

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas**

**Andréa Regina Dias da Silva**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação do  
Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da  
Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia  
Civil, área de concentração: Construção Metálica

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Co-orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves

Ouro Preto, Dezembro de 2009

S586s

Silva, Andréa Regina Dias da.

Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas [manuscrito] / Andréa Regina Dias da Silva - 2009.

xviii, 322f.: il., color.; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Co-orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Construção Metálica.

1. Estruturas metálicas - Teses. 2. Teoria das estruturas - Teses.  
3. Ligações metálicas - Teses. 4. Dinâmica estrutural - Teses.  
I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

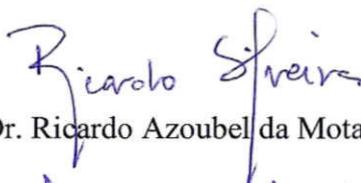
CDU: 624.014

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

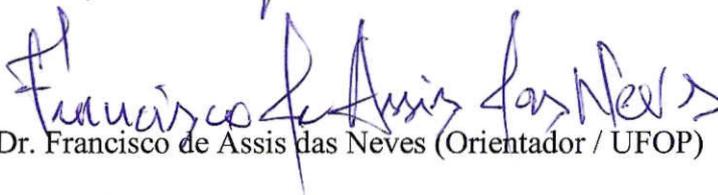
# SISTEMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE AVANÇADA ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS

**AUTORA: ANDRÉA REGINA DIAS DA SILVA**

Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 17 de dezembro de 2009, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves (PUC-RJ)



Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva (UERJ)



Prof. Dr. Alexandre da Silva Galvão (UFF)



Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira (UFES)

*“Cada um de nós compõe a sua história, cada ser em si carrega  
o dom de ser capaz e ser feliz.”*

À minha mãe e ao meu orientador.

# Agradecimentos

A Deus.

À minha mãe, Glória, pelo apoio, incentivo e compreensão em todos os momentos.

Ao meu irmão, Marcelo, à minha sobrinha, Laura, e à minha cunhada, Cristiane, pela presença constante.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, por sua brilhante orientação, incansável dedicação e pela amizade. Muito obrigada pela oportunidade e confiança.

Ao meu co-orientador, prof. Francisco de Assis das Neves, pela sua contribuição para a realização deste trabalho.

Ao prof. Alexandre Galvão por sua atenção e pelos esclarecimentos nos momentos de dúvida.

À Roberta Machado pela amizade e companheirismo.

Aos amigos Afonso e William pela convivência.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos ensinamentos.

À Róvia pela atenção e por seu dedicado trabalho na secretaria do PROPEC.

Aos colegas de turma: Gisele, Amilton e Arthur.

À Capes pela ajuda financeira.

Resumo da Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

## **SISTEMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE AVANÇADA ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS**

**Andréa Regina Dias da Silva**

Dezembro/2009

*Orientadores:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Francisco de Assis das Neves

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas baseada no Método dos Elementos Finitos. O conhecimento do comportamento estático e dinâmico de uma estrutura é essencial para a concepção de estruturas mais leves e esbeltas sem afetar o seu padrão de segurança e de qualidade. Assim, torna-se necessário utilizar teorias mais complexas, como formulações não lineares, evitando simplificações no processo de análise/projeto. Nesse sentido, são consideradas neste trabalho duas fontes de não linearidades: a geométrica, que considera os efeitos da deslocabilidade da estrutura, e a física, causada principalmente pelas características mecânicas dos materiais utilizados na construção civil. A inelasticidade do aço e a semi-rigidez das ligações entre os membros estruturais caracterizam a não linearidade física. Em uma Análise Avançada, esses efeitos não lineares são diretamente considerados na formulação do elemento. Isso elimina a necessidade de processar a análise e o dimensionamento estrutural em fases distintas, permitindo assim estimar precisamente os possíveis modos de colapso. Os fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento do comportamento estrutural e das formulações desenvolvidas para a consideração de cada um dos efeitos citados serão apresentados ao longo do trabalho. Avalia-se a estabilidade estática e dinâmica de vários sistemas estruturais com ligações rígidas e semi-rígidas cujas soluções analíticas ou numéricas são encontradas na literatura. Essas análises são usadas também para a validação da metodologia de solução adotada. Ao final da tese, algumas conclusões e observações referentes ao comportamento estrutural serão estabelecidas.

Abstract of Thesis presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Civil Engineering.

## **COMPUTATIONAL SYSTEM FOR ADVANCED STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF STEEL STRUCTURES**

**Andréa Regina Dias da Silva**

December/2009

*Advisors:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Francisco de Assis das Neves

A new computational tool for the advanced static and dynamic analysis of steel framed structures based on the Finite Element Method has been developed and is presented herein. Understanding the static and dynamic behavior of a structure is essential for designing structures that are lighter and slenderer without affecting their safety and quality standards. As such, it is evermore necessary to use complex theories, such as nonlinear formulations, and not oversimplify the project's process analysis. In this sense, two sources of non-linearity are herein contemplated: the geometric, which considers the effects of structural displacement; and the physics, which considers the effects of the mechanical characteristics of the material used in civil construction. Member material yielding and connection flexibility of the structural members characterize the physical sources of nonlinear behavior. In an Advanced Analysis, these nonlinear effects are directly considered in the formulation of the element. This eliminates the need for distinct-phase analysis and structural designing, permitting, as such, the precise estimation of possible collapse load and modes. The necessary fundamental theories for the better understanding of structural behavior and the formulations developed for each of the cited effects are herein presented. Also presented is an evaluation of the static and dynamic stability of various structural systems, with rigid and semi-rigid connections, whose analytical or numerical solutions are found in literature. This latter evaluation is used for validating the methodology and the formulations developed by the author. Finally, some conclusions and observations referring to structural behavior are construed.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos .....	1
1.2 Organização do Trabalho .....	4
<b>2 Sistema Computacional</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução .....	6
2.2 Características Gerais.....	7
<b>3 Metodologia Generalizada para Análise Estática Não Linear</b>	<b>13</b>
3.1 Introdução .....	13
3.2 Formulação Generalizada .....	15
3.2.1 Equações Básicas .....	18
3.2.2 Discretização do Sistema Estrutural.....	19
3.2.3 Plastificação dos Membros e Flexibilidade das Ligações.....	20
3.3 Solução do Problema .....	22
3.3.1 Solução Incremental Preditada .....	25
3.3.2 Ciclo de Iterações .....	26
<b>4 Formulações para Análise Estática Não Linear</b>	<b>30</b>
4.1 Introdução .....	30
4.2 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração .....	31
4.2.1 Estratégias de Incremento de Carga .....	33
4.2.2 Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga .....	39
4.2.3 Estratégias de Iteração .....	40
4.3 Não Linearidade Geométrica .....	50

4.3.1	Formulação SOF-1 .....	54
4.3.2	Formulação SOF-2 .....	62
4.3.3	Formulação SOF-3 .....	66
4.4	Ligações Semi-Rígidas e Não Linearidade Geométrica .....	69
4.4.1	Comportamento da Ligação .....	70
4.4.2	Modelagem da Ligação Semi-Rígida .....	73
4.4.3	Formulação SRF-1 .....	76
4.4.4	Formulação SRF-2 .....	80
4.4.5	Formulação SRF-3 .....	83
4.5	Inelasticidade do Aço e Não Linearidade Geométrica .....	88
4.5.1	Formulação PHF-1 .....	99
4.5.2	Formulação PHF-2 .....	104
4.6	Análise Avançada .....	112
4.6.1	Formulação AAF-1 .....	114
4.6.2	Formulação AAF-2 .....	115
<b>5</b>	<b>Exemplos de Validação das Formulações para Análise Estática</b> .....	<b>121</b>
5.1	Introdução .....	121
5.2	Não Linearidade Geométrica .....	122
5.2.1	Coluna Engastada-Livre .....	122
5.2.2	Pórtico de Lee .....	125
5.2.3	Viga Engastada-Livre .....	128
5.2.4	Arco Circular .....	130
5.3	Ligações Semi-Rígidas e Não Linearidade Geométrica .....	133
5.3.1	Viga com Ligações Semi-Rígidas nas Extremidades .....	134
5.3.2	Pórticos de Dois Andares .....	136
5.4	Inelasticidade do Aço e Não Linearidade Geométrica .....	140
5.4.1	Portal Simples .....	140
5.4.2	Pórtico com Restrição ao Movimento Lateral .....	144
5.4.3	Pórtico Tipo Galpão .....	148
5.4.4	Pórtico de Quatro Andares .....	150
5.5	Análise Avançada .....	153
5.5.1	Pórtico Simples Birrotulado .....	154
5.5.2	Pórtico de Dois Andares.....	156

<b>6</b>	<b>Formulação Generalizada para Análise Dinâmica Não Linear</b>	<b>161</b>
6.1	Introdução .....	161
6.2	Formulação Generalizada .....	163
6.2.1	Equações Básicas .....	164
6.2.2	Discretização do Sistema Estrutural .....	166
6.2.3	Matriz de Massa .....	170
6.3	Análise de Vibração Livre da Estrutura Pré-Carregada .....	173
6.4	Análise Transiente Não Linear .....	175
6.4.1	Considerações sobre os Métodos de Integração Direta .....	175
6.4.2	Solução do Problema Transiente .....	180
6.4.3	Estratégia Adaptativa para o Incremento de Tempo .....	183
6.4.4	Comportamento Histerético da Ligação Semi-Rígida .....	188
6.5	Análise de Vibração Não Linear .....	193
<b>7</b>	<b>Exemplos de Validação da Formulação para Análise Dinâmica Não Linear</b>	<b>196</b>
7.1	Introdução .....	196
7.2	Análise de Vibração Não Linear .....	197
7.2.1	Coluna com Ligação Semi-Rígida .....	197
7.2.2	Arco Senoidal Abatido .....	199
7.2.3	Pórtico em L .....	206
7.3	Análise Transiente .....	211
7.3.1	Viga Engastada-Livre .....	212
7.3.2	Pórtico de Williams .....	215
7.3.3	Viga com Ligações Semi-Rígidas .....	217
7.3.4	Pórtico Biengastado em L .....	220
7.3.5	Pórtico Simples .....	225
7.3.6	Pórtico de Dois Andares .....	229
<b>8</b>	<b>Análise Avançada de Sistemas Estruturais de Porte Médio</b>	<b>236</b>
8.1	Introdução .....	236
8.2	Pórtico de Seis Andares .....	237
8.2.1	Análise Estática Não Linear .....	238
8.2.2	Análise Dinâmica Não Linear .....	245
8.3	Pórtico de Sete Andares .....	250
8.3.1	Análise Estática Não Linear .....	251

8.3.2	Análise Dinâmica Não Linear .....	258
8.4	Pórtico de Quatro Andares .....	261
8.4.1	Análise Estática Não Linear .....	262
8.4.2	Análise Dinâmica Não Linear .....	265
<b>9</b>	<b>Considerações Finais</b> .....	<b>268</b>
9.1	Introdução .....	268
9.2	Conclusão .....	269
9.2.1	Análise Estática Não Linear .....	269
9.2.2	Análise Dinâmica Não Linear .....	272
9.3	Sugestões para Futuras Pesquisas .....	273
	<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>276</b>
<b>A</b>	<b>Matriz de Rigidez e Funções de Estabilidade</b> .....	<b>299</b>
A.1	Introdução .....	299
A.2	Matriz de Rigidez .....	300
A.2.1	Formulação SOF-1 .....	300
A.2.2	Formulação SOF-2 .....	304
A.3	Funções de Estabilidade .....	308
<b>B</b>	<b>Modelos de Ligações Semi-Rígidas</b> .....	<b>314</b>
B.1	Introdução .....	314
B.2	Modelo Linear .....	316
B.3	Modelos Não Lineares .....	317
B.3.1	Modelo Exponencial .....	317
B.3.2	Modelo Exponencial Modificado .....	319
B.3.3	Modelo de Potências com Quatro Parâmetros .....	320
B.3.4	Modelo Multilinear .....	321

# Lista de Figuras

2.1	Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados .....	9
2.2	Entrada de dados e saída de resultados .....	10
2.3	Formulações implementadas no sistema computacional.....	11
3.1	Efeitos de segunda ordem: P- $\Delta$ (deslocamento lateral) e P- $\delta$ (curvatura).....	15
3.2	Elemento finito adotado .....	17
3.3	Solução incremental-iterativa.....	25
4.1	Trajetórias de equilíbrio (Silveira, 1995) .....	31
4.2	Comprimento de arco linearizado .....	44
4.3	Referencial Lagrangiano total .....	51
4.4	Referencial Lagrangiano atualizado .....	52
4.5	Elemento de viga-coluna adotado .....	54
4.6	Comportamento da seção transversal .....	55
4.7	Força axial e momentos na configuração de equilíbrio $t$ .....	57
4.8	Deslocamentos naturais do elemento .....	61
4.9	Elemento finito considerado.....	68
4.10	Aspecto típico das curvas momento-rotação de uma ligação.....	72
4.11	Elemento de viga-coluna com molas fictícias .....	75
4.12	Deslocamentos nodais do elemento na sua configuração deformada .....	79
4.13	Elemento de viga-coluna auxiliar.....	81
4.14	Elemento de viga com ligações excêntricas .....	83
4.15	Diagrama tensão-deformação para o aço .....	90
4.16	Viga sob flexão pura.....	91
4.17	Plastificação da seção transversal.....	92
4.18	Diagrama momento-curvatura.....	94
4.19	Elemento de viga-coluna com molas fictícias nas extremidades .....	97

4.20	Violação da superfície de interação.....	99
4.21	Redução da rigidez inelástica para o efeito da carga axial.....	101
4.22	Critérios de plastificação .....	103
4.23	Elemento de viga-coluna com molas fictícias.....	105
4.24	Distribuição de tensões na seção transversal.....	106
4.25	Superfície de início de escoamento e de plastificação total .....	108
4.26	Distribuição de tensões residuais nos perfis (ECCS, 1983) .....	109
4.27	Imperfeições iniciais (ECCS, 1983) .....	110
4.28	Transformações entre os sistemas corrotacional e global de coordenadas .....	112
4.29	Elemento finito híbrido .....	113
4.30	Configuração deformada do elemento e detalhe das molas em série.....	116
4.31	Viga com ligações semi-rígidas .....	119
4.32	Interação entre a flexibilidade da ligação e a plastificação do membro.....	120
5.1	Coluna engastada-livre e sua trajetória de equilíbrio .....	123
5.2	Configurações deformadas em alguns níveis de carregamento.....	124
5.3	Análise de convergência.....	124
5.4	Pórtico de Lee: geometria e carregamento .....	125
5.5	Trajетórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee .....	126
5.6	Trajетórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee .....	127
5.7	Configurações deformadas referentes aos pontos limites .....	128
5.8	Viga engastada-livre: geometria e carregamento .....	129
5.9	Curvas carga-deslocamento obtidas com a formulação SOF-1.....	129
5.10	Curvas carga-deslocamento obtidas com a formulação SOF-3.....	130
5.11	Arco abatido birrotulado: geometria e carregamento.....	131
5.12	Trajетórias de equilíbrio .....	132
5.13	Viga com ligações semi-rígidas: geometria e carregamento .....	134
5.14	Trajетórias de equilíbrio usando a formulação SRF-1.....	135
5.15	Trajетórias de equilíbrio usando a formulação SRF-2.....	135
5.16	Trajетórias de equilíbrio usando a formulação SRF-3.....	136
5.17	Sistemas estruturais analisados: geometria e carregamento.....	137
5.18	Trajетórias de equilíbrio obtidas com a formulação SRF-1 .....	138
5.19	Trajетórias de equilíbrio obtidas com a formulação SRF-2 .....	138
5.20	Trajетórias de equilíbrio obtidas com a formulação SRF-3 .....	139

5.21	Pórtico simples: geometria e carregamento.....	141
5.22	Trajetoórias de equilíbrio .....	142
5.23	Distribuição de forças internas na base da coluna à direita.....	143
5.24	Índice de plastificação dos membros da estrutura.....	143
5.25	Cargas de colapso e diagramas de momento fletor e força axial .....	144
5.26	Pórtico analisado: geometria, carregamento e discretização .....	145
5.27	Distribuição das forças internas em três seções selecionadas .....	146
5.28	Diagramas de momento fletor e força axial .....	147
5.29	Trajetoórias de equilíbrio para o pórtico .....	147
5.30	Pórtico tipo galpão: geometria, carregamento e propriedades físicas.....	148
5.31	Trajetoórias de equilíbrio .....	149
5.32	Diagramas de momento fletor e força axial .....	150
5.33	Pórtico de quatro andares .....	151
5.34	Trajetoórias de equilíbrio para diferentes valores de $\alpha$ .....	152
5.35	Plastificação da seção transversal para $\alpha = 0.5$ .....	153
5.36	Pórtico simples birrotulado .....	154
5.37	Trajetoórias de equilíbrio para o pórtico simples .....	156
5.38	Sistemas estruturais analisados .....	157
5.39	Trajetoórias de equilíbrio considerando a ligação <i>A</i> .....	157
5.40	Trajetoórias de equilíbrio considerando a ligação <i>B</i> .....	158
5.41	Trajetoórias de equilíbrio considerando a ligação <i>C</i> .....	159
5.42	Grau de plastificação dos membros da estrutura.....	160
6.1	Elemento finito adotado .....	165
6.2	Deslocamentos e forças nodais do elemento de viga-coluna .....	166
6.3	Relação entre a taxa de amortecimento, $\xi$ , e a frequência, $\omega$ .....	169
6.4	Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada.....	172
6.5	Equações de movimento considerando a aceleração com variação linear .....	181
6.6	Comportamento histerético da ligação semi-rígida.....	190
6.7	Modelo de endurecimento independente.....	191
6.8	Aspecto típico de uma curva de ressonância .....	193
6.9	Processo de obtenção dos deslocamentos $d_j$ .....	195
7.1	Coluna com ligação semi-rígida.....	197

7.2	Influência da rigidez da ligação nas análises de vibração e estática não lineares	198
7.3	Arco com ligações semi-rígidas submetido a carregamento estático.....	199
7.4	Trajетórias de equilíbrio considerando as ligações com diferentes rigidezes .....	200
7.5	Modos de vibração para o arco com diferentes alturas .....	201
7.6	Variação das duas menores frequências naturais com os parâmetros $z_0$ e $S_c$ .....	202
7.7	Influência do pré-carregamento estático na menor frequência de vibração .....	203
7.8	Respostas para o arco com altura $z_0 = 20$ mm .....	204
7.9	Respostas para o arco com altura $z_0 = 30$ mm.....	204
7.10	Respostas para o arco com altura $z_0 = 40$ mm.....	205
7.11	Análise de vibração não linear .....	205
7.12	Pórtico em L com ligações semi-rígidas .....	206
7.13	Influência da rigidez da ligação no comportamento pós-flambagem do pórtico	207
7.14	Influência da rigidez da ligação na relação carga-frequência natural .....	208
7.15	Trajетórias de equilíbrio do pórtico para $S_c = 5EI/L$ .....	209
7.16	Relação carga-frequência para $S_c = 5EI/L$ .....	209
7.17	Modos de vibração do pórtico .....	210
7.18	Relação não linear frequência-amplitude .....	211
7.19	Viga engastada-livre: geometria e carregamento .....	212
7.20	Resposta no tempo considerando os incrementos de tempo constantes.....	213
7.21	Resposta no tempo obtida usando a formulação SOF-1.....	214
7.22	Resposta no tempo obtida usando a formulação SOF-2.....	214
7.23	Pórtico de Williams: geometria e carregamento .....	215
7.24	Resposta no tempo obtida com a formulação SOF-1 .....	216
7.25	Resposta no tempo obtida com a formulação SOF-2.....	216
7.26	Viga com ligações semi-rígidas nas extremidades.....	217
7.27	Influência da rigidez da ligação na frequência natural da estrutura.....	218
7.28	Análise transiente para a viga.....	219
7.29	Histórico de deslocamento para a viga com $S_c = EI/L$ .....	219
7.30	Estrutura analisada: geometria e carregamento.....	220
7.31	Dois primeiros modos de vibração do pórtico.....	221
7.32	Comportamento da ligação semi-rígida .....	222
7.33	Resposta transiente considerando a ligação com comportamento linear .....	223
7.34	Resposta transiente considerando a ligação com comportamento não linear .....	224
7.35	Resposta transiente para o pórtico em L .....	224

7.36	Respostas obtidas com dois diferentes modelos de ligação .....	225
7.37	Pórtico simples sob excitação de base.....	226
7.38	Comportamento da ligação semi-rígida .....	227
7.39	Resposta transiente para o pórtico com ligações rígidas.....	228
7.40	Resposta transiente para o pórtico com ligações semi-rígidas .....	228
7.41	Pórtico de dois andares: geometria e carregamentos dinâmicos .....	229
7.42	Detalhe e comportamento da ligação com chapa de topo .....	230
7.43	Análise dinâmica considerando o carregamento 1 .....	231
7.44	Análise dinâmica: ligações rígidas e atuação da carga 2.....	232
7.45	Análise dinâmica: ligações semi-rígidas ( $S_c$ constante) e atuação da carga 2.....	233
7.46	Análise dinâmica: ligações semi-rígidas ( $S_c$ variável) e atuação da carga 2.....	233
7.47	Comparação entre as respostas do pórtico sem cargas gravitacionais .....	234
7.48	Comparação entre as respostas do pórtico com cargas gravitacionais.....	234
8.1	Pórtico de seis andares: geometria e carregamento.....	238
8.2	Comportamento de ligações viga-coluna .....	239
8.3	Influência da rigidez da ligação nas análises elásticas .....	240
8.4	Influência da rigidez da ligação nas análises inelásticas.....	242
8.5	Distribuição da plasticidade nos membros estruturais .....	244
8.6	Deslocamentos laterais do pórtico de seis andares.....	245
8.7	Diagrama de esforços solicitantes para o pórtico com ligações rígidas .....	246
8.8	Resposta dinâmica para o pórtico de Vogel com ligações semi-rígidas .....	247
8.9	Ciclo histerético momento-rotação .....	248
8.10	Resposta dinâmica para o pórtico com ligações rígidas e semi-rígidas .....	249
8.11	Pórtico de sete andares: geometria .....	250
8.12	Comportamento das ligações semi-rígidas tipos $E$ e $F$ .....	251
8.13	Pórtico de sete andares: carregamento adotado nas análises estáticas .....	252
8.14	Trajетórias de equilíbrio do pórtico para a análise de flambagem .....	254
8.15	Plastificação nos membros estruturais do pórtico de sete andares.....	255
8.16	Trajетórias de equilíbrio obtidas na análise de capacidade de carga.....	256
8.17	Plastificação nos membros estruturais do pórtico .....	258
8.18	Resposta transiente para o pórtico com ligações semi-rígidas tipo $E$ .....	259
8.19	Resposta transiente para o pórtico com ligações semi-rígidas tipo $F$ .....	260
8.20	Comportamento histerético da ligação .....	260

8.21	Pórtico analisado: geometria, carregamento e comportamento das ligações .....	261
8.22	Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de quatro andares .....	263
8.23	Grau de plastificação dos membros estruturais .....	264
8.24	Esforços solicitantes nos membros estruturais .....	265
8.25	Primeiro e segundo modos de vibração da estrutura .....	266
8.26	Histórico de deslocamentos para o pórtico de quatro andares .....	266
8.27	Resposta transiente para o pórtico de quatro andares.....	267
A.1	Elemento de viga-coluna .....	308
A.2	Deslocamentos no sistema global de coordenadas .....	311
A.3	Sistema equivalente de forças .....	313
B.1	Detalhes construtivos de ligações viga-coluna .....	318
B.2	Comportamento de ligações viga-coluna .....	319
B.3	Modelo Multilinear .....	321

# Lista de Tabelas

3.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear .....	29
4.1	Fatores de forma para algumas seções transversais .....	95
4.2	Parâmetros na Equação (4.181a) .....	98
4.3	Características das ligações semi-rígidas .....	120
5.1	Deslocamento horizontal normalizado, $u/L$ , no topo da coluna .....	123
5.2	Carga e deslocamento vertical ( $P_{lim}$ ; $v$ ) relativos aos pontos limites .....	128
5.3	Valores de carga e deslocamento vertical ( $P$ ; $v$ ) .....	133
5.4	Cargas limite de estabilidade $P_{lim}$ (kN) para o pórtico com apoios engastados .	139
5.5	Cargas limite de estabilidade $P_{lim}$ (kN) para o pórtico com apoios rotulados ....	140
5.6	Fator de carga limite, $\lambda_{lim}$ .....	149
5.7	Fatores de carga de colapso .....	152
5.8	Cargas limites, em kN, para o pórtico com bases rotuladas .....	159
5.9	Cargas limites, em kN, para o pórtico com bases engastadas .....	159
6.1	Estratégia numérica para análise de vibração da estrutura pré-carregada .....	176
6.2	Estratégia numérica para análise transiente não linear .....	185
7.1	Relação $P/h$ (MPa) referente aos pontos $A_1$ , $A_2$ , $B_1$ , $B_2$ , $C_1$ e $C_2$ na Figura 7.7...	203
7.2	Variação das três primeiras frequências de vibração com a rigidez da ligação ..	210
7.3	Dois primeiras frequências naturais de vibração, $\omega_1$ e $\omega_2$ , em rad/s .....	221
8.1	Fator de carga de colapso, $\lambda_{lim}$ , obtido na análise elástica .....	241
8.2	Fator de carga de colapso, $\lambda_{lim}$ , obtido na análise inelástica .....	243
8.3	Carga limite, em kN, obtida na análise elástica .....	254
8.4	Carga limite, em kN, obtida na análise inelástica .....	254
8.5	Fator de carga limite, $\lambda_{lim}$ , obtido na análise de capacidade de carga .....	257

8.6	Fator de carga limite, $\lambda_{lim}$ .....	264
B.1	Parâmetros do modelo exponencial para quatro tipos de ligações .....	318

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

Com as vantagens de possuir alta resistência, boa ductilidade e rápida fabricação e montagem, requisitos desejáveis na construção civil, as estruturas de aço vêm sendo largamente utilizadas. A ductilidade refere-se à capacidade do aço de sofrer grandes deformações antes do rompimento, permitindo a redistribuição de esforços quando se atinge a resistência limite de alguns membros estruturais. Essa propriedade também favorece a absorção de energia, que é extremamente importante em estruturas submetidas a excitações de natureza sísmica (Lui, 1999).

A finalidade da análise estrutural é determinar a resposta da estrutura, ou seja, tensões, deformações, forças atuantes, solicitações resultantes e deslocamentos, sob determinadas condições de contorno e carregamento. Para o projeto/dimensionamento estrutural, o objetivo é definir os membros do sistema que apresentem uma melhor estabilidade e capacidade resistente para atender às solicitações encontradas na análise estrutural. Atualmente, uma boa interação entre a análise e o projeto tem sido alcançada através da Análise Avançada. Vários estudos relacionados à Análise Numérica Avançada de estruturas metálicas estão sendo desenvolvidos com o objetivo de examinar o seu comportamento não linear. Nesse sentido, todos os fatores que influenciam substancialmente o comportamento estrutural são incluídos nos modelos numéricos e formulações, dando ao engenheiro uma solução precisa e econômica para o projeto. Entre esses fatores destacam-se aqueles decorrentes dos grandes deslocamentos que o sistema estrutural pode sofrer (efeitos de segunda ordem), os efeitos introduzidos pela consideração da semi-rigidez das ligações e da inelasticidade do material, e, adicionalmente, a influência

de imperfeições geométricas e de carregamento, e tensões residuais. Esses efeitos não lineares, ao serem considerados conjuntamente, elimina-se a necessidade de processar a análise estrutural e o projeto em fases distintas (Chen e Toma, 1994). Cabe enfatizar que o uso de ligação viga-coluna ou mesmo coluna-base é inerente de toda construção estrutural em aço, seja constituída por um ou vários pavimentos. Devido à sua importância, ela se torna significativa em termos econômicos e também estrutural. A economia, bem como a melhoria na qualidade de um projeto, tem um impacto nas empresas de fabricação e montagem das estruturas metálicas. É importante, então, que um engenheiro de projeto entenda o comportamento da ligação.

Com o desenvolvimento da indústria civil, naval, oceânica e aeronáutica, e o surgimento de materiais mais resistentes e novas técnicas construtivas, em diversos problemas da mecânica estrutural o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante e deve ser considerado nas análises. Isso acontece pelo interesse cada vez maior em se projetar estruturas mais leves e esbeltas e para as quais os fatores de segurança usualmente empregados devem ser menores, tornando os produtos mais competitivos. Além disso, a engenharia estrutural vem, cada vez mais, concebendo sistemas que não podem ser analisados e dimensionados sem que os efeitos dinâmicos sejam também considerados. O desconhecimento dos níveis e características da resposta dinâmica pode levar à falha do sistema durante a aplicação de carregamentos repetitivos devido à acumulação de danos estruturais. Portanto, com as mudanças de concepções estruturais e exigências de verificação mais precisa do comportamento das estruturas, existe uma procura crescente por sistemas computacionais com recursos para análises não lineares estática e dinâmica. Como os sistemas estruturais geralmente são formados por vigas, pórticos, treliças, placas e cascas, os engenheiros devem ter um bom conhecimento sobre o comportamento desses elementos quando submetidos a carregamentos de natureza estática e dinâmica.

Sendo assim, as formulações numéricas e computacionais desenvolvidas com o Método dos Elementos Finitos ganham espaço e se mostram eficientes na solução dos problemas estruturais. Sabe-se que as formulações lineares para análise estrutural são utilizadas facilmente pela maioria dos usuários de programas comerciais baseados nesse método. Entretanto, diferentemente, as análises não lineares envolvem o conhecimento específico para a definição dos vários parâmetros requeridos pelos aplicativos, assim como um melhor julgamento pelo analista acerca da qualidade da resposta obtida. É necessário, nesse caso, que o responsável pela análise tenha uma formação específica nas teorias e nos

modelos envolvidos e também conheça os métodos de solução do problema para que venha obter resultados consistentes e satisfatórios. Rapidez, precisão e custo são os requisitos básicos para a solução de problemas em engenharia; os códigos estão evoluindo nessa direção.

Surovek-Maleck *et al.* (2004) e, recentemente, Wong (2009) afirmam que embora as ferramentas computacionais que consideram modelos não lineares físicos e geométricos, imperfeições geométricas e tensões residuais evoluam rapidamente, os programas comerciais disponíveis com todos esses recursos ainda é uma raridade. Isso pode ser decorrente da complexidade da análise e do desconhecimento do significado e importância dos efeitos não lineares no comportamento estrutural.

Este trabalho se insere nesse contexto. O objetivo é obter um sistema computacional para análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas baseado no Método dos Elementos Finitos. Visando estabelecer uma modelagem computacional mais verdadeira do comportamento estrutural, os efeitos não lineares relatados brevemente em parágrafos anteriores serão considerados. O emprego da análise avançada como metodologia de análise e projeto de estruturas metálicas apresenta diversas vantagens entre as quais se destaca a possibilidade de estabelecer o limite de resistência e de estabilidade do sistema estrutural e de seus membros de forma direta, sem a necessidade de verificação separada da capacidade de cada membro (Chen e Toma, 1994). Vale enfatizar que não foi encontrado na literatura um programa computacional semelhante, com várias formulações não lineares de elementos finitos reticulados planos capazes de simular os importantes efeitos que modificam o comportamento estrutural.

Por fim, cabe esclarecer que o presente trabalho é parte integrante das seguintes linhas de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC/Deciv/EM/UFOP), na área de concentração em Construção Metálica:

- *Mecânica Computacional*: cujo objetivo é o estudo e o desenvolvimento de métodos e técnicas que possibilitem avanços na simulação computacional de sistemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas Metálicas*: que estuda o comportamento das diversas partes de uma estrutura, isoladamente ou em conjunto, envolvendo estruturas metálicas e mistas de aço e concreto, constituídas por perfis laminados, soldados e/ou eletrossoldados, tubulares ou leves de chapa dobrada.

Uma descrição dos capítulos que compõem este trabalho é feita na próxima seção.

## 1.2 Organização do Trabalho

Esta tese é constituída por nove capítulos e dois apêndices. Os fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento do comportamento estrutural e das formulações implementadas no sistema computacional, e a validação da metodologia de solução adotada nas análises serão apresentados ao longo deste trabalho. Cabe ressaltar que uma revisão bibliográfica relacionada a cada um dos temas envolvidos no estudo será feita no decorrer dos capítulos que os tratam.

Inicialmente, no Capítulo 2, apresentam-se as principais características do sistema computacional desenvolvido para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas.

Serão destacados, nos Capítulos 3, 4 e 5, os aspectos associados à análise estática não linear. No Capítulo 3 apresenta-se de uma forma generalizada a formulação para o elemento finito de viga-coluna usado na modelagem e o processo de discretização do sistema estrutural. A metodologia numérica usada na solução do problema é também detalhada. A particularização para a consideração apropriada dos efeitos da não linearidade geométrica, inelasticidade do aço e flexibilidade da ligação será feita no Capítulo 4 com a apresentação de diversas formulações. A importância da consideração isolada ou em conjunto desses efeitos nas análises é destacada. O Capítulo 4 inicia-se, entretanto, com a apresentação das estratégias de incremento de carga e de iteração usadas no processo de solução não linear incremental-iterativo. Na descrição das formulações mostram-se as relações deformação-deslocamento, as equações de equilíbrio e, principalmente, a obtenção dos vetores de forças internas e da matriz de rigidez do elemento. Após o desenvolvimento das formulações, verifica-se, no Capítulo 5, através da análise da estabilidade estática de doze sistemas estruturais cujas respostas são encontradas na literatura, o desempenho do sistema computacional desenvolvido e a aplicabilidade das formulações implementadas.

O Capítulo 6 trata da metodologia usada na análise dinâmica de estruturas reticuladas planas onde os efeitos decorrentes da não linearidade geométrica e das ligações semi-rígidas entre os membros estruturais são considerados. Abordam-se a equação básica que governa o movimento do sistema estrutural e a sua discretização usando o Método dos Elementos Finitos. A estratégia a ser seguida para realizar a análise de vibração livre de uma estrutura previamente carregada será estabelecida. Com relação à análise transiente, faz-se inicialmente uma discussão geral sobre os métodos numéricos de integração direta e

a metodologia desenvolvida para solução do problema não linear é mostrada. Ainda neste capítulo, apresenta-se o modelo usado para simular o comportamento histerético da ligação e, adicionalmente, alguns comentários referentes à técnica para seleção automática do incremento do intervalo de tempo serão feitos. Ao final do capítulo, o procedimento adotado para se obter a relação não linear entre a frequência de vibração livre e a amplitude da resposta dinâmica será mostrado.

No Capítulo 7, para validar a formulação e a estratégia de solução desenvolvidas para análise dinâmica não linear, estudam-se nove sistemas estruturais e comparam-se as respostas às soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura. São realizadas análises de vibração livre e transiente neste capítulo.

O Capítulo 8 destina-se à aplicação das formulações apresentadas e testadas nos capítulos anteriores no estudo estático e dinâmico de três sistemas estruturais de porte médio. Analisam-se estruturas constituídas por quatro, seis e sete pavimentos.

Finalizando, no Capítulo 9, algumas observações e conclusões referentes à pesquisa serão estabelecidas. Com o objetivo de continuar este trabalho e expandir o sistema computacional, alguns temas importantes são sugeridos.

