Atividades práticas para o desenvolvimento de habilidades úteis à resolução de problemas geométricos

Ednardo Teixeira Leão

Marger da Conceição Ventura Viana

Atividades práticas para o desenvolvimento de habilidades úteis à resolução de problemas geométricos

EDITORA UFOP
Ouro Preto | 2019

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitora da UFOP | Prof(a). Dr(a). Cláudia Aparecida Marliére de Lima
Vice-Reitor | Prof. Dr. Hermínio Arias Nalini Júnior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS
Drietor | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva
Vice-Drietor | Prof. Dr. Rodrigo Fernando Bianchi

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Prof. Dr. Sérgio Francisco de Aquino
Drietor(a)-Adjunto | Prof(a). Dr(a). Renata Guerra de Sá Cota

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Coordenação | Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu

MEMBROS
Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira
Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes
Prof. Dr. Daniel Clark Orey
Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti
Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos
Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Prof. Dr. Gilberto Januario dos Santos
Prof. Dr. Lorge Luís Costa
Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Profa. Dra. Marli Regina dos Santos
Prof. Dr. Milton Rosa
Prof. Dr. Plinio Cavalcanti Moreira

L437e Leão, Ednardo Teixeira.

Um estudo de situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma no ENEM no período de 2009 a 2017 [manuscrito] / Ednardo Teixeira Leão. - 2019.

52f.: il.: color.

Orientadora: Profª. Drª. Marger da Conceição Ventura Viana.

Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

1. ENEM. 2. Avaliação educacional. 3. Matemática- Estudo e ensino. 4. Geometria. I. Viana, Marger da Conceição Ventura. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 51:37.04

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

A primeira ideia que uma criança precisa ter é da diferença entre o bem e o mal. E a principal função do educador é cuidar para que ela não confunda o bem com a passividade e o mal com a atividade. (Maria Montessori)

Expediente Técnico

Organização Ednardo Teixeira Leão | Marger da Conceição Ventura Viana

Pesquisa e Redação | Ednardo Teixeira Leão

Revisão Ednardo Teixeira Leão | Marger da Conceição Ventura Viana

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Fotos | Ednardo Teixeira Leão

Ilustração | Ednardo Teixeira Leão

Índice

Apresentação.. 9

1-Habilidades presentes nos blocos apresentados 11

2-Blocos de atividades propostas 13

3-Primeiro bloco de atividades 13

4-Segundo bloco de atividades 24

5-Terceiro bloco de atividades 31

6-Quarto bloco de atividades 40

7-Para finalizar 50

Referências 51

Apresentação

Caro (a) colega,

Sou professor de Matemática da Educação Básica, atuando na rede estadual há 22 anos, a maior parte do tempo no Ensino Médio, o que me pôs em contato com o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Isso porque ele tem impulsionado escolas, públicas e particulares, a desenvolver competências requeridas nessas provas.

É importante, portanto, lembrar a Matriz de Referência do ENEM, que, além de apresentar as competências requeridas, cita as habilidades referentes a cada competência. Além disso, cada área do conhecimento avaliado passou a ter, em 2009, a sua Matriz de Referência, sendo que a de Matemática e suas Tecnologias apresenta sete competências e trinta habilidades.

Das habilidades identificadas pelo ENEM, escolhi, em minha dissertação do Mestrado Profissional de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, trabalhar com a Habilidade 8 (*Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma*), que corresponde à segunda competência da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias: U*tilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela*. Mas pude identificar habilidades auxiliares, como desenho, que davam suporte ao desenvolvimento da Habilidade 8, meu foco de investigação. Então busquei criar uma proposta de atividades que possibilitassem o desenvolvimento da Habilidade 8. Justifica-se, pois, ter minha pesquisa procurado responder a esta pergunta: *Como uma proposta de atividades pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades* *auxiliares para a de resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma, da matriz de referência do ENEM?*

Foram convidados professores de Matemática da rede estadual e, após uma entrevista, confirmados cinco como participantes da pesquisa, para analisar as atividades mencionadas, sugerir alterações e indicar as habilidades que julgavam ter atuado.

Na elaboração dessas atividades, inicialmente foram escolhidas questões propulsoras, ou seja, situações-problemas do ENEM. A seguir, construídos blocos de atividades que de certa forma trabalhassem habilidades ou as lapidassem, aguçando potencialidades para a resolução de situações-problema envolvendo o conhecimento geométrico de espaço e forma.

Para construir o conhecimento matemático e, principalmente, o geométrico, é preciso desenvolver habilidades, auxiliares ou não. Além disso, para propiciar a construção do conhecimento na sala de aula, indica-se a utilização de questões provenientes de avaliações externas, como o ENEM. Não se trata de uma sugestão vaga, pois desenvolvi uma pesquisa intitulada *Um estudo de situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma no ENEM no período de 2009 a 2017*, um estudo de caso que guiou uma possível resposta à questão de investigação mencionada.

Destaco que as atividades que vão ser apresentadas podem ser usadas na sala de aula ou em oficinas com o objetivo de desenvolver habilidades necessárias para a construção do conhecimento geométrico.

Espero, portanto, criar propostas de atividades que propiciem uma construção prazerosa do conhecimento.

Um abraço.

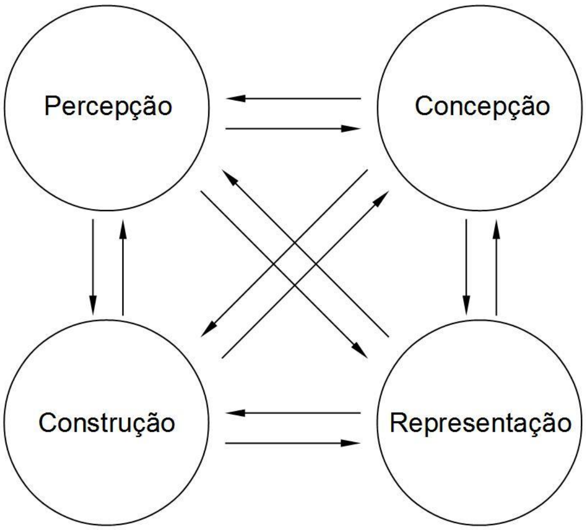
Ednardo Teixeira Leão

ednardotleão@hotmail.com

Habilidades presentes nos blocos de atividades

Segundo Machado (1998, p.142) o conhecimento geométrico se desenvolve em quatro etapas: percepção, construção, representação e concepção que “articulam-se mutuamente, configurando uma estrutura a partir da qual, de modo metafórico, pode-se aprender o significado e as funções do ensino da Geometria.”. Mas o autor destaca que é possível um trânsito natural entre essas etapas, havendo uma via de mão dupla entre elas. A Figura 1, a seguir, expressa essa visão.

