro 29-Primeira situação-problema do ENEM tomada como base para classificar as habilidades necessárias para resolvê-la

(ENEM 2012) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá por meio dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide
c) Cone, tronco de pirâmide e prisma
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma
e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Fonte: INEP (2018, s.p.)

Foi lida a classificação das habilidades necessárias à resolução da primeira situação-problema, do ENEM de 2012, de acordo com as atividades realizadas individualmente pelos participantes em casa. Ela está no Quadro 30, a seguir.

Quadro 30-Habilidades indicadas pelos participantes para a primeira situação-problema do ENEM, de acordo com as atividades realizadas em casa.

Participantes	H6	H7	H8	H9
P_1	X	X		
P_2(*)	X	X	X	X
P_3	X	X		
P_4		X		
P_5		X		

(*) Ele também citou identificar padrões e identificar relações.

Fonte: Dados do pesquisador

A seguir, foi perguntado aos demais participantes o que achavam disso. E eles responderam.

> P_1: “Eu concordo com P_3.” (Os dois marcaram as mesmas habilidades.)
> P_4: “Eu acho que só colocaria H7, não vejo ali a necessidade de muita interpretação e localização...”
> P_5: “Eu também não enxerguei isto não. “
> P_1: “É movimentação de objetos no espaço tridimensional.”
> P_3: “Isto é objeto, não é?!”
> P_3: “Ela sai do tri e vai para o bi.”
> P_4: “Está só planificado...”
> P_1: “Mas você tem que saber associar a planificação, porque se não você fala só do que você vê, da parte bidimensional você não acharia que é um prisma, um cone...”
> P_5: “Você tem que imaginar.”
> P_3: “É, tem que visualizar.”

Observa-se na fala de P_3 que a visualização foi usada como uma habilidade auxiliar para as demais que o participante propôs. Então o pesquisador perguntou: Vocês chegaram a um consenso ou não em relação a isso? Por exemplo, dois de vocês colocaram H7, dois H6 e H7, e P2 colocou todas e mais duas. Vocês acham, ou não, que conseguem chegar a um consenso?

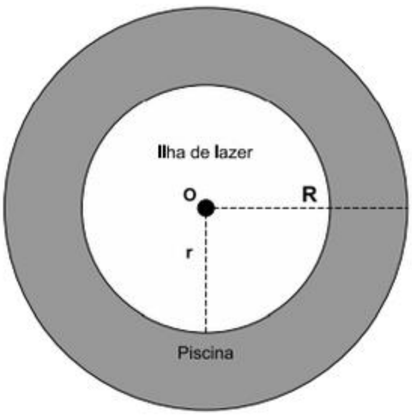
> P_1: "Eu acho que a gente consegue chegar num consenso do H7."

Quando perguntados sobre a H6, se ela entraria, ou não, nessa classificação, os participantes mantiveram a posição. P_1 e P_3 acreditavam que essa habilidade era necessária para a solução da situação-problema, enquanto P_4 e P_5 achavam que não era necessária.

O pesquisador perguntou aos participantes a respeito da ideia expressa por P_2 sobre identificar padrões e identificar relações. Os participantes presentes disseram que não concordavam com essa ideia. Continuando, ele passou para a segunda situação-problema, retirada do ENEM de 2013, cujo texto se encontra no Quadro 31, a seguir.

Quadro 31-Segunda situação-problema do ENEM tomada como base para classificar as habilidades necessárias para resolvê-la

(ENEM 2013) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.



Considere 3 como valor aproximado para π.
Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de
a) 1,6
b) 1,7
c) 2,0
d) 3,0
e) 3,8

Fonte: INEP (2018, s.p.)

Na sequência, foi lida a classificação das habilidades necessárias à resolução da segunda situação-problema, que constava das atividades realizadas individualmente pelos participantes da pesquisa em suas residências e que se encontra no quadro 32 a seguir.

Quadro 32-Habilidades indicadas pelos participantes para a segunda situação-problema do ENEM, de acordo com as atividades realizadas em casa.

Participantes	H6	H7	H8	H9
P_1		X	X	X
P_2(*)	X	X		
P_3		X	X	X
P_4		X	X	X
P_5			X	

(*) Ele também citou identificar padrões e identificar relações

Fonte: Dados do pesquisador

Destaca-se que depois P_5 disse o seguinte: "Eu acrescentaria a H9."

Então foi perguntado sobre o que achavam da resposta de P_2 sobre identificar padrões e identificar relações, se essas habilidades entrariam na classificação, ou não.

Respondendo à pergunta, P_3 disse:

> Não precisa, quando você fala muito em padrão ele está esquecendo que utilizar o conhecimento geométrico de espaço e forma, você está utilizando... o que seria este padrão? Eu queria entender ... Ele bate muito em padrão ... quando se fala resolver situação-problema que envolva o conhecimento geométrico, de novo você está com o conhecimento geométrico... então ... eu não sei se estes padrões dele seriam o conhecimento geométrico, mas, já está falando nas habilidades. (P_3)

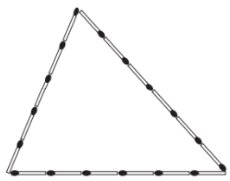
Então o pesquisador indagou: vocês acham que não é preciso usar *"identificar padrões e identificar relações*"?

> P_3: "A palavra conhecimento geométrico diz tudo aí. Não precisa padrão, porque já tem conhecimento geométrico."

A seguir apresenta-se a terceira situação-problema retirada do ENEM, cujo texto se encontra no Quadro 33.

Quadro 33: Terceira situação-problema do ENEM tomada como base para classificar as habilidades necessárias para resolvê-la.

(ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3 b) 5 c) 6 d) 8 e) 10

Fonte: INEP (2018, s. p.)

Como foi feito em outras etapas do Encontro, foi lida a classificação das habilidades necessárias à resolução da situação-problema, segundo as atividades realizadas individualmente pelos participantes em casa. A classificação está no Quadro 34, a seguir.

Quadro 34-Habilidades indicadas pelos participantes para a terceira situação-problema do ENEM, de acordo com as atividades realizadas em casa

Participantes	H6	H7	H8	H9
P_1		X		X
P_2 (*)	X	X		
P_3		X	X	X
P_4		X		
P_5		X		

(*) Ele também citou identificar padrões e identificar relações

Fonte: Dados do pesquisador

O pesquisador buscou uma confirmação: As habilidades H7, H8 e H9? E logo P_3 respondeu:

> Identificar características de figuras planas ou espaciais é H7. Tem que resolver uma situação-problema que envolve conhecimento geométrico de espaço e forma, então classifico como H8. Quanto a H9 que é utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos ... acho que abro mão desta habilidade. Fico com H7 e H8. (P_3)
>
> P_4: “Você abriu mão do H9?”
> P_3: “Se você me convencer um pouquinho mais eu mantenho a opinião que há também H9.”
> P_1: “Eu fiquei em dúvida entre H8 e H9, então eu coloquei H9, mas...”
> P_3: “As habilidades são H7 e H8, pois é uma situação-problema...”.

Todos responderam que tinham colocado H7. Na sequência, o pesquisador indagou se concordavam com P_2, que indicou H6. Todos os presentes discordaram. Então foi perguntado novamente sobre H8, buscando saber se essa habilidade devia entrar na classificação. E os participantes responderam:

> P_5: “Eu acho que sim, acrescentaria H8.”
> P_1: “Lendo melhor aqui, eu trocaria o H9 por H8.”

O pesquisador perguntou outra vez sobre H9: se entraria, ou não, na classificação das habilidades necessárias à resolução da situação-problema. (P_5 e P_1 disseram que não.) Também perguntou se aceitavam que a situação-problema exigiria as habilidades H7 e H8.

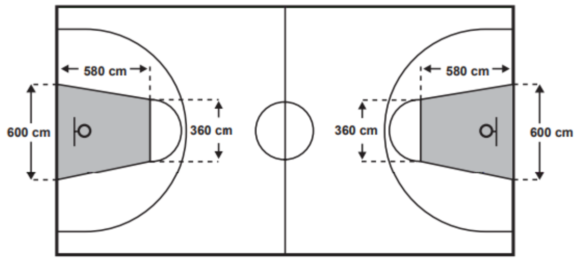
> P_3: “Sim, porque gera um triângulo, já é uma fórmula conhecida, então você aplica o conhecimento geométrico.”

Após a discussão sobre as habilidades necessárias para resolver essa terceira situação-problema, conclui-se que os participantes consideraram somente H7 e H8, pois P_2, em cujo texto também constava H6, estava ausente.

Por fim se passou à discussão da quarta situação-problema, retirada do ENEM, cujo texto se encontra no Quadro 35, a seguir.

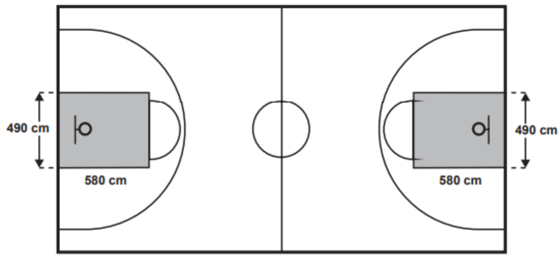
Quadro 35-Quarta situação-problema do ENEM tomada como base para classificar as habilidades necessárias para resolvê-la

(ENEM 2015) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

a) aumento de 5800 cm^2
b) aumento de 75400 cm^2
c) aumento de 214600 cm^2
d) diminuição de 63800 cm^2
e) diminuição de 272600 cm^2

Fonte: INEP (2018, s. p.)

Então foi lida a classificação das habilidades necessárias à resolução da situação-problema, de acordo com as atividades realizadas individualmente pelos participantes da pesquisa em casa. Ela se encontra no Quadro 36, a seguir.

Quadro 36-Habilidades indicadas pelos participantes para a quarta situação-problema do ENEM, de acordo com as atividades realizadas em casa

Participantes	H6	H7	H8	H9
P_1		X	X	
P_2(*)	X	X		
P_3		X	X	X
P_4			X	X
P_5				X

(*) Ele também citou identificar padrões e identificar relações

Fonte: Dados do pesquisador

Após a leitura, ocorreram alterações, ou seja, acréscimos na indicação das habilidades.

P_4: “Vou acrescentar a H7.”
P_5: “Eu acrescentaria H7 e H8.”
P_1: “Eu colocaria H9.”

Então o pesquisador perguntou ao grupo: Vocês concordam com serem H7, H8 e H9 as habilidades necessárias para a resolução desta situação-problema? Todos responderam afirmativamente. Concluiu-se, pois, que todos os participantes consideraram H7, H8 e H9, pois P_2, em cujo texto também constava H6, não participou discussão, por estar ausente.

Em seguida, como nenhum dos participantes perguntou ao pesquisador o motivo haver escolhido questões dos anos de 2012 a 2015, ele informou que o período foi selecionado, por encontrar-se praticamente na metade do espaço de tempo considerado nesta pesquisa, ou seja, de 2009 a 2017.

Para concluir o Encontro, do Grupo Focal, o pesquisador perguntou aos participantes, o que observaram e concluíram, em geral, sobre as atividades realizadas.

P_1 disse:

> Eu acho que a ordem em que elas são apresentadas, é bem interessante. Você traz um joguinho de Sete Erros, na hora parece que é uma coisa boba e tal, e chama a atenção, então você começa a inserir outras coisas assim dentro do conteúdo... e o aluno faz isso talvez sem perceber. Geralmente aqueles alunos que têm uma certa birra com a Matemática começam de forma tranquila e vão fazendo (P_1).

P_3 explicou:

> Eu acho que estas atividades incentivam muito o aluno, estimulam o aluno à aprendizagem de geometria, e você pode fazer através de oficinas, você pode buscar. Isto aqui me deu muitas ideias para se fazer na escola, alternativas mesmo, uma vez que na correria do dia a dia da escola você fica “preso”, você não pode fazer diferente... mas atividades extra horário dependendo da escola a gente pode sonhar um pouquinho, se derem possibilidade para a gente poder fazer diferente. E provocar o aluno, ele vai gostar desta aula, ele vai jogar, ele vai brincar, vai recortar, vai desenhar, ele vai fazer dobraduras, vai criar também... isto tudo depende da criatividade. (P_3)

Então o pesquisador perguntou a P_3 se somente poderia realizar as atividades em aulas extras, havendo esta resposta:

> Até que poderia ser usado dentro do horário e dá para acrescentar. Mas, infelizmente, hoje, a gente perde muito tempo com rever conteúdo, devido à dificuldade de nosso aluno, então, fica difícil cumprir todo o programa, com toda a dificuldade e falta de estudo em casa, mas se a gente puder acrescentar mais... E eu consigo chamar o aluno para umas destas oficinas (extra horário) ... com estas atividades diferenciadas, com um grupo menor de alunos, por isso que eu falei aula extra.

E P_5 disse: “É isso que eu também queria falar, talvez apresentando através de jogo, de dobradura... pode sim com certeza clamar a atenção dos alunos, e eles vão querer aprender. Porque vai aguçar a curiosidade deles.”

Em seguida o pesquisador provocou P_4: E você? O que achou de tudo?

> P_4: “Eu acho que estas atividades podem desenvolver habilidades para quaisquer questões do ENEM, e além de serem boas para os alunos são principalmente boas para os professores utilizarem.”
> P_3: “Gosto muito de Geometria e acho que tem que ser desenvolvida mesmo. Tem que provocar esta meninada mesmo. Para aprender.”

Por fim, neste último Encontro, o pesquisador agradeceu a colaboração de todos por disponibilizarem tempo para este estudo, prometendo apresentar os resultados da pesquisa, principalmente o Produto Educacional. Ele se colocou à disposição dos participantes, caso desejassem realizar uma pesquisa conjunta.

4.1 Categorias provenientes da análise do conteúdo

Bardin (1997) define análise de conteúdo:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter (por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens) indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 1977, p. 42).

A inferência[43] de que o autor fala visa a conclusões que trazem à tona, por mensagens/diálogos analisadas, outros conhecimentos sobre o tema analisado. Segundo Bardin (1977, p.41), a leitura realizada pelo analista do conteúdo busca “atingir através de significantes ou de significados (manipulados), outros «significados» de natureza psicológica, sociológica, política, histórica, etc.”

O autor também considera

> o método das categorias, espécie de gavetas ou rubricas significativas que permitem a classificação dos elementos de significação constitutivas, da mensagem. É, portanto um método taxionómico bem concebido para satisfazer os coleccionadores preocupados em introduzir uma ordem, segundo certos critérios, na desordem aparente (BARDIN, 1977, p. 37).

Essa desordem, que é aparente, diz respeito ao volume de dados e aos conteúdos obtidos, que, depois de agrupados e selecionados, vão revelar as categorias adotadas. Assim, os dados provenientes dos Encontros foram agrupados, incluído, portanto, o Grupo Focal. Ao fazer a análise do que aconteceu nesses momentos, foram consideradas, inicialmente, as faces do tetraedro de Machado (1998) e, depois, a visualização.

A seguir, são apresentadas as categorias obtidas pela triangulação dos dados obtidos nos Encontros e no caderno de campo. Estão no Quadro 37.

---

[43] “é uma **dedução feita com base em informações** ou um raciocínio que usa dados disponíveis para se chegar a uma conclusão.” Acessado em 02/06/2019 as 16:14 em https://www.significados.com.br/inferencia/

Quadro 37-Quantificação dos dados qualitativos coletados

Categorias Temáticas	Subcategorias	Caderno de Campo	Encontros	Grupo Focal	Total	% (≅)
Percepção	Observação de objetos	19	30	4	53	2,11
	Percepção de relações espaciais	12	17	7	36	1,43
	Relacionar vários objetos	4	19	0	23	0,91
	Manipulação de objetos	28	98	1	127	5,06
	Elementos Geométricos percebidos	2	20	2	24	0,95
	Comparação	7	19	18	44	1,75
Construção	Construção de figuras/sólidos	41	245	18	304	12,11
	Identificação de elementos geométricos	36	376	45	457	18,21
	Materiais para construção de elementos geométricos	16	48	0	64	2,55
Representação	Reprodução de desenhos	31	89	10	130	5,18
	Representação de Elementos Geométricos	35	186	8	229	9,12
	Representação gráfica de conceitos	2	46	6	54	2,15
Concepção	Organização conceitual	17	110	19	146	5,81
	Busca do conhecimento geométrico	24	117	2	143	5,69
	Raciocínio lógico-dedutivo	23	212	11	246	9,80
	Teorização	5	22	6	33	1,31
Visualização	Visualização de elementos espaciais	10	97	4	111	4,42

	Visualização de elementos geométricos físicos	30	229	26	285	11,35

Fonte: Arquivo do pesquisador

4.1.1 PERCEPÇÃO

Segundo Lauro (2007), ocorre por meio de atividades sensoriais. Explorar sentidos auxilia no desenvolvimento dessa habilidade.