Para complementar o trabalho, no Apêndice A, os elementos da matriz de rigidez de duas formulações desenvolvidas em referencial Lagrangiano atualizado, que simulam os efeitos da não linearidade geométrica e são usadas por outras formulações, são apresentados. Ainda nesse apêndice, tem-se o desenvolvimento de uma formulação de elemento finito de viga-coluna que adota funções de estabilidade na simulação dos referidos efeitos.

Já no Apêndice B, uma discussão sobre os modelos utilizados para representar o comportamento das ligações semi-rígidas é apresentada. Inicialmente é feita uma revisão bibliográfica sobre os modelos encontrados na literatura e, atenção especial é dada aos cinco modelos matemáticos implementados no sistema computacional.

# Capítulo 2

## Sistema Computacional

### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta as características da ferramenta computacional para análise estrutural desenvolvida neste trabalho. Sabe-se que, à medida que novas formulações e novos tipos de elementos finitos surgem, há a necessidade de que os programas computacionais baseados no Método dos Elementos Finitos possam ser adaptados de maneira fácil e rápida. Para que isso ocorra, deve-se buscar o máximo reaproveitamento de código, se possível apenas com o acréscimo de novas funcionalidades sem que haja alteração substancial no código fonte original.

Para o desenvolvimento do sistema CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), utiliza-se uma base computacional existente desenvolvida, inicialmente, por Silveira (1995) que usou a linguagem *Fortran 77* (Press *et al.*, 1992), porém adotando alguns recursos do *Fortran 90*. Uma característica marcante do *Fortran 77* são as regras de alinhamento das linhas do programa, uma herança da era dos cartões perfurados. Neste trabalho, o *Fortran 90/95* (Chapman, 2003), que não segue esse formato, é usado. Embora essa não seja uma linguagem orientada a objetos — que favorece a produtividade de programação, o rápido desenvolvimento de aplicativos e a redução do custo de manutenção — ela possui algumas características dessas linguagens, além da utilização de comandos breves para a execução de operações matriciais permitindo uma simplificação na escrita de muitos problemas matemáticos. Versões mais recentes, *Fortran 2003* (Metcalf *et al.*, 2004; Chapman, 2007) e *Fortran 2008*, são orientadas a objetos. Na versão 2003, além dessa filosofia de programação, que oferece uma maneira mais efetiva de separar a programação de um código grande e complexo em tarefas independentes, e

também permite a construção de um novo código baseado em rotinas já existentes, outras melhorias ocorreram. Entre elas destaca-se a interoperabilidade com a linguagem de programação C, ou seja, a capacidade de interagir com tal linguagem. Já se encontram compiladores *Fortran* com várias características do *Fortran 2003* (Intel<sup>®</sup> Visual Fortran Compiler v11, 2008), entretanto, um compilador com suporte para todos os recursos dessas duas versões mais recentes ainda é inexistente.

Com o Fortran 90/95 utilizou-se uma programação estruturada em módulos (classes) cujo funcionamento interno pode ser alterado sem a necessidade de alterar o programa que o utiliza. Isso favorece a melhoria da produtividade da programação objetivando a sua expansão com o desenvolvimento de novas funcionalidades.

As características gerais do CS-ASA são apresentadas na próxima seção. Detalhes referentes à implementação computacional não serão apresentados neste trabalho.

## **2.2 Características Gerais**

Como já destacado, este trabalho visa obter um sistema computacional para análise numérica avançada de estruturas metálicas. Para isso, utiliza-se uma base computacional desenvolvida inicialmente por Silveira (1995) para investigar a instabilidade elástica de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato. Posteriormente, sob orientação desse autor, outros trabalhos foram realizados usando essa base. No primeiro deles, Galvão (2000) desenvolveu um programa onde foram implementadas e testadas diversas formulações geometricamente não lineares para elementos de pórticos planos. Neste mesmo ano, Rocha (2000) estudou estratégias de solução não linear para o traçado completo da trajetória de equilíbrio. Ainda com relação à análise estática, Pinheiro (2003) estudou e implementou formulações não lineares para análise de sistemas treliçados planos e espaciais, e também, uma formulação não linear para pórticos planos com ligações semi-rígidas. Para análise dinâmica, Galvão (2001, 2004) tornou possível o estudo de vibração em treliças planas, pórticos planos e espaciais e implementou métodos de integração numérica, explícitos e implícitos, para análise de pórticos planos considerando o efeito da flexibilidade da ligação. Apenas o comportamento linear da ligação foi considerado em seu trabalho. Além disso, uma estratégia adaptativa que permite o controle automático do intervalo de tempo no processo de integração das equações diferenciais de movimento foi acrescentada. Novamente com relação à análise estática, formulações não lineares que consideram o efeito da inelasticidade do aço em pórticos planos com ligações rígidas

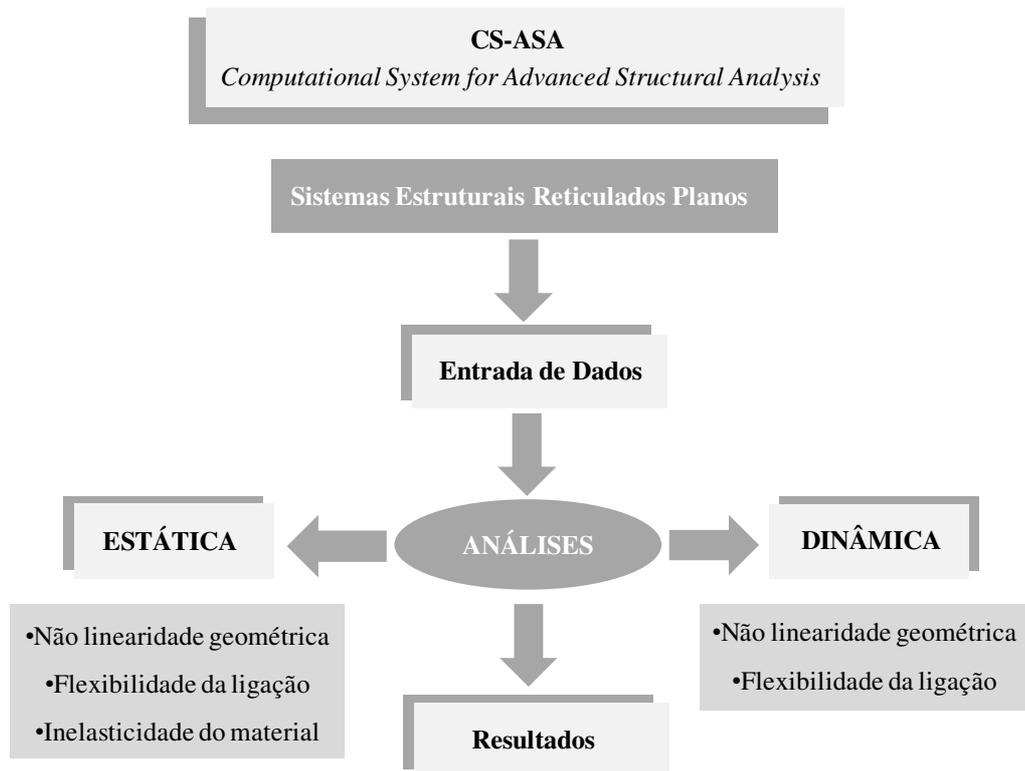
foram implementadas por Machado (2005). Por último, Rocha (2006) e Santos (2007) consideraram em um único elemento finito de viga-coluna os efeitos não lineares, possibilitando a análise inelástica de segunda ordem em estruturas metálicas com ligações semi-rígidas. Cabe esclarecer que em cada um desses trabalhos foram desenvolvidos programas computacionais independentes a partir da mesma base computacional.

A intenção é, então, expandir ainda mais a base computacional existente, porém, incluindo grande parte das formulações estudadas pelos pesquisadores citados no parágrafo anterior no sistema computacional proposto. A interação entre as formulações não lineares será agora possível.

Dessa forma, o CS-ASA será capaz de realizar a análise estática e dinâmica de estruturas metálicas. Porém, atenção será dada apenas ao estudo e análise das metodologias usadas para análise não linear. Dez formulações de elemento finito de viga-coluna serão abordadas e combinadas em busca de uma modelagem estrutural mais real com a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica, flexibilidade da ligação e inelasticidade do aço. A influência de imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais também é considerada.

Cabe ressaltar que o sistema poderá realizar a análise não linear de treliças planas e espaciais, considerando apenas o efeito da não linearidade geométrica. Duas formulações foram estudadas e implementadas por Pinheiro (2003). Também, será possível efetuar a análise dinâmica linear de treliças planas e espaciais (Galvão, 2001). É importante destacar que, para análise transiente linear, Galvão (2000) implementou os seguintes métodos de integração: Newmark, Wilson- $\theta$ , Diferença Central e Hilbert. Já a autora deste trabalho implementou o método generalizado proposto por Modak e Sotelino (2002), além de tornar possível a análise linear no domínio da frequência.

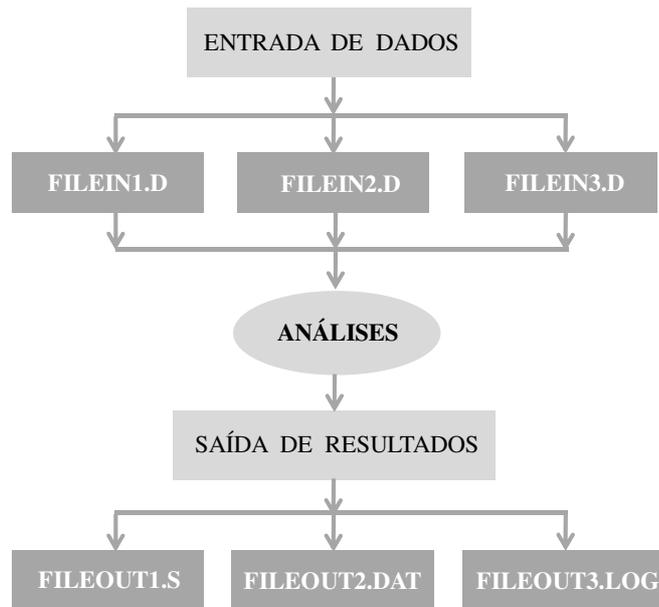
Seguindo um formato tradicional de um programa de elementos finitos ilustrado na Figura 2.1, o programa CS-ASA deverá ser capaz de efetuar a análise estática e dinâmica de estruturas metálicas, como já destacado. Os efeitos não lineares simulados em cada uma dessas análises estão também indicados nessa figura. Em geral, o processo de simulação numérica na mecânica computacional é dividido em três etapas, pré-processamento, análise e pós-processamento, que normalmente são tratadas de forma independente. Tradicionalmente, o pré-processamento, que é a etapa inicial da análise computacional, consiste na leitura de um ou mais arquivos texto em formatos específicos. Os dados contidos nesses arquivos serão, em seguida, processados para obtenção das respostas que serão impressas em arquivos texto para pós-processamento.



**Figura 2.1** Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados

A etapa de pré-processamento (entrada de dados) consiste na definição completa do modelo a ser analisado. Nesse estágio, o usuário deve primeiro definir o tipo de análise, se linear ou não linear; o modelo estrutural a ser analisado, treliça ou pórtico, e a característica da análise, estática ou dinâmica. Para a análise dinâmica uma escolha entre a análise transiente ou de vibração livre deve ser feita. Já na análise estática, o estudo no regime elástico ou inelástico é possível. A presença ou não de ligações semi-rígidas é outra informação necessária. Se houver ligações semi-rígidas, o seu comportamento momento-rotação, que é representado através de algum modelo matemático desenvolvido para essa finalidade, deve ser fornecido. Além disso, é necessário informar as características geométricas e físicas do modelo estrutural, a discretização em elementos finitos, as condições de contorno e o carregamento atuante. Todas essas informações, imprescindíveis para se realizar uma análise estrutural, devem estar presentes no arquivo de dados FILEIN1.D indicado na Figura 2.2.

Para uma análise estática não linear a formulação escolhida de acordo com o efeito desejado na análise deve também ser informada. Isso é feito no arquivo de dados, FILEIN2.d. As formulações implementadas no CS-ASA para a simulação dos efeitos referenciados na Figura 2.1 são indicadas na Figura 2.3.



**Figura 2.2** Entrada de dados e saída de resultados

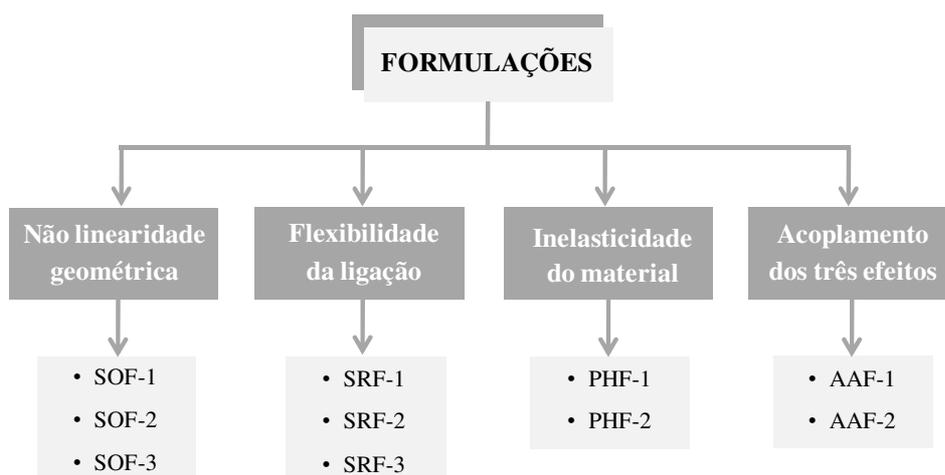
Como se pode observar, têm-se três formulações SOF-1,2,3 (*Second order finite element formulation*) que consideram os efeitos da não linearidade geométrica. Para simular os efeitos da semi-rigidez da ligação, outras três, SRF-1,2,3 (*Semi-rigid finite element formulation*), foram implementadas. Para considerar a plastificação nos membros estruturais têm-se as formulações PHF-1,2 (*Plastic-hinge finite element formulation*) e para a simulação conjunta de todos os três efeitos mencionados, têm-se duas formulações AAF-1,2 (*Advanced analysis finite element formulation*). Além da formulação, os parâmetros que gerenciam a estratégia incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson padrão ou modificado são informações necessárias. Dentre esses parâmetros podem ser citados: o número de passos de carga, o máximo de iterações desejadas, o incremento inicial do parâmetro de carga, as estratégias de incremento de carga e de iteração escolhidas e a tolerância para convergência. Os detalhes do processo incremental-iterativo serão apresentados nos Capítulos 3 e 4.

Cabe informar que, para a análise estática linear de sistemas estruturais com ligações semi-rígidas, as formulações SRF-1, SRF-2 e SRF-3, indicadas na Figura 2.3 e que serão apresentadas no Capítulo 4, são utilizadas.

O arquivo de entrada FILE3IN.D é necessário quando se realiza uma análise dinâmica. A formulação para simulação dos efeitos possíveis nesse tipo de análise (Figura 2.1) deve ser indicada. Outros dados relacionados nesse arquivo são: número de passos de tempo, incremento de tempo e a tolerância no processo iterativo. As condições iniciais para

deslocamento, velocidade e aceleração nodais, o amortecimento viscoso e a função descritiva da excitação dinâmica devem também ser indicados.

Com esses três arquivos, é gerada uma malha de elementos finitos para o modelo estrutural existente e, a partir daí, inicia-se a análise numérica propriamente dita. Como resultados da análise têm-se principalmente os deslocamentos nodais e os esforços atuantes na estrutura. Numa análise estática não linear, essas grandezas são determinadas a cada incremento de carga. Numa análise dinâmica, outras variáveis, tais como velocidade e aceleração a cada instante de tempo, são obtidas. Alguns arquivos de resultados com extensão .S, .DAT e .LOG são gerados pelo programa. A Figura 2.2 resume esses arquivos. No arquivo FILEOUT1.S, uma listagem completa com todas as informações da análise, ou seja, descrição do modelo estrutural, formulações utilizadas, coordenadas e forças nodais a cada passo incremental ou instante de tempo, entre outros detalhes da análise são impressos.



**Figura 2.3** Formulações implementadas no sistema computacional

Um segundo arquivo de resultados, FILEOUT2.DAT, é usado para construção direta de gráficos. Curvas carga-deslocamento, deslocamento-tempo, e a variação das cinco primeiras frequências naturais com o carregamento para um nó selecionado são impressas em arquivos com essa extensão. Quando se realiza uma análise dinâmica, o momento, a rigidez e a rotação para uma determinada ligação com comportamento não linear são gravados em arquivos similares. Esses dados são usados, por exemplo, para definir a curva que representa o comportamento histerético dessa ligação. Ainda em um arquivo com a

extensão .DAT, tem-se para um elemento escolhido, a variação das forças internas, força axial e momento fletor, em suas extremidades.

Por fim, no arquivo FILE3OUT.LOG, as forças internas durante o processo de carregamento da estrutura ou a cada passo de tempo em uma análise dinâmica são impressas. O acompanhamento da degradação da rigidez indicando os instantes de início de escoamento e de plastificação da seção transversal nos membros, e a perda de rigidez das ligações presentes na estrutura são informações gravadas em um desses arquivos.

Nos capítulos seguintes serão apresentados os tópicos necessários para o entendimento da metodologia de análise e as formulações implementadas.

# Capítulo 3

## Metodologia Generalizada para Análise Estática Não Linear

### 3.1 Introdução

Os projetos de estruturas são, em geral, desenvolvidos considerando a estrutura perfeita e utilizando uma análise elástica linear. Sendo assim, as equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura e assume-se que as deformações são pequenas, tais que seus efeitos sobre o equilíbrio e resposta do sistema são insignificantes. Uma desvantagem da análise elástica linear tem sido sua incapacidade de retratar o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite. Isso porque quase todas as estruturas se comportam de forma não linear antes de atingirem seus limites de resistência. Por essa razão, a maioria das normas baseadas no conceito do modelo de resistência última tem incorporado certas medidas para que os engenheiros estruturais considerem a não linearidade, utilizando técnicas de análise exatas ou aproximadas.

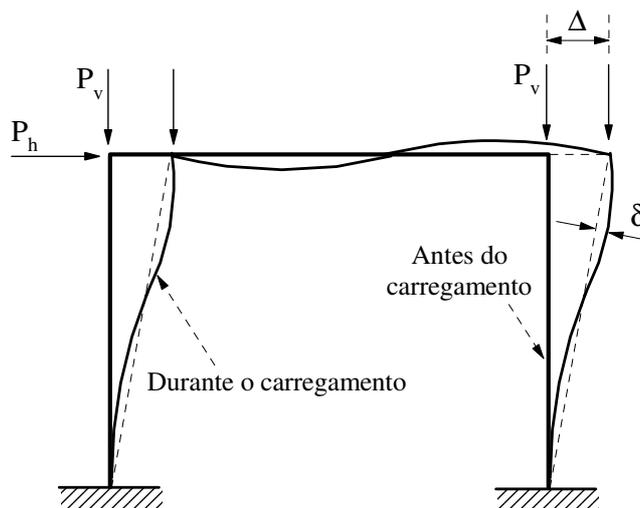
Procura-se com a análise não linear melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura em alguns aspectos. A busca contínua por uma modelagem estrutural mais realística tem apontado para uma consideração apropriada dos efeitos relacionados às não linearidades que afetam significativamente o comportamento estrutural. O objetivo fundamental é obter para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema. Como consequência, tem-se um aumento da complexidade do problema e do custo computacional. Várias técnicas de análise, com diferentes estratégias de refinamento e complexidades associadas, podem ser adotadas conforme a

resposta não linear do modelo estrutural. Porém, a análise, seja linear ou não linear, deve ser selecionada de acordo com a estratégia mais apropriada para cada tipo de estrutura.

O comportamento não linear de uma estrutura sob ação de um carregamento qualquer pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se duas: a não linearidade física e a não linearidade geométrica. A não linearidade física decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, ou seja, o comportamento do material não é elástico linear (a lei de Hooke não é obedecida). Nesse caso, os efeitos não lineares são descritos por equações constitutivas mais complexas. A perda de rigidez do material durante a história de carregamento da estrutura é considerada. Sendo assim, a partir de certo valor de carga, os elementos que a compõem perdem a capacidade de recuperar a sua forma inicial quando descarregados, ou seja, acumulam deformações permanentes chamadas deformações plásticas. Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de ligações semi-rígidas. A consideração da flexibilidade da ligação na análise evita a simplificação comum, entre os projetistas, de se considerar a ligação como simplesmente rotulada ou completamente rígida. Ou ainda, a não linearidade física de rótulas inelásticas oriundas de mecanismos de colapso localizados, tais como, plastificação de componentes estruturais.

Entretanto, uma estrutura pode ter um comportamento não linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. Para deslocamentos relativamente grandes, a deflexão lateral de um membro pode trazer como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais, em virtude da presença de um esforço normal. A esse tipo de comportamento, nomeado não linearidade geométrica, ou também chamado de efeitos de segunda ordem, é responsável por considerar os efeitos  $P-\Delta$  (global) e  $P-\delta$  (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada. Esses efeitos são exemplificados na Figura 3.1. Trata-se de uma importante fonte de não linearidade no problema estrutural e também exige formulações numéricas adequadas para sua consideração.

Embora a análise não linear de estruturas de aço venha sendo assunto de muitas pesquisas há alguns anos, a aplicação desse tipo de análise à prática da engenharia ainda não é comum. Isso é atribuído em parte à complexidade da análise e à falta de um claro entendimento sobre o significado dos efeitos não lineares no comportamento estrutural.



**Figura 3.1.** Efeitos de segunda ordem: P- $\Delta$  (deslocamento lateral) e P- $\delta$  (curvatura)

Iniciando o estudo sobre as análises não lineares onde os efeitos relatados nos parágrafos anteriores são considerados, este capítulo apresenta uma metodologia generalizada para análise estática de estruturas reticuladas planas que é baseada no Método dos Elementos Finitos. Para obtê-la, na seção 3.2, é apresentada, de uma forma generalizada, a formulação para o elemento finito de viga-coluna usado na modelagem e o processo de discretização do sistema estrutural. Esse elemento simulará os efeitos da não linearidade geométrica. Grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações, são considerados. Já os efeitos da inelasticidade do aço e da flexibilidade da ligação são introduzidos na análise modificando, diretamente, a relação de equilíbrio desse membro. A Seção 3.3 destina-se à apresentação da metodologia usada no processo de solução do problema. A particularização, para a consideração apropriada dos efeitos da não linearidade geométrica, inelasticidade do aço e flexibilidade da ligação será feita no próximo capítulo com a apresentação de diversas formulações.

## 3.2 Formulação Generalizada

No âmbito da Engenharia de Estruturas, um dos métodos usados para discretização de um problema contínuo e, a partir daí, a obtenção de soluções numéricas aproximadas é o Método dos Elementos Finitos. Esse método tem sido uma das ferramentas de solução numérica mais utilizada nessa área, principalmente devido à sua eficiência e aplicabilidade. Com essa técnica procura-se discretizar (dividir) o meio contínuo em

subdomínios, referidos como elementos, que são interligados através dos pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados.

Dentro de certas condições de convergência, os resultados fornecidos pelo método tornam-se, geralmente, tão mais precisos quanto maior for o refinamento da malha, o que no limite conduziria à solução exata do problema. Dessa forma, quanto maior o número de pontos (elementos), ou seja, quanto mais discretizada a malha, mais próximo se estará da solução exata. Entretanto, obviamente, deve-se adotar um número de elementos que leve a uma solução satisfatória dentro da precisão desejada e do tempo esperado.

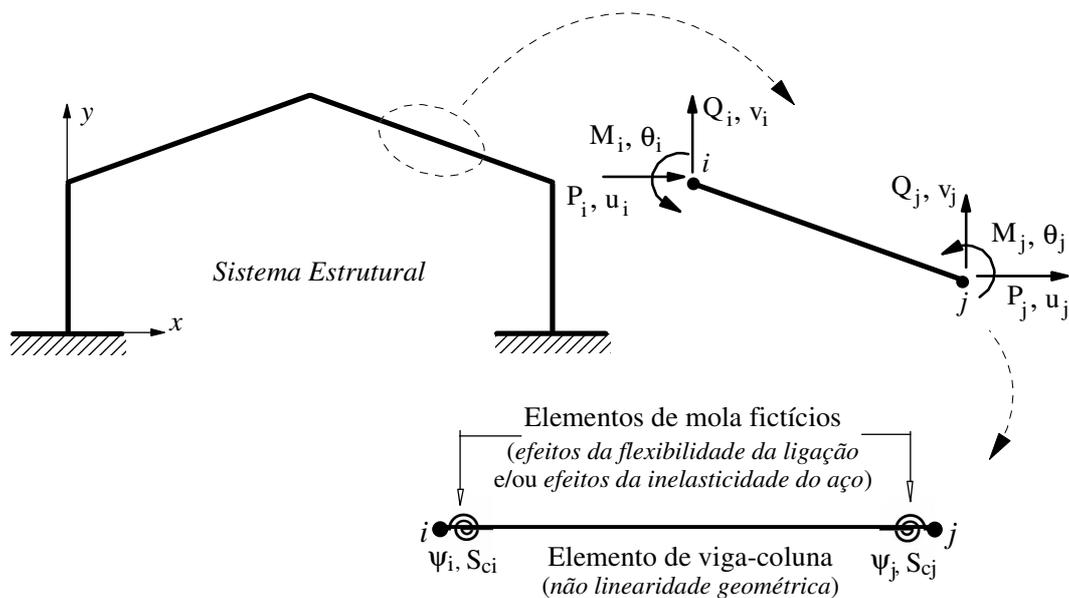
Duas formulações têm sido propostas para descrever o movimento de corpos sólidos: as do tipo Euleriana e Lagrangiana. Na formulação Euleriana, as coordenadas espaciais, isto é, aquelas associadas ao corpo deformado, são empregadas como as coordenadas de referência. Na Lagrangiana, os deslocamentos em um sistema estrutural, decorrentes de um dado carregamento, são medidos em relação a uma configuração inicial desse sistema. A maioria das formulações de elementos finitos para análise de segunda ordem de estruturas encontradas na literatura se baseia em referenciais Lagrangianos.

Com a abordagem Lagrangiana, adotada neste trabalho, o desenvolvimento de metodologias incrementais para análise não linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. Três configurações para o corpo podem ser estabelecidas em termos de um sistema de coordenadas cartesianas: a configuração inicial,  $t = 0$ , a última configuração deformada,  $t$ , e a configuração deformada corrente,  $t + \Delta t$ . Assume-se que todas as variáveis de estado, tais como, tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração  $t$ . A partir daí, tem-se como objetivo a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração  $t + \Delta t$ . Isso é feito considerando que o carregamento externo que atuou na configuração  $t$  tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de  $t$  para  $t + \Delta t$  é comumente referido como um passo incremental.

O elemento finito usado neste trabalho refere-se a um elemento reticulado plano de viga-coluna com pontos nodais  $i$  e  $j$  como ilustra a Figura 3.2. Cada um desses pontos possui três graus de liberdade, que são os deslocamentos axial,  $u$ , e transversal,

$v$ , e uma rotação,  $\theta$ . Nas extremidades do membro, elementos de molas fictícios são usados para simular os efeitos da flexibilidade da ligação e/ou da inelasticidade do material. Esses efeitos, quando introduzidos na análise, alteram a rigidez do sistema estrutural. As forças nodais estão, também, indicadas.

Na modelagem do elemento de viga-coluna algumas hipóteses devem ser consideradas. Assume-se que os elementos são inicialmente retos e prismáticos e suas seções transversais permanecem planas após a deformação. Os perfis são compactos de forma que a seção possa desenvolver capacidade total de rotação plástica sem que haja flambagem local. Admite-se também que todos os membros da estrutura são suficientemente contraventados de forma que a flambagem lateral ou torcional não influencie a resposta do membro antes do colapso. As tensões e deformações do membro são assumidas pequenas, mas grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos. Por fim, tem-se que o encurtamento axial devido à curvatura oriunda de flexão no membro é desprezado.



**Figura 3.2** Elemento finito adotado

As considerações de geometria e deformação feitas são válidas para a análise da grande totalidade dos sistemas estruturais em aço empregados na construção civil. Embora as estruturas de aço possam suportar grandes deslocamentos de corpo rígido, a deformação de cada membro, em relação ao seu comprimento na configuração deformada, permanece pequena. Tal hipótese é bastante apropriada, especialmente para

os elementos formados por perfis compactos que, geralmente, apresentam elevada rigidez à flexão. Outras considerações serão feitas no decorrer do trabalho de acordo com o tipo de análise e a formulação desenvolvida.

### 3.2.1 Equações Básicas

Um sistema estrutural é chamado conservativo quando o trabalho realizado pelos esforços internos e externos é independente do caminho percorrido pela estrutura ao passar da condição de equilíbrio inicial (ou de referência) para outra configuração qualquer. Essa nova configuração, para ser considerada admissível, deve satisfazer as relações de compatibilidade e condições de contorno essenciais do sistema.

A energia potencial total do sistema,  $\Pi$ , consiste da energia interna de deformação elástica,  $U$ , e do potencial das cargas externas,  $\Omega$ , ou seja,

$$\Pi = U + \Omega \quad (3.1)$$

A configuração de equilíbrio de um sistema estrutural pode ser obtida através do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, o qual estabelece que entre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as condições de equilíbrio tornam a energia potencial estacionária (Cook *et al.*, 1989).

A energia armazenada na estrutura para mover-se da configuração de equilíbrio  $t$  para  $t + \Delta t$  pode ser escrita como (Yang e Kuo, 1994):

$$U = \int_{\omega_V} \left( \omega \tau_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \right) \Delta \epsilon_{ij} \omega dV \quad (3.2)$$

onde  $\tau_{ij}$  representa as componentes do tensor de Cauchy,  $\Delta \epsilon_{ij}$  são as componentes do tensor incremento de deformações de Green-Lagrange,  $C_{ijkl}$  é o tensor com relações constitutivas, e o sobrescrito  $\omega$  refere-se à uma configuração de referência conhecida que, como será mostrado no próximo capítulo, dependendo do tipo de referencial Lagrangiano, pode ser a posição indeformada,  $t=0$ , ou a última configuração de equilíbrio,  $t$ , conhecida.

As componentes cartesianas do tensor de Green-Lagrange para as deformações podem ser expressas através das componentes dos deslocamentos incrementais,  $\Delta d_i$  ( $i=1,2$ ), de acordo com as seguintes equações:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (3.3)$$

onde  $\Delta e_{ij}$  e  $\Delta \eta_{ij}$  são as parcelas linear e não linear, respectivamente, definidas como:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta d_{i,j} + \Delta d_{j,i}) \quad (3.4a)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \Delta d_{k,i} \Delta d_{k,j} \quad (3.4b)$$

Assumindo que o carregamento externo atuante é dependente do estado de deformação do corpo, tem-se que a energia potencial das forças externas é definida como:

$$\Omega = - \int_S F_i \Delta d_i dS \quad (3.5)$$

sendo  $\Delta d_i$  as componentes dos deslocamentos incrementais e  $S$  define a região onde as forças externas,  $F_i$ , são prescritas.

### 3.2.2 Discretização do Sistema Estrutural

De uma forma geral, para um elemento finito de viga-coluna, tem-se que os deslocamentos incrementais em um ponto qualquer estão relacionados aos deslocamentos nodais incrementais de acordo com a seguinte equação:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} \quad (3.6)$$

na qual  $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor dos deslocamentos nodais incrementais e  $\mathbf{H}$  caracteriza a matriz que contém as funções de interpolação do problema. Para os incrementos de deformação escreve-se o tensor de Green-Lagrange, baseando-se na Equação (3.3), como:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (3.7)$$

onde  $\Delta \mathbf{e}$  e  $\Delta \boldsymbol{\eta}$  relacionam-se com os deslocamentos nodais incrementais através das expressões:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{u} \quad (3.8a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_{nl} \Delta \mathbf{u} \quad (3.8b)$$

onde  $\mathbf{B}_l$  é a matriz deformação-deslocamento para pequenas deformações e deslocamentos infinitesimais. Seus elementos são definidos diferenciando e

combinando apropriadamente as linhas de  $\mathbf{H}$ . A matriz deformação-deslocamento  $\mathbf{B}_{nl}$  além de depender de  $\mathbf{H}$ , é função também dos deslocamentos incrementais.

Sendo assim, as componentes incrementais do tensor de Green-Lagrange podem ser estabelecidas em função dos deslocamentos nodais como:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}) \Delta \mathbf{u} \quad (3.9)$$

Substituindo as Equações (3.6) e (3.9) em (3.1), considerando (3.2) e (3.5) chega-se à expressão do indicador variacional  $\Pi$ , na forma discretizada. Estabelecendo, em seguida, a variação de  $\Pi$  em relação a um campo de deslocamentos nodais incrementais cinematicamente compatíveis (Cook *et al.*, 1989) e, levando em conta a contribuição de cada elemento finito usado na modelagem do sistema estrutural, é possível chegar à seguinte expressão:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda \mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i \quad (3.10)$$

que define a equação a ser satisfeita durante o processo iterativo do tipo Newton para a obtenção do equilíbrio no sistema estrutural em estudo. Vale ressaltar que essa é uma expressão geral e as particularizações serão feitas detalhadamente no capítulo seguinte com o estudo de algumas formulações para análise não linear de estruturas reticuladas planas.

Em (3.10),  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do sistema estrutural, que é função dos deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$  e das forças internas (força axial e momento fletor),  $\mathbf{P}$ , em cada elemento;  $\mathbf{F}_i$  representa o vetor de forças internas e  $\mathbf{F}_r$  define a direção do carregamento externo atuante. A intensidade desse carregamento na configuração de equilíbrio  $t + \Delta t$  é representada pelo parâmetro  $\lambda$ .

A consideração dos outros efeitos não lineares resultantes da presença de ligações semi-rígidas e da plastificação dos membros estruturais é comentada a seguir.

### 3.2.3 Plastificação dos Membros e Flexibilidade das Ligações

Na análise não linear física é levada em consideração a perda de rigidez do material durante o histórico de carregamento da estrutura. Como já destacado, a partir de um certo nível de carga, alguns membros estruturais acumulam deformações permanentes chamadas deformações plásticas. Diz-se, então, que houve a plastificação desses elementos. Nesse processo, a rigidez estrutural, representada matematicamente pela

matriz  $\mathbf{K}$ , é modificada. Para realizar essa alteração e considerar os efeitos da plastificação dos membros estruturais na análise, é preciso, inicialmente, determinar o limite onde o material deixa de se comportar elasticamente e passa a se comportar como material plástico. Isso é feito através de uma função, que é um escalar, dependente do estado de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ , e de parâmetros de estado,  $\boldsymbol{\psi}$ , definida como:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\psi}) = 0 \quad (3.11)$$

Essa função, chamada de curva ou superfície de plastificação, determina uma superfície que define a separação entre o comportamento puramente elástico e o plástico. Nos materiais elasto-plástico perfeitos, os parâmetros de estado são constantes e representam a magnitude das tensões quando ocorre plastificação. Se  $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\psi}) < 0$ , o material encontra-se em regime perfeitamente elástico. Caso  $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\psi}) = 0$ , o material apresenta comportamento plástico. A situação  $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\psi}) > 0$  é inadmissível.