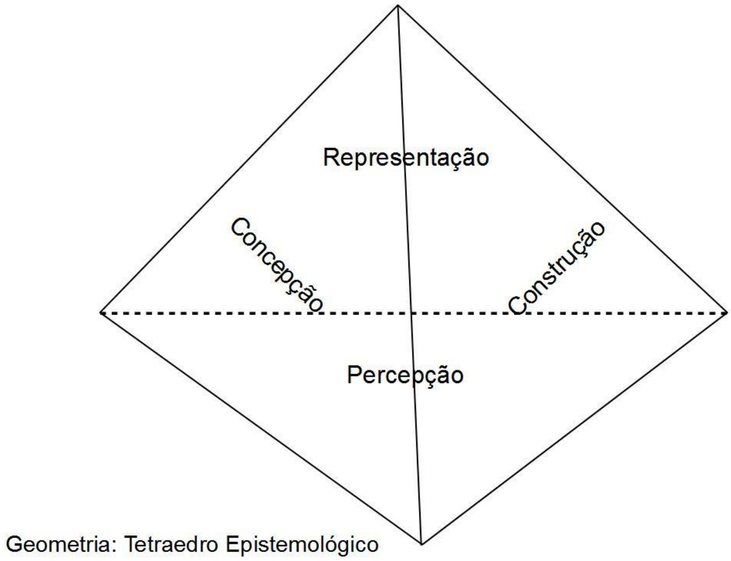
Figura 1-Faces que caracterizam o conhecimento geométrico



Fonte: Machado 1998, p. 143.

Essa visão é explicada também com um tetraedro, cujas faces se alimentam mutuamente. É o que mostra a Figura 2, a seguir.

Figura 2: Tetraedro Epistemológico



Fonte: Machado 1998, p. 143.

Lauro (2007) explica cada uma das faces do tetraedro epistemológico:

> -A percepção refere-se à observação e à manipulação de objetos materiais – atividades sensoriais e à caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta. A percepção ocorre por meio de atividades empíricas. Este processo precisa ser desenvolvido desde as séries iniciais do ensino e relaciona-se diretamente com os demais.
> -A construção refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico. A construção pode ocorrer com a utilização de massas de modelar, sabão em pedra, madeira, acrílico, papel, varetas, por exemplo. Em certo sentido, a construção reforça a percepção, bem como esta última estimula a construção.
> -A representação refere-se à reprodução, por meio de desenhos, de objetos percebidos ou construídos. Neste sentido, fazemos referência ao Desenho Geométrico, bem como à Geometria Projetiva e à Geometria Descritiva. Em qualquer um desses contextos, a representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção.

> -A concepção refere-se à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e da teorização. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico; ao exercício da lógica, aos elementos conceituais, onde tem predomínio as definições formais, o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações, sejam elas formais ou informais. A concepção é favorecida pela percepção, representação e construção, mas também favorece essas dimensões (LAURO, 2007, p.26-27).

Essas faces foram consideradas habilidades e, com base em questões do ENEM, escolhidas como propulsoras, sendo realizadas atividades com o intuito de desenvolvê-las e descobrir outras. Assim surgiu a habilidade de visualização, que se ligou naturalmente a todas as outras já apresentadas.

Para esta habilidade Arcavi (2003) misturou as definições de Zimmermann e Cunningham (1991) e Hershkowitz et al. (1989) e apresentou a seguinte :

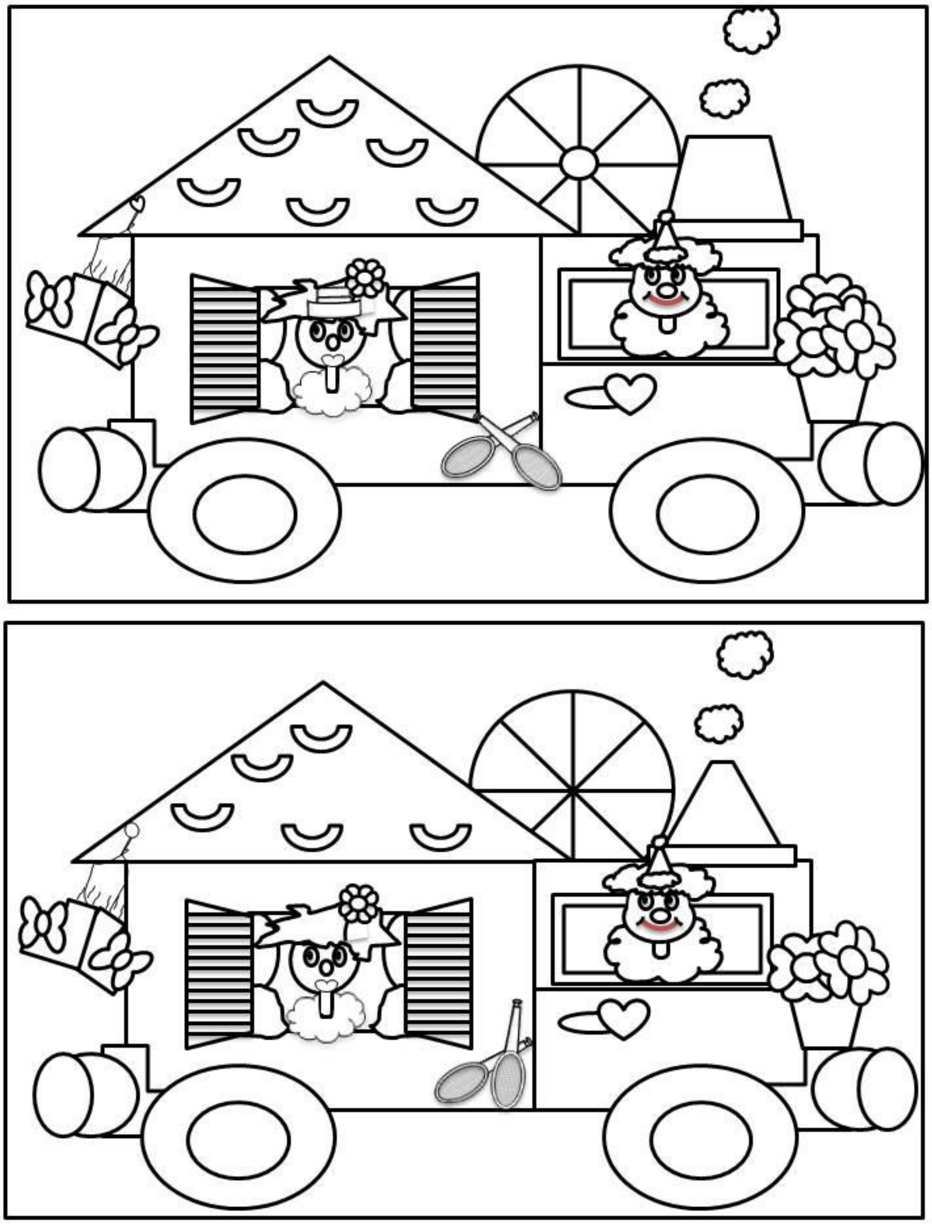
> A visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de representar e comunicar informações, pensar e desenvolver idéias previamente desconhecidas e avanços na compreensão(ARCAVI,2003,p.217).

Blocos de atividades

As atividades apresentadas a seguir compuseram os blocos que os participantes analisaram. Foram feitas sempre buscando trabalhar alguma das quatro habilidades citadas por Machado (1998) como faces e descritas por Lauro (2007) e descobrir alguma outra habilidade auxiliar.