Nas respostas dos participantes foi possível detectar seis subcategorias: observação de objetos (53 citações), percepção de relações espaciais (36 citações), relacionamento de vários objetos (23 citações), manipulação de objetos (127 citações), percepção de elementos geométricos (24 citações) e comparação (44 citações).

Nos Encontros, muitas vezes os participantes apontavam esta habilidade ou o uso dela nas atividades realizadas. Por exemplo: no 1.º Encontro, na primeira atividade, Jogo dos Sete Erros, P_5 comentou: "... são pequenos detalhes...". E na avaliação da atividade: "o jogo ajuda e que você tem que observar muito uma figura e outra.". Na segunda atividade, a de simetria, os desenhos a serem feitos deviam ser percebidos para depois construídos, portanto a percepção favorecia o desenvolvimento da atividade. Outro exemplo: para o 1.º Encontro, na terceira atividade, construção de quadrados e triângulos, foi observada uma nota no diário de campo que dizia ter P_3 feito mais do que se pediu e percebeu o erro.

Durante o 2.º Encontro, na primeira atividade, Reconhecendo π, P_3 e P_4 , ao comentar a atividade, afirmaram, respectivamente: "leva à percepção do número irracional π, através de aproximação" e "o aluno manuseia e mede os barbantes para chegar na resposta. A atividade também é suficiente para se chegar e conhecer a fórmula, pois as aproximações são muito boas.".

No 3.º Encontro, na primeira atividade era necessário construir para estimular a percepção. Ao serem perguntados sobre alguma utilidade na manipulação de poliedros, P_1 respondeu "ao manipular os poliedros podemos perceber melhor suas características, conseguimos visualizar de maneira mais clara cada um dos seus elementos.".

No 4.º Encontro, à pergunta sobre utilizar o Princípio de Cavalieri para explicar se a fórmula do cálculo do volume de sólidos poderia desenvolver habilidades, P_3 respondeu:

> Eu considero que pode, facilita a percepção com o preenchimento de espaço, consequentemente o cálculo do volume. Então você vai comparando, você vai percebendo este processo. É melhor que a maneira de quadro [de giz], aquela maneira que você fica só preso ao quadro, então eu acho que mexe... (P_3).

De acordo com Gutierrez (1996), percepções fazem parte das habilidades de visualização. Das seis habilidades apresentadas por ele, três são relacionadas à percepção: de figura de base, de posições no espaço e de relações espaciais.

Na BNCC (2017), a preocupação com o desenvolvimento da percepção se explicita em habilidades a serem desenvolvidas Ensino Fundamental. Por exemplo: a décima sétima habilidade (sexto ano): "*Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial"* (BNCC, p. 303).

A percepção é proposta por Machado (2002) como uma das quatro faces do Tetraedro Epistemológico. Sendo o conhecimento geométrico construído de forma equilibrada, "o sólido pode estar apoiado em qualquer outra de suas faces" (LAURO, p. 26). Como cada face está ligada às demais, nenhuma habilidade por si só auxilia na construção do conhecimento geométrico.

4.1.2 CONSTRUÇÃO

Segundo Lauro (2007), consiste na preparação de objetos que possam ser manipulados. Eles trazem melhor compreensão dos elementos apresentados.

Nas respostas dos participantes foi possível detectar três subcategorias: construção de figuras/sólidos (304 citações), identificação de elementos geométricos (457 citações) e uso de materiais para construção de elementos geométricos (64 citações).

Nos quatro Encontros iniciais houve menção à utilização desta habilidade. Por exemplo: no 1.º Encontro, na segunda atividade, foram utilizados régua e compasso para a construção de figuras por simetria e na terceira atividade foi pedida a construção de quadrados e triângulos. Para os desenhos dessas construções era necessário obter pontos médios. Enquanto faziam isso, os participantes comentavam.

> P_2: "Como vocês fizeram para achar o ponto médio certinho? Eu peguei pelo tamanho da caneta."
> P_4: "Eu usei três dedos e peguei a metade do dedo do meio..."
> P_5: "Cada um usou uma coisa, eu fui no olho mesmo."

Observou-se que todos procuraram um meio para a produção do que foi solicitado.

No 2.º Encontro, na atividade Reconhecendo π, os participantes colaram barbantes, produzindo círculos em alto relevo. Ao serem perguntados sobre como avaliavam a atividade, se era interessante para fazer relembrar a fórmula do comprimento da circunferência, P_3 respondeu:

> Eu gostei, acho que o aluno vai fazer isto com boa vontade... rapidinho... vai ter prazer de fazer... e pode até fazer com o colega do lado... desenvolvendo, então assim...vai ser uma atividade agradável, com bons resultados... eles recordando... uns que nunca deram muita atenção para o π, outros que já ouviram falar... para alguns vai ser até novidade (P_3).

O 3.º Encontro começou com uma atividade de manipulação: os participantes recortaram, dobraram e colaram para a construção dos poliedros. Em seguida, percebiam os elementos e completavam o Quadro. Ao serem indagados sobre construir poliedros, todos disseram que era importante. Assim, P_3 disse:

> Considero importante a construção, pode nos ajudar a visualizar, entender o que é face, o que é aresta, o que que é vértice, realmente o aluno pode entender através da construção. Por exemplo, a aresta na hora que ele vai dobrar; ele vai sentindo ..., ele vai dobrando e vai enxergando isto (P_3).

Ainda neste Encontro, a terceira, a quarta e a quinta atividade requeriam materiais manipulativos, como os poliedros de Platão, tronco de cone e globo. Ao serem perguntados sobre a utilidade da manipulação dos poliedros, todos confirmaram a importância. Assim, $P_{2:}$

> a construção e manipulação deles é muito importante porque a imagem mental que você faz no quadro é uma, mas a imagem mental que você tem quando você está tocando... tem uma área da matemática que fala sobre isto: a multimodalidade... quando você toca, vê, sente o cheiro de algo... a fixação e a construção desta imagem fica muito melhor (P_2).

Em relação a saber se a atividade com o tronco poderia auxiliar a visualização, todos disseram sim. $P_{2:}$ "quando você pega o tronco e você o recorta em partes, a construção reversa se torna muito mais fácil quando você pega as partes e constrói o todo ou pega o todo e vai construindo as partes, é superimportante."

No 4.º Encontro, as três primeiras atividades exigiam o uso da habilidade de construção: o cálculo do volume do paralelepípedo com cubos, o preenchimento da caixa cilíndrica com círculos e a deformação de cilindros com moedas. Para todas as atividades havia perguntas e justificativas.

Para a atividade relacionada ao paralelepípedo, P_1 justificou que considerava interessante utilizar os cubos de uma unidade de volume para calcular o volume de um paralelepípedo: “ajuda o aluno a entender de forma prática a noção de volume... e este conceito de volume... quantos cubinhos de aresta um cabem dentro do sólido. Ele consegue na prática visualizar”.

Para a atividade de preenchimento da caixa cilíndrica com círculos, P_4 respondeu que a atividade podia fornecer ao aluno uma ideia de como foi obtida a fórmula para o cálculo do volume do cilindro e que podia desenvolver a habilidade correspondente: “pois o aluno consegue visualizar o preenchimento do cilindro, compreendendo melhor a fórmula.”.

Para a atividade de deformação com o uso de moedas P_3 afirmou que o Princípio de Cavalieri ajudava no desenvolvimento de alguma habilidade.

> Isto já mexe com os alunos. Os alunos já tem extrema dificuldade para trabalhar com círculos, e é uma coisa bonita, que está na vida e eles tem muita dificuldade, por quê? Porque até o cálculo já vem de forma muito pesada, já vem com número irracional, o que para o menino não é algo fácil de lidar. Então é uma maneira concreta que facilita muito a visualização. Então quebra este negócio... de você trabalhar o cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência já é algo novo que você tem que introduzir para alguns , entre aspas, novo para alguns, que é o número irracional π. Quebra isto primeiro do cálculo, você vai juntando moedinhas, vai empilhando, vai mostrando... vai fazendo assim... (P_3).

A habilidade de construção é descrita na BNCC (2017) para os anos finais do Ensino Fundamental. Na unidade temática Geometria, várias habilidades associadas à construção são destacadas. Por exemplo, para o sétimo ano.

> EF07MA21-Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
> EF07MA22-Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
> EF07MA24-Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (BRASIL, 2017, p. 309).

A indicação da habilidade de construir na BNCC (2017) mostra claramente a importância de manipular para melhor compreender conceitos, formas e figuras.

4.1.3 REPRESENTAÇÃO

Segundo Lauro (2007), está relacionada à reprodução de objetos por meio de desenhos, percebidos ou construídos. As respostas dos participantes permitiram detectar três subcategorias: reprodução de desenho (130 citações), representação de elementos geométricos (229 citações) e representação gráfica de conceitos (54 citações).

Durante os Encontros, muitas vezes os participantes mencionaram a habilidade de desenhar, que utilizaram na realização de atividades. No 1.º Encontro, na segunda atividade, os participantes desenharam a outra metade da figura, tendo percebido a linha pontilhada como eixo de simetria da figura. Em seguida, marcaram pontos simétricos e desenharam a metade da figura que faltava. Na segunda parte da quinta atividade, havia necessidade do desenho para melhor compreensão da situação apresentada.

No 2.º Encontro, a sexta atividade era um problema que apresentava a imagem de um CD e pedia a área da coroa circular. Indagados sobre ela, P_2, P_3 e P_4 sugeriram colocar o desenho do CD, pois ajudaria na compreensão da situação-problema.

No 3.º Encontro, a segunda atividade pedia desenhar, visto de cima, cada um dos quatro poliedros construídos na atividade anterior. P_3 comentou:

> Eu gosto de desenho. Estas coisas de desenho eu não gosto de correr não, se eu puder eu faço bem devagar. Eu tive um bom professor no curso técnico. Um bom professor é maravilhoso... o cara era raro... era bom demais... que traço, que capricho. Aí você fica também tentando... (P_3, grifo do pesquisador).

No diário de campo foi registrado que, durante a atividade, P_5 falou que não gostava de desenhar e comentou com P_4. Este também disse que não gostava, embora tivesse feito Desenho Técnico. Ao ouvir isso, P_3 disse a P_4: "Você fez Desenho Técnico e não gosta?" P_4 se justificou, dizendo:

> Não! O professor era muito rude, com isso desenhar não era nada agradável. Eu nem me lembro mais do nome dele... Ele reclamava muito dos desenhos colocando defeitos em tudo. A minha letra nunca foi bonita... Eu com 15 anos de idade até tremia, tinha medo dele. (P_4)

Em ambos os casos o professor foi fator fundamental para desenvolver gosto ou falta de gosto por Desenho e, consequentemente, a maneira de estimular a habilidade.

No mesmo Encontro, a quarta atividade pedia um desenho das vistas de cima, de baixo, lateral esquerda, lateral direita, de frente e de trás de um tronco de pirâmide. P_5 apresentou dificuldade para desenhar.

> P_5: "Eu só vou dar conta se eu tirar a foto e colar."
> P_1 para P_4: "Você fez como se fosse uma coisa só?"
> P_4: "Não... eu tenho que desenhar isto aqui do lado mas não sei como vou colocar isto aqui."
> P_5: "Beleza... eu consigo ver, só não consigo desenhar."
> P_3: "Desenha o quadrado. O que mais você está vendo de cima?"
> P_5: "Bom... além do quadrado eu ainda vejo alguma coisa aqui do lado."
> P_4: "Desenha uma aba, alguma coisa assim."

Nessa atividade, o tronco não apresentava marcação/numeração, pois, como os participantes estavam sentados em lados diferentes da mesa, o desenho de um poderia ficar diferente do desenho de outro. P_3 sugeriu escrever no poliedro: frente, atrás, lateral direita, lateral esquerda, fundo.

No 4.º Encontro, da terceira à sexta atividade, foram apresentados desenhos (figuras) que auxiliavam na compreensão do Princípio de Cavalieri.

Segundo Machado (1990), nenhuma das faces do Tetraedro Epistemológico deve ser tratada de forma isolada, pois pode atrofiar-se. Quanto à representação afirma:

> Poucos são os professores que buscam de modo consciente o desenvolvimento da capacidade de representar. Os alunos são instados a desenharem sem qualquer orientação específica, e considera-se natural que 'vejam' os objetos tridimensionais através de suas representações planas, muitas vezes classificando-se os recalcitrantes como 'carentes de visão espacial'. Tal capacidade de transitar do objeto para a representação plana e vice-versa sem dúvida é passível de ser desenvolvida, competindo ao professor tal tarefa (MACHADO, 1990, p. 144).

A habilidade de representação é necessária, pois, juntamente com as habilidades de percepção e construção, consolida e amplia a visão espacial dos alunos, tornando a Geometria mais compreensível.

4.1.4 CONCEPÇÃO

Segundo Lauro (2007), tem relação[44] com a procura do conhecimento geométrico através da teorização (organização/desenvolvimento conceitual) e do raciocínio lógico. Esta

---

[44] Esta relação é explicada na pág 44.

face do Tetraedro Epistemológico está ligada diretamente à percepção, à construção e à representação.

Nas respostas dos participantes foi possível detectar quatro subcategorias: organização conceitual (146 citações), busca do conhecimento geométrico (143 citações), raciocínio lógico-dedutivo (246 citações) e teorização (33 repetições).

Em todos os Encontros esta habilidade foi mencionada, aparecendo espontaneamente em algumas atividades. No 1.º Encontro, na quinta atividade, sobre observação e cálculo, era necessário compreender conceitos relacionados a quadrado, ponto médio e triângulo isósceles. Na primeira parte da atividade, P_2 fez um comentário: “Posso fazer assim, lado CB igual o lado AD, DC= 2 vezes AD, logo o triângulo... ED é congruente com o triângulo BC.”

P_3 respondeu:

> É congruência também... é congruência de triângulos. Não deixei mais explicação não. Mas, eu acho... não sei... se fosse para o aluno, mesmo que ele não lembrasse da congruência, o levaria a entender isso de uma maneira muito tranquila! A gente que já é engessado demais... A gente até explicou aqui, acho que o aluno explicaria com o jeitinho mais dele ali, que a congruência ele não ia lembrar ... (P_3).

No 2.º Encontro, na quarta atividade (Relembrando áreas de círculos), foi feita uma ilustração[45] para chegar à área do círculo usando circunferências concêntricas e ao entendimento da área do triângulo usando a fórmula de comprimento da circunferência como base e o raio como a altura do triângulo. Os participantes manifestaram interesse pela atividade por considerar que podia facilitar a aceitação da fórmula da área do círculo.

No 3.º Encontro, a terceira atividade, sobre os poliedros de Platão, levou à Fórmula de Euler. A quinta atividade, com a manipulação do globo, trabalhou a compreensão de paralelismo e perpendicularismo. Os participantes manifestaram interesse pela atividade, apontando que poderia ser útil no estudo de retas paralelas, pontos equidistantes e setor circular. Sugeriram também utilizá-la de modo interdisciplinar principalmente com a Geografia: cartografia, fuso horário, ângulo, localização, ponto cardeal eram temas nos quais os alunos apresentavam dificuldades.

No 4.º Encontro, na terceira atividade, foram usadas moedas para explicação do Princípio de Cavalieri. A deformação do cilindro original mostrou que as moedas eram as mesmas, os sólidos formados tinham formas diferentes e, apesar disso, possuíam o mesmo volume. O uso de moedas[46] para ilustrar o Princípio de Cavalieri agradou aos participantes, que

[45] A ilustração se encontra na página 123.
[46] A figura se encontra na página 153.

comentaram sobre a habilidade de visualização, pois, além de chamar a atenção pelo visual, era uma maneira concreta de facilitar a visualização.

4.1.5 VISUALIZAÇÃO

Arcavi (2003), misturando as definições de Zimmermann e Cunningham (1991) e Hershkowitz et al. (1989), apresenta esta:

> A visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de representar e comunicar informações, pensar e desenvolver idéias previamente desconhecidas e avanços na compreensão (ARCAVI,2003,p.217).