Neste trabalho, a superfície de plastificação, que define o estado limite último de uma seção transversal, é função da força axial e do momento fletor atuantes na seção. Além disso, depende do parâmetro de estado  $\boldsymbol{\psi}$  que varia acompanhando o processo de transição entre os regimes elástico e plástico. Como será estudado no próximo capítulo, o comportamento inelástico se restringe apenas às extremidades do elemento. O desenvolvimento da plasticidade é acompanhado, então, por esse parâmetro  $\boldsymbol{\psi}$ , que diminui com o aumento da plastificação dos membros estruturais, até se anular indicando que a extremidade do membro se plastificou completamente. Quando isso acontece, a Equação (3.11) é satisfeita. Com a violação dessa superfície, ou seja, se  $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\psi}) > 0$ , alterações nas forças internas da estrutura devem acontecer. No procedimento de modificação surge um vetor de forças fictícias que será denotado por  $\mathbf{F}_{ps}$ . Um estudo detalhado sobre essa correção será realizado no Capítulo 4. À medida que o escoamento dos membros estruturais ocorre, a rigidez do sistema é alterada pelo coeficiente  $\boldsymbol{\psi}$ . Será mostrado, que esse parâmetro, em uma das técnicas para análise inelástica de segunda ordem, define uma propriedade do elemento de mola fictício que simula a rigidez da seção.

A consideração da flexibilidade da ligação é outro efeito não linear que pode ser considerado. Para isso, usam-se também molas fictícias, de rigidez rotacional  $S_c$ , nas extremidades dos membros. O comportamento momento-rotação da ligação é usado na modelagem. Esses elementos de ligação são fisicamente fixados às extremidades do

elemento de viga-coluna, mantendo-se as condições de equilíbrio e compatibilidade, de modo que os graus de liberdade das ligações possam ser sintetizados na relação de rigidez tangente do elemento de viga-coluna. A presença dessas molas, por introduzirem rotações relativas nos pontos nodais do elemento, modifica as equações que descrevem o comportamento do sistema estrutural.

### 3.3 Solução do Problema

Foi mostrado nos parágrafos anteriores que, para simulação dos efeitos de segunda ordem, a matriz de rigidez é função dos deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , e das forças internas (força axial e momento fletor),  $\mathbf{P}$ , nos elementos que constituem o sistema estrutural. Numa forma geral, tem-se:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}) \quad (3.12)$$

Se além dos efeitos da não linearidade geométrica, a influência da flexibilidade da ligação for considerada, a matriz de rigidez se altera e pode ser definida, numa forma simplificada, como:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c) \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{S}_c$  é o parâmetro que representa as rigidezes das ligações semi-rígidas presentes na estrutura. Essa grandeza, com o aumento da sollicitação externa, diminui, simulando a perda de rigidez da ligação e, conseqüentemente, do sistema estrutural.

Adicionalmente, se a plastificação do membro for introduzida, as relações anteriores se modificam e podem ser resumidas de acordo com:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \psi) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c, \psi) \quad (3.15)$$

na qual  $\psi$  é o coeficiente usado para estabelecer o grau de escoamento dos membros estruturais, definido a partir de um determinado critério de plastificação. Na primeira equação, tem-se caracterizada uma análise inelástica de segunda ordem e, em (3.15) a influência da ligação é também considerada nessa análise. As formulações para a consideração adequada de cada um desses efeitos e, conseqüentemente, a obtenção das

matrizes representadas pelas relações (3.12) a (3.15) serão estudadas no próximo capítulo.

No estudo do comportamento não linear de uma estrutura, a matriz de rigidez deve ser atualizada constantemente para capturar o estado de equilíbrio devido a alterações na geometria, na rigidez da ligação e aos efeitos do escoamento do material. Torna-se necessário, então, realizar uma análise na forma incremental-iterativa.

Em uma análise incremental não linear que incorpore procedimentos iterativos em cada passo incremental, duas diferentes fases podem ser identificadas. A primeira delas, denominada fase predita, envolve a solução dos deslocamentos incrementais, através das equações de equilíbrio da estrutura, a partir de um determinado acréscimo de carregamento. A segunda fase, denominada corretiva, tem por objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo. Tais forças internas são então comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí a quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e externas. O processo corretivo é refeito até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio, ou seja, até que se encontre:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c, \boldsymbol{\psi}) \cong \mathbf{F}_e, \text{ ou, } \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c, \boldsymbol{\psi}) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.16)$$

onde o vetor das forças internas  $\mathbf{F}_i$  é, no caso mais geral, função dos deslocamentos,  $\mathbf{U}$ , nos pontos nodais da estrutura, das forças internas,  $\mathbf{P}$ , das rigidezes das ligações,  $\mathbf{S}_c$ , e é função também dos efeitos da inelasticidade do material,  $\boldsymbol{\psi}$ ;  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas e  $\lambda$  é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de  $\mathbf{F}_r$ , que é um vetor de referência onde apenas a sua direção é importante.

Poderá ser observado nos próximos capítulos que o cálculo do vetor de forças internas depende do tipo de análise e formulação não linear adotados. Durante o processo iterativo, os parâmetros  $\boldsymbol{\psi}$  e  $\mathbf{S}_c$  permanecem inalterados.

Métodos eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio (primário e secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir (Silveira, 1995).

A metodologia utilizada no presente trabalho baseia-se essencialmente na solução da Equação (3.16) de forma incremental-iterativa. Para uma sequência de incrementos do parâmetro de carga,  $\lambda$ , são calculados então os deslocamentos nodais incrementais.

No entanto, como  $\mathbf{F}_i$  é uma função não linear dos deslocamentos, a solução do problema  $(\Delta\lambda, \Delta\mathbf{U})$  não satisfaz, a princípio, a Equação (3.16).

Num contexto computacional, para um dado passo de carga, esse processo pode ser resumido em duas etapas. Inicialmente, a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga,  $\Delta\lambda^0$ , definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção de  $\Delta\lambda^0$ , determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais  $\Delta\mathbf{U}^0$ . As aproximações  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$  caracterizam o que é comumente chamado de solução incremental predita. Na segunda etapa de solução, mediante uma determinada estratégia de iteração, tem-se como objetivo corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior para restaurar o equilíbrio da estrutura o mais eficientemente possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , mas também o parâmetro de carga,  $\lambda$ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma dessa equação de restrição é o que distingue as várias estratégias de iteração (Silveira, 1995; Galvão, 2000).

Alguns dos passos principais da metodologia de análise não linear são apresentados adiante. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adotada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $t + \Delta t$ ;
- $k$  se refere ao contador do número de iterações. Para  $k=0$ , tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

Nas seções a seguir, serão descritas as duas etapas mais importantes do processo de solução não linear descrito acima.

### 3.3.1 Solução Incremental Predita

A primeira etapa para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente ( $\Delta\lambda^0, \Delta U^0$ ), consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}$ . A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta U_r$ , através da expressão:

$$\delta U_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.17)$$

As estratégias de incremento de carga, que serão discutidas no Capítulo 4, permitem que se faça uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Essa seleção pode estar condicionada a uma equação de restrição adicional imposta ao problema, como mostrado na Figura 3.3, para a restrição do comprimento de arco (Crisfield, 1981; 1991).

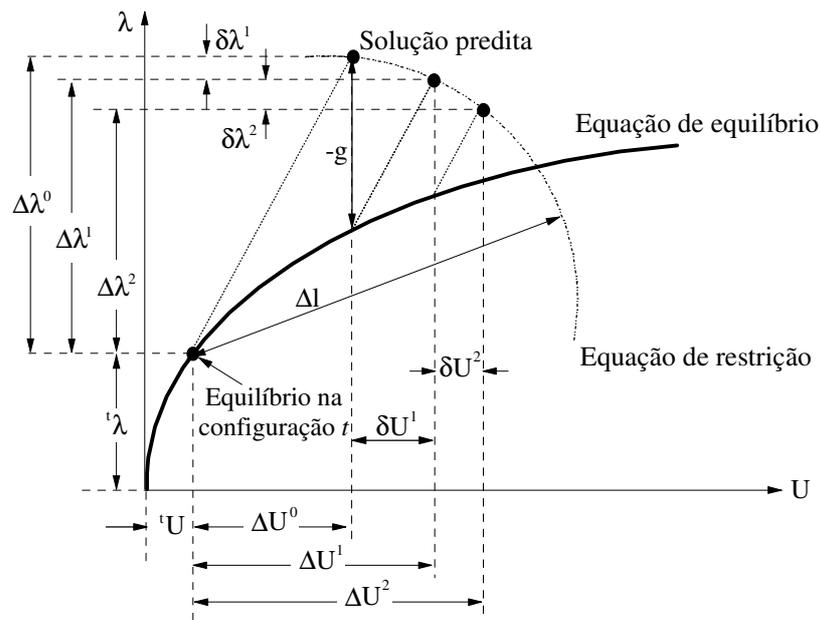


Figura 3.3 Solução incremental-iterativa

Com a definição de  $\Delta\lambda^0$ , são determinados os deslocamentos nodais incrementais tangenciais,  $\Delta U^0$ , escalonando-se  $\delta U_r$ , ou seja,

$$\Delta U^0 = \Delta\lambda^0 \delta U_r \quad (3.18)$$

Com isso, o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados através do seguinte procedimento:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.19a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.19b)$$

onde  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga, como indicado na Figura 3.3.

As Equações (3.19a) e (3.19b) nem sempre satisfazem a condição de equilíbrio do sistema. Portanto, novas iterações são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio. Os procedimentos numéricos envolvendo estratégias de iterações que permitem variações do parâmetro de carga serão também estudados no próximo capítulo.

### 3.3.2 Ciclo de Iterações

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante o ciclo iterativo. Porém, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagens pelos pontos limites e/ou pontos de bifurcação, é necessário que se permita a variação de  $\lambda$  a cada iteração. Dessa forma, seguindo a técnica geral de solução inicialmente proposta por Batoz e Dhatt (1979), onde a variação do parâmetro de carga é permitida, pode-se considerar que a mudança nos deslocamentos nodais é governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{g}$  representa, na terminologia da programação matemática, o vetor gradiente que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido.

Como indicado na equação anterior, tem-se que  $\mathbf{g}$  é função dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total,  $\lambda^k$ , que agora também é uma incógnita escrita como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.21)$$

onde  $\delta\lambda^k$  é a correção do parâmetro de carga. Substituindo (3.21) em (3.20), chega-se a:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\left[ \mathbf{F}_i^{(k-1)} + \mathbf{F}_{ps}^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r \right] \quad (3.22)$$

na qual  $\mathbf{F}_i$  representa o vetor das forças internas e o produto  $\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r$  caracteriza o vetor total das forças externas que atuaram na última iteração. O vetor  $\mathbf{F}_{ps}$  surge em função da correção de esforços internos necessária quando a superfície que define o critério de resistência do sistema estrutural é violada. Para a análise no regime elástico, esse vetor é nulo. Os termos  $k$  e  $k - 1$  referem-se, respectivamente, às iterações corrente e anterior.

A equação anterior pode ainda ser escrita como sendo:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k\mathbf{F}_r \quad (3.23)$$

que é a equação procurada para se trabalhar durante o ciclo iterativo.

Da Equação (3.23), os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas, obtendo-se:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.24)$$

onde:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.25a)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r \quad (3.25b)$$

Aqui,  $\delta\mathbf{U}_g$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante e  $\delta\mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ .

Caso seja adotado o método de Newton-Raphson modificado,  $\delta\mathbf{U}_r$ , na iteração corrente  $k$  será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\delta\mathbf{U}_r$  calculado mediante a Equação (3.17). Esse parâmetro não se modifica durante as iterações, visto que  $\mathbf{K}$  permanece inalterada. Já a correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , única incógnita da Equação (3.24), é determinada seguindo uma das estratégias de iteração que serão apresentadas no Capítulo 4. Com a determinação de  $\delta\lambda^k$ , retorna-se à Equação (3.24) para a obtenção da correção dos deslocamentos.

Com a obtenção da solução iterativa,  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema através das seguintes relações:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.26a)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.26b)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.27a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.27b)$$

Em qualquer processo iterativo, a solução não é exata, ou seja, é calculada aproximadamente. Portanto, alguns limites de tolerância devem ser fixados para a interrupção desse processo. O processo iterativo termina, indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise, quando um dos dois, ou os dois critérios de convergência apresentados a seguir forem respeitados. O primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como segue:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.28)$$

onde o numerador representa a norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior; o denominador é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo, e  $\zeta$  é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

O segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado ao final da iteração corrente. Ele é definido como:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.29)$$

na qual, agora, o numerador é a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais); e o denominador é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e  $\zeta$  segue a mesma definição do critério anterior.

A Tabela 3.1 ilustra os procedimentos descritos nesta seção.

**Tabela 3.1** Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

- 
1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise. Vale ressaltar que, para os elementos com ligações semi-rígidas, o comportamento momento-rotação da ligação deve ser fornecido (veja modelos matemáticos no Apêndice B)
  2. Define o vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
  3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ :  ${}^t\mathbf{U}$  e  ${}^t\lambda$
  4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:**  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ 
    - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c, \boldsymbol{\Psi})$  (Veja o Capítulo 4)
    - 4b. Resolve:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
    - 4c. Define  $\Delta\lambda^0$  usando uma estratégia de incremento de carga (Veja o Capítulo 4)
    - 4d. Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
    - 4e. Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$   
 ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
  5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:**  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
    - 5a. Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$  (Veja o Capítulo 4)
    - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:  

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - \left( {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} + {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_{ps}^{(k-1)} \right)$$

Obs.: O vetor  $\mathbf{F}_{ps}$  é nulo no regime elástico
    - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças (Equação 3.28) ou em forças e deslocamentos conjuntamente (Equação 3.29)  
**SIM** (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
    - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$
    - 5e. Obtém a correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , usando uma estratégia de iteração (Veja o Capítulo 4)
    - 5f. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$ , com:  

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$$
 e  $\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$
    - 5g. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente  
**SIM** (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*  
**SIM** (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
    - 5h. Atualiza o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :  
      - a) *Incremental:*  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
      - b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
    - 5i. Retorna ao passo 5
  6. Atualiza as variáveis  $\mathbf{S}_c$  e  $\boldsymbol{\Psi}$  e outras que forem necessárias
  7. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

# Capítulo 4

## Formulações para Análise Estática Não Linear

### 4.1 Introdução

No Capítulo 3 foi apresentada uma metodologia generalizada para análise estática não linear de estruturas metálicas reticuladas planas. O objetivo deste capítulo é particularizar a formulação generalizada e mostrar como todos os efeitos (não linearidade geométrica, inelasticidade do aço e flexibilidade da ligação) são considerados de forma isolada ou conjuntamente nas formulações de elementos finitos desenvolvidas.

Procurando fornecer diferentes opções de análise do sistema estrutural, várias formulações foram desenvolvidas. Porém, antes de apresentá-las, na Seção 4.2, as estratégias de incremento de carga e de iteração indispensáveis para se resolver o problema estrutural estático não linear são mostradas. Em seguida, as técnicas que simulam os efeitos da não linearidade geométrica são apresentadas. Na Seção 4.4, tem-se a metodologia usada na modelagem de uma estrutura com ligações semi-rígidas. As formulações que consideram a plastificação do material são estudadas na Seção 4.5, e, finalmente, na Seção 4.6, uma extensão do estudo realizado na seção anterior é feita para considerar também a flexibilidade da ligação.

A aplicação e a validação de cada uma das formulações estudadas neste capítulo serão feitas no capítulo seguinte com a análise de algumas estruturas planas.

Nas equações a serem desenvolvidas neste capítulo, com exceção daquelas da Seção 4.2, os subscritos  $i$  e  $j$ , quando não informados, se referirão às extremidades do elemento finito.

## 4.2 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração

Uma forma típica de representação gráfica da resposta não linear de uma estrutura consiste no traçado de uma curva carga-deslocamento (ou carga-rotação), onde a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento de um nó selecionado, e a ordenada representa o parâmetro de carga. Essa curva é chamada de trajetória de equilíbrio e cada um de seus pontos representa uma configuração de equilíbrio estático do sistema estrutural.

Foi mostrado no Capítulo 3 que a obtenção do equilíbrio utilizando-se o Método dos Elementos Finitos depende da solução do sistema de equações definidos pela Equação (3.16). Como a matriz de rigidez do sistema,  $\mathbf{K}$ , apresenta, no caso geral, uma dependência não linear dos deslocamentos nodais, das forças internas em cada elemento, da rigidez da ligação e do parâmetro que avalia a plastificação da seção transversal, a solução do sistema de equações só é obtida através de técnicas numéricas onde as mais utilizadas combinam procedimentos incrementais e/ou iterativos.

As respostas de problemas estruturais com não linearidades geométricas e físicas, como os que serão apresentados neste trabalho, podem se caracterizar pela presença de pontos críticos, tais como: pontos limites com os fenômenos de *snap-through* (pontos limite de carga) e *snap-back* (pontos limites de deslocamento), e de bifurcação ao longo da trajetória de equilíbrio. Esses fenômenos, exemplificados na Figura 4.1, em geral, levam a uma ineficiência dos métodos de solução numérica tradicionais.

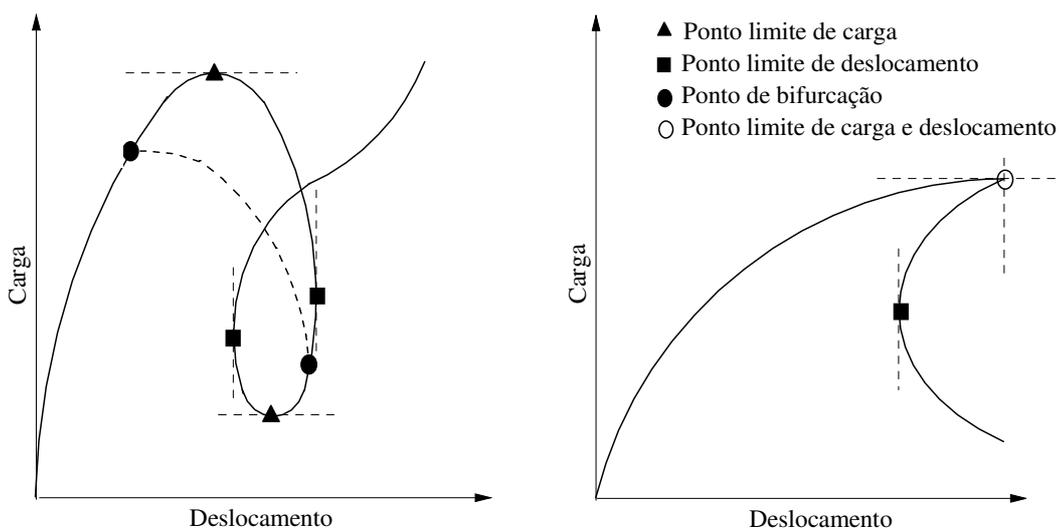


Figura 4.1 Trajetórias de equilíbrio (Silveira, 1995)

Grande parte dos métodos de solução para essa classe de problemas baseia-se no método de Newton-Raphson (Owen e Hinton, 1980; Cook *et al.*, 1989; Bathe, 1996), que na sua formulação clássica não é capaz de ultrapassar os pontos limites. Isso acontece devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente que se torna singular nesses pontos. O método de Newton-Raphson modificado é, também, bastante popular e vem sendo usado em muitas aplicações (Zienkiewicz e Taylor, 1991). Porém, assim como a técnica padrão, ele é incapaz de ultrapassar os pontos limites que possam surgir ao longo da trajetória de equilíbrio. A diferença básica em relação às duas variantes do método de Newton-Raphson é que, no modificado, a matriz de rigidez não é continuamente atualizada ao longo do processo iterativo de solução em cada passo de carga.

Para contornar esses problemas de convergência, inerentes a uma análise não linear, muitos procedimentos numéricos têm sido propostos. Associados às iterações usuais do tipo Newton, eles permitem obter respostas da estrutura além dos pontos limites. Alguns desses procedimentos podem ser destacados. Wright e Gaylord (1968) desenvolveram a técnica de somar molas fictícias à matriz de rigidez. Com esse artifício, a matriz de rigidez tangente permanece positiva definida ao longo de toda a trajetória de equilíbrio. Utilizando um "parâmetro de rigidez corrente" como indicador do grau de não linearidade do sistema, Bergan *et al.* (1978) e Bergan (1980) suprimiram as iterações de equilíbrio nas zonas críticas da trajetória até os pontos limites serem atravessados. Batoz e Dhatt (1979) apresentaram uma técnica na qual o ciclo iterativo é realizado não à carga constante, mas a deslocamento constante. Para isso, eles selecionaram uma componente do vetor de deslocamentos nodais que foi tomada constante durante todo o processo iterativo. Estratégia semelhante foi sugerida por Wempner (1971), Riks (1972; 1979) e Powell e Simons (1981). Esses trabalhos contribuíram, de forma independente, com um método capaz de determinar pontos limites de carga e de deslocamento, além de traçar as trajetórias associadas a esses pontos. Como estratégia numérica desse método, tem-se a introdução de um parâmetro especial controlando o progresso dos cálculos ao longo do caminho de equilíbrio. Em termos geométricos, a restrição de controle selecionada corresponde ao comprimento do arco da trajetória a ser computada. Esse comprimento de arco é introduzido na análise por meio de uma equação auxiliar ou equação de restrição. Os aspectos gerais dos métodos e técnicas mencionados anteriormente, suas vantagens e desvantagens, e suas formulações matemáticas, foram documentados por Yang e Shieh (1990), Clarke e Hancock (1990), Crisfield (1991), entre outros.

Esta seção apresenta as estratégias de incremento de carga e de iteração usadas como ferramentas para a obtenção de informações fundamentais numa análise não linear, implementadas no sistema computacional. O traçado da trajetória de equilíbrio da estrutura indicando regiões de ganho e de perda de rigidez e, por conseguinte, a determinação de pontos limites de carga (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*) são os objetivos desejados com o uso dessas técnicas. Além desses, a indicação, através do uso de imperfeições geométricas aleatórias, suficientemente pequenas, de possíveis pontos de bifurcação. De acordo com Alves (1993a; 1993b), a consideração de pequenas imperfeições aleatórias é uma estratégia numérica bastante eficiente para detectar pontos de bifurcação ao longo da trajetória não linear de equilíbrio. Esse procedimento é justificado tanto em termos da Teoria Geral da Estabilidade Elástica (Koiter, 1970; Thompson e Hunt, 1973) como através da Teoria da Catástrofe (Thom, 1975; Poston e Stewart, 1978). As duas teorias mostram que imperfeições aleatórias infinitesimais, apesar de destruírem os pontos de bifurcação, geram um caminho de equilíbrio que, no início, praticamente coincide com o caminho fundamental de equilíbrio da estrutura perfeita. Ao atingir a vizinhança do primeiro ponto de bifurcação, onde a trajetória fundamental se torna instável, passa, então, a seguir a trajetória pós-crítica de equilíbrio.

Na Seção 4.2.1, as estratégias de incremento de carga são detalhadas; na seção seguinte, os critérios usados na definição do sinal desse incremento são mostrados e, na Seção 4.2.3, apresentam-se as estratégias de iteração implementadas no sistema computacional apresentado.

#### **4.2.1 Estratégias de Incremento de Carga**

No capítulo anterior, foi enfatizado que a definição da solução incremental inicial tem como procedimento fundamental a definição do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . A seleção automática da magnitude do incremento desse parâmetro é importante, e deve retratar o grau de não linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Dessa forma, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes critérios: gerar grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e, de forma contrária, fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear, e também ser capaz de definir o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados. Entre as estratégias de incremento automático do parâmetro de carga

encontradas na literatura, aquelas que satisfazem os requerimentos anteriores e foram estudadas neste trabalho são descritas a seguir.

### 1. Estratégias Baseadas na Relação $I_d/I_{p,a}$

Crisfield (1981) e Ramm (1981; 1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseadas no emprego da relação:

$$\left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^\xi \quad (4.1)$$

na qual  $I_d$  é o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente, especificado pelo usuário do programa;  $I_{p,a}$  é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse, e  $\xi$  é um expoente cujo valor encontra-se usualmente entre 0.5 e 1.0.

As estratégias baseadas na relação (4.1) que foram implementadas no sistema computacional deste trabalho são: incremento direto do parâmetro de carga, incremento do comprimento de arco, incremento de uma componente de deslocamento e incremento do trabalho externo. Tais estratégias serão agora detalhadas.

#### a. Incremento Direto do Parâmetro de Carga

Usando um esquema de solução incremental juntamente com o método convencional de Newton-Raphson, Crisfield (1981) adotou o seguinte procedimento para calcular o parâmetro de carga inicial:

$$\Delta\lambda^0 = \Delta\lambda_{p,a}^0 \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

onde  $\Delta\lambda_{p,a}^0$  e  $\Delta\lambda^0$  caracterizam os incrementos iniciais nos passos de carga anterior e corrente, respectivamente.

Comparando as Equações (4.1) e (4.2), percebe-se que foi assumido para  $\xi$  o valor 1/2, seguindo sugestão de Ramm (1982).

Se for utilizada uma estratégia de iteração que permita a variação do parâmetro de carga, a expressão:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_{p,a}^0 \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

deve ser usada para o incremento automático do parâmetro de carga. Na Seção 4.2.2 são descritos os critérios para escolha do sinal correto dessa expressão.

*b. Incremento do Comprimento de Arco*

Como proposto em Crisfield (1991), a relação (4.1) pode ser empregada na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente. Sendo assim, tem-se:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

onde  $\Delta l_{p,a}$  e  $\Delta l$  representam os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no corrente (incógnita), respectivamente.

Através da Equação (4.4) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial, ou seja,

$$\left( \Delta\mathbf{U}^0 \right)^T \Delta\mathbf{U}^0 = \Delta l^2 \quad (4.5)$$

chega-se, facilmente, usando a Equação (3.18), definida no capítulo anterior, em (4.5), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r}} \quad (4.6)$$

Se a equação de restrição proposta por Riks (1972), definida como:

$$\Delta\mathbf{U}^{0T} \Delta\mathbf{U}^0 + \left( \Delta\lambda^0 \right)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (4.7)$$

for imposta à solução incremental predita, obtém-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (4.8)$$

É importante destacar que o usuário de um programa de elementos finitos normalmente tem alguma ideia do incremento do parâmetro de carga no primeiro passo de carga para uma dada análise. Assim, uma vez especificado esse valor, a técnica fornecida em (4.3) pode levar a um cálculo automático dos incrementos iniciais nos passos de cargas seguintes. Entretanto, em geral, o usuário não tem informação a respeito da magnitude a ser considerada para o incremento de partida do comprimento de arco. Para resolver esse problema, no programa desenvolvido neste trabalho, o usuário deve especificar para o primeiro passo de carga, o valor de  $\Delta\lambda^0$  como dado de entrada. Esse valor, em seguida, é usado para calcular, nesse mesmo passo de carga, os deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{U}^0$  através da Equação (3.18). Substituindo-se, então,  $\Delta\mathbf{U}^0$  na Equação (4.5) ou (4.7) chega-se a  $\Delta l_1$ . Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente  $\Delta l$  através de (4.4).

*c. Incremento de uma Componente de Deslocamento Selecionada*

Caso seja adotado o método de controle de deslocamento, o incremento de uma dada componente do vetor de deslocamentos da estrutura deve ser escolhido com o objetivo de limitar o incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Como na técnica do comprimento de arco, pode-se calcular o incremento de uma componente  $j$  do vetor de deslocamentos para o passo corrente de carga de acordo com:

$$\Delta U_j = \Delta U_{j(p,a)} \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

onde  $\Delta U_{j(p,a)}$  e  $\Delta U_j$  são os incrementos da componente  $j$  do vetor de deslocamentos no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente. Tem-se, então, que a componente  $j$  da solução incremental predita,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , deve satisfazer à seguinte relação:

$$\Delta\mathbf{U}^0(j) = \Delta U_j \quad (4.10)$$

Usando-se (3.18) e (4.10), chega-se à expressão procurada para  $\Delta\lambda^0$ , ou seja:

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\Delta U_j}{\delta\mathbf{U}_r(j)} \quad (4.11)$$

Aqui, também, o incremento inicial de  $\lambda$  para o primeiro passo de carga é um dado de entrada e deve ser fornecido pelo usuário. Com esse valor, consegue-se obter o

incremento inicial da componente  $j$  do vetor de deslocamentos, através da Equação (4.10). Para os outros passos de carga o processo é automatizado com o uso de (4.9).

#### *d. Incremento do Trabalho Externo*

Uma técnica baseada no incremento do trabalho externo pode ser adotada para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. Como nas seções anteriores, o incremento do trabalho externo para o passo de carga corrente pode ser expresso por:

$$\Delta W = \Delta W_{p,a} \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (4.12)$$

onde  $\Delta W_{p,a}$  e  $\Delta W$  são os incrementos do trabalho externo no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente.

Se o incremento de trabalho para o passo de carga corrente é dado por:

$$\Delta W = \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r \quad (4.13)$$

tem-se, então, que  $\Delta \lambda^0$  é escrito como:

$$\Delta \lambda^0 = \frac{\Delta W}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r} \quad (4.14)$$

Mais uma vez, a análise é inicializada especificando-se o valor do incremento do parâmetro de carga no primeiro passo incremental e, através da Equação (4.13), calcula-se o incremento do trabalho externo para o primeiro passo de carga. Para os demais passos de carga, a Equação (4.12) é empregada.

## *2. Estratégia Baseada no Parâmetro de Rigidez GSP*

Com as estratégias apresentadas anteriormente, foi possível observar que, dependendo da forma da restrição imposta, diferentes expressões para obtenção de  $\Delta \lambda^0$  podem ser obtidas. Yang e Kuo (1994) propuseram, adicionalmente, que a seguinte equação de restrição deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não linear (solução predita e ciclo de iterações):

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1 \delta \lambda^k = H_k \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz cujos elementos são constantes,  $k_1$  também é constante e  $H$  é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo). Em função de valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

A equação de restrição anterior, juntamente com a Equação (3.23) que é reescrita abaixo:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = \delta \lambda^k \mathbf{F}_r - \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (4.16)$$

formam um sistema de equações com  $N+1$  incógnitas, onde  $N$  se refere à dimensão do vetor de deslocamentos e o 1, ao parâmetro de carga  $\lambda$ . Essas duas equações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro de carga (Yang e Kuo, 1994):

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_r^k + k_1} \left( H_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (4.17)$$

Seguindo a sugestão de Yang e Shieh (1990) para os valores de  $\mathbf{C}$  e  $k_1$ , ou seja:

$$\mathbf{C} = {}^t \delta \mathbf{U}_r \Delta \lambda^0 \text{ e } k_1 = 0 \quad (4.18)$$

onde  ${}^t \delta \mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior, chega-se a uma nova expressão para  $\delta \lambda$ , ou seja:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left( H_k - \Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (4.19)$$

A solução incremental inicial  $\Delta \lambda^0$  é, então, obtida fazendo-se, na equação anterior,  $k = 0$ ,  $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$ ,  $\delta \mathbf{U}_g^0 = 0$  e  $\delta \mathbf{U}_r^0 = \delta \mathbf{U}_r$ . Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{{}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (4.20)$$

O valor do parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, deslocamento generalizado) pode ser definido usando a equação anterior e assumindo que, no primeiro passo de carga, se conhece o valor de  $\Delta \lambda^0$  (valor fornecido pelo analista). Assim, tem-se:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 ({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r) \quad (4.21)$$

Com a substituição de (4.21) em (4.20), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r}} \quad (4.22)$$

Adicionalmente, a consideração do parâmetro de rigidez generalizado do sistema (*Generalized Stiffness Parameter*, GSP) definido através da relação:

$$\text{GSP} = \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r} \quad (4.23)$$

permite rescrever (4.22) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (4.24)$$

O critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão anterior baseia-se no sinal do parâmetro GSP. Tal critério será apresentação na Seção 4.2.2 a seguir. Como já destacado, para o primeiro incremento,  $\Delta\lambda^0$  é um valor prescrito e  $\text{GSP} = 1$ .

Cabe informar que as expressões (4.8), (4.11) e (4.14) podem ser obtidas diretamente da Equação (4.19), fazendo as seguintes considerações:

i. Controle do comprimento de arco:

$$k = 0, k_I = \Delta\lambda^0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, \mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \text{ e } H_0 = \Delta l^2$$

ii. Controle de uma componente de deslocamento selecionada:

$$k = 0, k_I = 0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, \mathbf{C}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\} \text{ e } H_0 = \Delta u_j$$

iii. Controle do trabalho externo:

$$k = 0, k_I = 0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, \mathbf{C} = \mathbf{F}_r \text{ e } H_0 = \Delta W$$

#### 4.2.2 Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga

Nas Equações (4.3), (4.6), (4.8) e (4.24), observa-se que o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal na fase predita é de grande

importância para o sucesso das estratégias na obtenção da trajetória de equilíbrio. Este trabalho segue um dos seguintes procedimentos para a escolha do sinal de  $\Delta\lambda^0$ :

- *Critério 1*

Segundo Crisfield (1991), considera-se o sinal positivo sempre que a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  (no início do incremento) for positiva definida. Em outra definição equivalente, Crisfield sugere que o sinal de  $\Delta\lambda^0$  deva seguir aquele do incremento anterior, exceto quando o determinante da matriz de rigidez tangente mudar de sinal. Porém, como relatado em Meek e Tan (1984), esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos. Para essa situação é aconselhável adotar o critério descrito a seguir.

- *Critério 2*

Os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados, como sugerido por Bergan *et al.* (1978), checando o sinal do incremento do trabalho externo dado pela Equação (4.13). Caso o sinal do incremento do trabalho externo corrente seja diferente daquele do passo de carga anterior, modifica-se o sinal de  $\Delta\lambda^0$ . Em Clarke e Hancock (1990), é comentado que esse critério pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento.

- *Critério 3*

De acordo com Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende apenas dos vetores  ${}^i\delta U_r$  (passo de carga anterior) e  $\delta U_r$  (passo de carga corrente). O parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

### **4.2.3 Estratégias de Iteração**

A determinação do parâmetro de carga iterativo,  $\delta\lambda$ , é função de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição imposta ao problema. É importante destacar que não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de problemas fortemente não lineares com igual eficiência. Procurando, então, uma maior flexibilidade na escolha da estratégia de solução, foram implementadas no programa computacional desenvolvido neste trabalho os seguintes procedimentos iterativos: carga constante; comprimento de arco constante; deslocamento constante; trabalho externo constante; norma mínima dos deslocamentos

residuais; resposta ponderada constante e iteração baseada no deslocamento generalizado. As próximas seções destinam-se aos detalhes dessas estratégias.

### 1. *Iteração a Carga Constante*

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga, no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Para esse caso, tem-se que a equação de restrição se reduz à expressão trivial:

$$\delta\lambda^k = 0 \quad (4.25)$$

Dessa forma a Equação (3.24) é reduzida aos deslocamentos fornecidos pelo método convencional de Newton-Raphson. Nesse caso, após o ponto limite, o incremento de carga não proporciona o retorno à trajetória de equilíbrio, sendo a estratégia útil, portanto, para análise até o ponto limite.

### 2. *Iteração a Comprimento de Arco Constante*

Os estudos originalmente realizados por Riks (1972) e Wempner (1971) propiciaram o surgimento de diversas estratégias que impõem, em cada iteração, a condição de comprimento de arco constante. As técnicas mais conhecidas e que serão apresentadas a seguir são: comprimento de arco esférico, cilíndrico e linear.