Primeiro bloco de atividades

1. Jogo dos Sete Erros

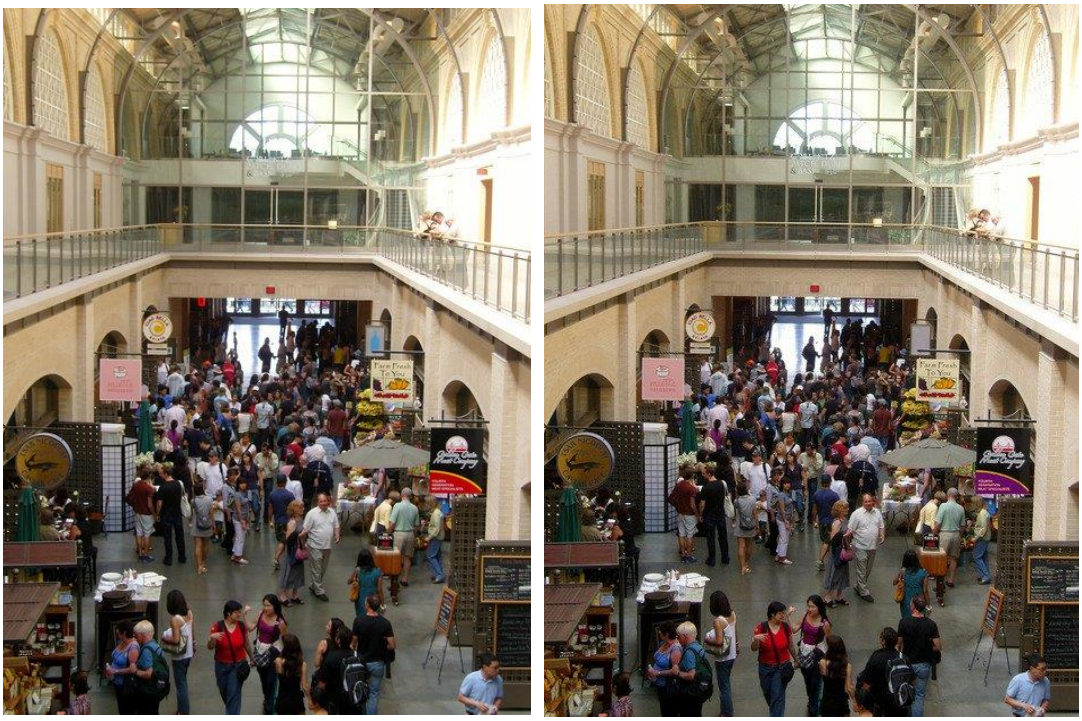


http://azcolorir.com/jogos-do-para

2. Jogo dos Sete Erros

Fonte://www.google.com.br/search?q=jogo+dos+sete+erros&tbm=isch&tbo=u&source =univ&sa=X&ved=2ahUKEwjY992fn9TeAhXEDJAKHYojCzYQ7Al6BAgAEBs&biw=1366&bih=631

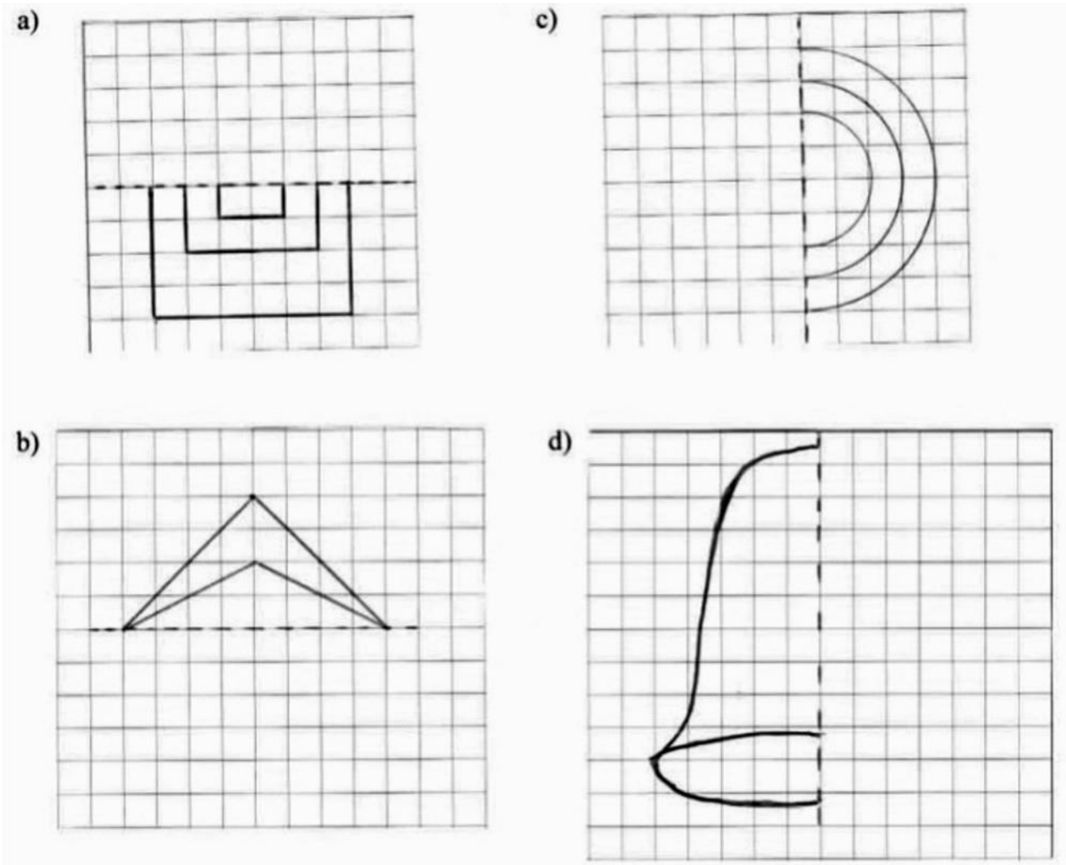
3. Jogo dos Sete Erros



Fonte: https://rachacuca.com.br/raciocinio/sete-erros/ferry-marketplace-sao-francisco/

Nesta atividade trabalhou-se a percepção e a visualização, o primeiro jogo em um nível mais fácil, o segundo com figuras menores e o terceiro com figuras coloridas. Portanto se aumentou o grau de dificuldade paulatinamente.

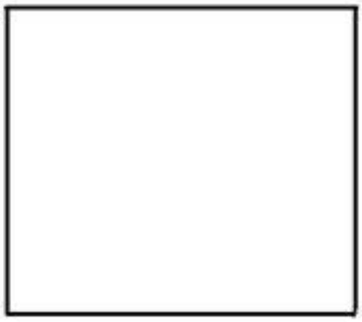
2. Simetria: Complete as figuras apresentadas.



Nesta atividade trabalhou-se a habilidade de construção e a representação. O desenho foi feito após se observar o eixo de simetria proposto e a figura apresentada.

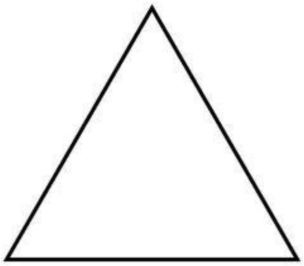
3.Construção de quadrados e triângulos.