Nos Encontros, durante a realização das atividades, desenhos/figuras, imagens, diagramas e projeções determinaram formação de imagens mentais e sugestões do uso de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra. E as respostas dos participantes tornaram possível detectar duas subcategorias: visualização de elementos espaciais (111 citações) e visualização de elementos geométricos físicos (285 citações).

Esta habilidade apareceu naturalmente no decorrer de todas as atividades e foi usada junto com as habilidades percepção, construção, representação e concepção. Sendo assim, pode haver apresentação de exemplos, embora as atividades tenham sido descritas e analisadas em seções anteriores.

A atividade Jogo dos Sete Erros, realizada 1.º Encontro, requereu a habilidade de percepção, diretamente ligada à de visualização. Esquadrinhar essas figuras trabalhou paralelamente as duas habilidades. A atividade relacionada à simetria exigiu a habilidade de desenhar, diretamente ligada à de visualização. O produto da criação feito na atividade tinha de ser visualizado, antes de ser delineado.

A atividade Relembrando áreas de círculos, realizada no 2.º Encontro, requereu a habilidade de concepção, diretamente ligada à de visualização. O raciocínio lógico foi necessário para entender a transformação dos comprimentos de várias circunferências concêntricas em segmentos paralelos que dão a ideia da formação de um triângulo. Com a visualização foi possível entender a fórmula da área do círculo[47].

---

[47] A atividade está ilustrada na página 123.

Em algumas atividades do 3.º Encontro, as representações feitas por meio de desenhos estavam diretamente relacionadas à habilidade de visualização. As representações feitas de vários ângulos facilitaram a percepção dos sólidos apresentados. Nas atividades relacionadas aos poliedros de Platão, a visualização dos elementos foi fundamental para a percepção das relações, permitindo chegar à Fórmula de Euler. Na atividade de observação do globo, a visualização estava ligada diretamente à percepção. Observando de forma geométrica as linhas do trópico de Câncer, do trópico de Capricórnio, do Equador, do Meridiano de Greenwich e dos demais meridianos, compreendeu-se de maneira mais consistente o paralelismo, o perpendicularismo, a concorrência e a sobreposição de retas. A percepção dos polos do globo como pontos geométricos auxiliou no entendimento de setores circulares de mesma área. A visualização mental auxiliada pela percepção aumentou a compreensão geométrica da esfera.

Ao desenvolver a atividade, um participante exclamou: “Imaginação é tudo!”. De fato, a percepção, pela manipulação de um sólido ou pela abstração de uma forma, amplia a visualização do que se busca conhecer.

A atividade de construção do paralelepípedo realizada no 4.º Encontro estava diretamente ligada à visualização. Ao construir o paralelepípedo e preenchê-lo com cubos, os participantes visualizaram o volume e compreenderam a origem da fórmula. A atividade com o uso de moedas ligou a habilidade de concepção à de visualização. Deformando um cilindro construído por moedas ao lado de outro construído por moedas idênticas, visualizavam-se formas diferentes com o mesmo volume. A atividade que usou o volume da pirâmide, ilustra a formação do prisma de base triangular juntando três pirâmides. A habilidade de construção e de visualização se completaram, portanto para a compreensão da fórmula do volume da pirâmide.

Considerações Finais

Volta-se à questão de investigação:

Como uma proposta de atividades pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma, da Matriz de Referência do ENEM?

É necessário, portanto, fazer uma breve recapitulação de como o estudo foi realizado na busca de soluções. Para a elaboração das atividades requeridas para desenvolver habilidades necessárias à resolução de situações-problema relacionadas ao conhecimento geométrico de *espaço* e *forma*, foram escolhidas a Geometria Plana e a Geometria Espacial.

Depois foram analisados documentos oficiais correspondentes ao assunto: PCN, CBC, BNCC e Currículo Referência de Minas Gerais. E feita uma pesquisa bibliográfica que destacou a revisão da literatura sobre o tema.

Com essa fundamentação, ocorreu a elaboração das atividades a serem realizadas. Além disso, elas foram testadas por professores para análise de suas opiniões sobre a efetividade de serem possibilitadoras do desenvolvimento das referidas habilidades.

Em vista disso, um grupo de professores de Matemática (Ensino Fundamental e Ensino Médio) de escolas públicas foram convidados a participar. Mas somente após a realização de uma entrevista eles foram confirmados participantes dos Encontros a serem realizados.

Foram 5 Encontros, 4 para as atividades e o último para o Grupo Focal. Em cada um dos 4 primeiros Encontros, os professores realizaram atividades destinadas à resolução de duas situações-problema escolhidas do ENEM, questões propulsoras de habilidades auxiliares.

O conhecimento geométrico de *espaço* e *forma* foi abordado por meio de atividades (relacionadas a situações-problema) que levassem ao desenvolvimento das habilidades requeridas. E os participantes elaboraram conclusões sobre a possibilidade do desenvolvimento dessas habilidades.

A habilidade de percepção foi desenvolvida/aprimorada nestas atividades: Jogo dos Sete Erros, Construção de quadrados e triângulos e cálculo de áreas, Reconhecendo π, Relembrando áreas de círculos, Construção e desenho de poliedros, Desenhos de corpos redondos, Preenchimento de espaços e Comparação de volumes de sólidos (pelo Princípio de Cavalieri). A habilidade se apresentou de diversas formas, denominadas subcategorias, que a compuseram e auxiliaram a realização com êxito das atividades propostas: observação de objetos, percepção de relações espaciais, relacionamento de vários objetos, manipulação de objetos, percepção de elementos geométricos e comparação.

A habilidade de construção foi desenvolvida/aprimorada nestas atividades: Construção de quadrados e triângulos, Reconhecendo π, Construção de poliedros, Construção de cilindro com círculos e Deformação de cilindro feita com moedas. A habilidade se manifestou em formas que auxiliaram a concretização e compreensão das atividades propostas, as subcategorias: construção de figuras/sólidos, identificação de elementos geométricos e uso de materiais para construção de elementos geométricos.

A habilidade de representação foi desenvolvida/aprimorada nestas atividades: Simetria, Construção de quadrados e triângulos e cálculo de área, Reconhecendo π, Relembrando áreas de círculos, Desenho com vista de cima de poliedros, Desenho com vista de cima dos ângulos de um tronco de pirâmide, Desenho da projeção do ponto de latitude 00º 00’ 00’’ no globo juntamente com a linha do Equador e o meridiano que o corta. A habilidade surgiu naturalmente, auxiliando o raciocínio com visualização através da produção de desenhos. Subcategorias correspondentes: reprodução de desenhos, representação de elementos geométricos e representação gráfica de conceitos.

A habilidade de concepção foi desenvolvida/aprimorada nestas atividades: Cálculo da área de quadrado e triângulo, Cálculo do comprimento e da área da circunferência, Reconhecendo π, Relembrando área de círculo, Localização de arestas, vértices e faces, globo terrestre e Construção de fórmulas de volume. A habilidade sistematizou a percepção de padrões, auxiliando no entendimento de meios necessários para a resolução de situações oferecidas e apresentando-se em subcategorias: organização conceitual, busca do conhecimento geométrico, raciocínio lógico-dedutivo e teorização.

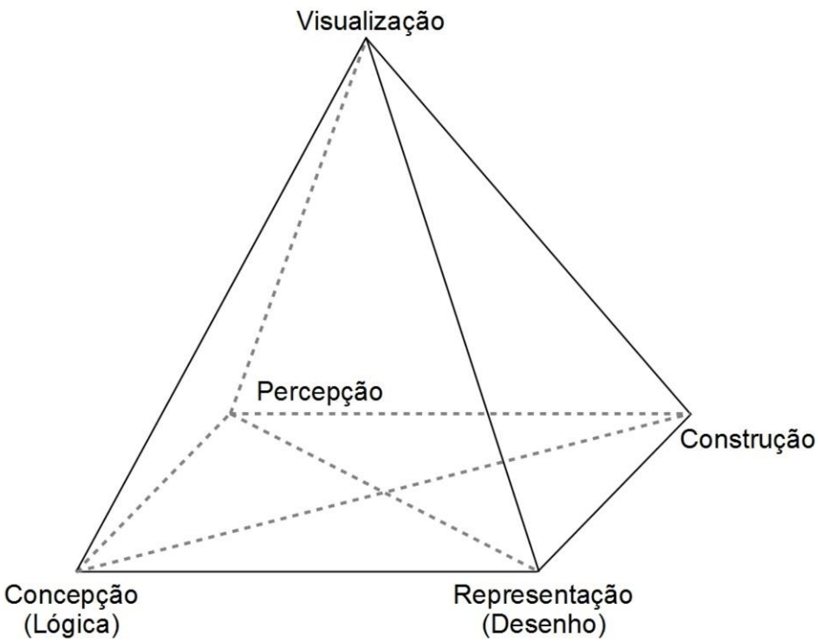
A habilidade de visualização foi desenvolvida/aprimorada nestas atividades: Jogo dos Sete Erros, Simetria, Construção de quadrados e triângulos e Cálculo de área, Reconhecendo π, Relembrando área de círculos, Desenho com vista de cima, Desenho com vista de todas as posições, Visualizações no globo, Preenchimento de paralelepípedo e caixa cilíndrica. A habilidade se manifestou em duas subcategorias: visualização de elementos espaciais e visualização de elementos geométricos físicos.

No 5.º Encontro (Grupo Focal), foi discutida cada atividade de cada Encontro, na busca de compreender qual ou quais habilidades foram utilizadas. Ao se analisarem essas atividades e algumas questões do ENEM de acordo com uma das quatro habilidades propostas pela Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (H6-*Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço* *bidimensional*; H7-*Identificar características de figuras planas ou espaciais*; H8-*Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma*; H9-*Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano*), correspondentes à segunda competência (*Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela*), os participantes indicaram a possibilidade de caracterizar mais de uma habilidade, o que diferia da classificação do INEP para as situações-problema apresentadas no ENEM. As atividades desenvolvidas nos Encontros correspondiam a estas habilidades: percepção, construção, representação, concepção, visualização.

A visualização se ligou diretamente às habilidades percepção, construção, representação e concepção, que, no Tetraedro Epistemológico de Machado (2002), explicam a caracterização do desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Os resultados deste estudo permitiram, a partir do tetraedro de Machado (2002), a construção de uma pirâmide de base quadrangular, na qual os vértices da base são a concepção (ou lógica), a representação (ou desenho), a construção e a percepção (Figura 22). Como vértice da pirâmide está a visualização, ligada diretamente aos vértices da base, que são habilidades auxiliares necessárias a toda proposta de atividade que vise a possibilitar o desenvolvimento de aptidões auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de *espaço* e *forma*.

Figura 22-Pirâmide de Base Quadrada



Fonte: Elaborado pelo Autor

As habilidades auxiliares destacadas na pirâmide (Figura 22) são as ideias que guiaram as atividades propostas nos Encontros, que foram desenvolvidas por professores de Matemática antes de serem programadas para os alunos. Isso porque os professores conheciam os assuntos abordados e tinham na prática um suporte para opinar sobre possíveis modificações a serem feitas. Suas observações auxiliaram o pesquisador “a ver o não visto” (ARCAVI, 2003), podendo reformular ou adaptar as atividades com o intuito de elaborar de forma mais assertiva o que os alunos deviam fazer, para, além de alcançar uma aprendizagem, sentir o prazer de aprender e, consequentemente, internalizar o conhecimento construído através das atividades realizadas. Essas habilidades podem levar os alunos a ter um novo olhar para uma questão que requeira aptidões e a potencializar as chances de resolvê-la. Mas outras habilidades auxiliares podem surgir, como independentes ou como subcategorias. Nesta pesquisa, por exemplo, a comparação foi considerada como uma subcategoria da percepção.

Assim, as atividades mostram que os professores que trabalham com Geometria devem atentar para o fato de que as habilidades requeridas nesta área do ENEM vão muito além do formalismo clássico de fórmulas e exercícios. Portanto, atividades simples podem contribuir para a construção do desenvolvimento dessas habilidades.

Então, um desafio a todos nós, professores, se encontra em buscar nas avaliações externas, como o ENEM, questões propulsoras para criar atividades que desenvolvam ou lapidem habilidades que possam auxiliar a construção do conhecimento matemático, seja ele geométrico ou não. Com um currículo extenso, torna-se necessário, para construir habilidades, trabalhar com atividades que viabilizem a conexão entre aprendizados múltiplos. Elas devem ser construídas e testadas por professores e/ou pesquisadores para possibilitar nova forma de construir conhecimento evitando-se trabalhar com treinamento de questões, o que é tão difundido em certos níveis da escolaridade.

Buscar nova forma de trabalhar, fazendo uso pedagógico de questões do ENEM sobre conhecimento geométrico de *espaço* e *forma* pode trazer possibilidades para um aprendizado mais denso e verdadeiro, em que pode haver prazer no desenrolar situações-problema e o raciocínio pode fluir mais facilmente, por poder acessar conhecimentos ou informações prévias já consolidadas em atividades construídas especificamente para isso.

Despertar o trabalho com habilidades auxiliares para o desenvolvimento de uma habilidade específica traz a oportunidade de construir/reconstruir atividades ou tarefas que normalmente não estão em livros didáticos, podendo gerar nova dimensão, dar novo significado à aprendizagem. A ampliação/consolidação das habilidades auxiliares pode dar mais segurança aos alunos, despertando o desejo de agregar saberes aos já existentes. A segurança pode ser adquirida em atividades que exploram parte de seus sentidos (ou todos), concretizando um conhecimento que pode acompanhá-los durante a vida e inspirá-los para criar soluções para entraves.

Julga-se necessário destacar como esta pesquisa modificou o olhar do pesquisador, como professor do Ensino Básico, para as possibilidades de uso das questões do ENEM em sala de aula, dando grande salto qualitativo nas suas aulas.

Vendo as situações–problema ter importante papel na aprendizagem, o que se espera é que esta pesquisa possa inspirar outros pesquisadores a estudar habilidades necessárias à solução delas.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. Dicionário de Filosofia. Trad. Alfredo Bosi, Rev. Ivoni Castilho Benedetti. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ALESSANDRINI. C. D. O Desenvolvimento de Competências e a Participação Pessoal na Construção de um Novo Modelo Educacional. In: PERRENOUD, P., THURLER. M. *As competências para ensinar no século XXI.*A formação dos professores e o desafio da avaliação. Tradução de Cláudia Schilling, Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002. p. 157-176.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. *Boletim GEPEM*, v. 55, 2009, p. 133-154.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Resolução de Problemas. In: Associando o computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência. 2005, Anais do IVSIPEMAT.

ANDRADE, M. M. Introdução à metodologia do trabalho científico. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

ANDRÉ, M. E. D. A. Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional. Brasília: Líber Livro Editora, 2005.

ARAÚJO, C. et al. Estudo de caso. Instituto de Educação e Psicologia - Mestrado em Educação. Braga, 2008, 25p.

ARCAVI, A.The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics, n. 52, p. 215-241, 2003

BALESTRI, R. *Matemática*: interação e tecnologia. Volume 3. 2.ed. São Paulo : Leya, 2016.

BARBOSA, L. C. M.; VIEIRA, L. F. Avaliações Externas estaduais: possíveis implicações para o trabalho docente**.** *Revista e-Curriculum*, São Paulo, n.11 v.02 ago.2013.

BARBOUR, R. Grupos Focais. Trad. DUARTE, M. F. Porto Alegre: Artmed. 2009. Coleção coordenada por Uwe Flick.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

BASSO, A. Avaliação Escrita: realidade e perspectiva. Pato Branco: Imprepel Gráfica e Editora, 2009

BLASIS, E.; FALSARELLA, A.M; ALAVARSE, O.M. Avaliação e aprendizagem: Avaliações Externas: perspectivas para a ação pedagógica e a gestão do ensino. Coordenação Eloisa de Blasis, Patrícia Mota Guedes. – São Paulo: CENPEC: Fundação Itaú Social, 2013, p.48)

BOGDAN, R. BIKLEN, S. Investigação qualitativa em Educação. Port\o Editora, 1994.

BORBA, A.M. C. ,ALMEIDA, H. R. F. L. , GRACIAS, T. A. S. *Pesquisa em ensino e sala de aula:* Diferentes vozes em uma investigação. 1ª ed. Belo Horizonte. Autêntica Editora.2018.

BRANCA, Nicholas A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p.04 -12.

BRASIL. Lei n. 9.394, de 20 de setembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 23 dez. 1996

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: primeiro ciclo de alfabetização. MEC/SEF: Brasília. 1997.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais, terceiro e quarto ciclo da alfabetização. MEC/SEF: Brasília. 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC/SEMT: Brasília. 1999.