#### *a. Comprimento de Arco Esférico*

Crisfield (1981; 1991) sugeriu inicialmente, baseando-se na Equação (4.7), que a seguinte condição:

$$\left(\Delta\mathbf{U}^k\right)^T \Delta\mathbf{U}^k + \left(\Delta\lambda^k\right)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (4.26)$$

deveria ser respeitada a cada iteração do processo. Nessa equação,  $\Delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k$  representam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais da iteração corrente. A substituição de (3.26b) na Equação (4.26) resulta na equação:

$$A\left(\delta\lambda^k\right)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0 \quad (4.27)$$

onde os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são assim definidos:

$$A = (\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (4.28a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{U}_r^k)^T (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) + 2\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (4.28b)$$

$$C = (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)^T (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) + (\Delta \lambda^{(k-1)})^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2 \quad (4.28c)$$

Com a resolução de (4.27), chega-se a dois valores de  $\delta \lambda$ ,  $\delta \lambda_1$  e  $\delta \lambda_2$ , de forma que deve-se escolher entre as soluções:

$$\Delta \mathbf{U}_1^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda_1^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (4.29a)$$

$$\Delta \mathbf{U}_2^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda_2^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (4.29b)$$

a que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior,  $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ . Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado.

Um procedimento bastante simples a ser seguido, e usado neste trabalho, consiste em achar o menor ângulo entre  $\Delta \mathbf{U}^k$  e  $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ . Isso equivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{U}^k}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^k \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_r^k}{\Delta l^2} \quad (4.30)$$

A Equação (4.27) poderá ter raízes imaginárias, se  $B^2 - 4AC < 0$ . Isso ocorrerá quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto (Meek e Tan, 1984).

#### *b. Comprimento de Arco Cilíndrico*

Crisfield (1981) e Ramm (1981; 1982) observaram através de vários exemplos numéricos que, em problemas práticos com número elevado de variáveis, o parâmetro de carga na Equação (4.26) tinha pequeno efeito. Crisfield, então, propôs que, a cada iteração, a seguinte equação fosse satisfeita:

$$(\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k = \Delta l^2 \quad (4.31)$$

Substituindo (3.26b) na equação anterior, chega-se novamente a uma equação quadrática em  $\delta\lambda$ , que pode ser escrita através da Equação (4.27). Entretanto, os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm, agora, o seguinte aspecto:

$$A = (\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k \quad (4.32a)$$

$$B = 2(\delta\mathbf{U}_r^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) \quad (4.32b)$$

$$C = (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) - \Delta l^2 \quad (4.32c)$$

A escolha entre as raízes  $\delta\lambda_1$  e  $\delta\lambda_2$  segue o mesmo critério adotado para o comprimento de arco esférico.

### c. Comprimento de Arco Linear

A restrição de comprimento de arco constante (4.7) foi utilizada por Riks (1972; 1979) apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . No processo iterativo subsequente ( $k \geq 1$ ), a equação de restrição usada para calcular  $\delta\lambda$  é obtida fazendo com que a solução iterativa ( $\delta\mathbf{U}^k, \delta\lambda\mathbf{F}_r$ ) seja ortogonal à solução incremental predita ( $\Delta\mathbf{U}^0, \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$ ), ou seja:

$$\delta\mathbf{U}^{kT} \Delta\mathbf{U}^0 + \delta\lambda^k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.33)$$

A substituição da Equação (3.24) em (4.33) fornece a expressão procurada para que se determine da correção do parâmetro de carga:

$$\delta\lambda^k = - \frac{(\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\left( (\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_r^k + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \right)} \quad (4.34)$$

De acordo com Silveira (1995), do ponto de vista geométrico, o esquema proposto por Riks pode ser visto como iterações em planos normais à linha tangente varrida por ( $\Delta\mathbf{U}^0, \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$ ).

Um procedimento iterativo alternativo a esse usado por Riks foi sugerido por Ramm (1981; 1982). Ele propôs basicamente a substituição da solução incremental predita na Equação (4.33) pela solução "secante" ( $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}, \Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r$ ). Isso garante que as correções ( $\delta\mathbf{U}^k, \delta\lambda^k\mathbf{F}_r$ ) sejam ortogonais à solução incremental da iteração anterior, ou seja:

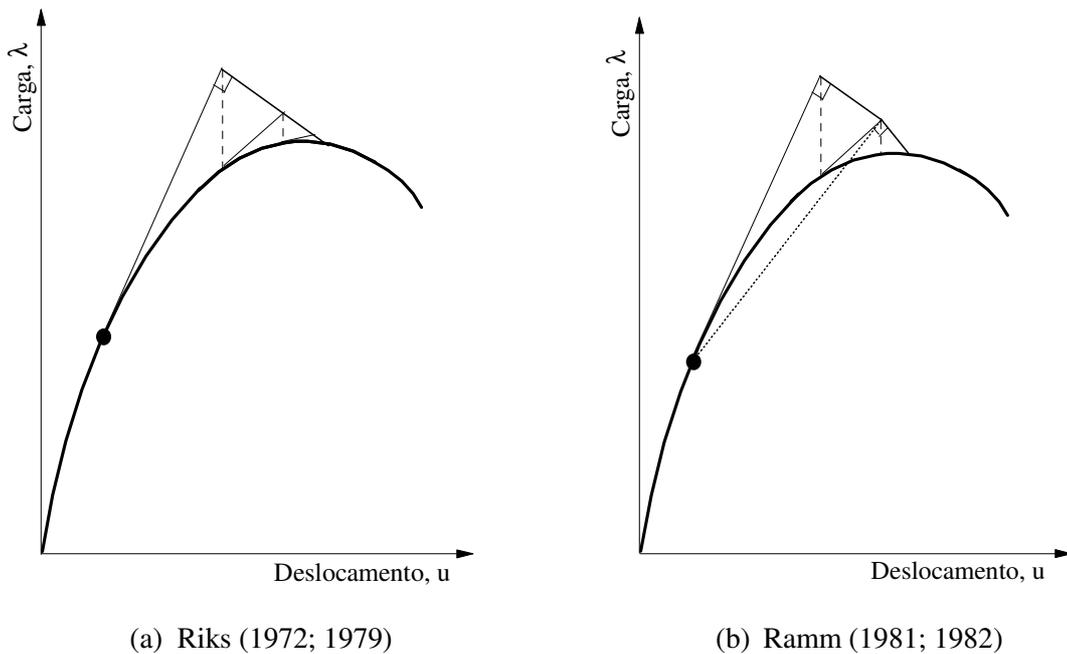
$$\delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.35)$$

Mais uma vez, substituindo (3.24) na equação anterior, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \delta \mathbf{U}_g^k}{(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \delta \mathbf{U}_r^k + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \quad (4.36)$$

Nesse caso, o hiperplano de restrição é normal a uma secante que passa pela solução incremental da iteração anterior, e não mais à tangente da trajetória de equilíbrio. Ao contrário da proposta original de Riks (1972), o plano normal é atualizado em cada iteração. A Figura 4.2 ilustra as estratégias sugeridas por esses autores.

Rodrigues (2000) observou que, embora a versão linearizada seja mais fácil de implementar, ela não é tão robusta quanto a versão não linear (ou quadrática) da técnica do controle do arco constante, que é mais estável e converge mais facilmente.



**Figura 4.2** Comprimento de arco linearizado

### 3. Iteração a Deslocamento Constante

Batoz e Dhett (1979) desenvolveram uma estratégia de iteração onde uma dada componente do vetor de deslocamentos nodais incrementais é escolhida como variável independente, ao invés do parâmetro de carga usual. Durante o ciclo iterativo, essa componente de deslocamento é definida como uma quantidade que é especificada de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{U}^k(j) = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{U}(j) = \Delta U_j \quad (4.37)$$

onde  $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j)$  e  $\delta \mathbf{U}(j)$  são, respectivamente, as componentes  $j$  dos vetores  $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$  e  $\delta \mathbf{U}$ , e  $\Delta U_j$  é o valor prescrito para a componente  $\Delta \mathbf{U}^k(j)$ . Substituindo, então, (3.24) na equação anterior, obtém-se:

$$\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) = \Delta U_j \quad (4.38)$$

donde chega-se facilmente à seguinte expressão:

$$\delta \lambda^k = \frac{\Delta U_j - \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) - \delta \mathbf{U}_g^k(j)}{\delta \mathbf{U}_r^k(j)} \quad (4.39)$$

Por outro lado, Powell e Simons (1981) estabeleceram uma estratégia incremental-iterativa baseada nos seguintes procedimentos: na solução incremental predita, uma dada componente  $j$  do vetor de deslocamentos é acrescida de uma certa quantidade especificada. Essa componente, entretanto, é mantida constante durante as iterações subsequentes, de modo que a seguinte equação de restrição seja respeitada:

$$\delta \mathbf{U}^k(j) = \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) = 0 \quad (4.40)$$

Resolvendo, então, a equação acima para  $\delta \lambda$ , chega-se a:

$$\delta \lambda^k = -\frac{\delta \mathbf{U}_g^k(j)}{\delta \mathbf{U}_r^k(j)} \quad (4.41)$$

#### 4. *Iteração a Trabalho Externo Constante*

Como caso particular de um procedimento geral proposto por Powell e Simons (1981), tem-se a condição em que o incremento de trabalho externo deve permanecer constante ao longo do processo iterativo. Sabe-se que, para o acréscimo de carga  $\delta \lambda^k \mathbf{F}_r$ , a variação do trabalho externo é dada por:

$$\delta W = \delta \lambda^k \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U} \quad (4.42)$$

Com a restrição  $\delta W = 0$  e a substituição de (3.24) em (4.42), chega-se à correção desejada para o parâmetro de carga, ou seja:

$$\delta\lambda^k = -\frac{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (4.43)$$

### 5. Iteração a Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração bastante eficiente definida como o Método dos Deslocamentos Residuais (MDR). Nessa estratégia, ao invés de se usarem restrições geométricas e de energia como nas seções anteriores, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. Vale ressaltar que esse é o objetivo principal do ciclo iterativo.

Para implementar o MDR, deve-se reescrever, numa dada iteração  $k$ , a componente  $j$  do vetor de deslocamentos  $\delta\mathbf{U}$ , na forma:

$$e_j = \delta\mathbf{U}^k(j) = \delta\mathbf{U}_g^k(j) + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k(j) \quad (4.44)$$

onde  $e_j$  é considerado como um dado erro. Chan então propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de  $m$  graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d\left(\sum_{j=1}^m (e_j)^2\right)}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (4.45)$$

A equação anterior é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada como:

$$\frac{d\left[(\delta\mathbf{U}^k)^T \delta\mathbf{U}^k\right]}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (4.46)$$

Substituindo, então, a Equação (3.24) em (4.46) e, depois, derivando a expressão obtida com relação a  $\delta\lambda$ , chega-se a:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (4.47)$$

## 6. Iteração a Resposta Ponderada Constante

Gierlinski e Graves Smith (1985) desenvolveram uma metodologia geral de iteração capaz de englobar, como casos particulares, as estratégias propostas por Riks (1979), Powell e Simons (1981) e Crisfield (1991). Essa metodologia baseia-se no fato de que a resposta da estrutura pode controlar tanto a seleção do incremento inicial de carga como o ciclo iterativo responsável pela restauração do equilíbrio. Dessa forma, foi estabelecido um critério adequado de medida da resposta estrutural, função escalar de  $\mathbf{U}$  e  $\lambda \mathbf{F}_r$ , definido por:

$$L^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{U} + \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.48)$$

onde  $L$  representa o comprimento do vetor resposta ponderada:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

com  $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \mathbf{G}^{1/2}$  e  $\bar{\mathbf{R}} = \lambda \mathbf{F}_r \mathbf{R} \mathbf{H}^{1/2}$ , sendo  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  matrizes diagonais com dimensão de rigidez e de flexibilidade, respectivamente. Escolhas diferentes de  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  caracterizam formas diferentes de respostas ponderadas,  $L$ , como ilustrado nos exemplos a seguir:

i. Se  $G_{jj} = 1$  e  $H_{jj} = 0$ , tem-se que a Equação (4.48) se transforma em:

$$L^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (4.50)$$

Nota-se que essa equação, na sua forma incremental, caracteriza a estratégia de iteração proposta por Crisfield (1991), expressa pela Equação (4.5).

ii. Uma medida da resposta da estrutura contendo as componentes dos vetores de deslocamento e de carga é obtida introduzindo-se  $G_{jj} = 1$  e  $H_{jj} = 1$ , que leva (4.48) a:

$$L^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{U} + \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (4.51)$$

que genericamente é igual às equações de restrições de comprimento de arco adotadas em Crisfield (1991), Riks (1979) e Ramm (1982).

iii. Os critérios anteriores têm a desvantagem de tratar todos os parâmetros de forma idêntica, mesmo que, em alguns pontos na sequência de carregamento, a estrutura possa ser mais sensível à variação de alguns parâmetros que de outros. Tentando reduzir esse problema, Gierlinski e Graves Smith (1985) procuraram incluir na definição de  $L$  as

componentes da matriz de rigidez tangente inicial. Isso foi efetuado usando-se em (4.48),  $G_{jj} = K_{jj}$  e  $H_{jj} = 1/K_{jj}$ , onde  $K_{jj}$  são os elementos da diagonal principal da matriz de rigidez tangente.

Durante o ciclo iterativo, o incremento na resposta ponderada da estrutura,  $\Delta L$ , de maneira análoga ao comprimento de arco fornecido anteriormente, pode ser expresso para a iteração corrente de acordo com:

$$\Delta L^k = \Delta \mathbf{U}^{kT} \mathbf{G} \Delta \mathbf{U}^k + (\Delta \lambda^k)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.52)$$

Uma estratégia conveniente para se calcular a correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda$ , pode ser, então, estabelecida considerando que, a cada iteração, a variação de  $L$  é nula. Em termos matemáticos, essa restrição é expressa como:

$$\delta \Delta L = \Delta L^k - \Delta L^{(k-1)} = 0 \quad (4.53)$$

onde  $\Delta L^{(k-1)}$  é a medida do incremento da resposta da estrutura na iteração anterior.

Substituindo a Equação (3.26b) em (4.52), e, em seguida, o resultado em (4.53), chega-se mais uma vez a uma equação quadrática em  $\delta \lambda$  (Equação 4.27). Os termos  $A$ ,  $B$  e  $C$  dessa equação são dados por:

$$A = (\delta \mathbf{U}_r^k)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.54a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \mathbf{G} (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) + 2\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.54b)$$

$$C = (2\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{U}_g^k \quad (4.54c)$$

A escolha correta de uma das raízes,  $\delta \lambda_1$  e  $\delta \lambda_2$ , segue o mesmo critério adotado na solução da Equação (4.27). A superfície de interseção produzida pelo método da resposta ponderada é um elipsóide, e a Equação (4.27) representa a interseção do vetor tangente com essa superfície em dois pontos, que correspondem às duas raízes dessa equação (Silveira, 1995).

Em Gierlinski e Graves Smith (1985), é proposta uma modificação na estratégia de iteração anterior para reduzir o esforço numérico no cálculo e escolha do valor de  $\delta \lambda$ . Foi observado que a superfície de interseção elipsoidal poderia ser aproximada por superfícies

planas, com cada segmento ortogonal ao vetor incremental ponderado  $(\Delta\bar{\mathbf{U}}^{(k-1)}, \Delta\bar{\lambda}^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$  no começo de cada iteração, ou seja:

$$(\delta\mathbf{U}^k)^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.55)$$

Introduzindo (3.9) em (4.56), chega-se a:

$$\delta\lambda^k = - \frac{(\delta\mathbf{U}_g^k)^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r} \quad (4.56)$$

### 7. Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado

Com a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP foi mostrado que, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não linear:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 ({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r^k} (H_k - \Delta\lambda^0 ({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_g^k) \quad (4.57)$$

Na obtenção da solução incremental predita ( $k=0$ ), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a Equação (4.21). Durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, ou seja,  $H_k = 0$  para  $k > 0$ . Dessa forma, pode-se rescrever (4.57) como:

$$\delta\lambda^k = - \frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (4.58)$$

que é a expressão para a correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

A Equação (4.17) pode ser usada diretamente na obtenção das expressões (4.26), (4.39) e (4.43) fazendo as seguintes considerações:

i. Controle do comprimento de arco:

$$k \geq 1, k_1 = \Delta\lambda^0, \mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \text{ e } H_k = 0$$

ii. Controle de uma componente de deslocamento selecionada:

$$k \geq 1, k_1 = 0, \mathbf{C}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\} \text{ e } H_k = 0$$

iii. Controle do trabalho externo:

$$k \geq 1, k_I = 0, \mathbf{C} = \mathbf{F}_r \text{ e } H_k = 0$$

### 4.3 Não Linearidade Geométrica

O aprimoramento dos sistemas estruturais e o refinamento das técnicas e ferramentas de análise das estruturas têm sido alvo de constantes pesquisas e contínuas contribuições. A utilização de elementos estruturais com seções transversais mais eficientes, os quais oferecem um alto desempenho em termos de peso mínimo para uma dada resistência, tem merecido uma atenção especial nas pesquisas. Contudo, é suficientemente conhecido que tais elementos de peso otimizado apresentam um comportamento estrutural complexo e, particularmente, são bastante susceptíveis aos fenômenos de instabilidade. A previsão precisa do estado limite de estabilidade é de fundamental importância no projeto desses elementos. Assim, torna-se necessária a utilização de uma teoria consistente que possibilite o conhecimento dos esforços adicionais causados pelos efeitos de segunda ordem, principalmente, no caso de elementos estruturais esbeltos.

A formulação para a análise não linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não linear. A não linearidade geométrica aparece na teoria da elasticidade tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas. As teorias de barras têm um significado importante nas formulações não lineares e, por isso, são brevemente resumidas a seguir:

- *Teoria de Bernoulli-Euler*

Essa teoria é baseada na restrição cinemática de que as seções transversais, perpendiculares ao eixo da barra antes da flexão, continuam planas, indeformadas e perpendiculares ao eixo após a flexão, sendo apropriada para vigas esbeltas.

- *Teoria de Timoshenko*

É uma generalização da teoria de Bernoulli-Euler, considerando a deformabilidade por esforço cortante. A inclusão da deformação por cisalhamento transversal elimina a restrição de perpendicularidade da seção transversal ao eixo da viga, porém, assume-se que as seções planas inicialmente continuam planas após a deformação.

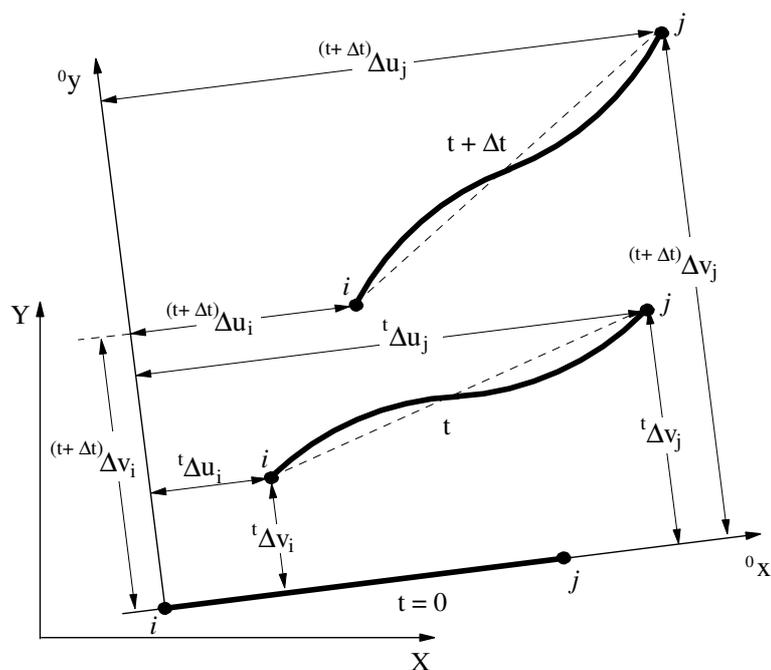
- *Teoria de Saint Venant*

Aplicável a barras sujeitas à torção. Considera-se que cada seção transversal sofre uma rotação de corpo rígido no seu plano e uma deformação por empenamento, fora do seu plano, constante ao longo do comprimento da barra.

- *Teoria de Vlasov*

Trata-se de uma teoria específica para flexo-torção de hastes de paredes delgadas de seção aberta, na qual as seções transversais podem sofrer empenamento diferenciado ao longo do eixo longitudinal. De um modo geral, a teoria de Vlasov é uma combinação da teoria de Bernoulli-Euler com uma generalização da teoria de torção pura de Saint Venant. O efeito de deformabilidade por esforço cortante também pode ser introduzido na teoria de Vlasov.

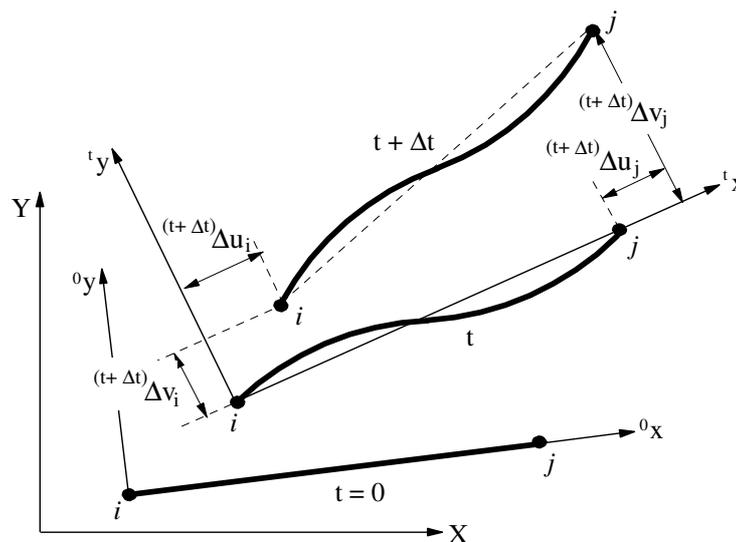
Numa análise não linear incremental, pode-se adotar duas formas de referenciais Lagrangianos: total e atualizado. No referencial Lagrangiano total, mostrado na Figura 4.3, a configuração de referência corresponde ao estado original da estrutura descarregada, ou seja, os deslocamentos são sempre medidos em relação à configuração original indeformada,  $t = 0$  (Crisfield, 1991). Na Figura 4.3,  $X$  e  $Y$  referem-se ao sistema global de coordenadas e,  ${}^0x$  e  ${}^0y$  representam os eixos do sistema cartesiano de coordenadas na configuração inicial,  $t = 0$ .



**Figura 4.3** Referencial Lagrangiano total

Para o referencial Lagrangiano atualizado, a configuração de referência, por sua vez, corresponde à última configuração de equilíbrio,  $t$ , determinada. Assim, numa análise incremental, ao final de cada incremento de carga, o referencial é transferido para a recém calculada configuração de equilíbrio caracterizando um referencial móvel ( ${}^t x, {}^t y$ ), conforme ilustrado na Figura 4.4. Nesse caso, as rotações de corpo rígido são divididas em partes menores e podem ser melhor aproximadas pelas funções de interpolação.

De acordo com Bathe (1996), ambas as formulações incluem todos os efeitos não lineares devido a grandes deslocamentos. A única vantagem em se utilizar uma formulação ao invés da outra está na eficiência numérica. Wong e Tin-Loi (1990) e Alves (1993b) mostraram que a tendência é que os resultados obtidos em referencial Lagrangiano total se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada se distancia da original. Isso se deve aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, e também devido à utilização de funções de interpolação simplificadas. No estudo realizado por Gummadi e Palazotto (1997) foi verificado que, teoricamente, as duas formulações podem ser utilizadas para a solução de problemas com grandes deslocamentos e grandes rotações. No entanto, a formulação em referencial Lagrangiano atualizado mostrou-se eficiente para a análise de vigas e arcos com grandes deslocamentos e rotações, enquanto a total é mais adequada para grandes rotações, se utilizada em conjunto com a abordagem corrotacional.



**Figura 4.4** Referencial Lagrangiano atualizado

Formulações não lineares para elementos de viga-coluna em referenciais Lagrangianos (total e atualizado) foram propostas por vários pesquisadores, dentre os quais Wen e Rahimzadeh (1983), Chajes e Churchill (1987), Goto e Chen (1987), Wong e Tin-Loi (1990), Alves (1993a; 1993b), Torkamani *et al.* (1997) e Torkamani e Sonmez (2001) podem ser citados. Adicionalmente, Yang e Kuo (1994) sugeriram que o vetor de forças internas poderia ser calculado através de duas abordagens: uma usando os deslocamentos naturais incrementais e a outra, através da rigidez externa. Já Pacoste e Eriksson (1995; 1997) introduziram, baseados numa formulação em referencial Lagrangiano total, relações de deformação-deslocamento não lineares através de funções trigonométricas.

Além desses dois referenciais, é usado também um referencial corrotacional. O termo corrotacional é usado em diversos contextos, como por exemplo, para se referir às formulações que utilizam um sistema de eixos ortogonais ligado aos extremos dos elementos (Crisfield, 1991), que se movimenta simultaneamente com as deformações. Nessa formulação, o cálculo da matriz rigidez e do vetor de forças internas é feito no campo dos deslocamentos naturais (ou locais), ou seja, daqueles que realmente causam deformação. Tais deslocamentos se referem ao sistema de coordenadas mencionado anteriormente, que é atualizado a cada passo de carga acompanhando a rotação sofrida pelo elemento.

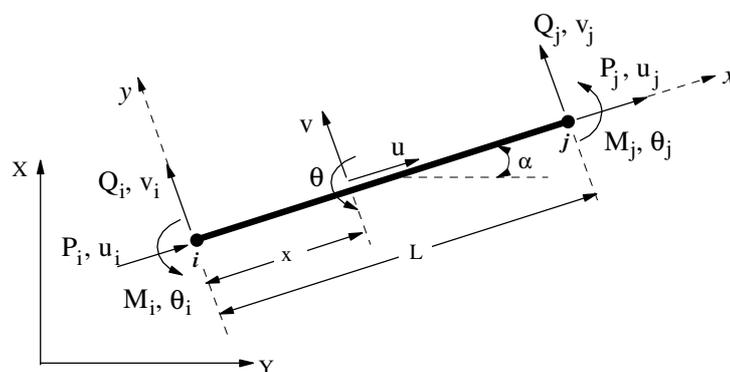
As primeiras formulações desenvolvidas em referencial corrotacional foram apresentadas por Wempner (1969), que propôs uma técnica para estudo de cascas sujeitas a pequenas deformações e grandes deslocamentos, e por Belytscho e Hsieh (1973) que estudaram elementos de viga sujeitos a grandes rotações e propuseram um método baseado em coordenadas curvilíneas. Outras contribuições importantes podem ser destacadas, tais como Crisfield (1990), que apresentou formulações consistentes para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais, Crisfield e Shi (1994) que propuseram uma metodologia para a análise dinâmica não linear de treliças planas, e Pacoste (1998) que fez estudos de instabilidade de cascas utilizando elementos finitos triangulares.

Deve-se salientar que no sistema corrotacional, tanto a formulação Lagrangiana total, quanto a atualizada pode ser empregada (Hsiao *et al.*, 1987).

A não linearidade geométrica surge devido à modificação da geometria da estrutura ao longo do processo de deformação do corpo. Pode ocorrer devido a uma grande deformação, a grandes deslocamentos e rotações da configuração de referência, ou aos dois conjuntamente. Neste trabalho, grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações são supostos.

As formulações geometricamente não lineares para análise de sistemas estruturais reticulados planos aqui utilizadas são baseadas nas formulações propostas por Alves (1993b), Yang e Kuo (1994) e Pacoste e Eriksson (1997). As três formulações desenvolvidas são denotadas por: SOF-1 (*Second-order finite element formulation – 1*), SOF-2 (*Second-order finite element formulation – 2*) e SOF-3 (*Second-order finite element formulation – 3*).

Antes de iniciar o estudo das formulações, a Figura 4.5 mostra o elemento de viga-coluna adotado. Como foi apresentado no capítulo anterior, trata-se de um elemento reticulado plano, limitado pelos nós  $i$  e  $j$ , que se deforma no plano da estrutura. Os deslocamentos e forças nodais do elemento no sistema local de coordenadas são também mostrados.



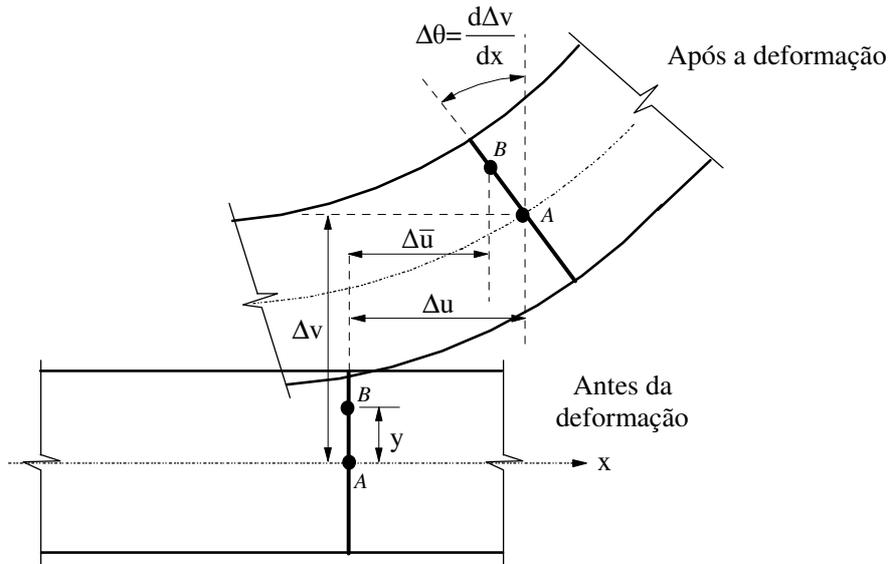
**Figura 4.5** Elemento de viga-coluna adotado

### 4.3.1 Formulação SOF-1

A primeira formulação a ser apresentada segue a metodologia não linear de elementos finitos proposta por Alves (1993b). Essa formulação é baseada na teoria de vigas Bernoulli-Euler. Utiliza-se o referencial Lagrangiano atualizado e o tensor de deformação de Green-Lagrange é considerado na forma completa. Para as deformações axiais incrementais, o tensor de deformação pode ser escrito como:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.59)$$

onde  $\Delta \bar{u}$  é o deslocamento axial de um ponto  $B$  cuja distância da linha neutra é igual a  $y$ , e  $\Delta v$  é o deslocamento vertical desse ponto como mostra a Figura 4.6.



**Figura 4.6** Comportamento da seção transversal

Usando a hipótese de Bernoulli-Euler de que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, tem-se que o deslocamento axial do ponto  $B$  é expresso por:

$$\Delta\bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (4.60)$$

onde  $\Delta u$  é a parcela resultante dos esforços extensionais atuantes, que é constante em cada seção, e a segunda parcela,  $y(d\Delta v/dx)$ , é decorrente dos esforços de flexão. Essa, porém, linearmente variável com a distância da linha neutra,  $y$ .

Usando (4.60), a Equação (4.59) é reescrita como:

$$\Delta\epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta\eta_{xx} \quad (4.61)$$

na qual  $\Delta e_{xx}$  representa a componente linear do tensor de Green-Lagrange dada por:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \quad (4.62)$$

e  $\Delta\eta_{xx}$  representa a componente não linear, que pode ser expressa como:

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.63)$$

Ao se substituir em (4.63) as funções de interpolação, que serão apresentadas na sequência, poderá ser constatado o surgimento de dois problemas. O primeiro deles é que, supondo que o elemento finito adotado sofra movimentos independentes de translação e rotação de corpo rígido, observa-se, para o caso de rotação, o aparecimento de deformações que, obviamente, deveriam ser nulas. Conclui-se, portanto, que as funções de interpolação usadas só descrevem perfeitamente as translações de corpo rígido. As rotações de corpo rígido causam deformações, pois se admite  $\Delta\theta = d\Delta v/dx$  no cálculo das funções de interpolação. Essa hipótese só é válida para o caso de pequenas rotações. O outro problema é que, procurando satisfazer apenas as condições de continuidade, são adotadas, por simplicidade, funções lineares para aproximar o deslocamento axial  $\Delta u$ . Crisfield (1991) mostrou que, rigorosamente, para  $\Delta v$  aproximado por uma função cúbica, era preciso adotar uma aproximação de quinto grau para  $\Delta u$  de modo a balancear as funções. Isso garantiria a representação da deformação de membrana constante e, em particular, seria possível obter deformação de membrana nula associada a problemas de flexão inextensional.

Procurando minorar os efeitos dessas incompatibilidades adotam-se algumas estratégias. Os problemas decorrentes dos movimentos de corpo rígido são suavizados com a atualização do referencial, isto é, adotando-se uma formulação com referencial Lagrangiano atualizado. Assim, na análise incremental, ao final de cada passo de carga, o referencial é transferido para a nova posição ou configuração de equilíbrio recém calculada. O outro procedimento usado para amenizar as incompatibilidades decorrentes dos deslocamentos de corpo rígido é estabelecer o cálculo das forças internas levando em consideração a mudança de geometria do elemento. Para eliminar ou amenizar o efeito de membrana (“*membrane locking*”), devido a funções de forma lineares que serão adotadas para o deslocamento axial  $u$ , o último termo na Equação (4.63) será uniformizado seguindo a sugestão de Crisfield (1991) e Alves (1993b). Esse processo consiste em se considerar um valor médio da parcela  $(d\Delta v/dx)^2$ . Assim,

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx \right] \quad (4.64)$$

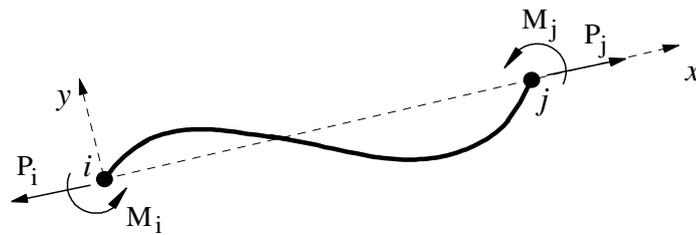
Para uma formulação Lagrangiana atualizada, a última configuração de equilíbrio,  $t$ , é selecionada como sendo a configuração de referência. Dessa forma, é importante que se

conheça, para o elemento finito considerado, o estado de tensões ou de deformações em  $t$ . A deformação nessa configuração é dada por:

$${}^t\varepsilon = \frac{P}{EA} + \frac{y}{EI} \left[ M_i - \frac{(M_i + M_j)}{L} x \right] \quad (4.65)$$

onde  $EA$  é a rigidez axial do elemento,  $EI$  é a sua rigidez à flexão e,  $P$ ,  $M_i$  e  $M_j$  são, respectivamente, a força axial e os momentos fletores que atuam no elemento finito nessa configuração de equilíbrio, como mostra a Figura 4.7.

Como foi mostrado no capítulo anterior, as equações incrementais de equilíbrio podem ser obtidas aplicando o princípio da energia potencial total estacionária, ou seja, considerando a primeira variação da energia potencial total do elemento,  $\Delta\Pi$ , igual a zero.