3.1 Dado este quadrado, marque o ponto médio de cada lado e, unindo todos por um segmento de reta, forme outro quadrado. Repita o procedimento com o novo quadrado três vezes.



Em seguida, identifique quantos triângulos se formam na construção de cada quadrado.

3.2. Neste triângulo equilátero, marque o ponto médio de cada lado e forme outro triângulo equilátero. Repita o procedimento com o outro triângulo duas vezes.

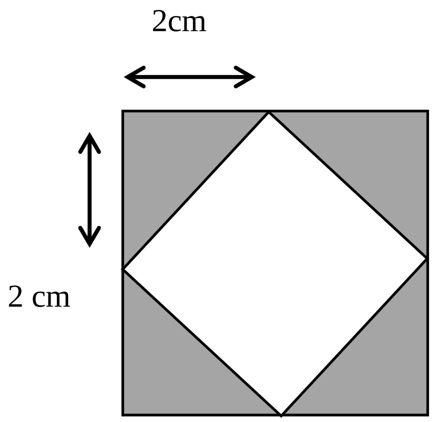


Nesta terceira atividade, trabalhou-se a habilidade de construção e a de representação.

O desenho, seguindo instruções (localização do ponto médio), facilita a representação e a construção de novas figuras segundo padrões.

4. Cálculo de áreas

4.1. Observando a figura a seguir, responda:



Fonte: DANTE, 2008, p. 181

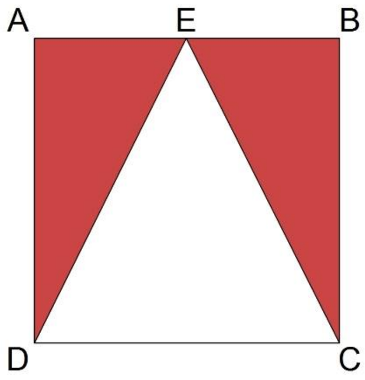
a) Qual é a área da parte colorida na figura?

b) Qual é a área da parte não colorida da figura?

Nesta quarta atividade trabalhou-se a percepção e visualização, o que tornou mais simples o desenvolvimento do cálculo.

5. Observação e cálculo

5.1. Observe a figura apresentada, que é um painel quadrado de duas cores. Nomeando os vértices de A, B, C e D, sendo E o ponto médio de AB, responda às seguintes questões:



a) Explique por que o triângulo DEC é isósceles.

b) Calcule a área do triângulo AED, considerando que o lado do quadrado mede 4 unidades, e compare com a do triângulo EBC.

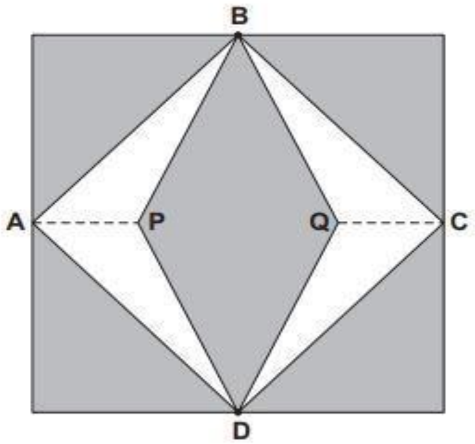
c) Considerando que o lado do painel mede 4 m, a parte vermelha custa R$30, 00 o m^2 e a parte branca custa R$20,00 o m^2, determine o valor do painel.

5.2. Ao criar o logotipo para um cursinho, um desenhista projetou uma figura que é o resultado da retirada de um triângulo isósceles de outro triângulo isósceles. O triângulo inicial tem 6 cm de base e 4 cm de altura. O que foi retirado tem a mesma altura e 1/3 da base do primeiro, ficando localizado no meio do desenho. Determine a área resultante.

Nesta quinta atividade trabalhou-se a habilidade de concepção, a de percepção e a de representação. Destaca-se que apenas com uma delas, isoladamente, não seria possível o desenvolvimento da atividade.

As atividades culminaram com o desenvolvimento de duas situações-problema do ENEM, cujo texto se apresenta a seguir.

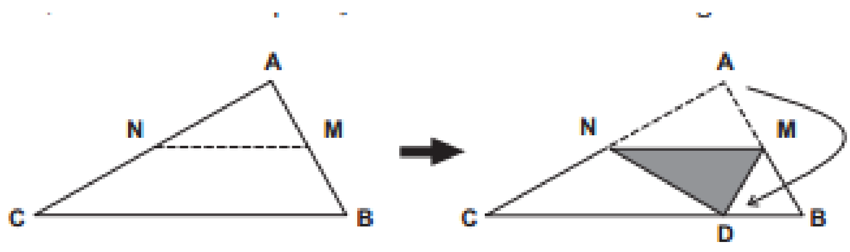
(ENEM 2012) - Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

A) R$ 22,50
B) R$ 35,00
C) R$ 40,00
D) R$ 42,50
E) R$ 45,00

(ENEM 2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

a) CMA e CMB.

b) CAD e ADB

c) NAM e NDM.

d) CND e DMB.

e) CND e NDM.

Depois foi perguntado o seguinte: Quais habilidades vocês julgam necessárias para resolver as duas questões do ENEM que foram propostas? Quatro dos cinco participantes apontaram visualização, indicando a importância desta habilidade para a compreensão das situações-problema.

O objetivo das atividades presentes no primeiro bloco foi desenvolver habilidades que auxiliassem na compreensão de situações-problema, como as apresentadas, buscando construir/desenvolver habilidades úteis em situações onde se aplica o conhecimento geométrico. Um dos participantes, ao comentar o Jogo dos

Sete Erros, disse: “Depois que você passa por essa atividade (...) você pega uma questão e olha tudo, procura ver todos os detalhes.”.

Segundo bloco de atividades

Foi entregue a cada participante uma folha com circunferências com raios de 1 cm a 4 cm, bem como um par de pedaços de barbante para cada circunferência, um com a medida aproximada do comprimento e outro com a medida aproximada do diâmetro.

2.1. Reconhecendo o π

Com o barbante que foi fornecido meça o comprimento e o diâmetro do círculo que lhe foi entregue. Compare as medidas obtidas, dividindo a maior pela menor. Faça o mesmo com os demais círculos que lhes foram entregues. Em seguida, cole-os na circunferência correspondente a cada um. Complete a tabela com os números que você obteve e com os demais que já estão na tabela.

Comprimento da Circunferência	Diâmetro	C/d =
1,57 m	0,5 cm	
3,14 m	1 cm	
6,28 m	2 cm	
12,56 m	4 cm	

Certamente você encontrou sempre um número com o valor aproximado de 3,1415. Ele, que é constante, é denominado π . No caso, C = π . d (mas d é igual a duas vezes o raio). Finalmente C = 2 π r .

A seguir, você vai usar a fórmula que acabou de lembrar.

Situação 2.2

Uma pessoa, buscando preservar sua saúde, por recomendação médica, passou a dar 12 voltas em torno de um canteiro circular de raio igual a 10 metros. Quantos metros, aproximadamente, ela percorre por dia, dando essas voltas?