BRASIL. Relatório Final do Exame Nacional do Ensino Médio – 1998; INEP/MEC, Brasília, 1999.

BRASIL, Relatório Pedagógico 2000. INEP/MEC, Brasília, 2001.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais + Orientações Educacionais Complementares. PCN+ MEC/SEMT: Brasília. 2002.

BRASIL. Matriz de Referência do Encceja. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/encceja/matrizes-de-referencia. Acesso em 08/10/2017.

BRASIL. Caderno de Provas Enem 2010. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno7_azul_com_gab.pdf . Acesso em 08/01/2018.

BRASIL. Caderno de Provas Enem 2012. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/caderno_enem2012_dom_azul.pdf . Acesso em 08/01/2018.

BRASIL. Caderno de Provas Enem 2013. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf . Acesso em 08/01/2018.

BRASIL. Caderno de Provas Enem 2014. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/CAD_ENEM_2014_DIA_2_07_AZUL.pdf . Acesso em 08/01/2018.

BRASIL. Caderno de Provas Enem 2015. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_07_AZUL.pdf . Acesso em 08/01/2018.

BRASIL. Caderno de Provas Enem 2016. Ministério da Educação e Cultura. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. INEP. Brasília. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_07_AZUL.pdf . Acesso em 08/01/2018.

BRASIL. Matrizes de Referência do Enem 2009. Portal do INEP, s/d, s/p. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em 08/10/2017.

BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. MEC/SEB: Brasília. 2006.

BRASIL, Relatório Pedagógico 2009-2010. ENEM, INEP/MEC, Brasília, 2014.

BURIASCO, R. L. C; SOARES, M. T. C. Avaliação de sistemas escolares: classificação dos alunos na perspectiva de análise de sua produção matemática. In: *Avaliação em Matemática no Brasil: Histórias e perspectivas atuais.* Wagner Soares Valente (org.). Campinas: Papirus, 2008, p. 101 – 142.

CAMPOS, R. B. L. *Análise técnica da Matriz de Referência do Enem e dos itens de matemática das edições de 2012 a 2014.* 2015. 86f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em

Rede Nacional) – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

CHIZZOTTI, A. Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais. Petrópolis, Rio de janeiro: Vozes, 2006.

CRUZ, A. M. Potencialidades da utilização do software GeoGebra para o desenvolvimento do conteúdo de funções exponenciais através do smartphone. Dissertação (mestrado profissional) Universidade Federal de Ouro Preto. UFOP. 2018.

D‘AMBRÓSIO, B. S. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático In: *I Seminário de Resolução de Problemas*. (I SERP). Rio Claro: Unesp. Disponível em: http://www.rc.unesp.br//serp/trabalhos.html. Acesso em 05/10/2017

D‘AMBROSIO, U. Prefácio. In: ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2004.

DANTE, L.R., *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L.R. Matemática, volume único. 1ªed. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R., *Formulação e resolução de problemas de matemática:* Teoria e Prática, São Paulo, Ática, 2009.

DEPRESBITERIS, L.A avaliação educacional em três atos, São Paulo: Editora Senac -3ªed, 2004

DICCIONARIO SALAMANCA de la lengua española. Madrid: Santillana. Universidad de Salamanca. 1996.

DUTRA, D. S. A. e VIANA, M. C. V. Resolução de problemas em ambientes virtuais de aprendizagem: possibilidade na educação a distância. *Revista Eletrônica de Educação*, v. 7, n. 2, 2013, p.241-262.

ECHEVERRÍA, M. P.P. A solução de Problemas em Matemática. In: Juan Ignácio Pozo (org.) *A Solução de Problemas*: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 43-65.

FAINGUELERNT, E. K. Educação Matemática: Representação e Construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médica Sul, 1999.

FERREIRA, A. B. H. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. 3ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FERREIRA, E. M. *Análise da abrangência da Matriz de Referência do ENEM com Relação às habilidades avaliadas nos itens de Matemática aplicados de 2009 a 2013*. 2014. 64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília.

FIORENTINI, D., LORENZATO, S. Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Ver. Campinas, S.P.: Autores associados, 2012.

FONSECA, E. , KADUS, J. , CENA, M. *A bíblia do ENEM:* Resoluções comentadas das provas de 2013, 2014, 2015 e 2016 – Estratégias de estudo para obter sucesso no ENEM. Edição 2017. Belo Horizonte: Log, 2017.

GADOTTI, M. Prefácio, p.9, In: DEMO, P. Avaliação Qualitativa, Campinas, SP. Autores Associados, 1994(Coleção Polêmicas do nosso tempo, v.25).

GARCÍA-TALAVERA, M. D. Dicionário *Santillana*. 4 Ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GAZIRE, E. S. O não resgaste das geometrias. 2000. 217 f, Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação.

GOMES, M. G. *Geometria nas questões do ENEM sob a ótica da Resolução de Problemas:* um auxílio ao Trabalho Docente. 2017. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni.

GOMES, R. Análise e interpretação de dados de pesquisa qualitativa. In: Minayo, M. C. S (Org). *Pesquisa Social*: teoria, método e criatividade/Suely Ferreira Deslandes, Romeu Gomes; Maria Cecília de Souza Minayo, 1 ed. Petrópolis, R.J. : Vozes 2016.

GONDIM, S.M. G. Grupos focais como técnica de investigação qualitativa: desafios metodológicos. *Paidéia*, 12 (24), 2003.

GUIMARÃES, Raul Borges. O Enem, as ciências Humanas e suas tecnologias. In: *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) fundamentação teórico- metodológica.* Brasília: INEP/MEC.2005, p.65-68.

GUITIERREZ, A. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso em: 20/12/2018.

HIANE, P. *Questões de Matemática da UFMS e ENEM:* uma análise da avaliação por conteúdos e por outras competências. 2011. 169f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal do mato Grosso do Sul, Campo Grande.

HOFFER, Alan. Geometry is more than Proof. Trad. Antônio Carlos Brolezzi. The Mathematics Teachers, vol. 74, n.º 1, pp. 11-18.1981.

INEP. Escolas municipais de Ouro Preto.(s.d, s.p) In: https://www.google.com.br/search?q=inep+escolas+municipais+de+ouro+preto&npsic=0&rflfq=1&rlha=0&rllag=-20392809,-43499208,1595&tbm=lcl&ved=2ahUKEwj2_tOFwu3eAhUBTZAKHZaXCrQQjGp6BAgAECY&tbs=lrf:!2m1!1e2!3sIAE,lf:1,lf_ui:2&rldoc=1#rlfi=hd:;si:;mv:!1m2!1d-20.2835085!2d-43.393153!2m2!1d-20.5502814!2d-43.7905816;start:20 . Acesso: 24/11/2018.

KOOGAN, Abrahão;HOUAISS, Antônio. Enciclopédia e dicionário Ilustrado.4 ed. Rio de Janeiro: Seifer, 1999.

LAURO, M. M. *Percepção-Construção-Representação-Concepção. Os quatro processos do ensino da Geometria*: uma proposta de articulação. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo – S.P. 2007, 396 p.

LESH, H.; LANDAU, M. (Eds.) *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983.

LESTER, F. K. Trends and issues in mathematical problem solving research. In: LESH, H.; LANDAU, M. (Eds.) *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983.

LESTER, F. K.; CHARLES, R. Teaching problem solving: what, why, and how. Nona York: Dale Seymour Publications, 1982.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, W. e MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, vol.2. Reimp. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.2014.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem, institucional e de larga escala*. Salvador 2013. Disponível em: http://luckesi.blogspot.com.br/2014/09/avaliacao-da-aprendizagem-institucional.html. Acesso em 25/07/2017.

LUCKESI, C. C. Avaliação da aprendizagem escolar. São Paulo, Cortez, 2011.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. 2 ed. São Paulo: EPU, 2013.

MACEDO, L. A situação-problema como avaliação e como aprendizagem. In: *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) fundamentação teórico- metodológica.* Brasília: INEP/MEC.2005, p.29-36.

MACEDO. L, Situação-Problema: Forma e Recurso de Avaliação, Desenvolvimento de Competências e Aprendizagem Escolar. In: PERRENOUD, P., THURLER. M. *As competências para ensinar no século XXI.* Tradução de Cláudia Schilling, Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002. p. 113-135.

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna.* Editora Cortez *.1998.*

MACHADO. N. J. Sobre a Ideia de Competência. In: PERRENOUD, P., THURLER. M. *As competências para ensinar no século XXI.* Tradução de Cláudia Schilling, Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002. P. 137-155.

MACHADO, N. J. Matemática e realidade. Editora Cortez. 2009.

MACHADO, P. H. A. *O ENEM no Contexto das Políticas para o Ensino Médio.* 2012. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade do Estado do Mato Grosso, Cáceres.

MACHADO, R. Q. *Ciência, Tecnologia e Sociedade/CTS na formulação de questões de Matemática do Exame nacional do Ensino Médio (2009 a 2011):* quais as referências de contextualização. 2012. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Humanas, Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba.

MARTINS JUNIOR, J. C. *Ensino de derivadas em cálculo I*: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. Dissertação (mestrado profissional). Universidade Federal de Ouro Preto – Ufop. 2015.

MARTINS JUNIOR, J. C., REIS, F. S. Algumas contribuições de atividades exploratórias no conceito de integral definida. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo, 2016.

MEIRIEU, P. Aprender sim, Mas como? Tradução Vanise Pereira Dresch. 7 ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

MEIRIEU, P. *Aprender... Sim, mas como?* Trad. Vanise Pereira Dresch. 7 ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. *Qualitative data analysis*: anexpandedsource book. 2ª Ed. Thousand Oaks, CA: Sage, 1994.

MILES, M. B., HUBERMAN, A. M.; Saldaña, J. *Qualitative data analysis*: a methods sourcebook. 3ª Ed. Thousand Oaks, CA: Sage, 2014.

MINAS GERAIS. Conteúdo Básico Comum, Belo Horizonte, MG: Imprensa Oficial, 2005.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. *O desafio do conhecimento.* 9 ed. Ampl. São Paulo: Hucitec, 2006.

MINAYO, M. C. S., DESLANDES, S. F., GOMES, R. *Pesquisa Social*, 28. Ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.

MOTA, S. H. A. *Currículo de Geometria Espacial do Colégio 7 de Setembro:* influências do vestibular da Universidade Federal do Ceará e do ENEM. 2015. 148f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera se São Paulo, São Paulo.

MORAIS, R. S; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. Em Lourdes de L. R. Onuchicetal. (Org.) *Resolução de Problemas:* Teoria e prática. Jundiaí. Paco Editorial: 2014. P. 17-34.

MOREIRA, M. A. *Aprendizagem significativa*. Brasília. Universidade de Brasília.1999.

NASSER, L. (coordenadora). Geometria segundo a teoria de van Hiele – Instituto de Matemática – UFRJ – Projeto Fundão – SPEC- PADCP- CAPES – 1997, 87 p.

OLIVEIRA, M. R. *A matemática do ENEM*: por competências e habilidades. 1ª ed. Belém: Gráfica Vestseller, 2018.

OLIVEIRA, M. M. N. L. , PEREIRA, L. C. V. C. Interferências dos sistemas de avaliação externos no currículo do ensino médio das escolas da XV CREDE, Região Inhamuns - Ceará. Disponível em: file:///C:/Users/Usuário/Desktop/INTERFERÊNCIAS%20DOS%20SISTEMAS%20DE%20AVALIAÇÃO%20EXTERNOS%20NO%20CURRÍCULO%20DO%20ENSINO%20MÉDIO%20DAS%20ESCOLAS%20DA%20XV%20CREDE,%20REGIÃO%20INHAMUNS%20-CEARÁ.pdf . Acessado em 20/12/2018.

ONUCHIC, L.R., Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, In BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisas em Educação Matemática*: concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. pp. 199-218.

ONUCHIC, L. R. Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no mundo. *Anais do I Seminário de Resolução de Problemas*. (I SERP). Rio Claro: Unesp. 2008, p.1-15.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (org.). *Educação Matemática - pesquisa em movimento.* São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas A Licenciatura em Matemática – Rumo à compreensão e à aquisição das grandes ideias contidas na Matemática Escolar. In: IV SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília – DF, 2009.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. S. G. O Estado da Arte da Resolução de Problemas. In: V CIEM- Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2010, Canoas. *Anais* V .... Canoas-RS: Editora da Ulbra, 2010. p.1-12.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema,* Rio Claro (SP), v.25, n41, p.73-98, dez.2011.

ONUCHIC, L. R.; MORAIS, R. S. Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa* (Online), São Paulo, v. 15, n.3, p. 671-691, 2013.

OURO PRETO. Prefeitura municipal de Ouro Preto. A cidade (s.d., s.p). In: https://ouropreto.mg.gov.br/ Acesso em 23/11/2018.

PASSOS, C. L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica:* A geometria na Sala de Aula. 2000. 348f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PINTO, R. A. *Percepções de um grupo de professores de matemática acerca das avaliações externas e sua influência na prática docente.* 2016. 176f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

PIRONEL, M.; VALLILO, S.A.M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R; LEAL JUNIOR, L. C; PIRONEL, M.(org.) *Perspectivas para Resolução de Problemas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência. 1978.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school In: KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 1-3.

PONTE, J. P., BROCADO, J., OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na Sala de Aula, 1ª ed., 2ª reimp. Belo Horizonte, Autêntica, 2006

POZO, J. I. (Org.) *A solução de Problemas*: Aprender a resolver, resolver para aprender. Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed. 1998.

RABELO, E. H. *Avaliação:* Novos Tempos, Novas Práticas. Petrópolis: Vozes, 1998

REIS, A. Q. M. *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como indutor da prática curricular de professores de Matemática a partir da Perspectiva de Contextualização.* 2012. 116f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

RIBEIRO, V. G. S. *Leitura, Interpretação e Resolução de Problemas em Matemática no contexto do Exame Nacional do Ensino Médio.* 2013. 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

ROMÃO, J.E. *Avaliação Dialógica*: desafios e perspectivas, 6ª edição, São Paulo, Cortez: Instituto Paulo freire, 2005

SANTOS, A. O. A. Apresentação. In: *Ouro Preto cidade em três séculos*; Bicentenário de Ouro Preto; Memória histórica (1711-1911). Org. Drummond, M. F. S. I. Ouro Preto: Liberdade,2011.

SANTOS, L., PINTO, J. Quando ouves falar em avaliação, qual a primeira ideia que te vem á cabeça? (Depoimento dos alunos). Revista Educação e Matemática, Lisboa, nº74, setembro/outubro de 2003

SCHOENFELD, A. Por que toda esta agitação acerca da Resolução de Problemas? In: P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), *investigar para aprender matemática* (pp. 61 – 72). 1996. Lisboa: APM e Projecto MPT (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *EducationalResearcher*, *15*(2), 4-14, 1986.

SILVA, J. *Avaliação na perspectiva formativa-reguladora*: pressupostos teóricos e práticos / Janssen Felipe da Silva;Prefácio : Jussara Hoffmamn – Porto Alegre : Mediação, 2010, 3ª edição

STANIC, G. M. A. , KILPATRICK, J. Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/stanic-kilpatrick.pdf . Acessado em: 20/07/2017.

TOSTA, C. G. , EMANUEL, A. V. E. , SCUSSEL, D. R. , SALOMÃO, L. F. C. , BORGES, M. C. *Criança e desenvolvimento, volume 2:* Necessidades educativas infantis. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

UFOP. Ufop em números. A ufop em tempo real. (s.p. s.n.), 2018. In:https://ufop.br/ufop-em-numeros, acesso em 20/11/2018.

VALLE LIMA, A. D. *Maestro Perspectivas y Retos.* México DF: Editorial delmagisterio Benito Juárez .2000.
VERDEJO, A. M; UCLÉS, R. R. Variables y funciones de las tareas matemáticas. In: Luis Rico Romero e Antonio Moreno Verdejo (coord.) Elementos de didáctica de la matemática para el professor de secundaria. Madrid: Ediciones Pirámide, 2016, p.243-258.

VIANA, M. C. V. Avaliação da aprendizagem na sala de aula de matemática. In: PINHEIRO, N. V. et al. *Educação Matemática***:** diálogos teóricos e metodológicos. São Paulo: Editora Opção, 2015a. pp.178-193.