**Figura 4.7** Força axial e momentos na configuração de equilíbrio  $t$

O incremento de energia de deformação,  $\Delta U$ , é definido, para o referencial Lagrangiano atualizado, como:

$$\Delta U = \int_V \int_{{}^t\varepsilon}^{{}^t\varepsilon + \Delta\varepsilon} (\Delta\sigma d\varepsilon) dV \quad (4.66)$$

Considerando o comportamento linear elástico, ou seja,  $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$ , o incremento de energia de deformação,  $\Delta U$ , e o trabalho das forças externas incremental,  $\Delta\Omega$ , podem ser escritos como:

$$\Delta U = \iint_V \left( E({}^t\varepsilon) \Delta\varepsilon + \frac{E}{2} \Delta\varepsilon^2 \right) dV \quad (4.67)$$

$$\Delta\Omega = - \int_S f_i \Delta u_i dS = - \left[ \int_S {}^t f_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \right] \quad (4.68)$$

Substituindo a Equação (4.61) em (4.67) e usando as Equações (4.62) e (4.64), é possível escrever o funcional de energia como (Galvão, 2000):

$$\Delta\Pi = U_0 + U_l + U_\sigma + U_1 + U_2 - \left[ \int_S ({}^t f_i) \Delta u_i dS + \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \right] \quad (4.69)$$

onde:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{{}^tV} E {}^t \varepsilon_{xx} \Delta e_{xx} {}^t dV \quad (4.70a)$$

$$U_l = \frac{1}{2} \int_{{}^tV} E \Delta e_{xx}^2 {}^t dV \quad (4.70b)$$

$$U_\sigma = \int_{{}^tV} E {}^t \varepsilon_{xx} \Delta \eta_{xx} {}^t dV \quad (4.70c)$$

$$U_1 = \int_{{}^tV} E \Delta e_{xx} \Delta \eta_{xx} {}^t dV \quad (4.70d)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{{}^tV} E \Delta \eta_{xx}^2 {}^t dV \quad (4.70e)$$

Aqui, o termo  $U_0$  está associado à força total aplicada na configuração de equilíbrio  $t$ ;  $U_\sigma$  decorre da influência das deformações iniciais e originará a matriz de tensões iniciais;  $U_l$  é responsável pela parcela linear da matriz de rigidez e,  $U_1$  e  $U_2$  darão origem às matrizes de rigidez que são funções lineares e quadráticas dos deslocamentos nodais incrementais.

Assim, o incremento de energia potencial total pode ser reescrito, se a igualdade  $U_0 = \int_S {}^t f_i \Delta u_i ds$  é verdadeira, na forma:

$$\Delta\Pi = U_l + U_\tau + U_l + U_2 - \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \quad (4.71)$$

No contexto do Método dos Elementos Finitos, os deslocamentos  $\Delta u$  e  $\Delta v$  ao longo do eixo  $x$  podem ser relacionados aos deslocamentos nodais do elemento através das seguintes equações:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_i + H_2 \Delta u_j \quad (4.72a)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_i + H_4 \Delta \theta_i + H_5 \Delta v_j + H_6 \Delta \theta_j \quad (4.72b)$$

onde  $H_1$  e  $H_2$  são funções de interpolação lineares, e  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H_5$  e  $H_6$  são as funções de interpolação de Hermite definidas como:

$$H_1 = 1 - x/L \quad (4.73a)$$

$$H_2 = x/L \quad (4.73b)$$

$$H_3 = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 \quad (4.73c)$$

$$H_4 = x - 2x^2/L + x^3/L^2 \quad (4.73d)$$

$$H_5 = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \quad (4.73e)$$

$$H_6 = -x^2/L + x^3/L^2 \quad (4.73f)$$

O funcional de energia (4.71), de acordo com Alves (1993) e Silveira (1995) é definido em função dos deslocamentos e forças nodais como:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = \Delta\mathbf{u}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_l + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1 (\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2 (\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} + \\ + \Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{f}_i - \Delta\mathbf{u}^T {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{f}_r \end{aligned} \quad (4.74)$$

sendo  $\Delta\mathbf{u}^T = \{\Delta u_i \ \Delta v_i \ \Delta\theta_i \ \Delta u_j \ \Delta v_j \ \Delta\theta_j\}$  e  $\mathbf{f}_i^T = \{P_i \ Q_i \ M_i \ P_j \ Q_j \ M_j\}$  os vetores de deslocamentos incrementais e forças nodais, respectivamente, no sistema local de coordenadas. O termo  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{f}_r$  caracteriza o vetor total das forças externas que atuam no elemento.

Já as matrizes  $\mathbf{K}_l$ ,  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  que aparecem na equação anterior podem ser obtidas através da diferenciação dos termos em (4.70), ou seja:

$$k_{l(m,n)} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n} \quad (4.75a)$$

$$k_{\sigma(m,n)} = \frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n} \quad (4.75b)$$

$$k_{1(m,n)} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n \partial \Delta u_k} \Delta u_k \quad (4.75c)$$

$$k_{2(m,n)} = \frac{\partial^4 U_2}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n \partial \Delta u_k \partial \Delta u_p} \Delta u_k \Delta u_p \quad (4.75d)$$

As equações incrementais de equilíbrio, obtidas impondo que a primeira variação da energia potencial total do elemento seja igual a zero, podem ser expressas como:

$${}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{f}_r = {}^t\mathbf{f}_i + \Delta \mathbf{f}_i \quad (4.76)$$

na qual o vetor de forças internas incremental,  $\Delta \mathbf{f}_i$ , é dado por:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \left[ \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} \quad (4.77)$$

A matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais,  $\mathbf{K}_e$ , obtida a partir da Equação (4.74), é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \quad (4.78)$$

Na equação anterior,  $\mathbf{K}_l$  é a matriz de rigidez elástica linear convencional e  $\mathbf{K}_\sigma$  é comumente referida como a matriz de tensões iniciais ou matriz de rigidez geométrica, cujos termos dependem das forças nodais iniciais. Os elementos da matriz  $\mathbf{K}_1$  são funções lineares dos deslocamentos nodais incrementais enquanto os termos na matriz  $\mathbf{K}_2$  são funções quadráticas. Os efeitos de segunda ordem são introduzidos na análise através das matrizes  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  que estabelecem a mudança na rigidez do elemento. Os coeficientes dessas matrizes estão detalhados no Apêndice A (Seção A.1) deste trabalho.

Se uma rotação de corpo rígido é aplicada ao elemento, as forças na Equação (4.77), que deveriam ser iguais a zero, não são. Tentando minimizar essa inconsistência, o vetor de forças internas pode ser reescrito considerando agora os deslocamentos naturais incrementais, ou seja, através dos deslocamentos que efetivamente causam deformação. Esses deslocamentos naturais, mostrados na Figura 4.8 a seguir, se referem à última configuração de equilíbrio obtida no passo incremental de solução. Dessa forma, tem-se:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \left[ \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}_n) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \mathbf{u}_n) \right] \Delta \mathbf{u}_n \quad (4.79)$$

onde  $\Delta \mathbf{u}_n$  é o vetor de deslocamentos naturais incremental, que é expresso como:

$$\Delta \mathbf{u}_n^T = \left[ 0 \quad 0 \quad \phi_i \quad \delta \quad 0 \quad \phi_j \right] \quad (4.80)$$

Usando as relações geométricas mostradas na Figura 4.8, é possível escrever:

$$\delta = ({}^{t+\Delta t}L) - {}^tL \quad (4.81a)$$

$$\phi_i = \Delta \theta_i - \alpha \quad (4.81b)$$

$$\phi_j = \Delta\theta_j - \alpha \quad (4.81c)$$

sendo  $\alpha$  a rotação de corpo rígido, que é dada por:  $\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{(\Delta v_j - \Delta v_i)}{tL} \right]$ .

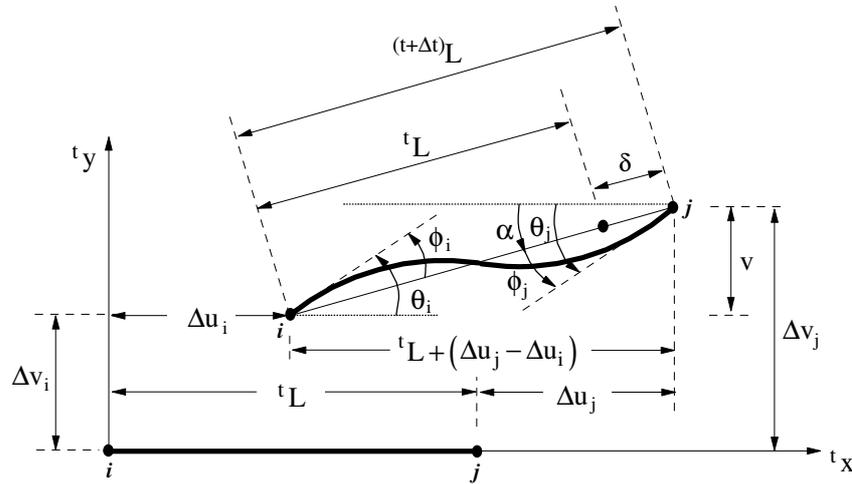
A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento no sistema local são transformados para o sistema global de coordenadas usando as seguintes equações:

$$\mathbf{K}_{eg} = {}^t\mathbf{R}^T \mathbf{K}_e {}^t\mathbf{R} \quad (4.82)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{ig} = \mathbf{R}_a^T {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_i \quad (4.83)$$

sendo  ${}^t\mathbf{R}$  é matriz de rotação entre o sistema global e o sistema local atualizada na configuração  $t$ , e  $\mathbf{R}_a$  é a matriz de rotação atualizada na última iteração processada. Essas matrizes dependem apenas da inclinação  $\alpha$  (Figura 4.8) e podem ser definidas como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$



**Figura 4.8** Deslocamentos naturais do elemento

Finalmente, a matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , e o vetor de forças internas,  $\mathbf{F}_i$ , do sistema estrutural são obtidos considerando a contribuição de cada um dos  $m$  elementos finitos usados na discretização, ou seja:

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}_{eg} \quad (4.85a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i = \sum_m {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{ig} \quad (4.85b)$$

onde  $\mathbf{K}_{eg}$  e  $\mathbf{f}_{ig}$  são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento no sistema global de coordenadas.

### 4.3.2 Formulação SOF-2

A formulação SOF-2 é definida em referencial Lagrangiano atualizado e segue os fundamentos da formulação proposta por Yang e Kuo (1994). Esses autores adotaram para o elemento mostrado na Figura 4.5, apresentada anteriormente, duas componentes de tensão, as tensões axial,  $\tau_{xx}$ , e cisalhante,  $\tau_{xy}$ , de Cauchy, e duas componentes de deformação associadas que são os incrementos de deformação de Green-Lagrange atualizados,  $\Delta\epsilon_{xx}$  e  $\Delta\epsilon_{xy}$ . Essas componentes de deformação decompostas em duas parcelas, linear e não linear, são:

$$\Delta\epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta\eta_{xx} \quad (4.86a)$$

$$\Delta\epsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta\eta_{xy} \quad (4.86b)$$

com:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} \quad (4.87a)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Delta\bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (4.87b)$$

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.87c)$$

$$\Delta\eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Delta\bar{u}}{dy} \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (4.87d)$$

onde  $\Delta\bar{u}$  é o deslocamento axial de um ponto cuja distância da linha neutra é igual a  $y$  e  $\Delta v$  é o deslocamento vertical desse ponto, como foi mostrado na Figura 4.6.

Baseado na hipótese de Bernoulli-Euler de que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, e usando a Equação (4.60), têm-se:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \quad (4.88a)$$

$$\Delta e_{xy} = 0 \quad (4.88c)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.88b)$$

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left( \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (4.88d)$$

As tensões resultantes (esforços iniciais) na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental,  $t$ , são calculados através da integração das tensões de Cauchy, ou seja:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA \quad (4.89a)$$

$${}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \quad (4.89b)$$

$${}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (4.89c)$$

onde  ${}^tP$  é o esforço axial,  ${}^tQ$  é o esforço cortante e  ${}^tM$  é o momento fletor. De Galvão (2000), os esforços  ${}^tQ$  e  ${}^tM$  podem ser reescritos como:

$${}^tM = -M_i + \frac{(M_i + M_j)}{L} x \quad (4.90a)$$

$${}^tQ = -\frac{(M_i + M_j)}{L} \quad (4.90b)$$

Para um elemento de viga-coluna cuja hipótese de Bernoulli tenha sido adotada, apenas as tensões axiais,  $\Delta\tau_{xx}$ , podem ser obtidas pela lei constitutiva,  $\Delta\tau_{xx} = E\Delta\varepsilon_{xx}$ . Já as tensões cisalhantes incrementais, segundo Yang e Kuo (1994), devem ser determinadas através de condições de equilíbrio. Segundo esses autores, tem-se:

$$\Delta\tau_{xy} = \Delta\tau_{xy}^l + \Delta\tau_{xy}^{nl} = \frac{E}{2} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3\Delta v}{dx^3} + \frac{E}{2} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \quad (4.91)$$

sendo  $h$  a altura da seção transversal.

O incremento de energia de deformação pode ser definido como:

$$\Delta U = \int_V \int_{\epsilon_{ij}^t}^{\epsilon_{ij}^t + \Delta \epsilon_{ij}} (\Delta \tau_{ij} d\epsilon_{ij}) dV \quad (4.92)$$

Considerando as componentes de tensão e deformação definidas anteriormente, é possível reescrever a equação anterior (Galvão, 2000):

$$\Delta U = \iint_V \left[ \left( {}^t \tau_{xx} \Delta \epsilon_{xx} + 2 \left( {}^t \tau_{xy} \right) \Delta \epsilon_{xy} \right) + \left( E/2 \Delta \epsilon_{xx}^2 + 2 \left( \Delta \tau_{xy} \right) \Delta \epsilon_{xy} \right) \right] dV \quad (4.93)$$

e o incremento de energia potencial das forças externas,  $\Delta \Omega$ , como:

$$\Delta \Omega = - \int_S f_i \Delta u_i dS = - \left[ \int_S {}^t f_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \right] \quad (4.94)$$

As duas diferentes considerações que serão feitas a seguir originarão duas diferentes formulações não lineares de elementos finitos. Na primeira abordagem, formulação linearizada, assume-se que as deformações incrementais são tão pequenas que as parcelas não lineares possam ser desprezadas. Assim, a Equação (4.93) pode ser reescrita como:

$$\Delta U = \iint_V \left( {}^t \tau_{xx} \Delta \epsilon_{xx} + 2 {}^t \tau_{xy} \Delta \epsilon_{xy} \right) dV + \iint_V \left( E/2 \Delta \epsilon_{xx}^2 \right) dV \quad (4.95)$$

De acordo com Alves (1993), a seguinte condição é observada:

$$\int_V \left( {}^t \tau_{xx} \Delta \epsilon_{xx} + 2 {}^t \tau_{xy} \Delta \epsilon_{xy} \right) dV = \int_S {}^t f_i \Delta u_i dS \quad (4.96)$$

Assim, após algumas transformações algébricas, o funcional de energia na configuração  $t + \Delta t$  pode ser escrito como:

$$\Delta \Pi = U_l + U_\sigma - \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \quad (4.97)$$

onde:

$$U_l = \frac{1}{2} \int_{{}^t Vol} E \Delta \epsilon_{xx}^2 dVol \quad (4.98a)$$

$$\begin{aligned}
U_{\sigma} = & \frac{1}{2} \int_0^L {}^tP \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L {}^tM \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L {}^tQ \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx
\end{aligned} \tag{4.98b}$$

Na segunda abordagem, formulação de ordem elevada, ao contrário da primeira, as parcelas de deformação não lineares não são desprezadas. Nesse caso, o funcional de energia é definido como:

$$\Delta\Pi = U_l + U_{\tau} + U_1 + U_2 - \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \tag{4.99}$$

na qual  $U_l$  e  $U_{\sigma}$  são os mesmos termos da Equação (4.97), ou seja, representados pelas Equações (4.98a-b), e  $U_1$  e  $U_2$  são dados por:

$$U_1 = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( \frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) + \frac{3EI}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d\Delta u}{dx} \right] dx \tag{4.100a}$$

$$\begin{aligned}
U_2 = & \int_0^L \left[ \frac{EA}{8} \left( \frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{8} \left( \frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] dx^2 + \\
& + \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) + EI \frac{d\Delta u^2}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \right] dx^2
\end{aligned} \tag{4.100b}$$

Usando novamente o elemento finito mostrado na Figura 4.5 e substituindo a Equação (4.72) usada para aproximar os deslocamentos incrementais  $\Delta u$  e  $\Delta v$  na Equação (4.99), é possível escrever o funcional  $\Delta\Pi$  em função dos deslocamentos nodais do elemento. Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta\Pi = & \Delta\mathbf{u}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_l + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\sigma} + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} + \\
& + \Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{f}_i - \Delta\mathbf{u}^T (t+\Delta t) \lambda \mathbf{f}_r
\end{aligned} \tag{4.101}$$

sendo as componentes das matrizes  $\mathbf{K}_l$ ,  $\mathbf{K}_{\sigma}$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  obtidas diretamente da energia interna de deformação (Equação 4.75).

O vetor de forças internas incremental é determinado a partir da equação anterior estabelecendo a primeira variação da energia potencial total igual a zero. Dessa forma, consegue-se definir esse vetor como:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \left[ \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} \quad (4.102)$$

O vetor de forças internas na configuração de equilíbrio  $t + \Delta t$  é calculado fazendo:

$${}^{(t+\Delta t)} \mathbf{f}_i = {}^t \mathbf{f}_i + \Delta \mathbf{f}_i \quad (4.103)$$

A matriz de rigidez do elemento no sistema global de coordenadas é dada pela Equação (4.82) mostrada anteriormente, sendo a matriz de rigidez no sistema local definida como:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \quad (4.104a)$$

ou, no caso da formulação linearizada,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma \quad (4.104b)$$

No Apêndice A, Seção A.2, os elementos das matrizes  $\mathbf{K}_l$ ,  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são mostrados.

Vale ressaltar que o incremento do vetor de forças internas,  $\Delta \mathbf{f}_i$ , é calculado usando o vetor de deslocamentos naturais incrementais,  $\Delta \mathbf{u}_n$ , no lugar de  $\Delta \mathbf{u}$  como mostrado na Seção 4.3.1.

### 4.3.3 Formulação SOF-3

Cinco formulações não lineares de elementos finitos para pórticos planos foram propostas por Pacoste e Eriksson (1997). Essas formulações foram desenvolvidas em referencial Lagrangiano total, com duas abordagens diferentes, total e corrotacional, que se diferem apenas na forma como os deslocamentos do elemento são descritos. Na abordagem total, os deslocamentos são referidos a um sistema local fixo de coordenadas. Já na corrotacional, os deslocamentos se referem a um sistema de coordenadas que é atualizado à medida que o elemento sofre rotação. Todas elas foram implementadas e testadas por Galvão (2000), que realizou um estudo sobre diversas formulações não lineares para análise de sistemas estruturais reticulados planos.

Dentre tais formulações, é utilizada, neste trabalho, uma formulação baseada na teoria de Timoshenko, que utiliza relações cinemáticas estabelecidas através de funções trigonométricas. É importante ressaltar que, com essa escolha, torna-se possível, usando o sistema computacional proposto, realizar a análise de segunda ordem de estruturas espessas. As relações de deformação-deslocamento nessa formulação são escritas como:

$$\varepsilon_{xx} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos(\theta) + \left(\frac{dv}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (4.105a)$$

$$\gamma = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cos(\theta) - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (4.105b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (4.105c)$$

sendo  $\varepsilon_{xx}$  a deformação axial,  $\gamma$  a deformação cisalhante,  $k$  a curvatura do elemento e  $\theta$  o ângulo de rotação da seção transversal na configuração deformada.

As relações constitutivas, considerando pequenas deformações, são dadas, de acordo com Pacoste e Eriksson (1997), por:

$$P = EA\varepsilon_{xx} \quad (4.106a)$$

$$Q = GA\gamma \quad (4.106b)$$

$$M = EI k \quad (4.106c)$$

onde  $EA$ ,  $GA$  e  $EI$  representam as rigidezes axial, cisalhante e devido à flexão, respectivamente.

A energia potencial total, usando o referencial Lagrangiano total, pode ser escrita através da seguinte relação:

$$\Pi = \int_V \int_0^{\varepsilon_{ij}} (\tau_{ij} d\varepsilon_{ij}) dV - \int_S f_i u_i dS \quad (4.107)$$

Considerando as relações constitutivas (4.105) e realizando a integração na área da seção transversal, a equação anterior é reescrita como:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \varepsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right] dx - \int_S f_i u_i dS \quad (4.108)$$

na qual o primeiro termo do lado direito é a energia interna de deformação,  $U$ , e o último termo é a energia potencial,  $\Omega$ , devido às cargas aplicadas.

Os deslocamentos  $u(x)$  e  $v(x)$ , representados na Figura 4.9, são aproximados utilizando funções de interpolação lineares, ou seja,

$$u = H_1 u_i + H_2 u_j \quad (4.109a)$$

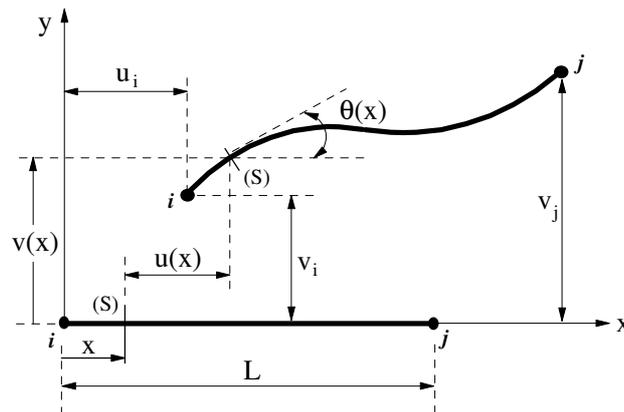
$$v = H_1 v_i + H_2 v_j \quad (4.109b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{dH_1}{dx} \theta_i + \frac{dH_2}{dx} \theta_j \quad (4.109c)$$

sendo as funções de interpolação  $H_1$  e  $H_2$  dadas por:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (4.110a)$$

$$H_2 = \frac{x}{L} \quad (4.110b)$$



**Figura 4.9** Elemento finito considerado

Considerando a Equação (4.108), a energia interna de deformação é, como já mencionado, definida como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EA \epsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right) dx \quad (4.111)$$

Se um ponto da quadratura de Gauss for usado para realizar a integração da energia de deformação na Equação (4.106a-c), a seguinte expressão é obtida para  $U$ :

$$U = \frac{L}{2} \left[ EA \epsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right] \quad (4.112)$$

Para um elemento genérico, as componentes  $f_i^m$  do vetor de forças internas e as componentes  $k_{mn}$  da matriz de rigidez são obtidas através de diferenciações sucessivas de (4.113), da seguinte maneira:

$$f_i^m = \frac{\partial U}{\partial u_m} \quad (4.113)$$

$$k_{mn} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_m \partial u_n} \quad (4.114)$$

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são calculados no sistema local de coordenadas e podem ser transformados para o sistema global de coordenadas usando as Equações (4.82) e (4.83). Entretanto, a matriz de rotação é calculada baseando-se na configuração inicial (indeformada) do sistema estrutural.

#### 4.4 Ligações Semi-Rígidas e Não Linearidade Geométrica

Uma ligação é um meio através do qual forças e momentos são transferidos de um membro estrutural a outro, tal como de uma viga a uma coluna. As ligações em estruturas metálicas constituem um ponto chave no desempenho estrutural, no sistema construtivo e de montagem, e nos custos da estrutura. Contrariamente aos critérios correntemente adotados nos projetos, as ligações entre elementos de barra não se comportam conforme idealizado, com condições de extremidade perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. Nas ligações perfeitamente rotuladas nenhum momento é transmitido entre a viga e a coluna, e esses elementos se comportam de forma independente. Já nas ligações totalmente rígidas, o ângulo entre os eixos da coluna e da viga não se altera, ou seja, a ligação não sofre rotação relativa quando a estrutura se deforma. Nesse caso, o momento na extremidade da viga é completamente transferido para a coluna. Dessa forma, subestimam-se os deslocamentos estruturais e superestimam-se as forças atuantes nas ligações resultando em membros e ligações mais pesados. Tais hipóteses simplificam o processo de análise, mas não representam o real comportamento da estrutura. Além disso, construir uma ligação ideal é muito difícil, impraticável e não se justifica economicamente.

A maior parte das ligações usadas na prática atual apresenta o comportamento semi-rígido que pode influenciar substancialmente a estabilidade global do sistema estrutural e a distribuição de esforços nos seus membros. Investigações experimentais sobre esse comportamento demonstraram claramente que uma ligação rotulada possui alguma rigidez

à rotação, enquanto uma ligação rígida possui algum grau da flexibilidade. Dentre tais experimentos podem ser destacados aqueles realizados por Jones *et al.* (1980; 1983) e Nethercot *et al.* (1998). Segundo Colson (1991), as ligações em estruturas de aço são a origem de descontinuidades geométricas e mecânicas que introduzem efeitos localizados e imperfeições, interferindo no comportamento global da estrutura. Por isso devem ser estudadas de modo rigoroso, não só do ponto de vista de fabricação e montagem, mas também com relação à função estrutural.

O aprimoramento na análise e no projeto de estruturas com ligações semi-rígidas permitem um custo efetivo melhor e, portanto, um impacto significativo nas empresas de fabricação e montagem dessas estruturas. Conseqüentemente, a necessidade de se entender o comportamento das ligações semi-rígidas passa a ser de fundamental importância para o desenvolvimento de um projeto estrutural econômico que garanta a estabilidade global do sistema. Uma das alternativas para se melhorar o custo propriamente dito é utilizar métodos avançados de análise, nos quais se possa fazer uma simulação do comportamento estrutural mais verdadeira. Por esse motivo, diversas pesquisas nesse sentido vêm sendo desenvolvidas nos últimos tempos (Chen e Lui, 1991; King, 1994; Li *et al.*, 1995; Abdalla e Chen, 1995; Kruger *et al.*, 1995; Simões, 1996; Salazar e Haldar, 1999; Chen, 2000; Chan e Chui, 2000; Sekulovic e Salatic, 2001; Sekulovic e Nefovska, 2004; Cabrero e Bayo, 2005; Barbosa, 2006; Bayo *et al.*, 2006 e outras). Além disso, muitas normas para análise/projeto estrutural em aço, nacional e internacionais, entre elas, NBR-8800 (1986; 2008), AISC (1986; 1994), BS5950 (1990) e Eurocode 3 (1990; 1992) passaram a tratar as ligações de uma forma mais realística. A norma AISC (1989) descreve três tipos de construção em aço: estrutura completamente restringida, estrutura sem restrição (livre) e estrutura parcialmente restrita. A NBR 8800 e o Eurocode 3 propõem três tipos de ligações: rígida, semi-rígida e normalmente rotulada ou flexível. O comportamento de uma ligação semi-rígida é estudado na seção seguinte.

#### **4.4.1 Comportamento da Ligação**

Para a análise de estruturas com ligações semi-rígidas, o primeiro procedimento a ser realizado é a modelagem do comportamento da ligação. A descrição desse comportamento é comumente feita através de curvas momento-rotação, que são obtidas por ensaios experimentais, através de simulação numérica em elementos finitos (Campos Júnior, 1990; Chen e Toma, 1994; Ribeiro, 1998) ou por modelos teóricos. Esses últimos são

desenvolvidos aplicando-se técnicas de ajuste de curva aos resultados obtidos de forma numérica e/ou experimental.

A incorporação das curvas momento-rotação na análise estrutural fornece resultados mais precisos que aqueles obtidos com as análises convencionais, que consideram as ligações como rígidas ou rotuladas. Elas podem ser escritas, de uma forma geral, através das seguintes relações:

$$M = f(\phi_c) \quad (4.115a)$$

$$\phi_c = g(M) \quad (4.115b)$$

onde  $M$  representa o momento que atua na ligação e  $\phi_c$  é a sua rotação relativa ou capacidade de rotação.

A rigidez da ligação, denotada neste trabalho por  $S_c$ , é uma característica de fundamental importância que é determinada através de ensaios experimentais. Matematicamente, ela representa a inclinação da reta tangente à curva momento-rotação. Portanto, pode ser calculada através da equação:

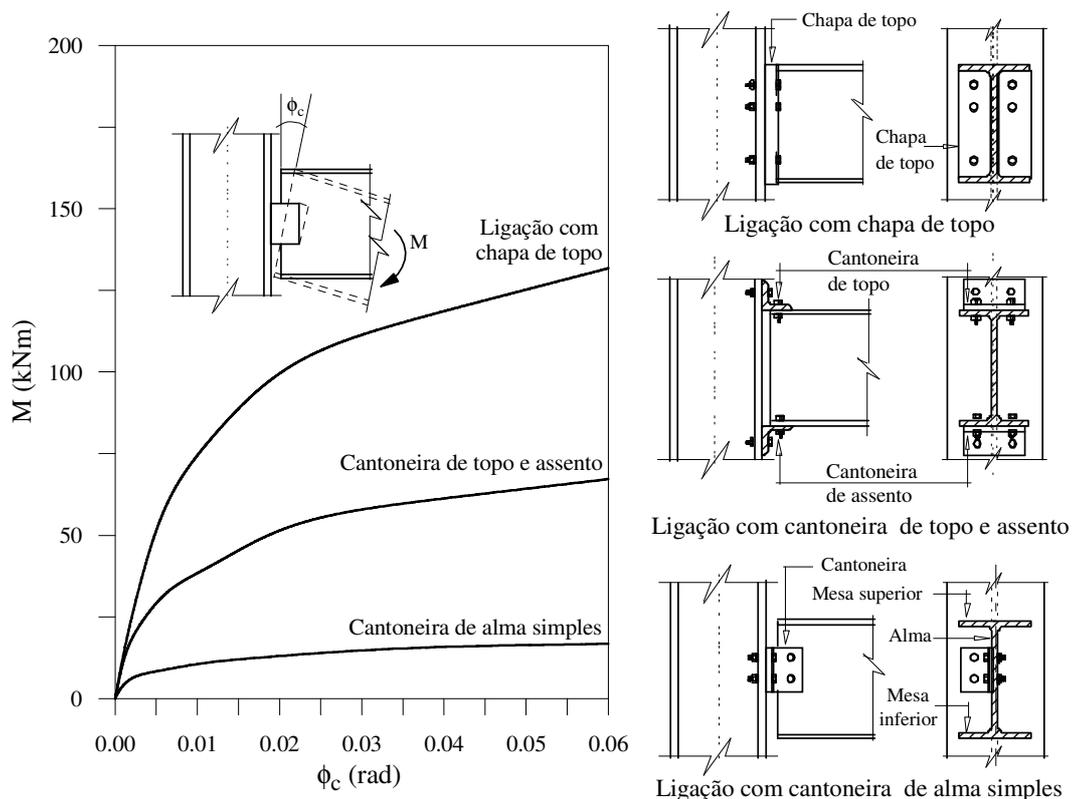
$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad (4.116)$$

A intensidade da rigidez da ligação,  $S_c$ , não determina se uma ligação se comportará de uma maneira rígida ou flexível. Esse comportamento só pode ser verificado através de algum parâmetro que relacione a rigidez da ligação com a rigidez do membro a ela interligado. Chen (2000) propôs a adoção do fator fixo de rigidez (*fixity factor*),  $\gamma$ , definido como:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{3EI}{S_c L}} \quad (4.117)$$

para fornecer uma melhor compreensão sobre o comportamento rotacional da ligação. Os valores extremos que o fator fixo assume são 0 e 1. Para uma ligação perfeitamente rotulada, a rigidez da ligação é nula e, portanto,  $\gamma = 0$ . Já para uma ligação idealmente rígida, o fator fixo  $\gamma$  tem valor 1, uma vez que a rigidez da ligação é extremamente elevada ( $S_c \rightarrow \infty$ ). Pela equação anterior, verifica-se que considerando uma ligação com rigidez  $S_c$ , seu comportamento será, evidentemente, mais rígido (maior valor para  $\gamma$ ) quanto menor for a rigidez à flexão,  $EI$ , do membro ao qual ela está conectada.

A Figura 4.10 ilustra o aspecto típico de curvas momento-rotação para três tipos de ligações. A ligação com chapa de topo estendida é mais rígida que as demais e a cantoneira de topo e assento, mais flexível. Percebe-se que as ligações desenvolvem comportamento fortemente não linear quando submetidas a momento fletor, mas que apresentam um certo padrão de comportamento. Isso permite que se estabeleçam duas grandezas de grande importância: a rigidez inicial e o momento último ou capacidade de momento.



**Figura 4.10** Aspecto típico das curvas momento-rotação de uma ligação

A rigidez inicial ( $S_{cini}$ ) descreve o desempenho da ligação no início do carregamento. É obtida através da Equação (4.116) fazendo  $\phi_c = 0$ . O aspecto linear que a curva momento-rotação assume nessa etapa sugere a existência de uma fase elástica que deixa de existir à medida que o carregamento vai assumindo valores mais elevados. Essa mudança de comportamento é, geralmente, provocada pela existência de concentração de tensões, imperfeições geométricas e descontinuidades nos elementos que compõem a ligação, ou mesmo plastificação dos seus componentes. Esses fatores, a partir de certo estágio do carregamento, passam a interferir na capacidade de rotação da ligação e, assim, a rigidez

da ligação diminui. Na fase final do carregamento, a curva momento-rotação tende para um valor assintótico conhecido como momento último,  $M_u$ , ou capacidade de momento, a partir do qual a ligação entra na fase de colapso e sua rigidez se anula.

Devido ao comportamento altamente não linear das ligações semi-rígidas, é bastante complicado representá-lo matematicamente usando aproximações simples e adequadas. Existem vários modelos analíticos para essa finalidade. Muitos deles, embora possam reproduzir perfeitamente o comportamento da ligação, são bastante complexos e só adequados para certos tipos de ligações. Outro inconveniente encontrado é que a sua implementação computacional não é uma tarefa fácil. De acordo com Chan e Chui (2000), os modelos matemáticos devem gerar uma curva momento-rotação suave, com primeira derivada positiva, e conseguir representar vários tipos de ligações. Entre os principais trabalhos, nessa linha, encontram-se os de Richard e Abbott (1975), Frye e Morris (1975), Ang e Morris (1984), baseando-se no trabalho de Ramberg e Osgood (1943), Lui e Chen (1986; 1988), Kishi e Chen (1986a; 1986b), Al-Bermani *et al.* (1994), Zhu *et al.* (1995) e Abdalla e Chen (1995).

Neste trabalho, é possível descrever o comportamento da ligação usando cinco modelos matemáticos: modelo linear, exponencial (Lui e Chen, 1986), exponencial modificado (Kishi e Chen, 1986), modelo de potências com quatro parâmetros (Richard-Abbott, 1975) e, por fim, multilinear. Esse último foi considerado como uma possibilidade de utilizar uma curva momento-rotação obtida experimentalmente ou, ainda, para contornar as dificuldades, como relatado anteriormente, de não se ter um modelo específico para um certo tipo de ligação. Vale ainda enfatizar que, com o modelo de quatro parâmetros é possível obter o modelo de potências com três parâmetros (Kishi e Chen, 1987) e o modelo bilinear. Os modelos escolhidos possuem, segundo a literatura, boa eficiência computacional, primeiras derivadas sempre positivas e boa precisão. Eles estão detalhados no Apêndice B, onde as equações que definem as suas curvas momento-rotação são apresentadas. A próxima seção destina-se à técnica usada para introduzir uma ligação semi-rígida na análise.