Situação 2.3

Segundo o Inmetro, o raio do círculo central de um campo de futebol deve medir 9,15 metros. Buscando fazer uma surpresa ao diretor do clube, o técnico deste clube decidiu calcular a medida da semicircunferência do círculo central com o intuito de posicionar todos os atletas nesta linha da semicircunferência para fazer uma homenagem ao diretor. Se o técnico adotar 3 como aproximação para π , qual medida encontrará para esta semicircunferência?

Nestas atividades do segundo bloco trabalhou-se a habilidade de construção, a de representação, a de percepção e a de visualização, o que auxilia na compreensão da fórmula do comprimento da circunferência e consequentemente em sua utilização.

2.4. Áreas de círculos

Observe a Figura 1 e a Figura 2, a seguir

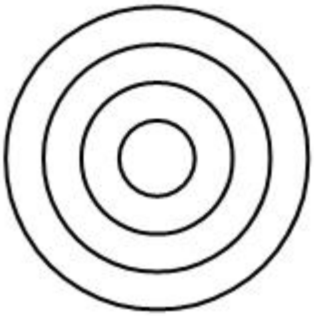


Figura 1

Figura 2

A Figura 1 representa circunferências concêntricas. A Figura 2 representa um feixe de segmentos paralelos que têm as medidas dessas circunferências. A Figura 2 lembra o formato de um triângulo, cuja área pode ser calculada pela fórmula: (b . h)/ 2. Como a base deste triângulo tem a medida do comprimento da circunferência ($2\pi r$) e a altura tem a medida do raio desta circunferência (r), a área é: $2(\pi r.r)/2 = \pi r^2$. Dessa forma, a área da circunferência de raio maior também deve ser $\pi r^{2.}$

Com a fórmula da área do círculo, resolva estas questões.

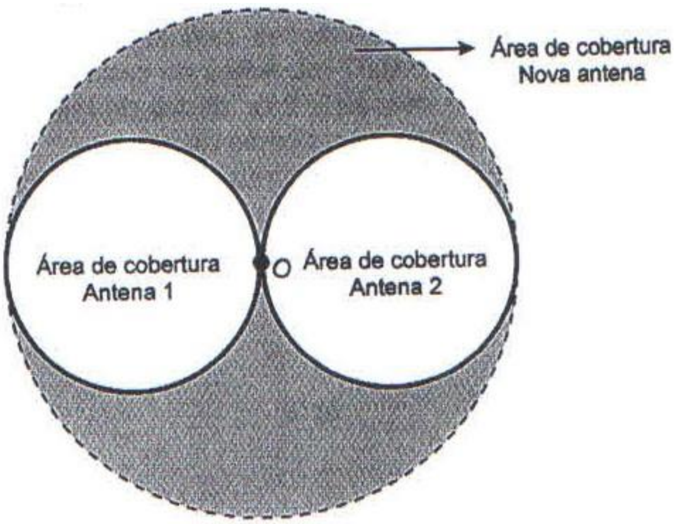
2.5 De acordo com a Confederação Brasileira de Futebol de Salão (CBFS), no centro da quadra de futsal tem de haver um círculo com raio de 3 metros. Qual é a área desse círculo?

2.6 Ao pensar na imagem de um CD, temos a ideia de duas circunferências concêntricas. Tendo o raio da maior 5,9 cm e o da menor 1,8 cm, qual é a área da coroa circular formada?

Nestas atividades buscou-se trabalhar a visualização e a concepção. Os participantes sugeriram colocar uma ilustração da coroa circular para melhor compreensão por parte dos alunos.

As atividades do segundo bloco culminaram com o desenvolvimento de duas situações-problema do ENEM, cujo texto se apresenta a seguir.

(ENEM 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8π

b) 12π

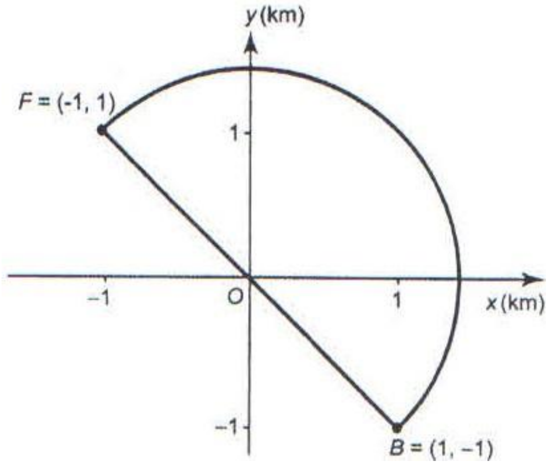
c) 16π

d) 32π

e) 64π

(ENEM 2016) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h , enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para √2.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

a) 1260

b) 2520

c) 2800

d) 3600

e) 4000

O objetivo das atividades do segundo bloco foi desenvolver habilidades que auxiliassem na compreensão de situações-problema, como as apresentadas, buscando construir/desenvolver habilidades úteis em situações onde se aplica o conhecimento geométrico.

Terceiro bloco de atividades

Foram entregues a cada participante folhas com a planificação do tetraedro, da pirâmide quadrangular, do tronco de pirâmide e do hexaedro.

3.1. Com as folhas que foram entregues, recorte as figuras, dobre onde está pontilhado e use a cola para construir os poliedros. Em seguida complete o quadro a seguir.

Figura	Número de vértices	Números de arestas	Número de faces
Tetraedro			
Pirâmide Quadrangular			
Tronco de Pirâmide			
Hexaedro			

3.2. Olhe e desenhe, vista de cima, cada figura e responda, de acordo com os desenhos feitos. Em quais figuras vistas de cima se veem todas as arestas?

Tetraedro	Hexaedro
Pirâmide Quadrangular	Tronco de Pirâmide

3.3. Observe os poliedros que foram entregues.

Poliedros de Platão.

a) Você notou neles alguma característica específica? Se notou, qual?

b) Indique quantas faces, quantos vértices e quantas arestas possui cada um.

Poliedro	Número de Faces (F)	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	F + V - A
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Não foi uma coincidência a expressão F + V – A = ?

A relação encontrada chama-se Fórmula de Euler. Escreva-a.

Nestas atividades do terceiro bloco trabalharam-se estas habilidades: construção, representação, percepção e visualização. Na construção de sólidos se percebem mais naturalmente, por exemplo, arestas, faces, vértices. Os desenhos feitos a partir dos sólidos construídos e/ou manipulados facilitam a visão, tornando mais fáceis possíveis abstrações.

3.4. Faça um desenho de como é visto o sólido.

Vista de cima	Vista de baixo
Vista da lateral esquerda	Vista da lateral direita
Vista de frente	Vista de trás

3.5 Observe o globo que foi apresentado.

a) Localize a linha do Equador, em seguida localize as linhas do Trópico de Câncer e do Trópico de Capricórnio. Geometricamente o que se pode falar sobre elas?

b) Localize a linha que corresponde ao Meridiano de Greenwich. O que se pode observar geometricamente comparando este Meridiano com os demais?

c) Retire o globo do apoio e segure com as pontas dos dedos indicadores. Observe-o de cima. Em seguida, apoie-o na mesa de modo que se veja a linha do Equador de forma perpendicular. Em seguida responda: Existe alguma posição que possibilite ver a linha do Equador sobreposta a si mesma?

d) Segure novamente o globo e localize o Brasil. Observe as linhas verticais que o cortam (os meridianos). Existe alguma posição em que é possível ver que a linha do meridiano consegue ficar sobreposta a si mesma?