VIANA, M. C. V. Da idade da pedra ao século XXI: da criação de matemática para resolver problemas à resolução de problemas para aprender matemática. In: Eurivalda Santana, Verônica YumiKataoka e Alex Andrade Alves (org.) *Educação matemática e contextos da diversidade cultural. Comunicações orais dos eixos: aspectos culturais sócio-históricos e filosóficos; psicologia da educação matemática; tecnologias digitais e cibercultura.* Ilhéus-Ba: SBEM, 2015b, p.169-180. E-book :http://vleditora.com.br/book/4sipemat/01/

VIANA, M. C. V. *Matemática Através de Problemas.* Texto Didático. Curso de Especialização em Educação Matemática. Ouro Preto: Departamento de Matemática. 1992. 10 p.

VIANA, M. C. V. *O processo de Ensino/Aprendizagem de Matemática Sob diferentes Olhares.* Texto Didático. Curso de Licenciatura em Matemática. Ouro Preto: Centro de Educação aberta e a distância. 2013. 45 p.

VIANA, M. C. V. *Perfeccionamiento del currículo para La formación de profesores de Matemática em la UFOP.* La Habana, Cuba: ICCP, 2002. 165 f. Tese (Doctorado em Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

VIANA, M. C. V.; GOMES, M. P. F. Resolución de problemas con utilización de conocimientos del mundo real. In: Gustavo Martínez Sierra (Ed.). *Acta latinoamericana de Matemática Educativa***.**V.20.Guerrero, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2007, p.287-292.

VIANNA, H. M. *Avaliações em debate:* SAEB, ENEM, PROVÃO. – Brasília: Plano Editora, 2003.

VIANNA, H. M. *Fundamentos de um programa de avaliação educacional.* Brasília: Liber

Livro Editora, 2005.

VIANNA, H. M. Fundamentos de um Programa de Avaliação Educacional.*Meta: Avaliação* | Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p.11-27, jan. /abr. 2009.

VIDIGAL, S. M. P. *Pensamento Geométrico:* da representação do espaço ao espaço de significações. 2016. 180f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

VIEIRA, C. R. *Reinventando a geometria no ensino médio*: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de van Hiele. 2010. 151f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

VIEIRA, N. N. *As provas das quatro áreas do ENEM vistas como Prova Única na ótica de modelos da Teoria da Resposta ao Item Uni e Multidimensional.* 2016. 109f. Dissertação (Mestrado Profissional em Métodos e Gestão em Avaliação da Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

VYGOTSKY, L. S. Mind in Society : The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge MA: Harvard University Press. 1978.

WESSELS, J. S., PAUW, J. C.; THANI, X. C. *Reflective public administration*: context, knowledgeandmethods. Pretoria, África do Sul: Unisa Press, 2014.

YIN, R. K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. Tradução: Daniel Grassi. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

YIN, R. K. *Case studyresearch: design andmethods*. 4ª Ed. Los Angeles, CA: Sage, 2009.

APÊNDICES

Apêndice 1

Convite

Ouro Preto, abril de 2018

A(o) Diretor(a) da Escola ___________________

Prezado (a) Diretor (a)

Cumprimentos

Solicitamos de V. Sa. a autorização para realizarmos uma pesquisa com professores de Matemática nesta conceituada escola. Esta pesquisa será realizada para a dissertação de mestrado do professor e aluno do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto Ednardo Teixeira Leão e sua orientadora a professora Marger da Conceição Ventura Viana, intitulada: *Um estudo de situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma no Enem no período de 2009 a 2017.*

Um dos objetivos da pesquisa é desvendar as relações vistas por professores do ensino médio de uma escola pública do interior do Estado de Minas Gerais, entre as questões do ENEM que envolvem o conhecimento geométrico de espaço e forma e as situações-problema abordadas na sala de aula. Especificamente pretende-se compreender como as situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma tem sido apresentadas nas provas do ENEM e na sala de aula.

Além da dissertação, será elaborado um produto educacional – um pequeno livro – contendo todas as questões do Enem do período de 2009 a 2016 separadas por habilidades e possíveis sugestões dos professores participantes sobre situações-problema.

Espera-se com este estudo que o produto educacional gerado possa ser útil aos professores interessados e que também sirva para auxilio de futuras pesquisas relacionadas com o ENEM.

Além disso, este produto educacional também poderá ser útil para distinguir os objetivos dos diversos tipos de avaliação (em larga escala e em sala de aula). Este material será disponibilizado na página do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP (www.ppgedmat.ufop.br) e pela Editora da UFOP.

Esclarecemos que a pesquisa começará no início do primeiro semestre letivo de 2018 cujo limite máximo de duração será este em curso. As atividades acontecerão na própria escola nos espaços e tempos combinados com os professores. A pesquisa envolverá atividades tais como participação dos professores em grupos focais e oficinas nas dependências da Escola, entrevistas e respostas a questionários. Os dados serão coletados durante as reuniões com os professores. Assim, os instrumentos de coleta de dados serão entrevistas, grupos focais, e análise documental (as questões do ENEM, relatórios do INEP e outros).

A participação não envolverá qualquer gasto para os professores nem para a escola, uma vez que os pesquisadores providenciarão todos os materiais necessários.

Esclarecemos também que a privacidade de todos será garantida, pois nem os nomes dos professores nem o da escola serão revelados. Serão codificados os nomes de todos os envolvidos na pesquisa, evitando com isso qualquer tipo de constrangimento. Todos os registros produzidos durante a pesquisa ficarão guardados sob nossa responsabilidade e somente nós teremos acesso a eles.

Embora a participação na pesquisa seja importantíssima ela é opcional, por isso solicitamos que encoraje a participação dos professores.

Se julgar necessário algum esclarecimento, por favor, sinta-se à vontade para nos consultar e, se houver qualquer dúvida quanto a aspectos éticos da pesquisa, sinta-se à vontade para entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFOP.

O endereço para contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP/UFOP) é Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, sala 29, CEP: 35400-000, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil telefone: (31)3559-1368, e-mail: cep@propp.ufop.br, homepage: http://www.propp.ufop.br.

Todos os dados de contato seguem ao final dessa carta.

Sem mais para o momento apresentamos cordiais saudações.

Prof. Ednardo Teixeira Leão — Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana

ednardotleao@hotmail.com — margerv@terra.com.br

Apêndice 2

Autorização da administração da escola

Termo de Autorização

Autorizo os professores Ednardo Teixeira Leão (Mestrando) e Marger da Conceição Ventura Viana (Orientadora) do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, a realizar a pesquisa intitulada “UM ESTUDO DE SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE ENVOLVA CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS DE ESPAÇO E FORMA NO ENEM NO PERÍODO DE 2009 A 2017” com professores de Matemática da Escola Estadual ____, localizada____, Ouro Preto, M. G., de acordo com as tarefas previstas no projeto de pesquisa.

____

Assinatura

Diretor da Escola Estadual ____

Ouro Preto, M.G.

Apêndice 3

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO AOS PROFESSORES

Eu, ____, de _____anos de idade, fui convidado (a) pelo Prof. Ednardo Teixeira Leão e pela Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana, a participar de sua pesquisa intitulada: "Um estudo de situação-problemas que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma nas avaliações do Enem no período de 2009 a 2016". Sei que tal pesquisa conta com o apoio da direção dessa escola e que seu principal objetivo é verificar como o Enem pode influenciar nossas práticas pedagógicas.

Fui informado que o projeto terá duração de aproximadamente seis meses e as atividades acontecerão em minha própria escola, durante as reuniões pedagógicas. Sei ainda que, como esse projeto faz parte de uma pesquisa realizada sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), serei convidado a responder um ou dois questionários, participar de um grupo focal, responder a uma entrevista e participar de encontros.

Participarei normalmente das reuniões realizadas com este fim e, só farei parte da pesquisa se desejar. Além disso, posso desistir de participar em qualquer momento, sem problemas. O estudo será suspendido ou encerrado em caso de impossibilidade do pesquisador por motivos graves, como doença, e/ou no caso da escola ou professores assim o desejarem.

Estou ciente de que nem meu nome ou de qualquer professor, funcionário ou da escola será citado em nenhum documento produzido nessa pesquisa e que todos os registros produzidos durante o estudo ficarão guardados com um dos pesquisadores e apenas serão consultados por pessoas diretamente envolvidas na pesquisa. Também terei acesso aos resultados do projeto, em dia e local que a direção da escola definirá e poderei acessar o texto completo da pesquisa na página do programa do Mestrado Profissional em Educação Matemática (www.ppgedmat.ufop.br).

Fui informado que os pesquisadores se empenharão para diminuir qualquer incômodo - tal como sentir algum constrangimento com a presença dos pesquisadores nas reuniões – que eu possa sentir e que poderei entrar em contato com eles em qualquer momento. Tenho em minha carta convite seus dados necessários (e-mail e telefone) para contatá-los a qualquer momento que necessitar.

Minha participação não envolverá qualquer gasto, pois os pesquisadores providenciarão todos os materiais necessários, e, portanto, não haverá necessidade de ressarcimento de despesas. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Caso ainda tenha alguma dúvida quanto a aspectos éticos da pesquisa, posso entrar em contato como o Comitê de Ética em Pesquisa da UFOP.

Sinto-me esclarecido em relação à proposta e concordo em participar voluntariamente desta pesquisa.

____

Assinatura do Professor

____

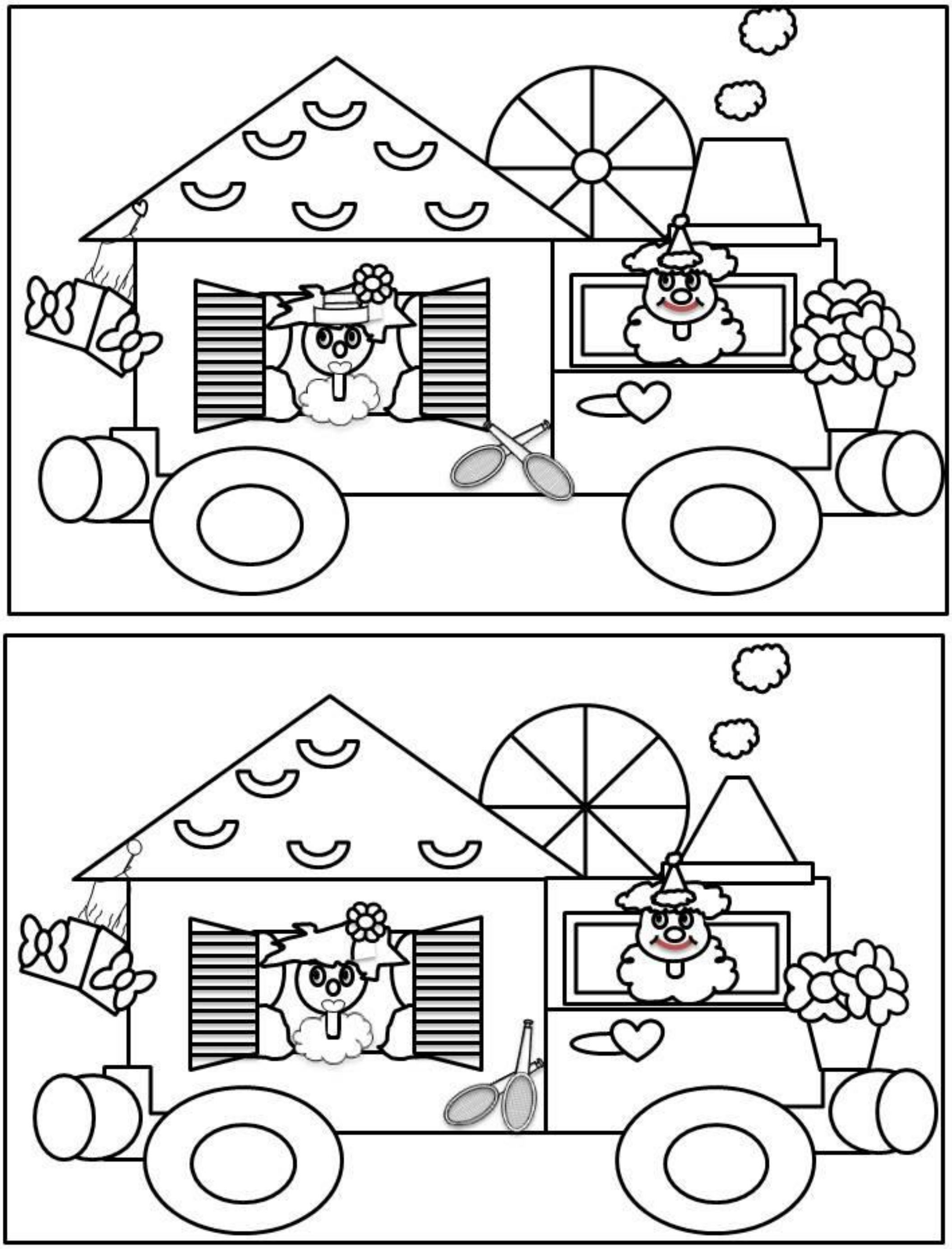
Identidade

Ouro Preto, ________ de _______________________ de ______.