#### **4.4.2 Modelagem da Ligação Semi-Rígida**

A ligação semi-rígida é modelada, aqui, como um elemento de mola inserido no ponto de interseção entre a viga e a coluna. Os elementos de ligação, por sua vez, são fisicamente fixados às extremidades do elemento de viga-coluna, mantendo-se as condições de

equilíbrio e compatibilidade, permitindo que os graus de liberdade das ligações possam ser incorporados na relação de rigidez tangente do elemento de viga-coluna. Esforços axiais, cisalhantes, de flexão e torção são transmitidos a uma ligação. Entretanto, para a grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da ligação são pequenos se comparados àqueles causados pelo momento fletor (Chen *et al.*, 1996). A deformação por torção é desprezada, pois, o presente estudo se limita a estruturas planas. Por essa razão, apenas a deformação rotacional do elemento de mola é considerada.

A presença das molas introduz rotações relativas nos nós das extremidades do elemento. Com isso, as equações que descrevem o comportamento não linear do sistema estrutural idealmente rígido se modificam. Neste trabalho, as modificações serão analisadas em duas das formulações geometricamente não lineares definidas em referencial Lagrangiano atualizado, as formulações SOF-1 e SOF-2 apresentadas, respectivamente, nas Seções 4.3.1 e 4.3.2. Três procedimentos são usados para modificar as equações matriciais de elementos de viga-coluna para a consideração dos efeitos da flexibilidade da ligação, definindo as formulações SRF-1 (*Semi-rigid finite element formulation - 1*), SRF-2 (*Semi-rigid finite element formulation - 2*) e SRF-3 (*Semi-rigid finite element formulation - 3*). Essas três metodologias se baseiam, respectivamente, nas formulações propostas por Chan e Chui (2000), Chen e Lui (1991) e Sekulovic e Salatic (2001), e serão usadas para investigar a influência das ligações viga-coluna semi-rígidas na capacidade de carga e estabilidade de sistemas estruturais metálicos.

Para o desenvolvimento das formulações, considere o elemento finito exibido na Figura 4.11. Ele é formado por um elemento de viga-coluna e dois elementos fictícios de mola, um em cada extremidade da viga-coluna. Essas molas, como já comentado, introduzirão os efeitos da flexibilidade da ligação na análise. Observa-se que um dos lados dos elementos de ligação é conectado ao elemento de viga-coluna, enquanto o outro é conectado ao nó global ( $i$  ou  $j$ ). Cabe ressaltar, novamente, que apenas a deformação da ligação devido à flexão será considerada. A Figura 4.11b mostra a configuração deformada do elemento, onde são exibidas também as forças internas e as deformações nas molas de ligação. As rigidezes dos elementos de mola são denotadas por  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$ , e as ligações podem ter comportamentos distintos, ou seja, podem ser caracterizadas por curvas momento-rotação distintas.

A rotação relativa da ligação,  $\phi_c$ , é definida como sendo a diferença entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global do elemento,  $\theta_c$ , e daquele conectado ao

elemento de viga-coluna,  $\theta_b$ . Considerando, então, os elementos de mola das extremidades  $i$  e  $j$ , as rotações das ligações podem ser escritas, na forma incremental, como:

$$\Delta\phi_{ci} = \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \quad (4.118a)$$

$$\Delta\phi_{cj} = \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj} \quad (4.118b)$$

sendo  $\Delta\phi_{ci}$  e  $\Delta\phi_{cj}$  as rotações relativas incrementais devido à flexibilidade das ligações.

Usando a Equação (4.116), as seguintes relações podem ser escritas:

$$\Delta M_{ci} = S_{ci} \Delta\phi_{ci} \quad (4.119a)$$

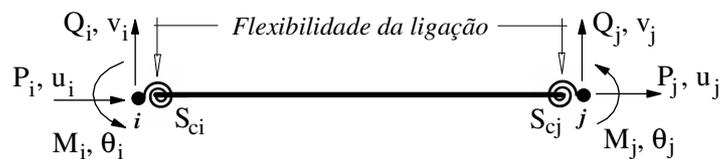
$$\Delta M_{cj} = S_{cj} \Delta\phi_{cj} \quad (4.119b)$$

na qual  $\Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_{cj}$  são, respectivamente, os momentos fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades  $i$  e  $j$ .

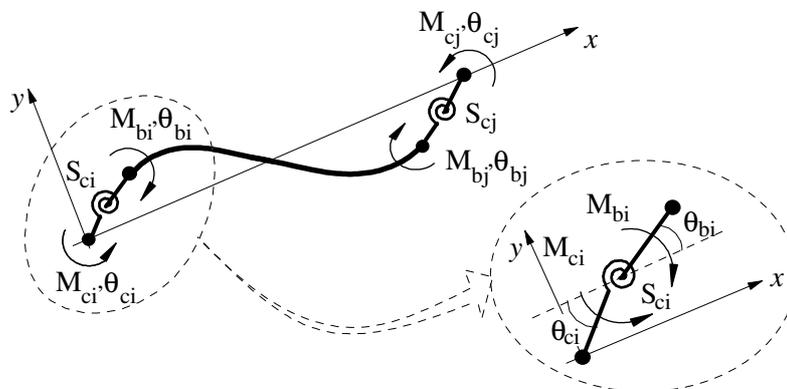
Estabelecendo o equilíbrio de momento nos elementos de ligação das extremidades  $i$  e  $j$ , ou seja,

$$\Delta M_{ci} + \Delta M_{bi} = 0 \quad (4.120a)$$

$$\Delta M_{cj} + \Delta M_{bj} = 0 \quad (4.120b)$$



(a) Configuração indeformada



(b) Configuração deformada

**Figura 4.11** Elemento de viga-coluna com molas fictícias

e, levando em consideração as relações (4.118) e (4.119), escreve-se:

$$\Delta M_{ci} = S_{ci} (\Delta \theta_{ci} - \Delta \theta_{bi}) \text{ e } \Delta M_{bi} = -\Delta M_{ci} = S_{ci} (\Delta \theta_{bi} - \Delta \theta_{ci}) \quad (4.121a)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj} (\Delta \theta_{cj} - \Delta \theta_{bj}) \text{ e } \Delta M_{bj} = -\Delta M_{cj} = S_{cj} (\Delta \theta_{bj} - \Delta \theta_{cj}) \quad (4.121b)$$

sendo  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  os momentos atuantes no elemento de viga-coluna (Figura 4.11).

Na forma incremental matricial, as relações (4.121a) e (4.121b) ficam:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (4.122a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.122b)$$

nas quais as matrizes representam as matrizes de rigidez dos elementos de ligação das extremidades  $i$  e  $j$ .

Ao se adicionar molas de ligação às extremidades do elemento de viga-coluna, a matriz de rigidez convencional desse elemento, em uma análise de segunda ordem, deverá ser modificada para considerar o efeito provocado pela consideração da flexibilidade das ligações. Os procedimentos necessários para que se faça a modificação dependem da formulação de elementos finitos adotada. As três formulações usadas com essa finalidade serão apresentadas agora. É importante mencionar que a matriz de rigidez no sistema local de coordenadas será obtida. Porém, a sua transformação para o sistema global de coordenadas é necessária e deve ser feita seguindo os mesmos procedimentos descritos na Seção 4.3.1 ou 4.3.2 de acordo com a formulação geometricamente não linear adotada.

#### 4.4.3 Formulação SRF-1

Nessa primeira formulação desenvolvida para análise não linear de estruturas planas com ligações semi-rígidas, os elementos de mola simulando a flexibilidade da ligação têm comprimentos nulos.

Para as seções internas do elemento de viga-coluna, a relação de equilíbrio momento-rotação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.123)$$

onde os termos de rigidez à flexão da matriz,  $k_{(m,n)}$ , são os coeficientes correspondentes à linha  $m$  e coluna  $n$  da matriz de rigidez do elemento de viga-coluna convencional, no qual as ligações são consideradas perfeitamente rígidas. Eles podem ser obtidos, como já relatado, através das formulações geometricamente não lineares SOF-1 e SOF-2, apresentadas nas Seções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente. As expressões para cada um desses coeficientes,  $k_{(m,n)}$ , podem ser encontradas no Apêndice A.

Dessa forma, combinando as Equações (4.122) e (4.123), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} & 0 \\ 0 & k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.124)$$

Fazendo a multiplicação matricial e assumindo que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais do elemento (ver Figura 4.11b), ou seja, que os momentos internos  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  são iguais a zero, chega-se, usando a segunda e terceira linhas do sistema de equações resultante, a:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.125)$$

e, através das duas outras linhas, encontra-se

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.126)$$

Usando (4.125) é possível reescrever (4.126) como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + k_{(6,6)} & -k_{(3,6)} \\ -k_{(6,3)} & S_{ci} + k_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.127)$$

na qual  $\beta = (S_{ci} + k_{(3,3)})(S_{cj} + k_{(6,6)}) - k_{(6,3)}k_{(3,6)}$ .

Novamente, observando a Figura 4.11, percebe-se que,  $\Delta M_i = \Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_j = \Delta M_{cj}$ . Assim, as relações entre os esforços cisalhantes e os momentos fletores, obtidas por

equilíbrio de força e momento ( $\Sigma F_y = 0$  e, por exemplo,  $\Sigma M_i = 0$ ), podem ser escritas na seguinte forma incremental matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L & 1/L \\ & 1 & 0 \\ -1/L & -1/L \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.128)$$

onde  $\Delta M_i$  e  $\Delta M_j$  são os momentos nodais incrementais do elemento;  $\Delta Q_i$  e  $\Delta Q_j$  são as forças cisalhantes incrementais; e  $L$  é o comprimento desse elemento na configuração de equilíbrio  $t$ .

A partir da Figura 4.12 a seguir, é possível ainda estabelecer as seguintes igualdades:

$$\Delta \theta_{ci} = \Delta \theta_i - \alpha \quad (4.129a)$$

$$\Delta \theta_{cj} = \Delta \theta_j - \alpha \quad (4.129b)$$

com  $\alpha = (\Delta v_j - \Delta v_i)/L$ . Assim, com essas relações escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L & 1 & -1/L & 0 \\ 1/L & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.130)$$

onde  $\Delta v_i$  e  $\Delta v_j$  são, respectivamente, os deslocamentos verticais incrementais dos nós  $i$  e  $j$ .

Substituindo (4.127) em (4.128) e, na equação obtida, introduzindo (4.130), chega-se, após realizar as operações matriciais necessárias, à seguinte equação de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.131)$$

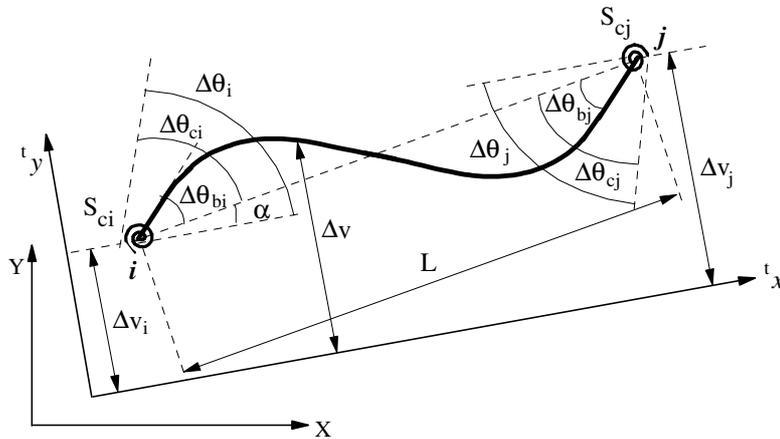
na qual os elementos da matriz consideram de forma conjunta o efeito da flexibilidade da ligação e aqueles oriundos da não linearidade geométrica. Esses coeficientes  $k_{(m,n)}^*$  são funções das rigidezes das ligações,  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$ , e dos respectivos termos  $k_{(m,n)}$  (que, vale

ressaltar, foram estabelecidos em uma análise de segunda ordem convencional considerando as ligações como perfeitamente rígidas e são encontrados no Apêndice A).

Reagrupando a matriz de rigidez, apresentada na Equação (4.131), na matriz de rigidez completa (ordem 6x6) do elemento de viga-coluna com molas nas duas extremidades, chega-se finalmente à relação força-deslocamento para esse elemento. A expressão que a define é:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)} & k_{(1,2)} & k_{(1,3)} & k_{(1,4)} & k_{(1,5)} & k_{(1,6)} \\ k_{(1,2)} & k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,4)} & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,1)} & k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,4)} & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(4,1)} & k_{(4,2)} & k_{(4,3)} & k_{(4,4)} & k_{(4,5)} & k_{(4,6)} \\ k_{(5,1)} & k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,4)} & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,1)} & k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,4)} & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.132)$$

na qual os termos  $k_{(m,n)}$  são os elementos da linha  $m$  e coluna  $n$  na matriz de rigidez da formulação de segunda ordem usada anteriormente para estabelecer a Equação (4.123). Pode-se observar que as forças axiais não sofreram alteração ao se considerar o efeito da flexibilidade da ligação.



**Figura 4.12** Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada

Numa forma simplificada, a relação (4.132) pode ser escrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_e^* \Delta \mathbf{u} \quad (4.133)$$

em que  $\Delta \mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{K}_e^*$  e  $\Delta \mathbf{u}$  representam, respectivamente, o vetor de forças internas incrementais, a matriz de rigidez modificada para considerar os efeitos da semi-rigidez da ligação e o vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas definidos no sistema local de coordenadas.

#### 4.4.4 Formulação SRF-2

A metodologia usada por Chen e Lui (1991) é seguida, neste trabalho, para definir a matriz de rigidez do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas na formulação SRF-2. Essa formulação, como a anterior, considera os elementos de mola com comprimentos nulos.

De acordo com o estudo realizado na Seção 4.3 para análise de segunda ordem de membros de viga-coluna considerando as ligações idealmente rígidas, as relações força-deslocamento para tais elementos podem ser expressas, de acordo com a equação:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{u} \quad (4.134)$$

na qual a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_e$  é estabelecida de acordo com a formulação geometricamente não linear desejada;  $\Delta \mathbf{f}_i$  e  $\Delta \mathbf{u}$ , são, respectivamente, o vetor de forças e deslocamentos nodais incrementais para o elemento de viga-coluna definidos no sistema local de coordenadas.

As Equações (4.122) e (4.134) podem ser combinadas e escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta \mathbf{f}_i \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccc} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{cj} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{array} \right\} \quad (4.135)$$

Numa forma resumida, a mesma equação é definida como:

$$\Delta \mathbf{f}_{ac} = \mathbf{K}_{ac} \Delta \mathbf{u}_{ac} \quad (4.136)$$

onde  $\Delta \mathbf{f}_{ac}$  é o vetor de forças nodais,  $\Delta \mathbf{u}_{ac}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\mathbf{K}_{ac}$  é a matriz de rigidez tangente resultantes do acoplamento entre os dois elementos de mola e o elemento de viga-coluna.

O vetor de deslocamentos  $\Delta \mathbf{u}_{ac}$  resultante desse acoplamento se relaciona com o vetor de deslocamentos de um elemento auxiliar (Figura 4.13), através da equação:

$$\Delta \mathbf{u}_{ac} = \mathbf{T} \Delta \mathbf{u}_a \quad (4.137)$$

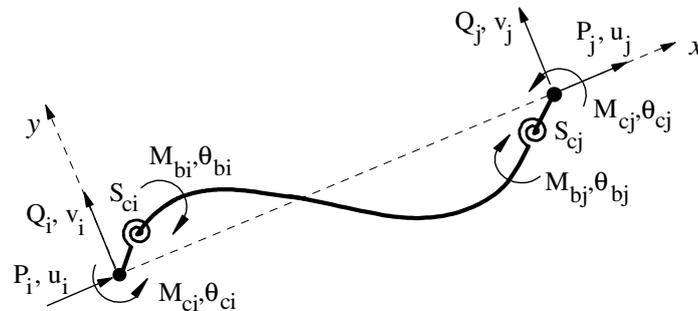
sendo  $\Delta \mathbf{u}_a$  o vetor de deslocamentos nodais do elemento auxiliar e  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação definidos como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.138)$$

Dessa forma, o vetor de forças internas do elemento auxiliar pode ser escrito através da seguinte equação (Chen e Lui, 1991):

$$\Delta \mathbf{f}_a = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{f}_{ac} \quad (4.139)$$

onde,  $\Delta \mathbf{f}_a^T = \{\Delta P_i \Delta Q_i \Delta M_{ci} \Delta P_j \Delta Q_j \Delta M_{cj} \Delta M_{bi} \Delta M_{bj}\}$  é o vetor de forças do elemento auxiliar e  $\Delta \mathbf{f}_{ac}^T = \{\Delta M_{ci} \Delta M_{bi} \Delta P_i \Delta Q_i \Delta M_{bi} \Delta P_j \Delta Q_j \Delta M_{bj} \Delta M_{bj} \Delta M_{cj}\}$  é resultante do acoplamento realizado anteriormente.



**Figura 4.13** Elemento de viga-coluna auxiliar

Substituindo (4.136) e (4.137) na equação anterior, chega-se a:

$$\Delta \mathbf{f}_a = \mathbf{K}_a \Delta \mathbf{u}_a \quad (4.140)$$

na qual  $\mathbf{K}_a = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{ac} \mathbf{T}$  é a matriz de rigidez do elemento auxiliar. Resolvendo esse produto matricial e substituindo em (4.140), chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)} & k_{(1,2)} & 0 & k_{(1,4)} & k_{(1,5)} & 0 & k_{(1,3)} & k_{(1,6)} \\ k_{(2,1)} & k_{(2,2)} & 0 & k_{(2,4)} & k_{(2,5)} & 0 & k_{(2,3)} & k_{(2,6)} \\ 0 & 0 & S_{ci} & 0 & 0 & 0 & -S_{ci} & 0 \\ k_{(4,1)} & k_{(4,2)} & 0 & k_{(4,4)} & k_{(4,5)} & 0 & k_{(4,3)} & k_{(4,6)} \\ k_{(5,1)} & k_{(5,2)} & 0 & k_{(5,1)} & k_{(5,5)} & 0 & k_{(5,3)} & k_{(5,6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{cj} & 0 & -S_{cj} \\ \hline k_{(3,1)} & k_{(3,2)} & -S_{ci} & k_{(3,4)} & k_{(3,5)} & 0 & S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,1)} & k_{(6,2)} & 0 & k_{(6,4)} & k_{(6,5)} & -S_{cj} & k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.141)$$

na qual os termos  $k_{(m,n)}$  referem-se àqueles termos da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_e$  na Equação (4.134) e podem ser encontrados no Apêndice A.

A matriz de rigidez no sistema de equações anterior é particionada, como se pode observar, em 4 sub-matrizes, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f}_i \\ \Delta \mathbf{f}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{b1} & \mathbf{K}_{b2} \\ \mathbf{K}_{b3} & \mathbf{K}_{b4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (4.142)$$

Considerando que o vetor  $\Delta \mathbf{f}_m$  deve ser nulo, ou seja,  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  iguais a zero, chega-se finalmente à relação força-deslocamento para o elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas, definida no sistema local de coordenadas:

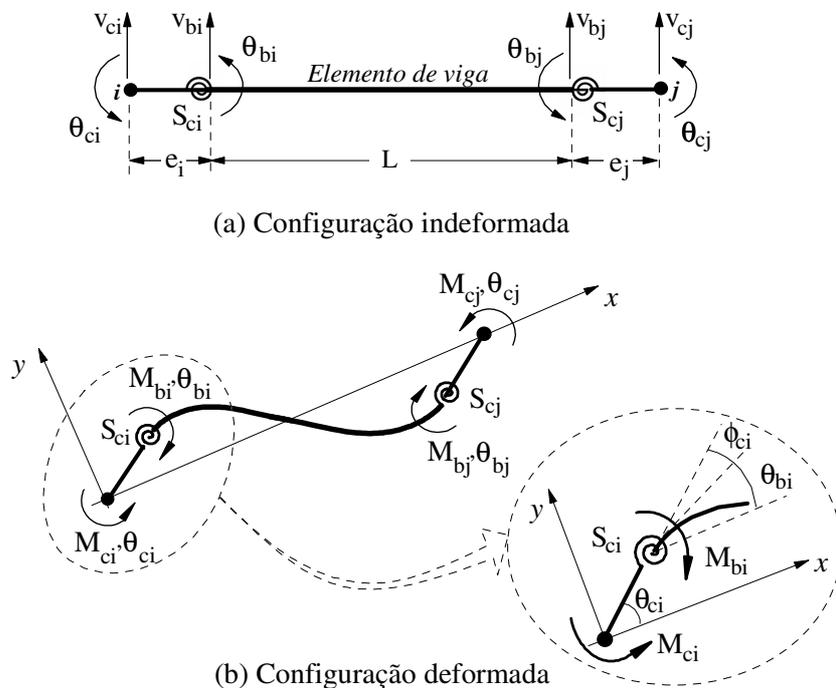
$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_e^* \Delta \mathbf{u} \quad (4.143)$$

com,  $\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_{b1} - \mathbf{K}_{b2} \mathbf{K}_{b4}^{-1} \mathbf{K}_{b3}$ .

Pode-se observar, após realizar as operações matriciais que, diferentemente da formulação SRF-1, todos os termos da matriz  $\mathbf{K}_e^*$  dependem dos parâmetros  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$ , ou seja, consideram o efeito da flexibilidade das ligações presentes nas extremidades do elemento.

#### 4.4.5 Formulação SRF-3

Embora já mencionado, vale enfatizar que, neste trabalho, a ligação semi-rígida é modelada através de um elemento de mola com rigidez à rotação e apenas a influência do momento fletor na deformação desse elemento vem sendo considerada. Agora, diferentemente das outras duas metodologias anteriores, o efeito da excentricidade da ligação é considerado na formulação a ser apresentada nesta seção. A Figura 4.14a mostra o elemento de viga com ligações nodais flexíveis, cujas excentricidades (comprimentos) em relação aos pontos nodais  $i$  e  $j$  do elemento são, respectivamente,  $e_i$  e  $e_j$ . Essas excentricidades são modeladas por elementos curtos e rígidos.



**Figura 4.14** Elemento de viga com ligações excêntricas

As equações que representam as relações força-deslocamento para elementos de viga podem ser expressas de várias formas diferentes dependendo da formulação geometricamente não linear adotada na análise. No entanto, de uma maneira geral, é possível expressar essas relações como:

$$\Delta \mathbf{f}_{ib} = \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{u}_b \quad (4.144)$$

onde  $\Delta \mathbf{f}_{ib}$  é vetor de forças nodais incrementais,  $\Delta \mathbf{u}_b$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\mathbf{K}_b$  é a matriz de rigidez tangente convencional para o elemento de viga.

Os momentos fletores nas extremidades desse elemento de viga (Figura 4.14b) podem ser escritos, considerando a relação anterior, como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,2)} & k_{(3,3)} & k_{(3,5)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,2)} & k_{(6,3)} & k_{(6,5)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_{bi} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta v_{bj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.145)$$

na qual  $\Delta v_{bi}$  e  $\Delta v_{bj}$  são os deslocamentos nodais verticais do elemento de viga. Os termos  $k_{(m,n)}$  da matriz de rigidez referem-se aos respectivos coeficientes da matriz de rigidez para o elemento de viga-coluna com ligações rígidas, que são estabelecidos aqui de acordo com as formulações SOF-1 ou SOF-2.

Usando as relações (4.118), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,2)} & k_{(3,3)} & k_{(3,5)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,2)} & k_{(6,3)} & k_{(6,5)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_{bi} \\ \Delta \theta_{ci} - \Delta \phi_{ci} \\ \Delta v_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} - \Delta \phi_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.146)$$

Na forma matricial, essa equação pode ser definida como:

$$\Delta \mathbf{M}_b = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_b = \mathbf{H} (\Delta \mathbf{d} - \Delta \boldsymbol{\phi}) \quad (4.147)$$

onde  $\Delta \mathbf{d}^T = \{ \Delta v_{bi} \ \Delta \theta_{ci} \ \Delta v_{bj} \ \Delta \theta_{cj} \}$ . E, usando (4.119), chega-se a:

$$\Delta \boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \phi_{ci} \\ 0 \\ \Delta \phi_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/S_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \Delta \mathbf{M}_b \quad (4.148)$$

Substituindo essa última equação em (4.147), é possível chegar à seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{M}_b = (\mathbf{I} + \mathbf{HF})^{-1} \mathbf{H} \Delta \mathbf{d} \quad (4.149)$$

na qual  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 2. Voltando e substituindo (4.149) em (4.148), tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{d} \quad (4.150)$$

onde  $\mathbf{S} = \mathbf{F} (\mathbf{I} + \mathbf{HF})^{-1} \mathbf{H}$  é a matriz que considera o efeito da flexibilidade da ligação.

No caso de pequenas rotações, as relações entre os deslocamentos verticais das extremidades da viga,  $\Delta v_{bi}$  e  $\Delta v_{bj}$ , e os deslocamentos verticais nodais incrementais do elemento de viga com ligações semi-rígidas,  $\Delta v_{ci}$  e  $\Delta v_{cj}$ , podem ser expressas pelas seguintes equações:

$$\Delta v_{bi} = \Delta v_{ci} + e_i \Delta \theta_{ci} \quad (4.151a)$$

$$\Delta v_{bj} = \Delta v_{cj} - e_j \Delta \theta_{cj} \quad (4.151b)$$

Escrevendo-as numa forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta v_{bi} \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta v_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta v_{ci} \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta v_{cj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.152a)$$

ou,

$$\Delta \mathbf{d} = (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.152b)$$

sendo  $\Delta \mathbf{d}_e$  o vetor que contém os incrementos de deslocamentos nodais do elemento de viga com ligações semi-rígidas,  $\mathbf{E}$  a matriz que considera a excentricidade das ligações e  $\mathbf{I}$ , nessa equação, é a matriz identidade de ordem 4.

Com as Equações (4.150) e (4.152b) é possível estabelecer então uma relação entre os deslocamentos nodais do elemento de viga e os deslocamentos nodais do elemento de viga com ligações semi-rígidas, que é expressa por:

$$\Delta \mathbf{u}_b = \Delta \mathbf{d} - \Delta \boldsymbol{\phi} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} + \mathbf{E}) \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.153)$$

A função que descreve o deslocamento lateral  $v(x)$  para o elemento de viga com ligações rígidas pode ser escrita, utilizando-se as funções de interpolação de Hermite definidas na Seção 4.3.1, como:

$$v(x) = N_1(x) \Delta v_{bi} + N_2(x) \Delta \theta_{bi} + N_3(x) \Delta v_{bj} + N_4(x) \Delta \theta_{bj} \quad (4.154)$$

Substituindo as relações (4.153) na equação anterior, chega-se à função que descreve o deslocamento lateral para o elemento de viga com ligações semi-rígidas, ou seja,

$$v(x) = \mathbf{N}(x) \Delta \mathbf{u}_b = \mathbf{N}(x) (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} + \mathbf{E}) \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.155a)$$

ou,

$$v(x) = \mathbf{N}_e(x) \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.155b)$$

onde  $\mathbf{N}_e(x) = \mathbf{N}(x)(\mathbf{I} + \mathbf{G})$  é a nova matriz que contém as novas funções de interpolação.

Sendo a matriz  $\mathbf{G}$ , definida como:  $\mathbf{G} = -\mathbf{S} + \mathbf{E} - \mathbf{SE}$ .

A matriz de rigidez do elemento pode agora ser obtida através da energia interna de deformação, que é assim definida:

$$U = U_f + U_s = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 S_{ck} \Delta \phi_{ck}^2 \quad (4.156)$$

na qual  $L$  é o comprimento do elemento de viga. O primeiro termo na equação anterior é a energia interna de deformação do elemento de viga, que considera a deformação devido à flexão, e o último termo se refere à energia potencial das molas de ligação.

Considerando a parcela correspondente à energia de deformação da viga, e usando a Equação (4.155b), pode-se escrever:

$$U_f = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \mathbf{N}_e''(x) \Delta \mathbf{d}_e \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \mathbf{N}''(x) (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \Delta \mathbf{d}_e \right)^2 dx \quad (4.157)$$

Desenvolvendo essa equação, chega-se à seguinte expressão:

$$U_f = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}_e^T (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{ef}) \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.158)$$

onde  $\mathbf{K}_b$  representa a matriz de rigidez para o elemento de viga com ligações rígidas estabelecida de acordo uma formulação de segunda ordem e  $\mathbf{K}_{ef}$  é a matriz que leva em conta os efeitos da flexibilidade e da excentricidade da ligação. Essa última é definida como:

$$\mathbf{K}_{ef} = \mathbf{G}^T \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_b \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_b \mathbf{G} \quad (4.159)$$

A energia potencial das molas, descrita na Equação (4.156), pode ser expressa como:

$$U_s = \frac{1}{2} \Delta \phi^T \mathbf{C} \Delta \phi \quad (4.160)$$

sendo a matriz  $\mathbf{C}$  dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

Substituindo a Equação (4.150) em (4.160), considerando (4.152b), chega-se a:

$$U_s = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_s \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.162)$$

com,

$$\mathbf{K}_s = (\mathbf{S} + \mathbf{SE})^T \mathbf{C} (\mathbf{S} + \mathbf{SE}) \quad (4.163)$$

Usando (4.158) e (4.162), a energia interna de deformação do elemento de viga com ligações flexíveis, expressa pela Equação (4.156), pode finalmente ser escrita como:

$$U = U_f + U_s = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}_e^T (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{ef} + \mathbf{K}_s) \Delta \mathbf{d}_e \quad (4.164)$$

onde,

$$\mathbf{K}_b^* = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{ef} + \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

é a matriz de rigidez do elemento de viga computando os efeitos de segunda ordem e da flexibilidade e excentricidade da ligação definida no sistema local de coordenadas.

A partir da expressão anterior, define-se, então, a relação de equilíbrio do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas nas extremidades:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)} & k_{(1,2)} & k_{(1,3)} & k_{(1,4)} & k_{(1,5)} & k_{(1,6)} \\ k_{(1,2)} & k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,4)} & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,1)} & k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,4)} & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(4,1)} & k_{(4,2)} & k_{(4,3)} & k_{(4,4)} & k_{(4,5)} & k_{(4,6)} \\ k_{(5,1)} & k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,4)} & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,1)} & k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,4)} & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.166a)$$

ou,

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_e^* \Delta \mathbf{u} \quad (4.166b)$$

na qual, os termos  $k_{(m,n)}$  da matriz são definidos através da mesma formulação geometricamente não linear usada para calcular os termos  $k_{(m,n)}^*$ .

## 4.5 Inelasticidade do Aço e Não Linearidade Geométrica

A análise plástica de estruturas metálicas traz vários benefícios em relação à elástica, pois, uma das mais importantes características do aço, a ductilidade, é totalmente considerada. A ductilidade de um material é a sua capacidade de resistir a grandes deformações antes de se romper. Essa característica favorece a redistribuição de esforços após a resistência limite de alguns membros estruturais ter sido alcançada.

A análise inelástica de segunda ordem de estruturas, particularmente de estruturas metálicas, vem sendo tema de muitas pesquisas há algum tempo. No Brasil, algumas teses e dissertações foram concluídas: Vellasco (1987), Vieira (1997), Martins (1999), Landesmann (1999; 2003), Carneiro (2000), Assaid (2001), Soares Filho (2002), Lanza (2003), Machado (2005) e Alvarenga (2005).

Grande parte dos estudos referentes à análise inelástica se baseia no método da zona plástica (ou plasticidade distribuída) ou no método da rótula plástica (ou plasticidade concentrada). A diferença básica entre eles está no grau de refinamento usado para representar a plastificação do membro estrutural.

No método da zona plástica, a estrutura é discretizada em elementos finitos e a seção-transversal de cada um desses elementos é dividida em fibras. Os efeitos de segunda ordem e tensões residuais podem ser considerados diretamente na análise. Devido ao alto grau de refinamento, as análises feitas com esse método são tratadas como soluções próximas das exatas. Entretanto, por ter um alto custo computacional, o método da zona plástica vem sendo mais empregado para simulação de estruturas simples, que podem servir de calibração para outros modelos e formulações numéricas. Nessa linha de pesquisa, podem ser citados os seguintes trabalhos: Ziemian (1990), Li e Lui (1995), Barsan e Chioren (1999), Jiang *et al.* (2002) e Alvarenga e Silveira (2009).

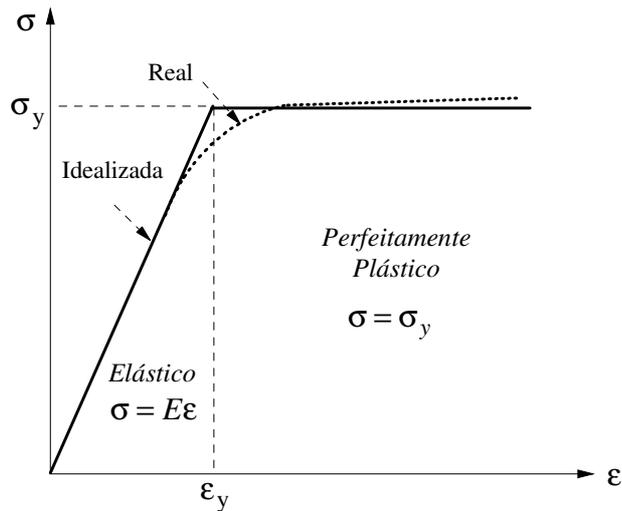
Por outro lado, o método da rótula plástica, que supõe os efeitos da plasticidade concentrado nas rótulas plásticas, pode ser classificado em método da rótula elasto-plástica

e método da rótula plástica refinado. O primeiro deles é a forma mais simples de se considerar os efeitos da inelasticidade na análise. Supõe-se que o elemento permanece em regime elástico até que a resistência plástica da seção seja alcançada formando uma rótula plástica. Os efeitos das tensões residuais não são considerados. No método da rótula plástica refinado, ao contrário, é permitido que seja acompanhado o processo de plastificação da seção e as tensões residuais podem ser consideradas. Por fornecer uma representação aproximada do comportamento do membro em relação à abordagem por zonas de plastificação, ela é consideravelmente menos onerosa computacionalmente.

Pesquisas desenvolvidas por Liew *et al* (1993; 2000), Chen e Toma (1994) e Chen *et al.* (1996) mostraram que a análise inelástica de segunda ordem através do método da rótula plástica refinado, por capturar a interação entre a resistência e estabilidade do sistema estrutural e de seus membros, pode ser classificado como um método de Análise Avançada. Sendo assim, não é necessária a verificação da capacidade dos seus membros. Nessa linha de pesquisa destacam-se outros trabalhos, como os de Chen e Sohal (1995), Kim e Chen (1988), Chan e Chui (2000), Kim *et al.* (2003), Landesmann (1999; 2003), Xu (2001), Chan e Zhou (2004) e Machado (2005). Esta tese segue os princípios do método da rótula plástica refinado.

A inelasticidade ou plastificação do aço é o processo de escoamento das fibras causando alterações na distribuição de tensões da seção transversal quando as forças nela atuantes aumentam. Por simplificação, o aço é idealizado como um material elástico-perfeitamente plástico. A Figura 4.15 mostra a relação tensão-deformação para esse caso e apresenta também a curva real. Na figura,  $\sigma_y$  representa a tensão de escoamento e  $\epsilon_y$ , a deformação correspondente.