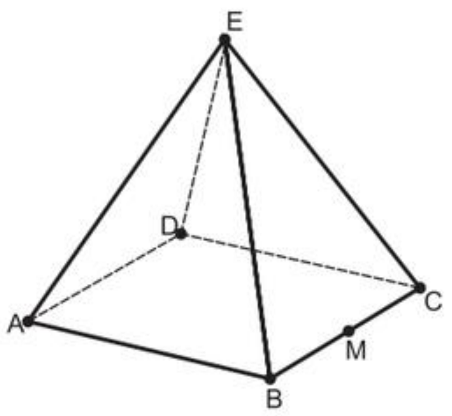
e) Há um ponto a 13 km de Quito, no Equador, conhecido por Metade do Mundo, onde se registra a latitude de 00º 00’ 00’’. É o encontro da linha do Equador, que deu origem ao nome do país, com o meridiano a 80º a oeste do Meridiano de Greenwich. Com essas informações, procure o referido ponto no globo. Coloque o globo em uma posição que permita ver o ponto no centro dele. Observe de cima para construir o que você está vendo: o ponto e a projeção do globo, marcando a linha do Equador e o meridiano que o corta. Pode usar o compasso.

(Imagem de ponto de latitude 00º 00’00” em Quito, Equador)

Na quarta e na quinta atividade do terceiro bloco, foram trabalhadas estas habilidades: representação, percepção e visualização. Desenhar as vistas do tronco de pirâmide permitiu melhor visualização, bem como as percepções do globo feitas (Lembra-se que o globo deve ser transparente.)

As atividades do terceiro bloco culminaram com o desenvolvimento de duas situações-problema do ENEM, cujo texto se apresenta a seguir.

(ENEM 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto m, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

(ENEM 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

Figura 1

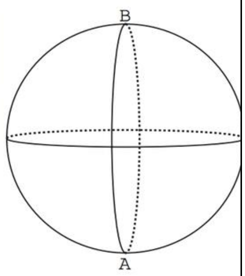
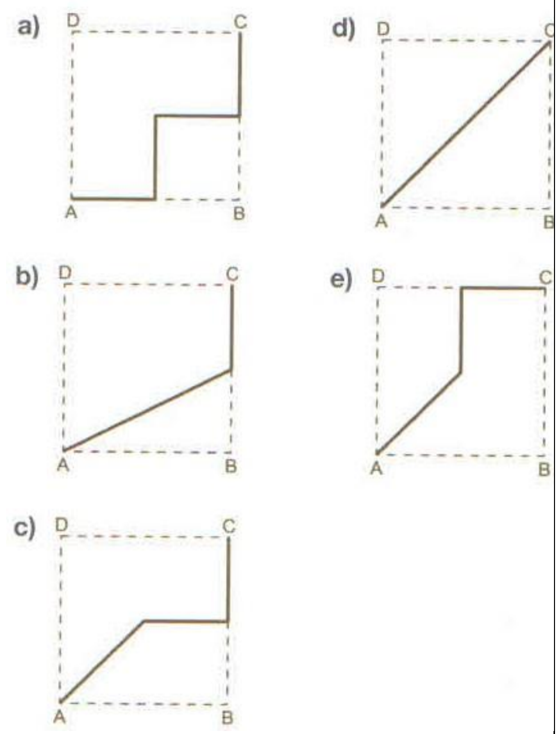


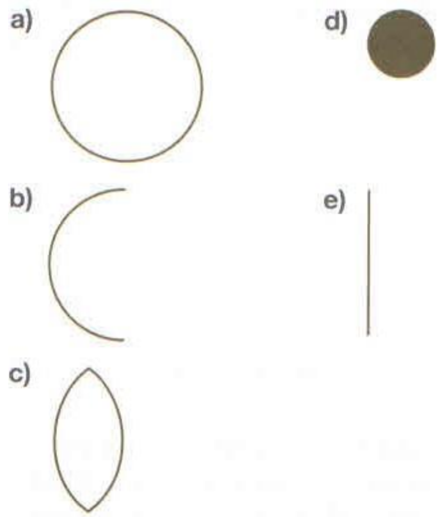
Figura 2

Na figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em:29 fev.2012

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é MELHOR representada por





O objetivo das atividades do terceiro bloco foi desenvolver habilidades que auxiliassem na compreensão de situações-problema, como as apresentadas, buscando-se construir/desenvolver habilidades que possam ser úteis em situações onde se aplica o conhecimento geométrico.

Quarto bloco de atividades

Foi entregue a cada participante uma folha com a planificação do paralelepípedo.

4.1. Construção do paralelepípedo.

4.1.1 Para calcular o volume deste paralelepípedo, considere os cubos que foram entregues, uma unidade de volume (uv) para cada um. Preencha com os cubos. o paralelepípedo construído.

Análise da situação: Foram utilizados 18 cubos de uma unidade de volume. Logo o volume do paralelepípedo é 18 uv. São 9 cubos embaixo e 9 em cima. 9 significa 3 vezes 3, que é a área da base do paralelepípedo. A altura do paralelepípedo é 2 uc (unidade de comprimento). 18 uv é igual a 9 ua vezes 2 uc. É possível imaginar que o volume de um paralelepípedo é área da base vezes a altura, logo V = a.b.c.

Outro modo de obter o volume é sobrepor c retângulos unitários de base ab, preenchendo a caixa. O volume é V= a.b.c.

Embora não se tenha demonstrado, mas ilustrado, o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula: área da base x a altura.

Exercício de aplicação da fórmula

Uma piscina de brinquedo de criança tem as seguintes dimensões: 10 cm de comprimento, 4 cm de largura e 5 cm de profundidade. Qual é o volume de água que ela pode conter?

4.1.2 Vamos calcular o volume do cilindro. Vocês vão preencher a caixa cilíndrica com os círculos que foram entregues, sendo a área de cada um πr^2. Analogamente ao volume do paralelepípedo, o volume do cilindro é área da base x altura. No caso, área do círculo πr^2 x a altura. Assim o número de círculos determinou a altura h do cilindro construído. Então o volume do cilindro é πr^2x h.

Exercício de aplicação da fórmula

Uma latinha de refrigerante tem formato cilíndrico. Sendo a altura da latinha 10 cm e o raio da circunferência do fundo 3 cm, calcule o volume de refrigerante que ela pode conter.

A primeira atividade deste bloco trabalhou a habilidade de identificar características de figuras planas e/ou espaciais. A segunda, as habilidades de visualização e comparação.

4.1.3 Foi feita uma ilustração, mas, de fato, a área do cilindro é πr^2h, o que pode ser mostrado pelo Princípio de Cavalieri.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), "aluno de Galileu e professor em Bolonha, é célebre por seu trabalho *Geometria indivisibilius continuorum nova quadam ratione promota"*, escrito em 1635 no qual expõe o seu método dos indivisíveis (intermediário entre o de exaustão dos gregos e os de Newton e Leibiniz). De forma que o tamanho relativo de dois sólidos ou superfícies poderia ser encontrado pela soma de uma série de planos ou retas (CAJORI, 2007, p.229). Isto é o conhecido Princípio de Cavalieri, na verdade um teorema: "Se dois sólidos tem alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nesta razão” (BOYER, 1996, p. 227).