Apêndice 4

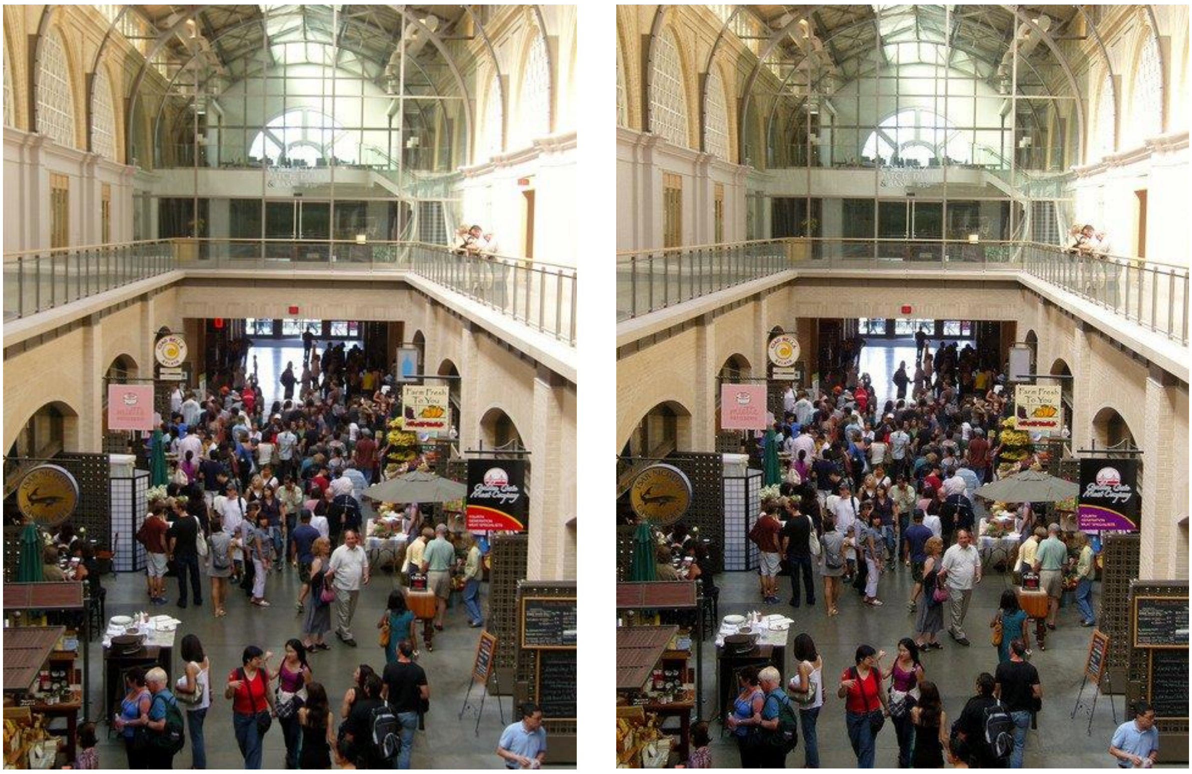
Atividades para o 1º Encontro

1. Jogo dos 7 erros



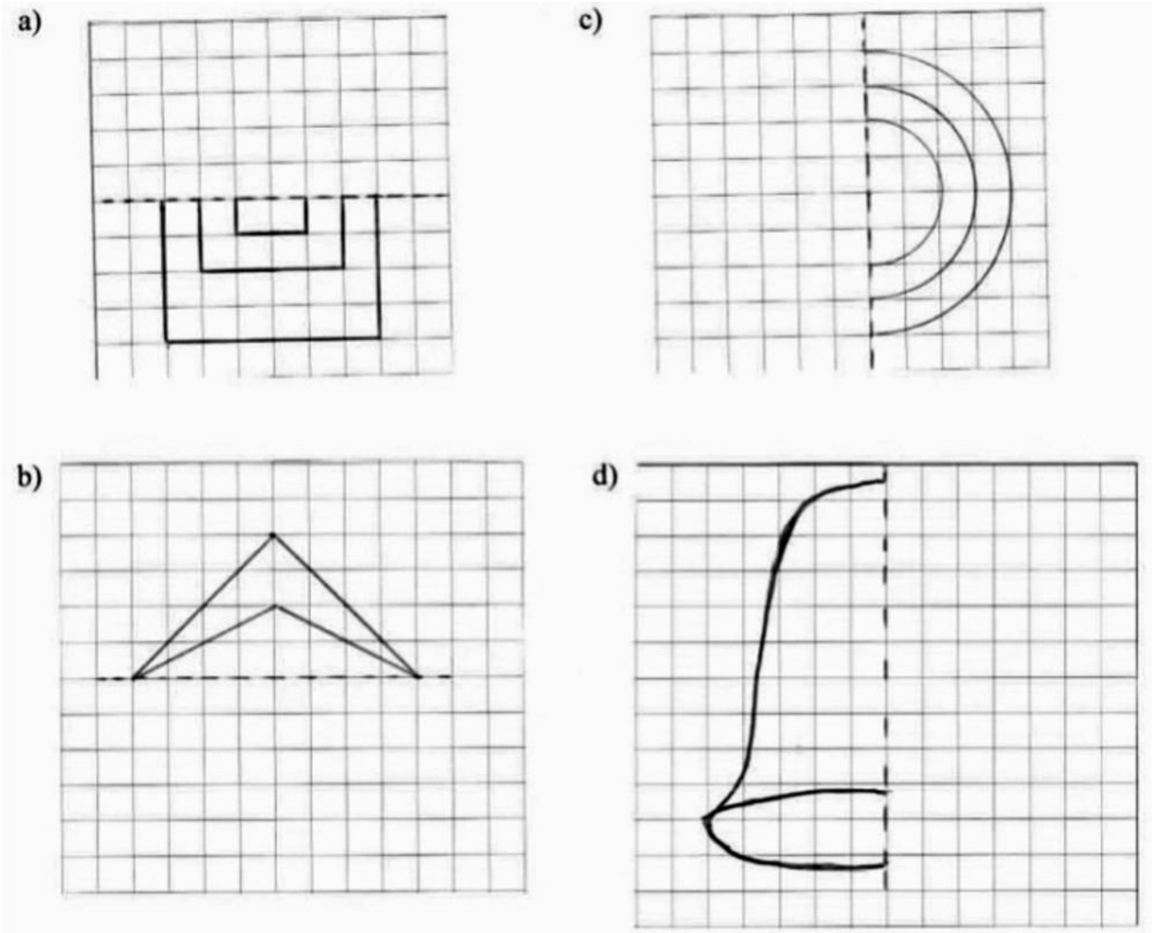
http://azcolorir.com/jogos-do-para

Fonte://www.google.com.br/search?q=jogo+dos+sete+erros&tbm=isch&tbo=u&source =univ&sa=X&ved=2ahUKEwjY992fn9TeAhXEDJAKHYojCzYQ7Al6BAgAEBs&biw=1366&bih=631



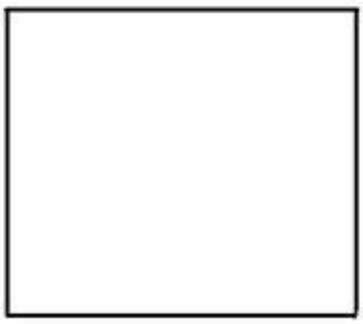
Fonte: https://rachacuca.com.br/raciocinio/sete-erros/ferry-marketplace-sao-francisco/

2. Atividades de simetria : Complete as figuras a seguir.



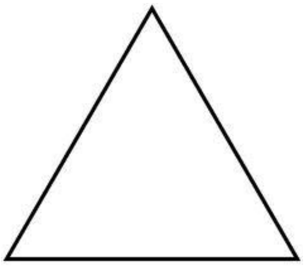
3. Atividades sobre construção de quadrados e triângulos.

3.1.Dado o quadrado abaixo, marque o ponto médio de cada lado e unindo-os por um segmento de reta forme um novo quadrado, repita este procedimento novamente com o novo quadrado três vezes consecutivamente.



Em seguida, identifique quantos triângulos se formam na construção de cada novo quadrado.

3.2. Com o triângulo equilátero abaixo, marque o ponto médio de cada lado e forme um novo triângulo equilátero, repita o mesmo procedimento com o novo triângulo mais duas vezes.

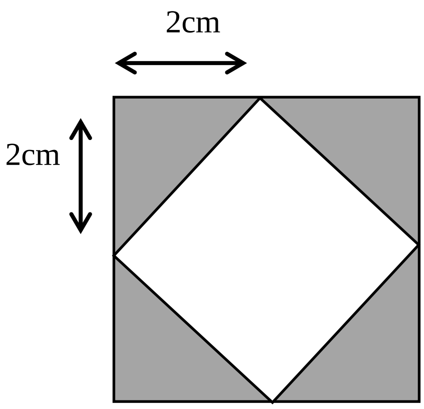


4. Atividade sobre cálculo de áreas

4.1. Observando a figura a seguir, responda:

a) Qual é a área de toda a parte colorida na figura?

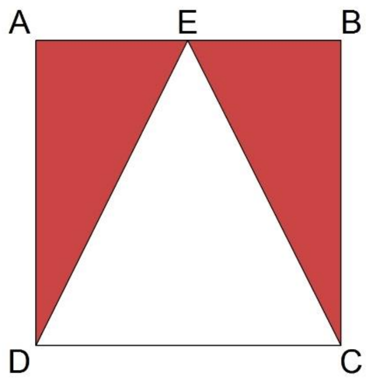
b) Qual é a área da região não colorida da figura?



(Fonte: DANTE, 2005, p. 181)

5. Atividades sobre observação e cálculo

5.1.Observe a figura abaixo, que é um painel quadrado de duas cores. Nomeando os vértices de ABCD, e E o ponto médio de AB. Responda as questões seguintes:



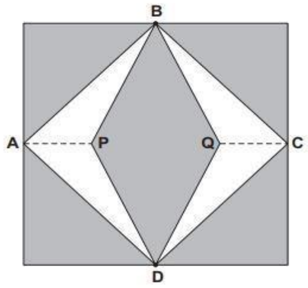
a) Explique porque o triângulo DEC é isósceles.

b) Calcule a área do triângulo AED, considerando que o lado do quadrado mede 4 unidades, e compare com a do triângulo EBC.

c) Considerando que o lado do painel mede 4 m, e a parte vermelha custa R$30, 00 o m^2 e a parte branca R$20,00 o m^2, determine o valor do painel.

5.2. Ao se criar um logotipo para um cursinho, um desenhista projetou uma figura que é, o resultado da retirada de um triângulo isósceles de outro triângulo isósceles. O triângulo inicial possui 6 cm de base e 4 cm de altura. O que foi retirado tem a mesma altura e 1/3 da base do primeiro, ficando localizado no meio do desenho. Determine a área resultante?

(Enem 2012) - Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$50,00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

A) R$ 22,50

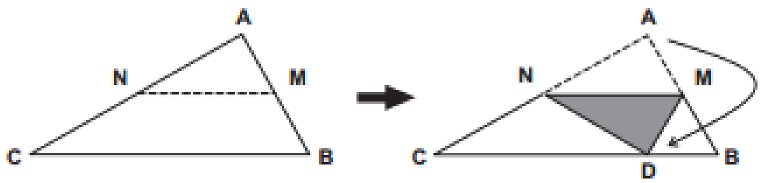
B) R$ 35,00

C) R$ 40,00

D) R$ 42,50

E) R$ 45,00

(ENEM 2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami(dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

a) CMA e CMB.
b) CAD e ADB
c) NAM e NDM.
d) CND e DMB.
e) CND e NDM.

Quais habilidades vocês julgam necessárias para resolver as duas questões do Enem que lhes foram propostas?

____

____

Perguntas

1.Como você avalia a primeira atividade, isto é, o jogo dos 7 erros. Você crê que ela pode desenvolver habilidades de visualização. Explique.

2.Você acredita que as atividades relativas à simetria podem facilitar habilidades de visualização? Explique.

3. Na sua opinião, que habilidades podem desenvolver as atividades sobre construções de quadrados e triângulos encaixados? Explique.

4. Nas atividades 4 e 5, o cálculo de áreas de figuras envolvendo quadrados e triângulos podem desenvolver habilidades de visualização?

Apêndice 5

Atividades para o 2º Encontro

2.1. Reconhecendo o π

Com o barbante que lhe foi fornecido meça o comprimento e o diâmetro do círculo que lhe foi entregue. Compare as medidas obtidas, dividindo a maior pela menor. Faça o mesmo com os demais círculos que lhes foram entregues. Em seguida, cole-os na circunferência correspondente a cada um. Complete a tabela com os números que você obteve, e com os demais que já estão na tabela.

Comprimento da Circunferência	Diâmetro	C/d =
1,57 m	0,5 cm	
3,14 m	1 cm	
6,28 m	2 cm	
12,56 m	4 cm	

Certamente você encontrou sempre um número com o valor aproximado de 3,1415. Este número é constante e é denominado π . Neste caso, $C = \pi \cdot d$ (mas d é igual a duas vezes o raio). Finalmente $C = 2\pi r$.

Com a fórmula que acabou de relembrar desenvolva as seguintes situações:

Situação 2.2

Uma pessoa buscando preservar sua saúde resolveu, por recomendações médicas, começou a percorrer 12 voltas em torno de um canteiro circular de raio igual a 10 metros todos os dias, próximo a sua casa. Quantos metros, aproximadamente, esta pessoa percorre diariamente dando estas voltas?

Situação 2.3

Segundo o Inmetro, o raio do círculo central de um campo de futebol deve medir 9,15 metros. Buscando fazer uma surpresa ao diretor do clube, o técnico deste clube decidiu calcular a medida da semicircunferência do circulo central com o intuito de posicionar todos os atletas nesta linha da semicircunferência para fazer uma homenagem ao diretor. Se o técnico adotar 3 como aproximação para π , qual medida encontrará para esta semicircunferência?

2.4. Relembrando áreas de círculos

Observe a figura 1 e a figura 2 a seguir.

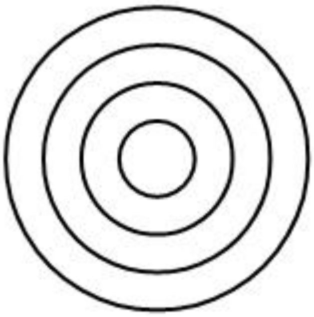


Figura 1

Figura 2

A figura 1 representa várias circunferências concêntricas. A figura 2 é um feixe de segmentos paralelos que têm as medidas de tais circunferências. A figura 2 lembra o formato de um triângulo, cuja área pode ser calculada pela fórmula: (b . h)/ 2. Como a base deste triângulo tem a medida do comprimento da circunferência ($2\pi r$) e a altura tem a medida do raio desta circunferência (r) , sua área é: $2(\pi r.r)/2 = \pi r^2$. Desta forma a área da circunferência de raio maior também deve ser $\pi r^{2.}$

Com a fórmula da área do círculo, resolva as seguintes questões:

Situação 2.5

De acordo com a Confederação Brasileira de Futebol de Salão (CBFS) no centro da quadra de futsal há um círculo com raio de 3 metros. Qual é a área deste círculo?

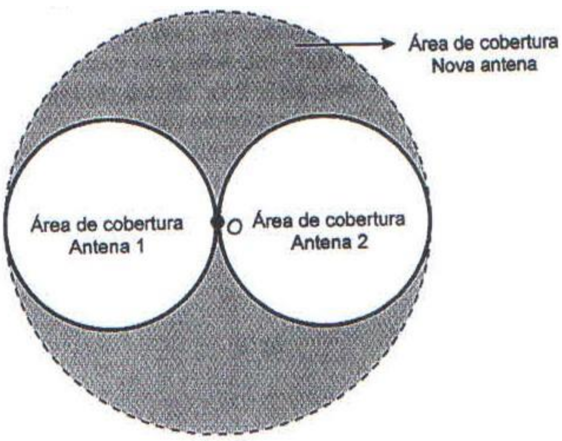
Situação 2.6

Ao se imaginar a imagem de um CD, temos a ideia de duas circunferências concêntricas. Se o raio da maior é 5,9 cm e o da menor é 1,8 cm, qual será a área da coroa circular formada ?

Questões do ENEM

<table>
<tr>
<td>

(ENEM 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



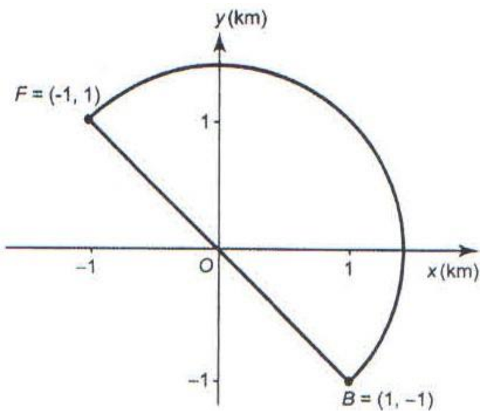
O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros

</td>
<td>

(ENEM 2016) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h , enquanto que 1 m de

</td>
</tr>
</table>

quadrados, foi ampliada em a) 8π b) 12π c) 16π d) 32π e) 64π	construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro. Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$. O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de a) 1260 b) 2520 c) 2800 d) 3600 e) 4000

Discussão sobre as atividades do 2º Encontro

Você acha que a atividade 2.1 é interessante e suficiente para que o aluno recorde a fórmula do comprimento da circunferência? Justifique sua resposta.

O que você acha das atividades 2.2 e 2.3, para utilizar a fórmula do comprimento da circunferência. Você crê que são suficientes para memorizá-la? Justifique sua resposta.

Você acha que a atividade 2.4 tem sentido? Julga que vale a pena utilizá-la para mostrar e recordar a fórmula da área da circunferência? Justifique sua resposta.

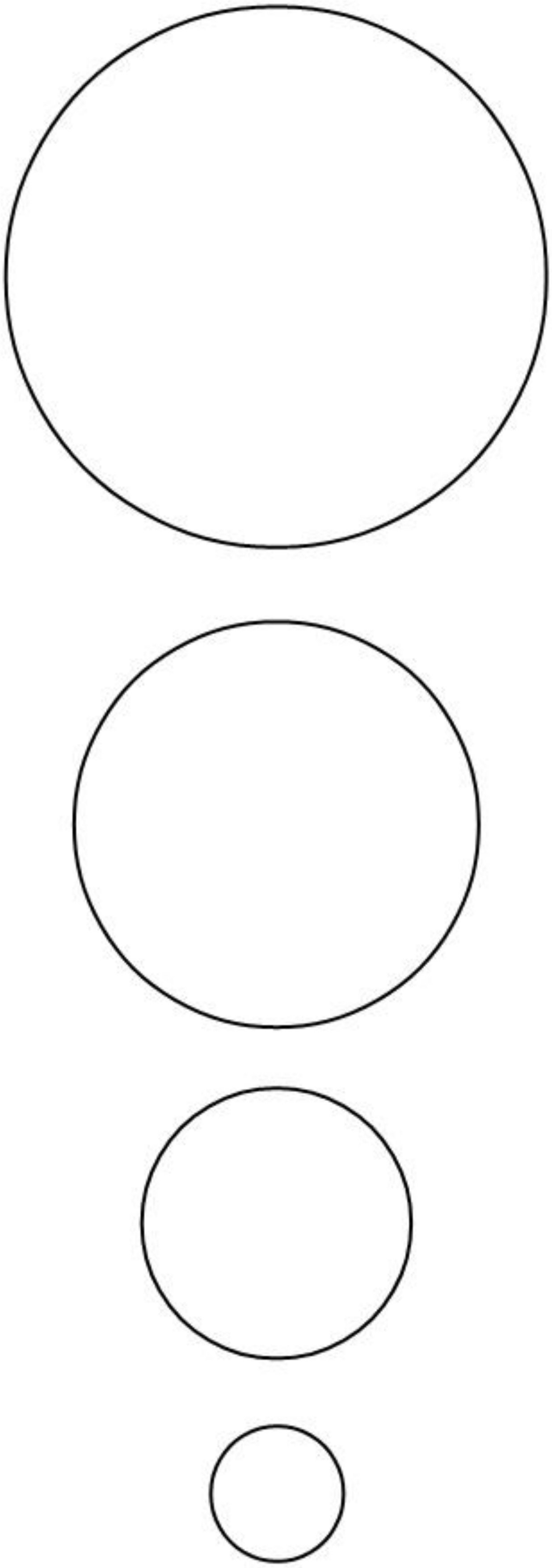
Você crê que as atividades 2.5 e 2.6 estão bem formuladas? Em caso negativo dê sugestões para melhorar a formulação.