Na análise plástica, é importante que se conheça a relação entre o momento fletor aplicado e o ângulo de rotação relativa,  $\theta$ , das extremidades do membro. De acordo com Chen e Sohal (1995), a capacidade de carga de uma estrutura devido a plastificação depende dessa relação momento-rotação que, por sua vez, é dependente da forma da seção transversal. Para ilustrar o cálculo da relação momento-curvatura, seja um elemento de viga de comprimento  $x$  e, apenas por simplicidade, seção transversal retangular. Esse elemento é submetido a momento fletor,  $M$ , nas suas extremidades como mostra a Figura 4.16. Supondo que o comprimento do elemento seja pequeno, pode-se considerar que a forma da flexão é circular, com centro no ponto  $O$  e raio de curvatura  $R$  como indicado nessa figura.



**Figura 4.15** Diagrama tensão-deformação para o aço

Assumindo que as seções permanecem planas após a flexão, a deformação axial de uma fibra é proporcional à sua distância,  $y$ , da linha neutra, ou seja,

$$\varepsilon = \frac{x' - x}{x} = \frac{(R + y)\theta - R\theta}{R\theta} \therefore \varepsilon = \frac{y}{R} \quad (4.167)$$

A curvatura,  $\Phi$ , ou rotação entre duas seções por unidade de comprimento, é definida como (Megson, 2005):

$$\Phi = 1/R \quad (4.168)$$

Reescrevendo (4.167) usando (4.168), vem:

$$\varepsilon = y\Phi \quad (4.169)$$

As duas relações a seguir são usadas no processo de obtenção da relação momento-curvatura,

$$P = \int_A \sigma dA \quad (4.170a)$$

$$M = \int_A \sigma y dA \quad (4.170b)$$

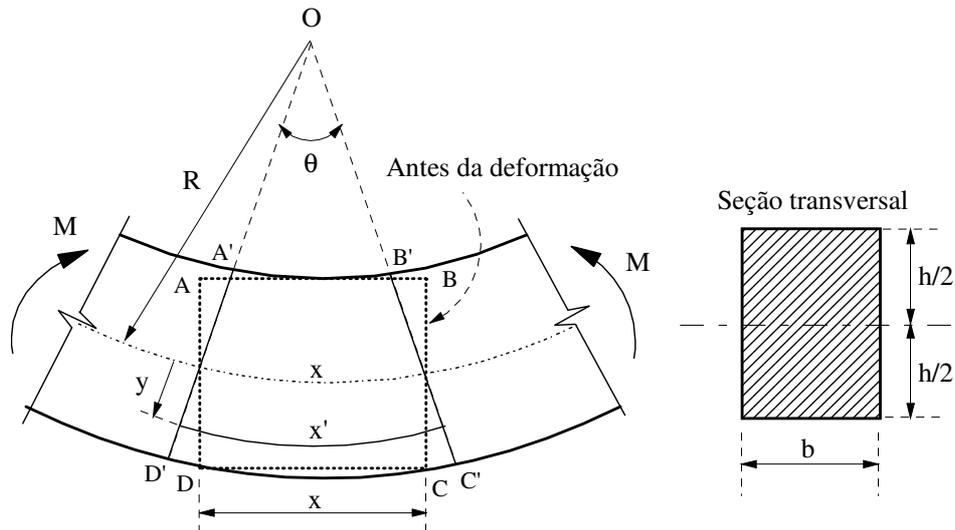
sendo a primeira usada para identificar a posição da linha neutra da seção transversal. Para uma seção transversal com formato retangular, em virtude da simetria, a linha neutra passa

pelo centróide. Isso acontece no regime elástico e no elasto-plástico. A segunda equação, (4.170b), é usada para obter a capacidade de resistência a momento da seção.

De acordo com a relação tensão-deformação idealizada, a Figura 4.17 ilustra o processo de plastificação de uma seção transversal da viga provocada pelo acréscimo no momento fletor que nela atua. Inicialmente, as fibras da seção estão no regime elástico ( $\epsilon < \epsilon_y$  e  $\sigma < \sigma_y$ ) como indicado na Figura 4.17a. Sendo assim, usando as relações (4.169) e (4.170b), e sabendo que no regime elástico  $\sigma = E\epsilon$ , tem-se:

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_A E \epsilon y dA = \int_A E \Phi y^2 dA = EI \Phi \quad (4.171)$$

sendo  $I = \int_A y^2 dA$  o momento de inércia da seção.

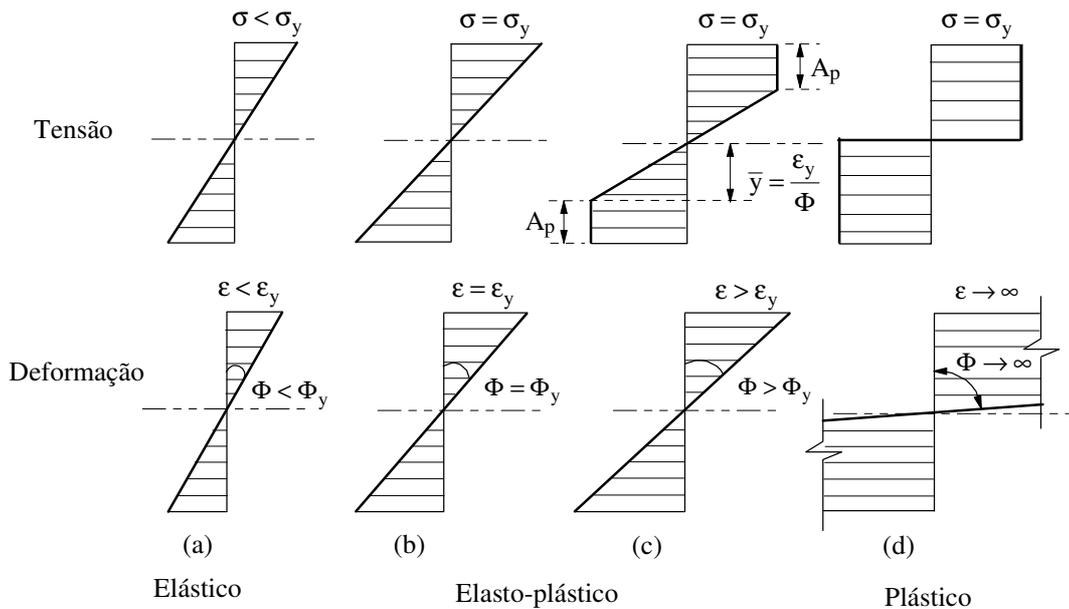


**Figura 4.16** Viga sob flexão pura

Ao atingirem a tensão de escoamento ( $\sigma = \sigma_y = E\epsilon_y$ ), Figura 4.17b, as fibras mais externas apresentam o comportamento plástico, enquanto as demais se mantêm no regime elástico. Nesse instante, define-se o momento de escoamento,  $M_y$ , usando (4.171), como:

$$M_y = EI \Phi_y \quad (4.172a)$$

sendo a curvatura correspondente ao início da plastificação definida como  $\Phi_y = (2/h)\epsilon_y$ . O termo  $h/2$  é o valor máximo assumido por  $y$ . Esse valor define a posição das fibras extremas que estão mais distantes da linha neutra.



**Figura 4.17** Plastificação da seção transversal

Desenvolvendo a equação anterior, vem:

$$M_y = EI\Phi_y = EI \frac{2\varepsilon_y}{h} = \sigma_y \frac{2I}{h} = \sigma_y W \quad (4.172b)$$

na qual  $W$  é o momento elástico ou momento resistente da seção. Para a seção retangular mostrada na Figura 4.16, tem-se  $W = bh^2/6$ .

As fibras que escoam continuam a suportar uma tensão constante que não pode ser superior à tensão de escoamento, entretanto, com deformação maior que  $\varepsilon_y$ . As outras fibras, porém, recebem uma tensão adicional induzida pelo aumento no momento. Com o acréscimo do carregamento, outras fibras se plastificam (Figuras 4.17c). Essa região onde existe material em escoamento, indicada na figura pelo símbolo  $A_p$ , é denominada zona plástica. Esse processo continua até que toda a seção tenha sido plastificada (Figuras 4.17d). Com isso, a capacidade de momento ou momento plástico,  $M_p$ , da seção transversal foi atingido. A redistribuição de momento ocorrida durante o processo de carregamento faz com que, em geral, esse momento plástico limite seja maior que o momento de escoamento. A obtenção de  $M_p$  será feita a seguir.

Durante o processo de plastificação, portanto, existe uma parte da seção cujas fibras já se plastificaram e outra, onde as fibras ainda se encontram no domínio elástico. Nessa condição, diz-se que a seção se encontra em regime elasto-plástico. A região de transição entre o regime elástico e o plástico é:

$$\bar{y} = \frac{\varepsilon_y}{\Phi} \quad (4.173)$$

onde  $\bar{y}$  pode ser visualizado na Figura 4.17c. O momento correspondente a esse regime pode ser obtido por equilíbrio de momentos e resulta, usando (4.170b), da seguinte soma:

$$M = \int_{A_e} \sigma_y y dA + \int_{A_p} \sigma_y y dA = \int_{A_e} E \Phi y^2 dA + \int_{A_p} E \varepsilon_y y dA \quad (4.174)$$

na qual a primeira parcela refere-se ao momento na área cujas fibras ainda estão em regime elástico ( $\sigma < \sigma_y$ ) e a segunda surge em decorrência da zona já plastificada ( $\sigma = \sigma_y$ ). Considerando a simetria da seção retangular em relação à linha neutra, a equação anterior torna-se:

$$M = 2E\Phi b \int_0^{\bar{y}} y^2 dy + 2b\sigma_y \int_{\bar{y}}^{h/2} y dy = \frac{2}{3} E\Phi b \bar{y}^3 + 2b\sigma_y \left( \frac{h^2}{4} - \bar{y}^2 \right) \quad (4.175)$$

Usando, agora, as relações (4.172) e (4.173), e lembrando que  $\varepsilon_y = (h/2)\Phi_y$ , chega-se, após algumas simplificações, à expressão:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Phi_y}{\Phi} \right)^2 \right] \quad (4.176)$$

Observando a Figura (4.17d) e a Equação (4.173), percebe-se que quando  $\Phi \rightarrow \infty$  toda a seção se plastificou ( $\bar{y} \rightarrow 0$ ). Nesse caso, a relação  $\Phi_y/\Phi$  se aproxima de zero e, portanto, tem-se  $M = M_p$ . Assim, usando (4.176), tem-se:

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{3}{2} \therefore M_p = \frac{3}{2} M_y \quad (4.177)$$

Nota-se, pela equação anterior, que o colapso plástico de uma seção retangular ocorre quando o momento é 50% maior que o momento de escoamento.

A teoria da plasticidade define o fator de forma como sendo a relação entre o momento plástico e o momento elástico máximo (momento de escoamento) de uma seção transversal, ou seja:

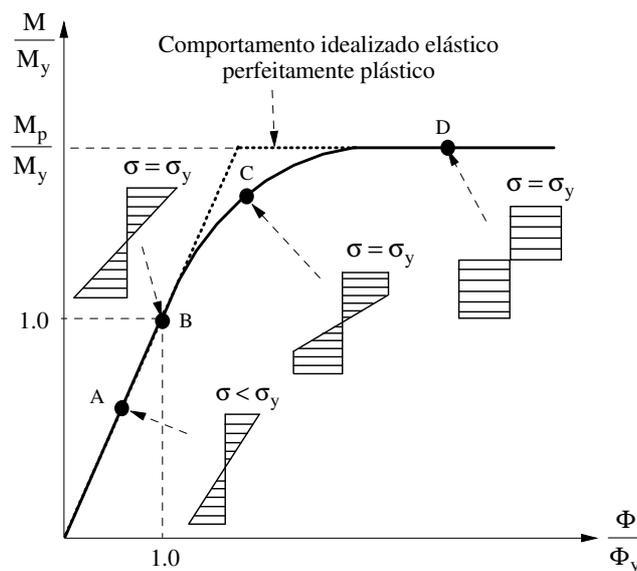
$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y Z}{\sigma_y W} = \frac{Z}{W} \quad (4.178)$$

sendo  $Z$  o momento plástico da seção.

O fator de forma especifica a quantidade adicional de momento que uma seção pode suportar além de seu momento elástico máximo. Para uma seção retangular, comparando (4.177) e (4.178), tem-se  $f = 1.5$ . Esse fator é maior para seções com massa concentrada próxima do centróide.

A Figura 4.18 mostra a relação momento-curvatura e ilustra o comportamento da seção transversal nos regimes elástico ( $A$ ), elasto-plástico ( $C$ ) e plástico ( $D$ ). O ponto  $B$  representa o início de escoamento da seção quando ocorre a plastificação das fibras extremas. Percebe-se que no regime elástico, a curva momento-curvatura é linear, ou seja,  $M/M_y = \Phi/\Phi_y$ . Isso pode ser verificado através das Equações (4.171) e (4.172a). Para uma seção com fator de forma unitário, a relação momento-curvatura é a curva bilinear idealizada que representa o comportamento elástico-perfeitamente plástico.

Os fatores de forma para algumas seções transversais mais comuns são fornecidos na Tabela 4.1.



**Figura 4.18** Diagrama momento-curvatura

Em geral, para se determinar o limite onde o material deixa de se comportar elasticamente e passa a se comportar como material plástico é preciso mais do que um simples valor de tensão de escoamento,  $\sigma_y$ . Como comentado no capítulo anterior, é necessária uma função ou superfície de plastificação,  $F$ , que é um escalar, dependente do estado de tensões,  $\sigma$ , e de parâmetros de estado,  $\psi$ . Se  $F(\sigma, \psi) < 0$ , o material encontra-se

em regime perfeitamente elástico. Caso  $F(\sigma, \psi) = 0$ , o material apresenta comportamento plástico. A situação  $F(\sigma, \psi) > 0$  é impossível.

Neste trabalho, como será mostrada adiante, a superfície de plastificação, que define o estado limite último de uma seção transversal, é função da força axial  $P$  e do momento fletor  $M$  atuantes na seção e de um parâmetro de estado  $\psi$  que acompanha o processo de transição entre os regimes elástico e plástico. Além disso, a superfície de plastificação pode ser também dependente das propriedades geométricas da seção transversal. Vale ressaltar que a presença de força axial reduz a capacidade plástica da seção.

**Tabela 4.1** Fatores de forma para algumas seções transversais

<b>Forma da seção</b>	<b>Fator de forma</b>
Triangular	2.34
Diamante	2.00
Circular	1.70
Retangular	1.50
Tubo circular	1.27
Perfis I	1.10 – 1.2

A capacidade de carga de estruturas com imperfeições iniciais e tensões residuais (imperfeições iniciais do material) geralmente é reduzida (Alvarenga, 2005). Por isso, esses fatores devem ser considerados nas análises de segunda ordem, baseadas no método da rótula plástica. As imperfeições geométricas iniciais nos membros estruturais, tais como o fora do prumo (não verticalidade) e a curvatura inicial, são resultantes de erros durante o processo de fabricação, transporte e montagem. No caso das imperfeições iniciais do material, as diferentes velocidades de resfriamento após a laminação de um perfil levam ao aparecimento de tensões que permanecem nas peças. A essas tensões dá-se o nome de tensões residuais. As extremidades do perfil resfriaram-se mais rapidamente que a região central, contraindo-se. Quando ocorre o resfriamento da parte central, as extremidades, já solidificadas, impedem essa região de contrair-se livremente. Assim, as tensões residuais são de tração na parte central e de compressão nas bordas. Essas tensões são sempre normais à seção transversal dos perfis. As operações executadas posteriormente nas fábricas de estruturas metálicas, envolvendo aquecimento e resfriamento, também provocam o surgimento de tensões residuais. Como exemplo desse tipo de operação tem-se a soldagem.

Nesta seção, a metodologia para análise de segunda ordem de estruturas metálicas planas, na qual os efeitos da distribuição da plasticidade, imperfeições geométricas e tensões residuais são considerados apropriadamente, é apresentada. Entretanto, algumas suposições devem ser feitas antes de se iniciar o estudo das formulações. O comportamento inelástico será restrito às extremidades do elemento que simularão as rótulas plásticas. O comprimento das rótulas será nulo. Além disso, as rótulas plásticas ocorrerão nas extremidades do elemento e sua deformação será constituída apenas por rotação inelástica. Possíveis benefícios oriundos do encruamento (endurecimento por deformação plástica) do material não serão considerados. E, uma vez formada a rótula plástica, as forças internas na seção transversal deverão se mover mantendo-se sobre a sua superfície de resistência plástica da mesma.

Considere o elemento finito mostrado na Figura 4.19. Tem-se um elemento de viga-coluna com molas fictícias nas extremidades capazes de representar o processo de plastificação da seção transversal. Para isso, utiliza-se o parâmetro de estado  $\psi$ , que será discutido detalhadamente mais adiante, ainda nesta seção. As forças e os deslocamentos nodais no sistema local corrotacional de coordenadas são também ilustrados.

O procedimento básico do método da rótula plástica consiste em inserir modificações na matriz de rigidez do elemento à medida que se formem rótulas plásticas em suas extremidades. O surgimento de uma rótula plástica, que consiste na plastificação das fibras que compõem a seção transversal, dependerá de certas regras específicas que variam de acordo com o tipo de formulação a ser utilizada. O estado limite último de resistência pode ser alcançado quando ocorre a formação de um mecanismo plástico com o desenvolvimento de um determinado número de rótulas plásticas na estrutura.

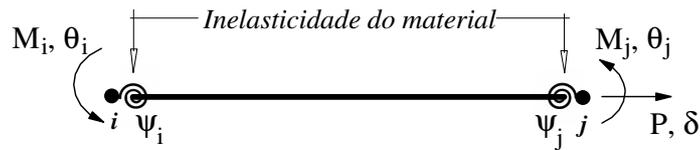
A relação força-deslocamento para o elemento finito, no sistema local corrotacional, considerando os efeitos da inelasticidade do material da seção transversal nas suas extremidades, pode ser escrita, de uma forma geral, como (Silva *et al.*, 2009):

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{(3,3)}^* & k_{(3,6)}^* \\ 0 & k_{(6,3)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.180a)$$

ou, numa forma simplificada,

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (4.180b)$$

onde os subscritos  $i$  e  $j$  são relacionados às extremidades do elemento e o subscrito  $c$  indica o sistema de coordenadas utilizado;  $A$  é a área da seção transversal;  $L$  é o comprimento do elemento;  $\Delta P$  e  $\Delta M$  são, respectivamente, a força axial e o momento fletor incrementais, e  $\Delta\delta$  e  $\Delta\theta$  são os incrementos de deformação axial e rotação nodais. Os coeficientes da matriz  $\mathbf{K}_c$  são funções do parâmetro que simula a degradação da rigidez da seção transversal e daqueles que consideram os efeitos da não linearidade geométrica.



**Figura 4.19** Elemento de viga-coluna com molas fictícias nas extremidades

A Figura 4.20 ilustra, para exemplificação, curvas de interação entre força axial e momento fletor definindo os critérios de início de escoamento e plastificação completa da seção transversal. Estão representadas as regiões nas quais a seção se encontra em regime elástico, elasto-plástico e plástico. Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  demonstram o comportamento das forças internas na seção no instante e após a formação de uma rótula plástica. O ponto  $A$  sobre a curva de resistência indica a formação de uma rótula plástica. A partir desse instante, uma variação na carga axial,  $P$ , com o aumento no carregamento indicaria uma violação da curva de resistência plástica, ou seja, o comportamento da seção seria representado pelo ponto  $B$  externo à curva. Como isso não pode ocorrer, a variação de  $P$ ,  $\delta P$ , implicará numa variação obrigatória de  $M$ ,  $\delta M_{pr}$ , para manter as forças internas da seção na superfície, posicionando-se então no ponto  $C$ .

Portanto, conclui-se que com o aumento da força axial em uma seção plastificada, a resistência da seção se torna menor que as forças que nela atuam. Uma alteração na relação força-deslocamento do elemento (Equação 4.180) será então necessária para que as equações de resistência plástica da seção não sejam violadas. Essa alteração pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 k_{c(2,2)}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_2 k_{c(3,3)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \quad (4.181a)$$

que, numa forma compacta, é escrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_{ch} \Delta \mathbf{u}_c + \Delta \mathbf{f}_{ps} \quad (4.181b)$$

na qual  $k_{c(2,2)}^* = k_{c(2,2)} - k_{c(2,3)}k_{c(3,2)}/k_{c(3,3)}$  e  $k_{c(3,3)}^* = k_{c(3,3)} - k_{c(2,3)}k_{c(3,2)}/k_{c(2,2)}$ , onde  $k_{c(m,n)}$  representa o termo correspondente à linha  $m$  e à coluna  $n$  na matriz de rigidez  $\mathbf{K}_c$  (Equação 4.180a). Essa matriz, que depende da formulação utilizada, será apresentada no decorrer da seção. O parâmetro  $\Delta \mathbf{f}_{ps}$  é o vetor de correção dos esforços internos, e os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são apresentados na Tabela 4.2. Nessa tabela,  $\delta M_{pr}$  é a modificação introduzida para transladar o momento  $M$  na seção para a superfície de interação, mantendo a força axial  $P$  fixa como indicado na Figura 4.20.

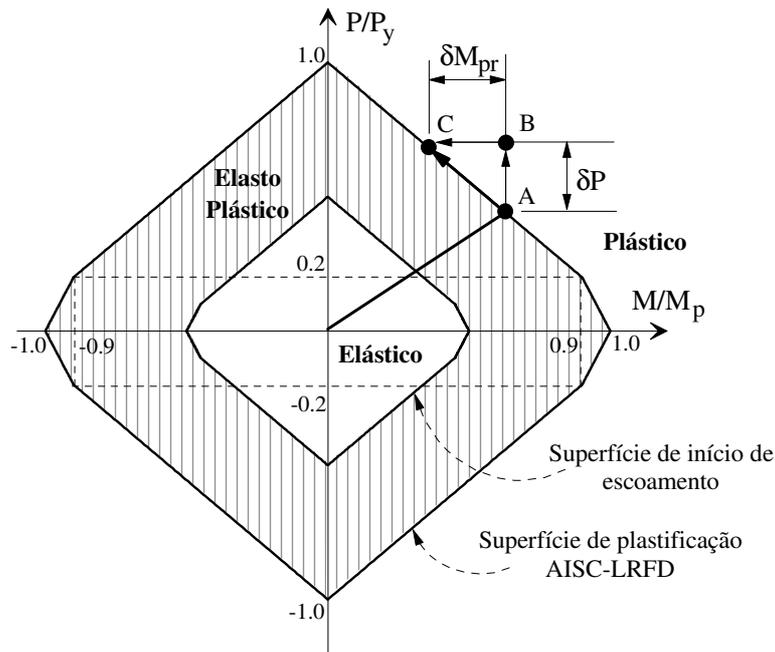
**Tabela 4.2** Parâmetros na Equação (4.181a)

Rótula Plástica	Parâmetros			
	$C_1$	$C_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Extremidade $i$	0	1	$\delta M_{pri}$	$\delta M_{prj}(k_{c(3,2)}/k_{c(2,2)})$
Extremidade $j$	1	0	$\delta M_{prj}(k_{c(2,3)}/k_{c(2,3)})$	$\delta M_{prj}$
Extremidades $i$ e $j$	0	0	$\delta M_{pri}$	$\delta M_{prj}$

Duas abordagens para análise inelástica de segunda-ordem podem ser selecionadas: a formulação PHF-1 (*Plastic-hinge finite element formulation - 1*), que se baseia na metodologia proposta por Liew *et al.* (1993); ou a formulação PHF-2 (*Plastic-hinge finite element formulation - 2*), que segue os conceitos da formulação desenvolvida por Chan e Chui (2000). Com essas formulações, é possível capturar a transição do início de escoamento até a plastificação total da seção transversal.

Os efeitos de plasticidade distribuída associados com a formação de rótulas plásticas são capturados através de um parâmetro adimensional de redução de rigidez  $\psi$  que se altera com o nível de carregamento. Na formulação plástica-refinada PHF-1, esse parâmetro é assumido variar de acordo com uma determinada função para acompanhar o avanço da região plástica na extremidade do elemento. Modelos matemáticos para tal função, definidos a partir das superfícies de resistência plástica fornecidas pelo AISC (2003), são utilizados. Na formulação PHF-2, ele é avaliado a partir das forças internas e das características geométricas da seção do elemento. Outra característica da formulação PHF-1 é que o escoamento gradual causado pelas tensões residuais é considerado

utilizando o conceito de módulo tangente  $E_t$ . As equações de resistência para colunas fornecidas pelo *Column Research Council* (CRC; Galambos, 1998) e pelo AISC-LRFD (AISC, 1986) são utilizadas. Nessas últimas, são considerados implicitamente os efeitos das imperfeições iniciais nas colunas. Por esse motivo o módulo tangente obtido com as equações do AISC-LRFD é menor que o obtido com as equações do CRC, para uma mesma força axial.



**Figura 4.20** Violação da superfície de interação

A metodologia apresentada através das equações anteriores será particularizada a seguir para as formulações PHF-1 e PHF-2. Vale ressaltar que o referencial Lagrangiano atualizado é utilizado no desenvolvimento dessas formulações.

#### 4.5.1 Formulação PHF-1

No Apêndice A, tem-se o desenvolvimento de uma formulação para elemento de viga-coluna onde os efeitos de segunda ordem são considerados através das funções de estabilidade. Essa técnica será, aqui, utilizada para definir a formulação PHF-1. Porém, a matriz do elemento será modificada pelo coeficiente de rigidez  $\psi$  e pelo módulo tangente,  $E_t$ , para simular a degradação da rigidez da seção transversal nas extremidades do elemento associada aos efeitos provocados pela ação conjunta da força axial e do momento fletor.

O método do módulo tangente é uma aproximação da redução da rigidez da seção do elemento. O conceito de módulo tangente tem como fundamento básico a suposição de que, durante o processo de flambagem inelástica, as tensões resultantes ao longo da seção transversal atingem o nível de escoamento do material (Lui e Chen, 1986). Desse modo, o comportamento tensão-deformação das fibras que compõem a seção é alterado, sendo governado, a partir desse instante, pela variação do módulo tangente  $E_t$ . Nesse método, atribuído a Engesser (1889) e descrito primeiramente em Gaylord e Gaylord (1972), o módulo de elasticidade é substituído por um módulo tangente. Esse parâmetro é função do esforço axial atuante no elemento. Essa técnica foi utilizada por Orbison (1982), White *et al.* (1993) e Liew *et al.* (1993) para melhorar a precisão da análise elasto-plástica através de rótulas plásticas em estruturas nas quais os membros estão sujeitos a grandes esforços axiais.

A relação entre o módulo de elasticidade e o módulo tangente, obtida através das equações de resistência para colunas do AISC-LRFD (AISC, 1986), é expressa por:

$$\frac{E_t}{E} = 1.0, \text{ para } P \leq 0.39P_y \quad (4.182a)$$

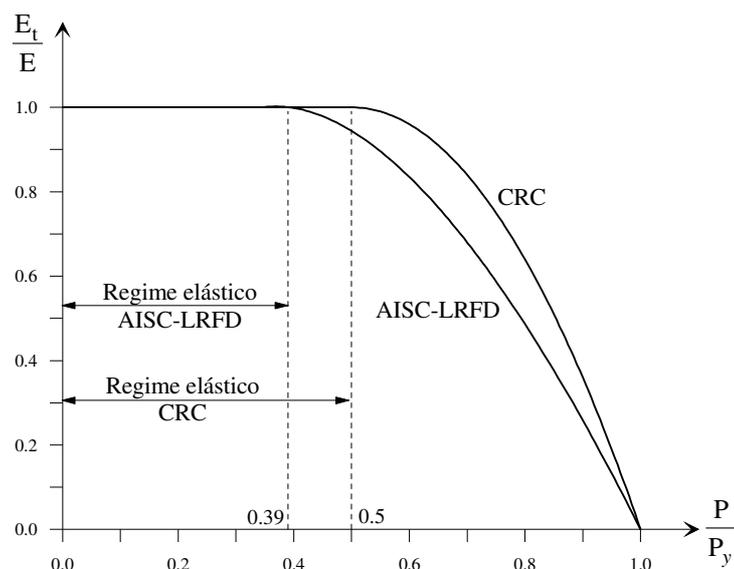
$$\frac{E_t}{E} = -2.7243 \frac{P}{P_y} \ln \left( \frac{P}{P_y} \right), \text{ para } P > 0.39P_y \quad (4.182b)$$

Porém, essas equações podem ser empregadas apenas para cargas axiais de compressão, ou seja, para  $P < 0$ . No caso de forças axiais de tração, as equações de resistência para colunas do CRC (Galambos, 1998) podem ser adotadas. Nesse caso, o módulo tangente é definido usando as seguintes equações:

$$\frac{E_t}{E} = 1.0, \text{ para } P \leq 0.5P_y \quad (4.183a)$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{4P}{P_y} \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right), \text{ para } P > 0.5P_y \quad (4.183b)$$

As Equações (4.182) e (4.183) estão representadas graficamente na Figura 4.21. Observando a ilustração, percebe-se que o módulo de elasticidade permanece constante até que a tensão atinja 39% (LRFD) ou 50% (CRC) da relação  $P/P_y$ , caracterizando o regime elástico. A partir desse ponto, a seção apresenta comportamento inelástico e o módulo tangente é reduzido gradativamente até a sua plastificação completa. Nesse instante, o módulo tangente  $E_t$  é zero.



**Figura 4.21** Redução da rigidez inelástica para o efeito da carga axial

O parâmetro  $\psi$  é um escalar que simula o processo de degradação da rigidez da seção associada com a plastificação das extremidades  $i$  e  $j$  do elemento. Esse parâmetro tem valor unitário quando o elemento está em regime elástico, e é igual a zero quando uma rótula plástica é formada. Quatro modelos podem ser usados para representá-lo. Cada um deles com um limite estabelecido para o início do processo de degradação plástica. O primeiro deles é representado pela equação:

$$\psi = 4\alpha(1 - \alpha) \quad (4.184a)$$

Nesse modelo, assume-se  $\psi$  variando parabolicamente com  $\alpha$  e considera-se o início do escoamento acontecendo em  $\alpha = 0.5$ . Assim, ao adotá-lo, a redução da rigidez da seção inicia-se para  $\alpha > 0.5$ . Caso contrário, se  $\alpha \leq 0.5$ , assume-se que a seção encontra-se em regime puramente elástico e, portanto, nenhuma degradação ocorre ( $\psi = 1$ ). O coeficiente  $\alpha$  será definido mais adiante.

No próximo modelo implementado,  $\psi$  varia linearmente com  $\alpha$  e o processo de degradação da rigidez da seção é iniciado quando  $\alpha > 0.7$ . A equação que define tal modelo é:

$$\psi = (1 - \alpha)/0.3 \quad (4.184b)$$

Outra maneira possível de se estabelecer a redução gradual da rigidez inelástica da seção, neste trabalho, é usando a seguinte expressão para definir o parâmetro  $\psi$ :

$$\psi = \left( -\alpha^2 + 1.4\alpha - 0.4 \right) / 0.09 \quad (4.184c)$$

onde o início de escoamento acontece quando  $\alpha > 0.7$ .

O último modelo é definido pela equação:

$$\psi = -2.7243 \alpha \ln(\alpha) \quad (4.184d)$$

com início de escoamento acontecendo para  $\alpha > 0.39$ .

A redução da capacidade de momento de uma seção transversal decorrente da presença de força axial é considerada através das superfícies de resistência plástica (equações de interação) propostas pelo AISC-LRFD (AISC, 1986). A partir dessas curvas, se define o termo  $\alpha$  como sendo um índice de escoamento que mede a interação entre a força axial,  $P$ , e momento fletor,  $M$ , na seção. Ele é definido como:

$$\alpha = \frac{P}{P_y} + \frac{8}{9} \frac{M}{M_p}, \text{ para } \frac{P}{P_y} \geq \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} \quad (4.185a)$$

$$\alpha = \frac{P}{2P_y} + \frac{M}{M_p}, \text{ para } \frac{P}{P_y} < \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} \quad (4.185b)$$

onde  $P_y$  é resistência plástica axial (capacidade de força axial na ausência de momento) e  $M_p$  é o momento plástico (capacidade de momento na ausência de força axial). Considerando que as tensões residuais não afetam a capacidade plástica limite, o momento e a força axial plásticos são definidos como:

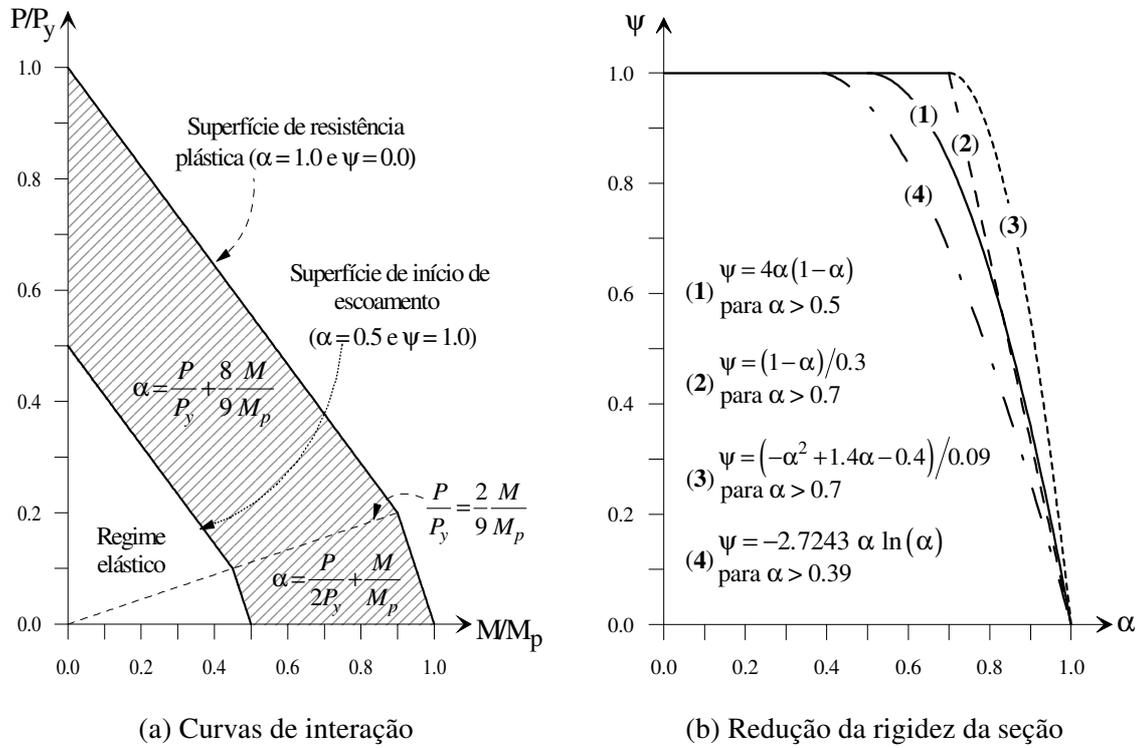
$$M_p = \sigma_y Z \quad (4.186a)$$

$$P_y = \sigma_y A \quad (4.186b)$$

sendo  $Z$  o módulo plástico da seção,  $\sigma_y$  a tensão de escoamento e  $A$  a área da seção transversal.