Em linguagem mais apropriada para aluno do Ensino Médio, pode ser utilizada esta versão simplificada do Axioma (Princípio de Cavalieri): Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, esses sólidos têm o mesmo volume.

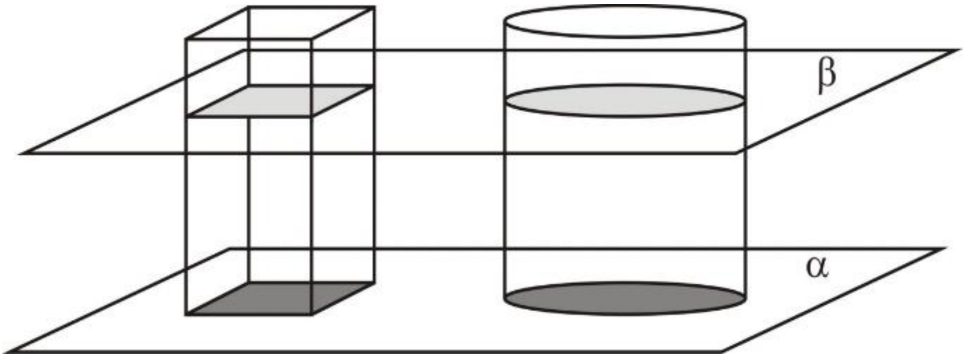
Isso pode ser ilustrado (Figura 1) com dois montes de moedas, de mesmo tamanho e mesma altura. Manipulando algumas moedas para a direita ou para a esquerda, o volume ocupado pelas moedas permanece constante.

Figura 1-Ilustração do Princípio de Cavalieri

Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=AwrE18yH7x9bcc0Ajg_z6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

A Figura 2, a seguir, mostra que poliedros e corpos redondos, mesmo apresentando características diferentes, podem apresentar volumes iguais.

Figura 2-Princípio de Cavalieri relacionando o volume de dois sólidos.



Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=AwrE18yH7x9bcc0Ajg_z6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

Exercício de aplicação do Princípio de Cavalieri

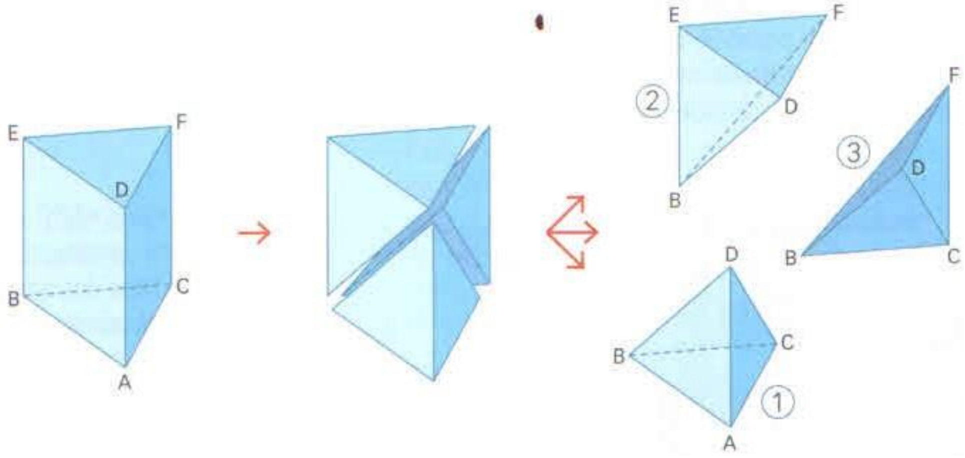
Verifique que o volume de um cilindro cujo raio da base mede 10 cm e cuja altura mede 20 cm é o mesmo de um paralelepípedo de base quadrangular cujo lado mede $\sqrt{314}$ cm e cuja altura mede 20 cm. Isso confere com o Princípio de Cavalieri. (Considere π = 3,14.)

Nesta atividade se trabalhou a percepção, com o preenchimento do espaço, e a visualização.

4.1.4. Volume da Pirâmide

Observe as figuras contidas na Figura 3 a seguir.

Figura 3-Ilustração do volume da pirâmide



Fonte: Balestri (2016, p. 72)

Observe que do prisma foram recortadas 3 pirâmides, com as mesmas dimensões. Logo o volume de cada uma delas é 1/3 do volume do prisma que lhes deu origem. Como o volume do prisma é área da base x altura, o volume da pirâmide é base x altura dividido por 3. Então

$V_{\text{pirâmide}} = (b.h)/3$

Exercício de aplicação da fórmula

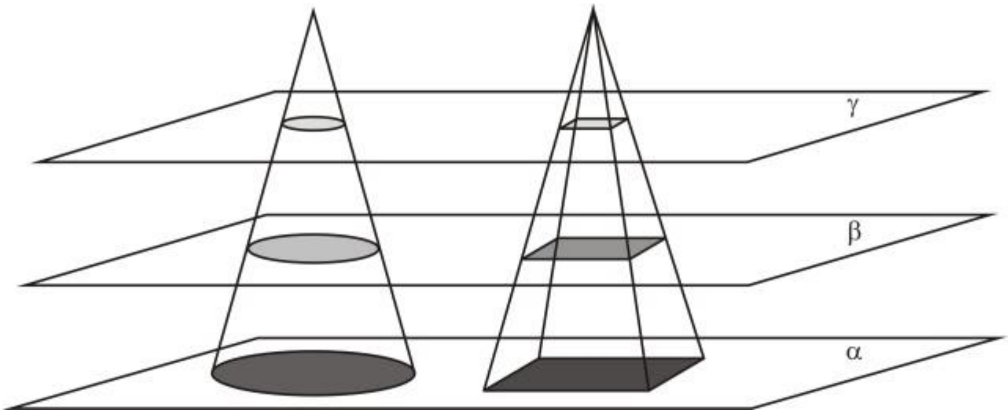
Uma fôrma de picolé tem o formato inusitado de uma pirâmide triangular cuja altura é 8 cm e cuja base mede 3cm^2. Qual é o volume de líquido para encher a fôrma?

Nesta atividade se trabalhou a visualização e a percepção, habilidades que auxiliaram identificar as características das figuras planas, para melhor compreensão do volume.

4.1.5. Volume do cone

Observe a Figura 4, a seguir.

Figura 4-Ilustrando o volume do cone com o Princípio de Cavalieri



Fonte:https://br.images.search.yahoo.com/search/images;_ylt=A2KLfRbU7R9bRlkA4DLz6Qt.;_ylu=X3oDMTByMjB0aG5zBGNvbG8DYmYxBHBvcwMxBHZ0aWQDBHNlYwNzYw--?p=princ%C3%ADpio+cavalieri&fr=mcafee

Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cone (V_c) é igual ao volume da pirâmide (V_p), isto é,

V_p = (área da base x altura)/3 . Como a área da base do cone é πr^2, o volume do cone é

$V_c = \pi r^2/3$.