Você acha que elas são suficientes para relembrar a fórmula de área do círculo?

As atividades realizadas contribuem para desenvolver habilidades para solucionar as questões do Enem resolvidas nesta oficina? Justifique.

Elas foram suficientes? Justifique.

Folha para construir círculos (2º Encontro)



Apêndice 6

Atividades do 3º Encontro

3.1. Com as folhas que lhe foram entregues, recorte as figuras, dobre nas figuras onde está pontilhado e use a cola para construir os poliedros. Em seguida complete o quadro:

Figura	Número de vértices	Números de arestas	Número de faces
Tetraedro			
Pirâmide Quadrangular			
Tronco de Pirâmide			
Hexaedro			

3.2. Agora olhe de cima e desenhe a vista de cima de cada figura e responda de acordo com os desenhos feitos . Em quais figuras vistas de cima se vê todas as arestas?

Tetraedro	Hexaedro

Pirâmide Quadrangular	Tronco de Pirâmide

3.3. Observe os poliedros que lhes foram entregues (os poliedros de Platão).

a)Você notou neles alguma característica específica ? Se sim qual?

b) Em seguida indique quantas faces, vértices e arestas possui cada um.

Poliedro	Número de Faces (F)	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	F + V - A
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Não foi uma coincidência, na realidade a expressão F + V – A = ?

A relação encontrada, chama-se Fórmula de Euler. Escreva-a.

3.4. Do sólido abaixo faça um desenho de como são vistas:

Vista de cima	Vista de baixo
Vista da lateral esquerda	Vista da lateral direita

Vista da frente	Vista de trás

3.5 Observe o globo que lhe foi apresentado.

a) Localize a linha do Equador, em seguida localize as linhas do Trópico de Câncer e a de Capricórnio. Geometricamente o que podemos falar sobre elas?

b) Localize agora a linha que corresponde ao Meridiano de Greenwich. O que podemos observar geometricamente, comparando este meridiano com os demais?

c) Agora, retire o globo de seu apoio e o segure com as pontas dos dedos indicadores. Observe-o de cima, em seguida, apoie-o na mesa de modo que veja a linha do Equador de forma perpendicular. Em seguida responda: Existe alguma posição que possibilita ver a linha do Equador sobreposta a ela mesma?

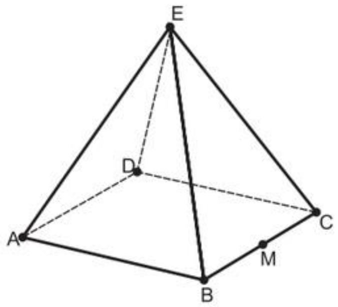
d) Agora, segure novamente o globo e localize o Brasil. Observe as linhas verticais que o cortam (os meridianos). Existe alguma posição em que se faz possível ver que a linha do meridiano consegue ficar sobreposta a ela mesma?

e) Há um ponto a 13 km da cidade de Quito, no Equador conhecido por "Metade do Mundo", onde registra a latitude de 00º 00' 00''. Este é o encontro da linha do Equador, que deu origem ao nome do país, com o meridiano a 80º a oeste do meridiano de Greenwich. Com estas informações procure este ponto no globo. Coloque o globo em uma posição onde este ponto esteja no centro dele. Observe de cima para construir o que você está vendo: o ponto e a projeção do globo, marcando a linha do equador e o meridiano que o corta (pode usar o compasso).

(Imagem de ponto de latitude 00º 00' 00'' na cidade de Quito, Equador)

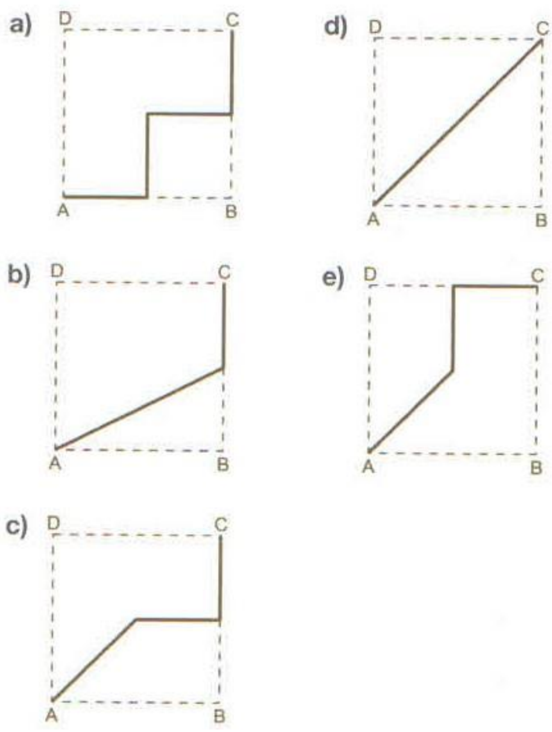
Questões do Enem

(ENEM 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



O Deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto m, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é



(ENEM 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.


Figura 1

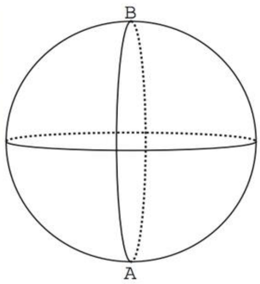
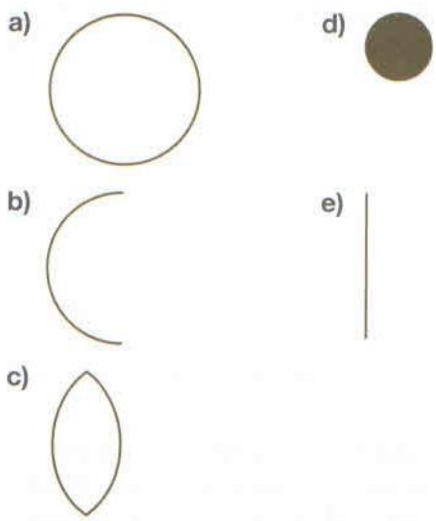


Figura 2

Na figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em:29 fev.2012

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é MELHOR representada por



Perguntas

Você considera importante construir os poliedros para compreender e localizar as faces, vértices e aresta? Por quê?

Na segunda atividade, você acredita que ao desenhar os sólidos vistos de cima, este procedimento auxilia na compreensão da projeção ortogonal ? Por quê?

Você encontra alguma utilidade na manipulação dos poliedros ? Se sim, quais? Se não, por quê?

A atividade 3.4 pode auxiliar na habilidade de visualização? Explique sua resposta.

Você vê alguma utilidade na atividade 3.5? Se sim, qual? Se não, por quê?

Você pode sugerir alguma atividade relativa ao globo e à circunferência para desenvolver a habilidade de visualização espacial?

Apêndice 7

Atividades do 4º Encontro

4.1. Com a folha que lhe foi entregue, construa um paralelepípedo.

4.1.1.Vamos calcular o volume deste paralelepípedo. Considere os cubos que lhe foram entregues, contendo cada um uma unidade de volume (uv). Preencha o paralelepípedo construído com os tais cubos.

Vamos analisar a situação. Foram utilizados 18 dados de uma unidade de volume. Logo o volume deste paralelepípedo é 18 uv. São 9 cubos embaixo e 9 em cima. 9 significa 3 vezes 3, que é a área da base do paralelepípedo. A altura do paralelepípedo é 2 uc (unidade de comprimento). 18 uv é igual a 9 ua vezes 2 uc. É possível imaginar que o volume de um paralelepípedo seja área da base vezes a altura, logo V = a.b.c.

Outro modo de obtermos este volume seria sobrepor c retângulos unitários de base ab, preenchendo a caixa. O volume seria V= a.b.c

Embora não tenhamos demonstrado, mas ilustrado, o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula: área da base x a altura.

Exercício de aplicação da fórmula

Uma piscina de brinquedo de criança tem as seguintes dimensões: 10 cm de comprimento, 4 cm de largura e 5 cm de profundidade. Qual é o volume d’água que este brinquedo pode conter?

4.1.2 Agora vamos calcular o volume do cilindro. Vamos preencher a caixa cilíndrica com os círculos que lhe foram entregues, cuja área de cada um é πr^2. Analogamente, ao volume do paralelepípedo, o volume do cilindro será igual a área da base x a altura ; neste caso será, a área do círculo πr^2 x a altura . Assim o número de círculos determinou a altura h do cilindro construído. Então o volume do cilindro será πr^2x h.

Exercício de aplicação da fórmula

Uma latinha de refrigerante tem o formato cilíndrico. Se a altura da latinha é 10 cm e o raio da circunferência do fundo mede 3 cm , calcule o volume de refrigerante que a latinha pode conter.

4.1.3 Porém, foi feito apenas uma ilustração, mas, de fato a área do cilindro é $\pi r^2 h$, conforme será mostrado pelo Princípio de Cavalieri.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), "aluno de Galileu e professor em Bolonha, é célebre por seu trabalho *Geometria indivisibilius continuorum nova quadam ratione promota"*, escrito em 1635 no qual expõe o seu método dos indivisíveis (intermediário entre o de exaustão dos gregos e os de Newton e Leibiniz). De forma que o tamanho relativo de dois sólidos ou superfícies poderia ser encontrado pela soma de uma série de planos ou retas(CAJORI, 2007, p.229). Isto é o conhecido Princípio de Cavalieri, na verdade um teorema: "Se dois sólidos tem alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nesta razão" (BOYER, 1996, p. 227).

Em uma linguagem mais apropriada à aluno do ensino médio pode ser utilizado a seguinte versão simplificada: Axioma (Princípio de Cavalieri) Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

Isto pode ser ilustrado (figura 16) com dois montes de moedas de mesmo tamanho e mesma altura. Manipulando algumas moedas para a direita ou para a esquerda, o volume ocupado pelas moedas permanece constante.

Figura 16 - Ilustração do Princípio de Cavalieri

Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=AwrE18yH7x9bcc0Ajg_z6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

A figura 17, a seguir mostra que poliedros e corpos redondos mesmo apresentando características diferentes podem apresentar volumes iguais.

Figura 17: Princípio de Cavalieri relacionando o volume de dois sólidos.

Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=AwrE18yH7x9bcc0Ajg_z6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

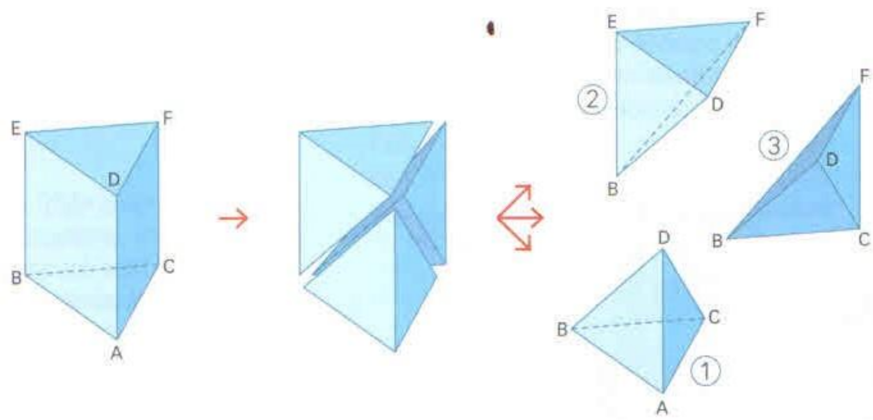
Exercício de aplicação do Princípio de Cavalieri

Verifique que o volume de um cilindro cujo raio da base mede 10 cm e altura 20 cm é o mesmo de um paralelepípedo de base quadrangular cujo lado mede $\sqrt{314}$ cm e a altura 20 com. Isto confere com o Princípio de Cavalieri. (Considere $\pi = 3{,}14$)

4.1.4. Volume da Pirâmide

Observe as figuras contidas na figura 19 a seguir.

Figura 19-I Decomposição do prisma mostrando volume da pirâmide



Fonte: Balestri (2016, p. 72)

Observe que do prisma foram recortadas 3 pirâmides, com as mesmas dimensões. Logo o volume de cada uma delas é 1/3 do volume do prisma que lhes deu origem. Como o volume do prisma é área da base x altura, o volume da pirâmide será: base x altura dividido por 3. Então

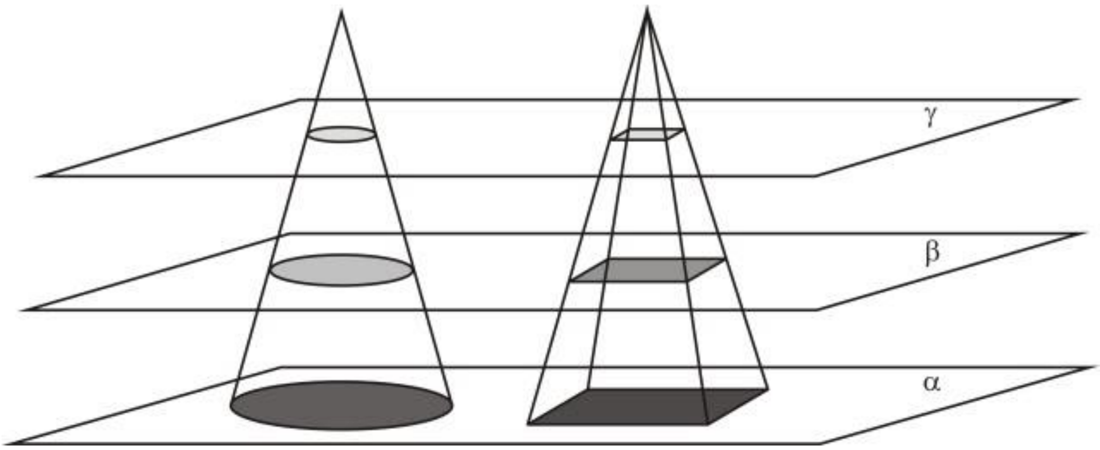
$V_{\text{pirâmide}} = (b.h)/3$

Exercício de aplicação da fórmula

Uma forma de picolé tem o formato inusitado de uma pirâmide triangular. Cuja altura 8 cm e a base mede 3cm^2 . Qual é o volume de líquido para encher a forma?

4.1.5. Volume do Cone
Observe a figura 20 a seguir.

Figura 20: Ilustrando o volume do Cone com o Princípio de Cavalieri



Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=A2KLfRbU7R9bRlkA4DLz6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cone (V_c) será igual o volume da pirâmide (V_p), isto é ,
V_p = (área da base x altura)/3 , como a área da base do cone é πr^2, o volume do cone será
$V_c = \pi r^2/3$.

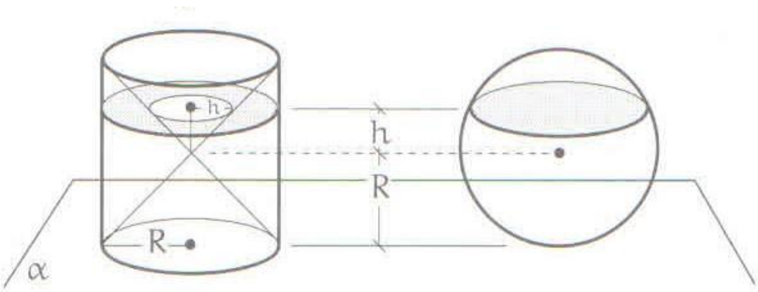
Exercício de aplicação da fórmula

Qual é o volume de um sorvete no formato de cone cujo raio da base mede 3 cm, e a altura mede 8 cm?

4.1.6 Volume da Esfera

O volume da esfera será obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. “Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2\text{-}h^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h" (LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO, 198, p. 268).

Figura 21: Ilustrando o volume da Esfera com o Princípio de Cavalieri



Fonte: Lima, et. al (1998)

Consideremos então uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C (chamado *clépsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C. (LIMA, et. al. 198, p. 268-269)

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura 2R subtraído de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$\pi R^2 2R - 2.\ \ 1/3\ \pi R^2 R = 4/3\ \pi R^3$ que é o volume da esfera.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

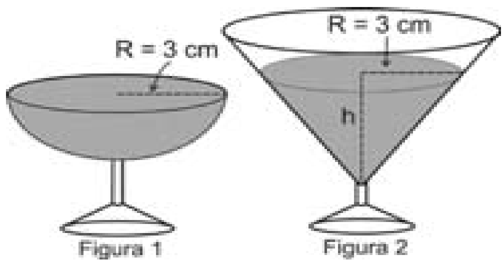
Fonte: Lima (1998)

Exercício de aplicação da fórmula.

Calcule o volume de água para encher um aquário de formato esférico até a metade, de modo a poder colocar um peixe ornamental. Sabendo-se que o raio deste aquário mede 15 cm .

Questões do ENEM

(ENEM 2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



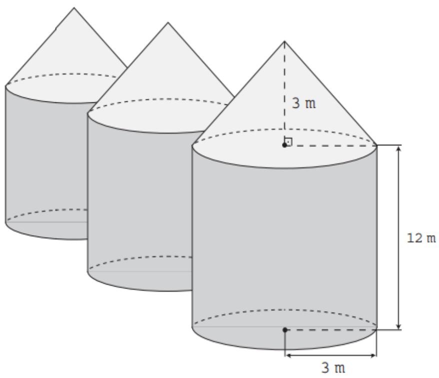
Considere:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Sabendo que a taça com formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33
b) 6,00
c) 12,00
d) 56,52
e) 113,04

(ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6
b) 16
c) 17
d) 18
e) 21.

Perguntas

1.Você considera que utilizar os cubos de uma unidade de volume para calcular o volume de um paralelepípedo é importante para desenvolver a habilidade de identificar características de figuras planas ou espaciais? Por quê?

2.O preenchimento da caixa cilíndrica com os círculos para fornecer ao aluno uma ideia de como foi obtida a fórmula para o cálculo do volume do cilindro pode desenvolver a habilidade de visualização e comparação? Por quê?

3.Você considera que utilizar o Princípio de Cavalieri para justificar a fórmula do cálculo do volume de sólidos pode desenvolver a habilidade de comparação? Por quê?

4.A atividade com o uso de moedas para ilustrar o Princípio de Cavalieri pode ajudar no desenvolvimento de alguma habilidade? Justifique sua resposta.

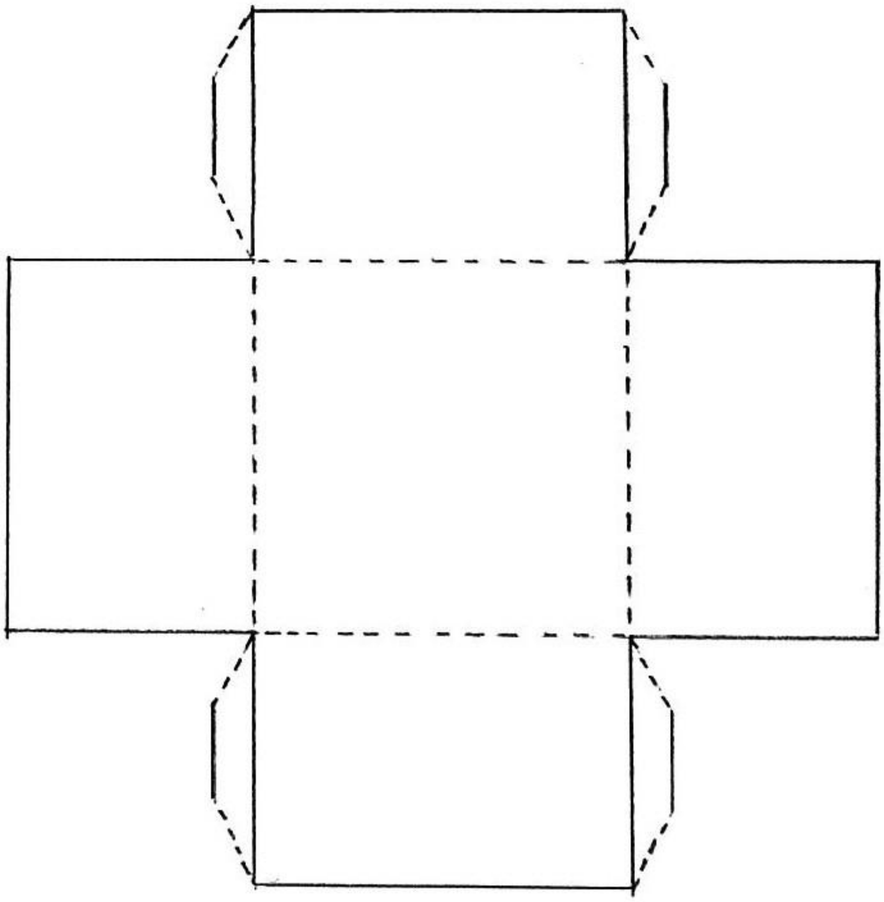
5.Quais habilidades você acredita que podem ser desenvolvidas com as ilustrações dos cortes nos prismas para obtenção da fórmula do volume da pirâmide ? Por quê?

6.Você acha que o uso do Princípio de Cavalieri é suficiente para que o aluno aceite a fórmula para o cálculo do volume do cone? Por quê?

7.Você considera que a explicação que foi dada para o cálculo do volume da esfera é suficiente para o aluno aceitar a fórmula? Justifique sua resposta. Você pode dar alguma sugestão de outra explicação?

8.As atividades que foram realizadas nesta oficina podem ser suficientes para o desenvolvimento de habilidades necessárias para que o aluno resolva questões tipo as do Enem que aqui foram abordadas? Justifique.

Folha para construir o sólido (4º Encontro)



Apêndice 8

Atividade a ser realizada em casa (e entregue antes do Grupo Focal)

Para você o que é habilidade?

E habilidades para solucionar situações-problema de geometria?

O que você acha que o professor pode fazer para o desenvolvimento de habilidades do aluno?

Dê exemplos de habilidades que você julga necessárias para solucionar situações-problema de geometria.

Na Matriz de Referência do Enem, na segunda competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela, existem 4 habilidades expressas, sendo as mesmas:

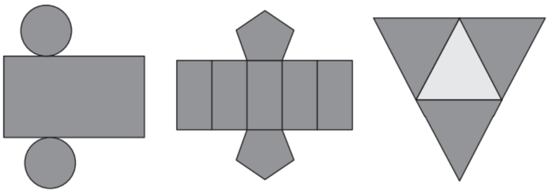
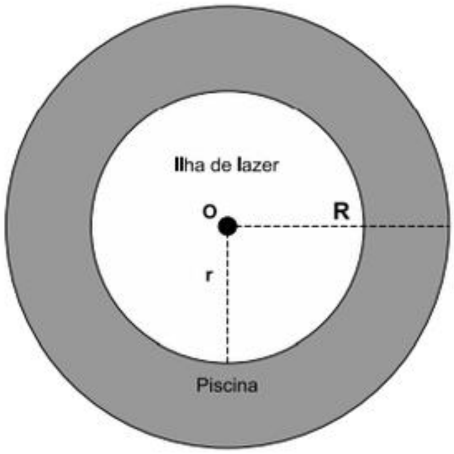
H6 -Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 -Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 -Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

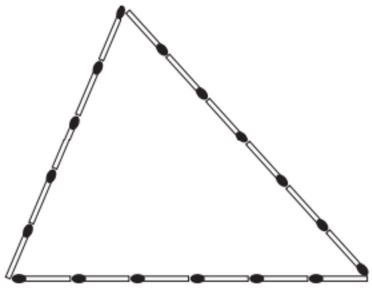
H9 -Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Leia as seguintes questões e em seguida indique uma ou mais habilidades que, na sua opinião, se associa(m) a cada uma delas.

Enem 2012	Enem 2013
Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.  Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá por meio dessas planificações? a)Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide. b)Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide c)Cone, tronco de pirâmide e prisma d)Cilindro, tronco de pirâmide e prisma e)Cilindro, prisma e tronco de cone.	Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.  Considere 3 como valor aproximado para π. Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de a)1,6 b)1,7 c)2,0 d)3,0 e)3,8

Enem 2014

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a)3

b)5

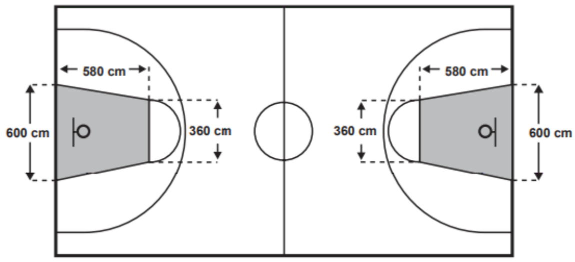
c)6

d)8

e)10

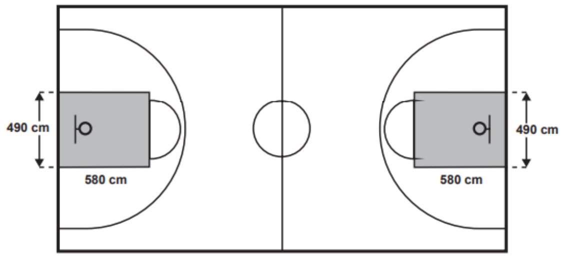
Enem 2015

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

a)aumento de 5800 cm^2

b)aumento de 75400 cm^2

c)aumento de 214600 cm^2

d)diminuição de 63800 cm^2

e)diminuição de 272600 cm^2

Apêndice 9

Guia para Grupo Focal

Perguntar primeiro de forma geral: Vocês acreditam que as atividades propostas e realizadas nas oficinas podem desenvolver habilidades relacionadas ao conhecimento geométrico de espaço e forma?

Em seguida: perguntar de forma específica sobre cada atividade de cada Encontro, procurando descobrir qual (ou quais) habilidades auxiliaram a desenvolver a atividade.

Logo após: perguntar sobre cada atividade de cada Encontro, desta vez pedindo para relacionarem as atividades com as habilidades da Matriz de Referência do ENEM, utilizando uma das quatro:
H6 -Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7 -Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8 -Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9 -Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

No caso de opiniões divergentes expressas individual nas questões para classificar em casa quanto as habilidades (H6, H7, H8 e H9) perguntar se chegariam a um consenso ou não.

ANEXOS

Anexo 01

Conteúdos conceituais e procedimentais para Espaço e Forma sugeridos para crianças do primeiro ciclo de alfabetização pelos PCN de 1997.

1. Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.

2. Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.

3. Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.

4. Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.

5. Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.

6. Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.

7. Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos — esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos — sem uso obrigatório de nomenclatura.

8. Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.

9. Construção e representação de formas geométricas (BRASIL, 1997, p.51).

Anexo 02

Conteúdos conceituais e procedimentais para Espaço e Forma sugeridos para crianças do segundo ciclo de alfabetização pelos PCN de 1997.

1. Descrição, interpretação e representação da posição de uma pessoa ou objeto no espaço, de diferentes pontos de vista.

2. Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto.

3. Descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construção de itinerários.

4. Representação do espaço por meio de maquetes.

5. Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como a esfera, o cone, o cilindro e outros.

6. Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas.

7. Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades.

8. Identificação da simetria em figuras tridimensionais.

9. Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.

10. Identificação de figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais.

11. Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.

12. Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc.

13. Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.

14. Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas.

15. Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.

16. Representação de figuras geométricas (BRASIL, 1997, p. 60)

Anexo 03

Competências e habilidades requeridas no Enem no período de 1998 a 2008

Competências Gerais: Dominar Linguagens (DL), Compreender Fenômenos (CF), Solucionar Problemas (SP), Construir Argumentações (CA), Elaborar Propostas (EP).

Habilidades:

1. Dada a descrição discursiva ou por ilustração de um experimento ou fenômeno, de natureza científica, tecnológica ou social, identificar variáveis relevantes e selecionar os instrumentos necessários para realização ou interpretação dele.
2. Em um gráfico cartesiano de variável socioeconômica ou técnico-científica, identificar e analisar valores das variáveis, intervalos de crescimento ou decréscimo e taxas de variação.
3. Dada uma distribuição estatística de variável social, econômica, física, química ou biológica, traduzir e interpretar as informações disponíveis, ou reorganizá-las, objetivando interpolações ou extrapolações.
4. Dada uma situação-problema, apresentada em uma linguagem de determinada área de conhecimento, relacioná-la com sua formulação em outras linguagens ou vice-versa.
5. Com base na leitura de textos literários consagrados e de informações sobre concepções artísticas, estabelecer relações entre eles e seu contexto histórico, social, político ou cultural, inferindo as escolhas dos temas, gêneros discursivos e recursos expressivos dos autores.
6. Com base em um texto, analisar as funções da linguagem, identificar marcas de variantes linguísticas de natureza sociocultural, regional, de registro ou de estilo, e explorar as relações entre as linguagens coloquial e formal.
7. Identificar e caracterizar a conservação e as transformações de energia em diferentes processos de sua geração e uso social, e comparar diferentes recursos e opções energéticas.
8. Analisar criticamente, de forma qualitativa ou quantitativa, as implicações ambientais, sociais e econômicas dos processos de utilização dos recursos naturais, materiais ou energéticos.
9. Compreender o significado e a importância da água e de seu ciclo para a manutenção da vida, em sua relação com condições socioambientais, sabendo quantificar variações de temperatura e mudanças de fase em processos naturais e de intervenção humana.
10. Utilizar e interpretar diferentes escalas de tempo para situar e descrever transformações na atmosfera, biosfera, hidrosfera e litosfera, origem e evolução da vida, variações populacionais e modificações no espaço geográfico.
11. Diante da diversidade da vida, analisar, do ponto de vista biológico, físico ou químico, padrões comuns nas estruturas e nos processos que garantem a continuidade e a evolução dos seres vivos.
12. Analisar fatores socioeconômicos e ambientais associados ao desenvolvimento, às condições de vida e saúde de populações humanas, por meio da interpretação de diferentes indicadores.

13. Compreender o caráter sistêmico do planeta e reconhecer a importância da biodiversidade para a preservação da vida, relacionando condições do meio e intervenção humana.
14. Diante da diversidade de formas geométricas planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, caracterizá-las por meio de propriedades, relacionar seus elementos, calcular comprimentos, áreas ou volumes, e utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
15. Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos naturais ou não e utilizar em situações-problema processos de contagem, representação de frequências relativas, construção de espaços amostrais, distribuição e cálculo de probabilidades.
16. Analisar, de forma qualitativa ou quantitativa, situações-problema referentes a perturbações ambientais, identificando fonte, transporte e destino de poluentes, reconhecendo suas transformações; prever efeitos nos ecossistemas e no sistema produtivo e propor formas de intervenção para reduzir e para controlar os efeitos da poluição.
17. Na obtenção e produção de materiais e de insumos energéticos, identificar etapas, calcular rendimentos, taxas e índices, e analisar implicações sociais, econômicas e ambientais.
18. Valorizar a diversidade dos patrimônios etnoculturais e artísticos, identificando-a em suas manifestações e representações em diferentes sociedades, épocas e lugares.
19. Confrontar interpretações diversas de situações ou fatos de natureza histórico-geográfica, técnico-científica, artístico-cultural ou do cotidiano, comparando diferentes pontos de vista, identificando os pressupostos de cada interpretação e analisando a validade dos argumentos utilizados.
20. Comparar processos de formação socioeconômica, relacionando-os com seu contexto histórico e geográfico.
21. Dado um conjunto de informações sobre uma realidade histórico-geográfica, contextualizar e ordenar os eventos registrados, compreendendo a importância dos fatores sociais, econômicos, políticos ou culturais.

Anexo 4

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (2009)

Competências	I. Dominar linguagens	II. Compreender fenômenos	III. Enfrentamento e resolução de situações-problema	IV. Construir argumentação	V. Elaborar propostas
Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	H1 -Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.	H2 -Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.	H3 -Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.	H4 -Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.	H5 -Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	H6 -Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.	H7 -Identificar características de figuras planas ou espaciais.	H8 -Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.	H9 -Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.	
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H10 -Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.	H11 -Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.	H12 -Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	H13 -Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.	H14 -Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H15 -Identificar a relação de dependência entre grandezas.		H16 -Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.	H17 -Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.	H18 -Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando	H19 -Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.	H20 -Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.	H21 -Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.	H22 -Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.	H23 -Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

representações algébricas.					
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.		H24 -Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.	H25 -Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.	H26 -Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.	
Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.		H27 -Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.	H28 -Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.	H29 -Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.	H30 -Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.