Exercício de aplicação da fórmula

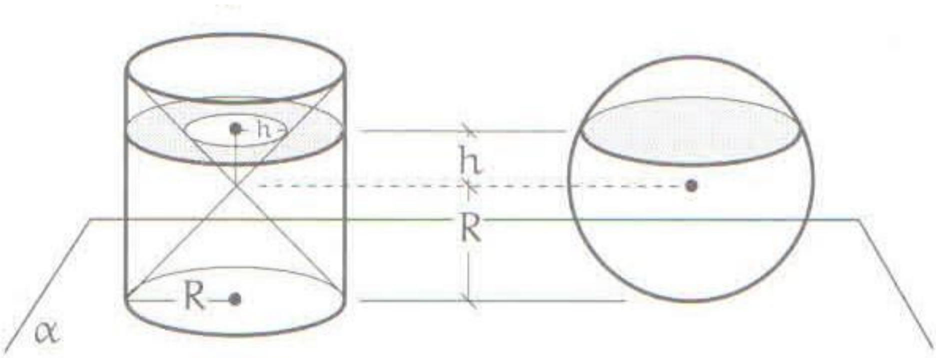
Qual é o volume de um sorvete no formato de cone cujo raio da base mede 3 cm e cuja altura mede 8 cm?

Nesta atividade se trabalhou a percepção. Dois participantes da pesquisa salientaram que a atividade era interessante, porém não suficiente para que o aluno aceitasse a fórmula para o cálculo do volume do cone com o uso do Princípio de Cavalieri. Sugeriram atividades práticas para que o aluno pudesse visualizar.

4.1.6 Volume da esfera

Pode ser obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, imagina-se um sólido de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Observa-se que, em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2-h^2)$. Mas é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h. (LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO,1998, p. 268).

Figura 5-Ilustrando o volume da esfera com o Princípio de Cavalieri



Fonte: Lima, et al. (1998)

Considera-se uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro, subtraem-se dois cones iguais, cada um com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. O sólido C (chamado *clépsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera) produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo o volume da esfera é igual ao de C.

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura 2R subtraído de dois cones de raio R e altura R. Isto dá:

$\pi R^2 2R - 2.\ 1/3\ \pi R^2 R = 4/3\ \pi R^3$ que é o volume da esfera.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Fonte: Lima, et al. (1998)

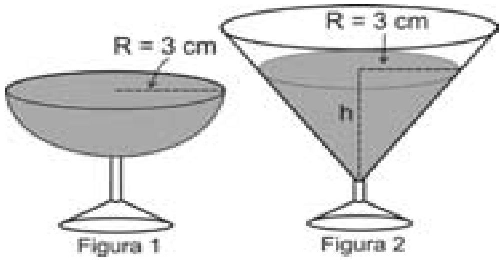
Exercício de aplicação da fórmula.

Calcule o volume de água para encher um aquário de formato esférico até a metade, de modo a poder colocar um peixe ornamental, sabendo que o raio mede 15 cm.

Nesta atividade três dos cinco participantes indicaram que a explicação que foi dada para o cálculo do volume da esfera não foi suficiente para que o aluno aceitasse a fórmula. Sugeriram o uso de tecnologia, recomendaram o uso do GeoGebra. Ao serem perguntados sobre uma possibilidade de explicação do volume da esfera sem o uso do computador, esses três participantes disseram que não. Os outros dois participantes consideraram que a explicação que foi dada para o cálculo do volume da esfera foi suficiente para que o aluno aceitasse a fórmula.

As atividades deste quarto bloco culminaram com o desenvolvimento de duas situações-problema do ENEM, cujo texto se apresenta a seguir.

(ENEM 2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.	(ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

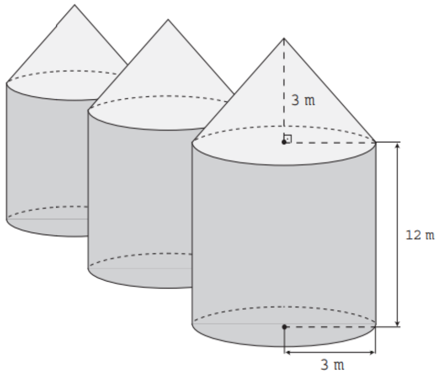


Considere:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Sabendo que a taça com formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33
b) 6,00
c) 12,00
d) 56,52
e) 113,04



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6
b) 16
c) 17
d) 18
e) 21.

O objetivo das atividades presentes neste quarto bloco foi desenvolver habilidades que auxiliassem na compreensão de situações-problema como as apresentadas, buscando construir/desenvolver habilidades que possam ser úteis em situações onde se aplica o conhecimento geométrico.

Destaca-se novamente que as atividades apresentadas são sugestões que podem ser adaptadas para trabalhar/construir/desenvolver/lapidar habilidades básicas de percepção, construção, representação, concepção e visualização, que são requeridas total ou parcialmente em situações-problema analisadas para escolha das propulsoras das atividades construídas nesta pesquisa.

Como este produto educacional é originário da referida pesquisa, reforça-se a sugestão de que quem quiser aprofundar a temática de ler, na integra, a dissertação *Um estudo de situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma no ENEM no período de 2009 a 2017*, no endereço eletrônico: http://www.ppgedmat.ufop.br/

Para finalizar

Ao trabalhar com colegas testando atividades para alunos, pude ver, com ajuda de outros olhos, o que eu e minha orientadora tínhamos construído. Ao delimitar os assuntos a serem abordados sabíamos que estávamos fazendo um pequeno recorte na Geometria. No entanto imaginamos que este pequeno recorte possa ser útil e inspirar outros professores a construir também atividades que busquem desenvolver ou lapidar habilidades (auxiliares ou não) que possam ser proveitosas para os alunos.

As situações-problema que envolvem o conhecimento geométrico de espaço e forma requeridas no ENEM, no período da pesquisa que originou a dissertação e este produto educacional, requerem habilidades auxiliares. Outra conclusão que foi feita pela maioria dos participantes é que nem sempre cada questão do ENEM corresponde apenas a uma habilidade da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias.

Assim, torna-se necessário, para dar maiores oportunidades aos alunos, trabalhar com atividades que permitam desenvolver habilidades, incluídas as auxiliares, e não simplesmente cuidar da habilidade que está indicada pela Matriz de Referência, maximizando suas chances de sucesso.

Uma forma de construir e solidificar o conhecimento pode ser planejar cada passo da trajetória. Ao selecionar questões, devem ser escolhidas atividades que capacitem os resolvedores a usar o raciocínio de forma eficiente.

Ao buscar atividades que auxiliassem o desenvolvimento de uma habilidade específica, este produto educacional procurou uma forma diferente de trabalhar, usando orientações criativas para professores e alunos.

Referências Bibliográficas

ARCAVI, A.The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics, n. 52, p. 215-241, 2003.

DANTE, L.R. Matemática, volume único. 1ªed. São Paulo: Ática, 2005.

LAURO, M. M. *Percepção-Construção-Representação-Concepção. Os quatro processos do ensino da Geometria*: uma proposta de articulação. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo – S.P. 2007, 396 p.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, W. e MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, vol.2. Reimp. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.2014.

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna.* Editora Cortez *.1998.*

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto,
em outubro de 2019
sobre papel 100% reciclato (miolo) 90g/m² e (capa) 300 g/m²