A Figura 4.22a a seguir mostra a superfície de resistência plástica, que é obtida fazendo  $\alpha = 1$  na Equação (4.185), e também a superfície de início de escoamento para  $\alpha = 0.5$  na mesma relação. Pode-se observar por essa figura que, se as forças internas na seção situam-se abaixo ou sobre a superfície de início de escoamento ( $\alpha \leq 0.5$ ), é assumido que a seção encontra-se em regime totalmente elástico e nenhuma redução da sua rigidez ocorre. Na região hachurada é considerado que a seção encontra-se em regime elasto-plástico. As forças internas,  $P$  e  $M$ , sobre a superfície de resistência plástica indicam a

formação de uma rótula plástica. Na Figura 4.22b estão representadas as variações do parâmetro  $\psi$  com o coeficiente  $\alpha$  para os quatro modelos implementados e estabelecidos através das relações (4.184a-d).



**Figura 4.22** Critérios de plastificação

Com a definição dos parâmetros  $E_t$  e  $\psi$ , pode-se, finalmente, estabelecer a relação força-deslocamento do elemento de viga-coluna considerando os efeitos da plastificação da seção nas duas extremidades do elemento. De acordo com Liew *et al.* (1993), a relação definida anteriormente de uma forma geral através das Equações (4.180a-b) é, para essa formulação, reescrita, no sistema local corrotacional (Figura 4.19), como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t A/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{(3,3)}^* & k_{(3,6)}^* \\ 0 & k_{(6,3)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.187)$$

sendo:

$$k_{(3,3)}^* = \frac{E_t I}{L} \psi_i \left[ \Gamma_1 - \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1} (1 - \psi_j) \right] \quad (4.188a)$$

$$k_{(3,6)}^* = \frac{E_t I}{L} \psi_i \psi_j \Gamma_2 \quad (4.188b)$$

$$k_{(6,6)}^* = \frac{E_t I}{L} \psi_j \left[ \Gamma_1 - \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1} (1 - \psi_i) \right] \quad (4.188c)$$

$$k_{(6,3)}^* = \frac{E_t I}{L} \psi_i \psi_j \Gamma_2 \quad (4.188d)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  referem-se às funções de estabilidade que têm como objetivo introduzir os efeitos da não linearidade geométrica na metodologia.

O processo de transformação da relação de equilíbrio definida pela Equação (4.187) para o sistema global é comentado no Apêndice A, especificamente na Seção A.2.3.

#### 4.5.2 Formulação PHF-2

O desenvolvimento da plasticidade nos membros da estrutura é representado por uma pseudo mola com rigidez rotacional variável. A mola, que é posicionada na extremidade do membro, é ajustada de acordo com o nível de plasticidade nessa posição. A rigidez da mola diminui com o aumento da plastificação até se anular, indicando que a extremidade do membro se plastificou completamente. Assim como na formulação PHF-1, o parâmetro  $\psi$  é usado para acompanhar a perda de rigidez da seção transversal durante o processo de carregamento. Aqui, porém, ele é usado para definir a rigidez dos elementos de mola, como mostra a Figura 4.23. O elemento de mola tem comprimento nulo e sua rigidez,  $S_s$ , é definida como:

$$S_s = \frac{6EI}{L} \frac{\psi}{1-\psi} \quad (4.189)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia e  $L$  o comprimento do elemento de viga-coluna.

Chan e Chui (2000) afirmam que a constante 6 em (4.189) tem a função de fazer com que essa curva esteja de acordo com a mais rigorosa função momento-curvatura de uma seção genérica.

Enquanto a seção encontra-se em regime elástico, a rigidez da mola é infinita e o momento é completamente transferido de um lado para o outro do elemento de mola. Nesse caso, tem-se  $\psi = 1$ . Entretanto, quando uma rótula plástica se forma, a rigidez da

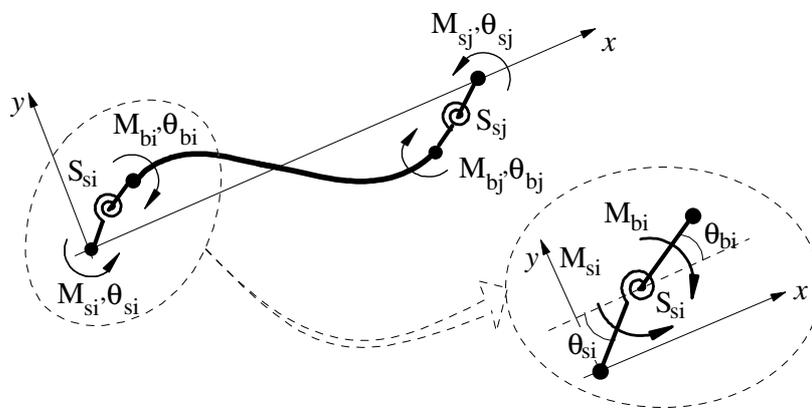
mola se anula e, portanto,  $\psi = 0$ . Nesse caso, nenhum momento é transferido. A expressão usada para definir  $\psi$  é:

$$\psi = \frac{|M_{pr} - M|}{|M_{pr} - M| + |M - M_{er}|} \quad (4.190)$$

sendo  $M_{er}$  o momento de início de escoamento e  $M_{pr}$  o momento de plastificação.

Quando o momento na seção for inferior ao momento de início de escoamento,  $M_{er}$ , considera-se que a seção se encontra em regime elástico e que a rigidez da mola é bastante elevada (infinita). Nesse caso, como já mencionado, assume-se  $\psi = 1$ . Assim que o momento atuante alcança o momento de início de escoamento, inicia-se o processo de redução da rigidez da seção. Com a plastificação da seção, o parâmetro  $\psi$  se reduz a zero e, com isso, a rigidez do elemento de mola se anula, simulando a formação de uma rótula plástica. Isso ocorre quando o momento na seção atinge o momento de plastificação,  $M_{pr}$ .

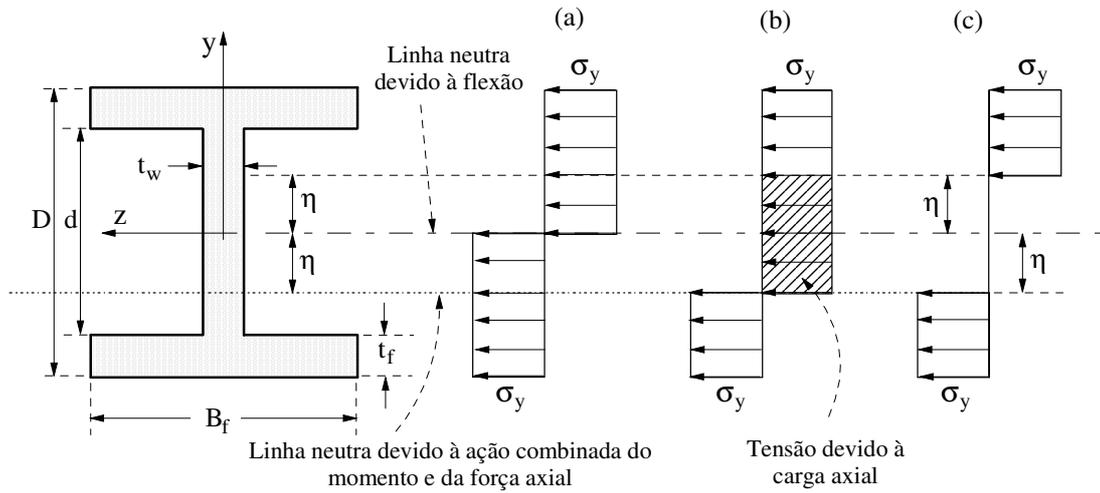
Um outro modelo matemático para definição do parâmetro  $\psi$  pode ser encontrado em Liu (2007).



**Figura 4.23** Elemento de viga-coluna com molas fictícias

Se uma seção é submetida apenas a momento plástico, a distribuição de tensões é a representada pela Figura 4.24a. Entretanto, a presença da força axial de compressão provoca tensões adicionais na seção. Assim, a distribuição de tensões é alterada. A região da seção cujas fibras estão comprimidas aumenta e, conseqüentemente, a região onde as fibras estão tracionadas diminui, como mostra a Figura 4.24b. É importante ressaltar, que nessa formulação PHF-2, por basear-se no conceito da seção montada (Chan e Chui, 1997, 2000), perfis do tipo I (para vigas) ou H (para colunas) são considerados. Dessa forma,

devido à simetria dessas seções, é razoável assumir que as áreas cujas fibras estão submetidas à tensão de compressão e tração provocadas pelo momento fletor sejam iguais. Isso é ilustrado na Figura 4.24c. A área da seção que resiste ao esforço axial é  $2\eta t_w$ , sendo  $t_w$  a espessura da alma do perfil e  $2\eta$  a altura dessa área. A área restante resiste, conseqüentemente, ao momento fletor.



**Figura 4.24** Distribuição de tensões na seção transversal

Com as considerações estabelecidas no parágrafo anterior é possível definir o momento plástico reduzido sob ação da força axial. As expressões utilizadas, que podem ser determinadas usando (4.170b), são as seguintes:

$$M_{pr} = \left[ B_f t_f (D - t_f) + \left( (d/2)^2 - \eta^2 \right) t_w \right] \sigma_y, \text{ para } \eta \leq d/2 \quad (4.191a)$$

$$M_{pr} = \left( (D/2)^2 - \eta^2 \right) B_f \sigma_y, \text{ para } d/2 < \eta \leq d/2 + t_f \quad (4.191b)$$

sendo:

$$\eta = P / (2\sigma_y t_w), \text{ para } \eta \leq d/2 \quad (4.192a)$$

$$\eta = (P - \sigma_y t_w d) / (2B_f \sigma_y) + d/2, \text{ para } d/2 < \eta \leq d/2 + t_f \quad (4.192b)$$

Nas Equações (4.191) e (4.192),  $t_w$  é a espessura da alma,  $t_f$  é a espessura da mesa,  $B_f$  é a largura da mesa e  $D$  é a altura da seção do perfil. O termo  $d$  é definido como:  $d = D - 2t_f$ . Essa abordagem segue precisamente as fórmulas da norma britânica

BS5950 (1990) e produz os mesmos níveis de capacidade ao momento de seções sob carregamento axial publicados pelo SCI (*Steel Constructional Institute*, 1987).

O momento que define a superfície de início de escoamento varia com a força axial  $P$ , e é definido como:

$$M_{er} = (\sigma_y - \sigma_r - P/A)W \quad (4.193)$$

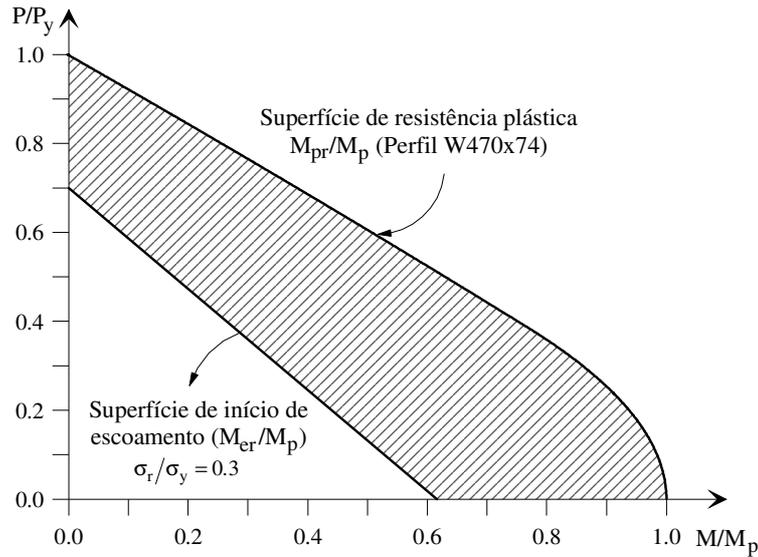
onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento,  $\sigma_r$  é a tensão residual e  $W$  é o módulo elástico já definido anteriormente através da Equação (4.172b).

As Equações (4.191a-b) definem a superfície de interação entre força axial e momento fletor usada para avaliar a capacidade resistente da seção na formulação PHF-2. Observando as Equações (4.191) e (4.193) percebe-se que, ao contrário da formulação PHF-1, a curva de início de escoamento tem o aspecto diferente da curva de plastificação total. Nota-se que nessas equações não são utilizados parâmetros empíricos sem significado físico como os utilizados nas Equações (4.185a-b). Apenas as características geométricas da seção transversal são necessárias. A Figura 4.25 mostra a superfície de resistência plástica para o perfil W470x74.

As tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais devem ser adotadas seguindo recomendações normativas. O *European Convention for Construction Steelwork* (ECCS, 1983), por exemplo, considera que a tensão residual máxima depende da razão entre a altura e a largura da seção como ilustrado na Figura 4.26. Esse valor é usado na obtenção do momento de escoamento,  $M_{er}$ . Já a Figura 4.27 apresenta as imperfeições geométricas iniciais, fora de prumo e curvatura inicial, sugeridas por essa mesma norma. O AISC-LRFD (2003) considera uma curvatura inicial  $\delta_0$  igual a  $0.001L$  e o fora de prumo  $\Delta_0 = 0.002L$ , sendo  $L$  o comprimento do membro. Na NBR 8800 (2008), os efeitos das imperfeições geométricas iniciais na análise estrutural são considerados assumindo um desaprumo de valor  $h/200$ , sendo  $h$  a altura do pavimento. Esse desaprumo pode ser substituído por forças horizontais fictícias.

Uma vez estabelecidos os critérios de plastificação, considere, novamente, o elemento finito apresentado na Figura 4.23. A condição de equilíbrio de momento fletor nos elementos de mola é expressa pelas equações:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{si} & -S_{si} \\ -S_{si} & S_{si} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (4.194a)$$



**Figura 4.25** Superfície de início de escoamento e de plastificação total

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{sj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sj} & -S_{sj} \\ -S_{sj} & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{sj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.194b)$$

sendo  $\Delta M_s$ ,  $\Delta \theta_s$  e  $\Delta M_b$ ,  $\Delta \theta_b$  os incrementos de momentos e rotações nas junções do elemento de mola com o nó global e do elemento de mola com o membro de viga-coluna, respectivamente; e  $S_s$  representa a rigidez da seção transversal nas extremidades do elemento de viga-coluna. O cálculo de  $S_s$  foi apresentado no início desta seção.

Adicionando-se as molas às extremidades do elemento de viga-coluna, a matriz de rigidez convencional do elemento deverá ser modificada para considerar o efeito da inelasticidade do material da seção. Para as seções internas da viga-coluna, a relação momento-rotação é dada por:

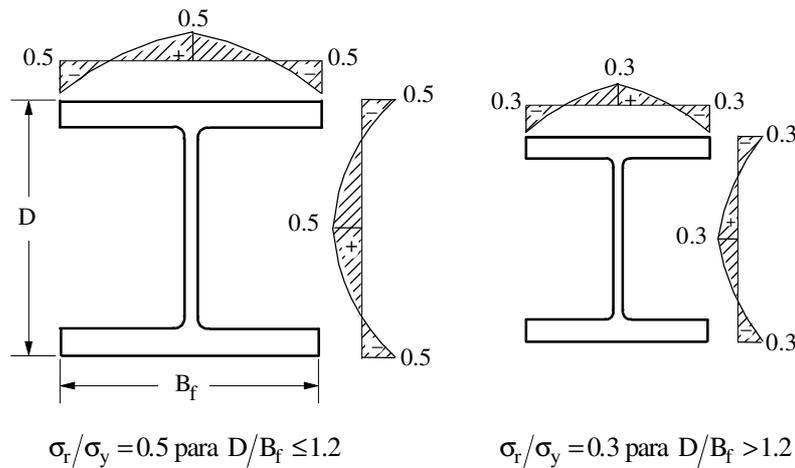
$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.195)$$

onde  $\Delta M_{bi}$ ,  $\Delta M_{bj}$ ,  $\Delta \theta_{bi}$  e  $\Delta \theta_{bj}$  são os incrementos de momentos e rotações nodais associados aos pontos nodais  $i$  e  $j$  do elemento de viga-coluna. Os termos  $k_{(m,n)}$  da matriz são os coeficientes de rigidez à flexão que dependem da formulação geometricamente não linear adotada. Nessa formulação, é possível utilizar as duas formulações apresentadas na Seção 4.2 definidas em referencial Lagrangiano atualizado, SOF-1 e SOF-2. Além dessas duas opções para a consideração dos efeitos de segunda ordem, as seguintes expressões para esses termos podem ser utilizadas:

$$k_{(3,3)} = k_{(6,6)} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (4.196a)$$

$$k_{(3,6)} = k_{(6,3)} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} \quad (4.196b)$$

Essa escolha será nomeada aqui de formulação SOF-2 simplificada. Isso porque os termos assim definidos são uma simplificação daqueles da metodologia SOF-2 linearizada. Vale ressaltar que essas expressões foram usadas por Chan e Chui (2000).



**Figura 4.26** Distribuição de tensões residuais nos perfis (ECCS, 1983)

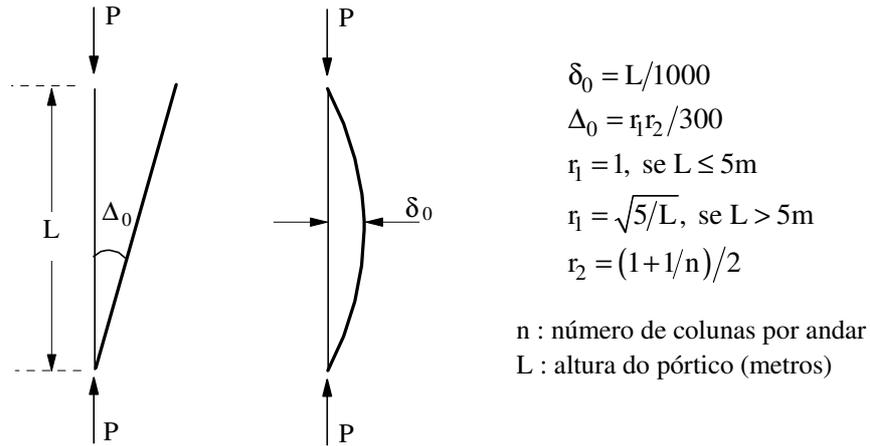
Combinando as Equações (4.194) e (4.195) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{si} & -S_{si} & 0 & 0 \\ -S_{si} & S_{si} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} & 0 \\ 0 & k_{(6,3)} & S_{sj} + k_{(6,6)} & -S_{sj} \\ 0 & 0 & -S_{sj} & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (4.196)$$

Fazendo a multiplicação matricial e assumindo que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais do elemento, ou seja, que  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  são iguais a zero, chega-se, após algumas transformações algébricas, à seguinte relação momento-rotação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} S_{si} & 0 \\ 0 & S_{sj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{si} & 0 \\ 0 & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{sj} + k_{(6,6)} & -k_{(3,6)} \\ -k_{(6,3)} & S_{si} + k_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{si} & 0 \\ 0 & S_{sj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (4.197)$$

na qual  $\beta = (S_{si} + k_{(3,3)})(S_{sj} + k_{(6,6)}) - k_{(6,3)}k_{(3,6)}$ .



**Figura 4.27** Imperfeições iniciais (ECCS, 1983)

Realizando as operações matriciais em (4.197), chega-se à relação de equilíbrio do elemento finito mostrado na Figura 4.19 em sua configuração indeformada. Essa relação, na forma incremental, é definida no sistema local corrotacional como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{si} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & S_{si} - S_{si}^2 (k_{(6,6)} + S_{sj})/\beta & S_{si} S_{sj} k_{(3,6)}/\beta \\ 0 & S_{si} S_{sj} k_{(6,3)}/\beta & S_{sj} - S_{sj}^2 (k_{(3,3)} + S_{si})/\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (4.198)$$

sendo  $\Delta P$  e  $\Delta \delta$ , respectivamente, o incremento de força axial e a deformação axial no elemento. Usando uma notação simplificada, a Equação (4.198) pode ser reescrita usando a relação (4.180b), ou seja:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (4.199)$$

onde  $\Delta \mathbf{f}_c^T = \{\Delta P \ \Delta M_{si} \ \Delta M_{sj}\}$  é o vetor de forças nodais básicas e  $\Delta \mathbf{u}_c^T = \{\Delta \delta \ \Delta \theta_{si} \ \Delta \theta_{sj}\}$  é o vetor de deslocamentos naturais do elemento. O subscrito  $c$ , como já estabelecido, indica o sistema de coordenadas utilizado.

Para se obter a expressão final força-deslocamento para o elemento no sistema global de coordenadas ( $X, Y$ ), a relação força-deslocamento definida no sistema corrotacional (Equação 4.199) deve ser primeiramente transformada para o sistema local de coordenadas do elemento ( $x, y$ ). Detalhes desses sistemas de coordenadas podem ser visualizados na Figura 4.28.

As componentes de forças do sistema corrotacional se relacionam com as componentes de forças do sistema local através da seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c \quad (4.200)$$

sendo  $\mathbf{f}_i^T = \{P_i \ Q_i \ M_i \ P_j \ Q_j \ M_j\}$  o vetor de forças nodais do elemento referente ao sistema local de coordenadas, e  $\mathbf{T}_{cl}$ , a matriz de transformação que é definida como:

$$\mathbf{T}_{cl}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento.

Usando (4.200), o vetor de forças incrementais no sistema local de coordenadas é dado por:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \Delta(\mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c) = \mathbf{T}_{cl} \Delta \mathbf{f}_c + \Delta \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c \quad (4.202)$$

na qual, na segunda parte, a primeira parcela ( $\mathbf{T}_{cl} \Delta \mathbf{f}_c$ ) é resultante do incremento das forças nodais básicas. A outra parcela ( $\Delta \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c$ ) é decorrente do trabalho realizado por essas forças que, segundo Chan e Chui (2000), pode ser substituída por  $(\mathbf{N} \Delta \mathbf{u})$ , sendo a matriz  $\mathbf{N}$  definida como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P/L & 0 & 0 & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.203)$$

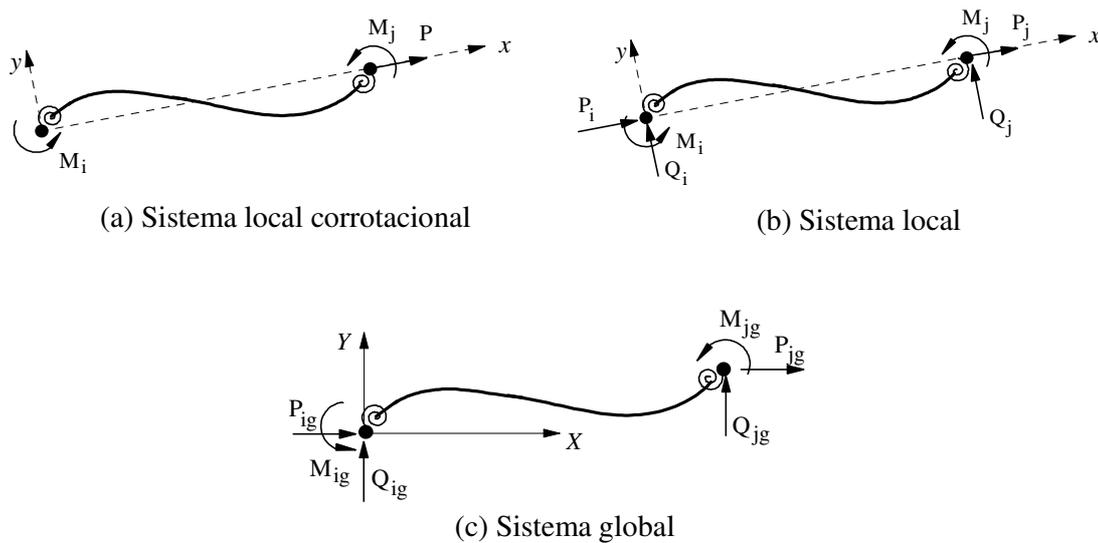
Sabendo que a relação entre os deslocamentos nodais incrementais nos sistemas corrotacional e local é dada por:

$$\Delta \mathbf{u}_c = \mathbf{T}_{cl}^T \Delta \mathbf{u} \quad (4.204)$$

a Equação (4.202) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{f}_i = (\mathbf{T}_{cl} \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cl}^T + \mathbf{N}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{u} \quad (4.205)$$

onde  $\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_{cl} \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cl}^T + \mathbf{N}$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema local de coordenadas.



**Figura 4.28** Transformações entre os sistemas corrotacional e global de coordenadas

A transformação dessa matriz  $\mathbf{K}_e$  para o sistema de coordenadas globais é realizada usando a equação (4.82) definida na Seção 4.3.

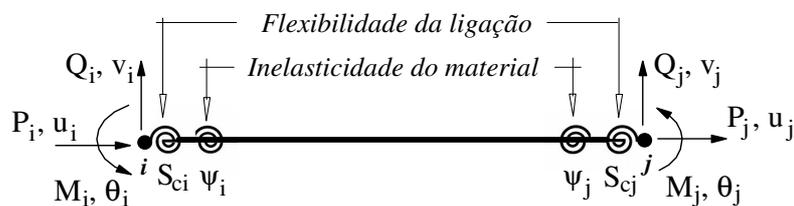
## 4.6 Análise Avançada

Os atributos que afetam significativamente o comportamento de membros estruturais metálicos podem ser agrupados em três categorias, que como se sabe são: não linearidade geométrica, que inclui os efeitos  $P-\Delta$  e  $P-\delta$ , assim como as imperfeições geométricas; a não linearidade do material, que envolve o escoamento gradual do material e a influência de tensões residuais; e, a terceira, decorrente da relação não linear momento-rotação das ligações semi-rígidas. Quando esses efeitos são considerados de forma conjunta tem-se caracterizada uma análise avançada de estruturas metálicas.

Finalizando este capítulo no qual várias formulações para análise estática vêm sendo apresentadas, esta seção descreve, então, a metodologia usada para análise avançada de estruturas metálicas reticuladas planas. Para essa análise, um elemento finito híbrido, mostrado na Figura 4.29, constituído de elementos de ligação nas suas extremidades e capaz de sofrer deformações plásticas nessas posições, é adotado. Em cada extremidade encontra-se um par de molas fictícias de tamanhos desprezíveis, dispostas em série e que simulam os efeitos da plastificação da seção e da rigidez da ligação. As molas mais internas, molas inelásticas, caracterizam o comportamento da seção transversal, do escoamento inicial à plastificação completa. Já o efeito da rigidez da ligação é representado

pelas demais molas. O elemento de viga-coluna simula os efeitos da não linearidade geométrica.

O comportamento do elemento é dependente das resistências da ligação e do membro a ela conectado. De acordo com Liu (2007), dependendo da interação entre os efeitos da inelasticidade do membro e da flexibilidade da ligação, três tipos de ligações podem ser caracterizados. Essa classificação é feita em função da capacidade de momento da ligação,  $M_u$ , e dos momentos de escoamento,  $M_y$ , e de plastificação,  $M_p$ , do elemento de viga-coluna:



**Figura 4.29** Elemento finito híbrido

*Ligações de baixa resistência:*  $M_u \leq M_y$

Nessa primeira situação, o comportamento do elemento híbrido é governado apenas pela ligação semi-rígida. Como nenhuma plastificação ocorre, o comportamento não linear momento-rotação do elemento é determinado apenas pelo comportamento da ligação. Se  $M_u$  é muito pequeno, tem-se uma ligação com característica próxima da rotulada.

*Ligações de resistência parcial:*  $M_y < M_u \leq M_p$

Tanto a ligação semi-rígida quanto a inelasticidade do elemento de viga-coluna são responsáveis pelo comportamento do elemento híbrido.

*Ligações de resistência total:*  $M_u \geq M_p$

E, um último caso, quando a capacidade de momento da ligação é maior ou igual ao momento plástico, a inelasticidade do membro é que domina o comportamento do elemento híbrido. Embora, evidentemente, a ligação influencie na degradação da rigidez do elemento híbrido devido ao seu comportamento não linear.

Um projeto satisfatório é conseguido nos casos em que tanto a ligação quanto o membro têm aproximadamente a mesma capacidade resistente, ou seja,  $M_u \cong M_p$ . Uma

ligação altamente resistente ( $M_u \gg M_p$ ) deve ser evitada pois, além da capacidade total da ligação não ser utilizada, isso aumenta o custo da ligação.

Os fundamentos para se realizar uma análise de segunda ordem considerando as ligações viga-coluna como semi-rígidas ou a inelasticidade do material da seção transversal na análise estrutural foram apresentados separadamente nas Seções 4.4 e 4.5 deste capítulo. Para realizar a análise conjunta, duas formulações que incorporam os efeitos de segunda ordem, do escoamento do material e da flexibilidade da ligação serão apresentadas nesta seção.

Na metodologia para análise inelástica de segunda ordem de estruturas com ligações semi-rígidas as mesmas observações feitas na Seção 4.5 referentes à análise inelástica são válidas. Se a resistência plástica da seção for atingida, uma rótula será formada. A violação da superfície de resistência implica em uma alteração na relação força-deslocamento do elemento. Essa alteração é representada pela Equação (4.181). Além disso, se a ligação atingir a sua capacidade última antes que uma rótula plástica seja desenvolvida no local, uma rótula de ligação ( $S_c = 0$ ) é formada. No caso de descarregamento em um dos pontos nodais do elemento com ligação semi-rígida, considera-se o valor para a rigidez da ligação,  $S_c$ , o seu valor inicial,  $S_{cini}$ .

Portanto, as novas formulações, AAF-1 (*Advanced analysis finite element formulation – 1*) e AAF-2 (*Advanced analysis finite element formulation – 2*), são simples extensões daquelas estudadas na Seção 4.5. A nova matriz de rigidez do elemento no sistema local corrotacional,  $\mathbf{K}_c$ , será obtida. Essa matriz é expressa agora em termos do fator de degradação de rigidez,  $\psi$ , e da rigidez da ligação,  $S_c$ , o que permite a consideração direta da influência combinada da inelasticidade e da flexibilidade da ligação na rigidez do sistema estrutural.

A análise elástica será possível com a adoção de um valor elevado para a tensão de escoamento do aço. A escolha adequada de alguns parâmetros poderá favorecer a simulação conjunta ou individual dos efeitos não lineares desejados, sejam eles de origem física e/ou geométrica. Esse estudo foi realizado por Chan e Chui (2000), Rocha (2006) e Santos (2007).

#### **4.6.1 Formulação AAF-1**

A formulação AAF-1 segue os princípios da formulação PHF-1 desenvolvida para análise inelástica de estruturas metálicas reticuladas planas, considerando as ligações viga-coluna

rígidas. Dessa forma, além dos parâmetros  $\psi$  e  $S_c$ , funções de estabilidade e o módulo tangente são usados.

A relação força-deslocamento representada pela Equação (4.187) é modificada então pela presença das ligações semi-rígidas. A nova relação pode ser representada como (Chen *et al*, 1996):

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t A/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{(3,3)}^* & k_{(3,6)}^* \\ 0 & k_{(6,3)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \therefore \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \mathbf{u}_c \quad (4.206)$$

onde, os elementos da matriz de rigidez definidos pelas equações abaixo, são modificados pelos parâmetros que consideram os efeitos citados anteriormente, ou seja,

$$k_{(3,3)}^* = \frac{1}{\beta_{sc}} \left[ \Gamma_{11} + \frac{E_t I \Gamma_{11} \Gamma_{22}}{L S_{cj}} - \frac{E_t I \Gamma_{12}^2}{L S_{cj}} \right] \quad (4.207a)$$

$$k_{(3,6)}^* = \frac{1}{\beta_{sc}} \left[ \Gamma_{22} + \frac{E_t I \Gamma_{11} \Gamma_{22}}{L S_{ci}} - \frac{E_t I \Gamma_{12}^2}{L S_{ci}} \right] \quad (4.207b)$$

$$k_{(6,3)}^* = \frac{\Gamma_{12}}{\beta_{sc}} \quad (4.207c)$$

$$k_{(6,6)}^* = \frac{\Gamma_{21}}{\beta_{sc}} \quad (4.207d)$$

$$\beta_{sc} = \left( 1 + \frac{E_t I \Gamma_1}{L S_{ci}} \right) \left( 1 + \frac{E_t I \Gamma_1}{L S_{cj}} \right) - \frac{\Gamma_2^2}{S_{ci} S_{cj}} \left( \frac{E_t I}{L} \right)^2 \quad (4.207d)$$

na qual  $\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{22}$ , e  $\Gamma_{21}$  são os termos da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_c$  na formulação PHF-1, representados, respectivamente, pelas Equações (4.188a-d). Tais coeficientes simulam de forma conjunta os efeitos da não linearidade geométrica, com o uso das funções de estabilidade, e da inelasticidade do aço, através do coeficiente  $\psi$  (Equação 4.184).

O processo de transformação da relação de equilíbrio definida pela Equação (4.206) para o sistema global é comentado no Apêndice A, na Seção A.2.3.

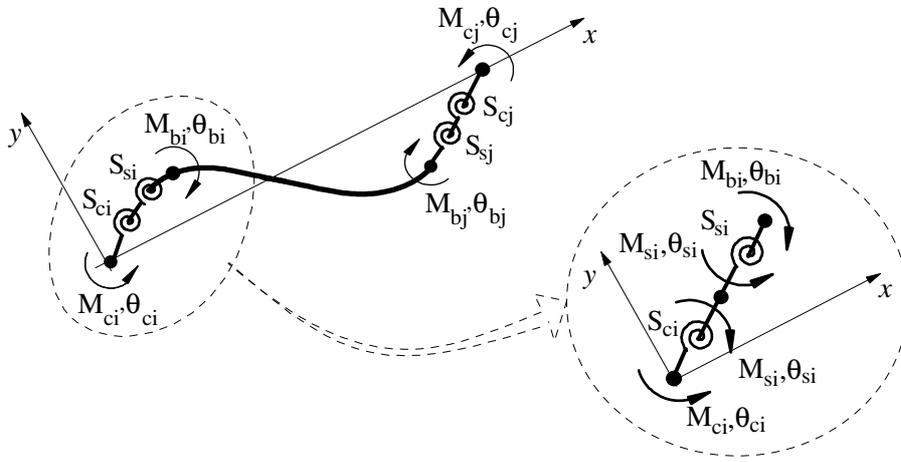
#### 4.6.2 Formulação AAF-2

Nessa formulação a metodologia para a análise inelástica segue os princípios desenvolvidos na formulação para análise inelástica PHF-2.

O elemento híbrido na configuração deformada é ilustrado na Figura 4.30. Considerando-o, as relações incrementais de equilíbrio momento-rotação para os elementos de mola que simulam a ligação semi-rígida nas extremidades  $i$  e  $j$  são, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{si} \end{Bmatrix} \quad (4.208a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (4.208b)$$



**Figura 4.30** Configuração deformada do elemento e detalhe das molas em série

para os demais, essa relação é expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{si} & -S_{si} \\ -S_{si} & S_{si} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (4.208c)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{sj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sj} & -S_{sj} \\ -S_{sj} & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{sj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.208d)$$

onde  $\Delta M_b$ ,  $\Delta M_c$ ,  $\Delta M_s$ ,  $\Delta \theta_b$ ,  $\Delta \theta_c$  e  $\Delta \theta_s$  são os incrementos de momentos e rotações nodais associados, respectivamente, ao elemento de viga-coluna (subscrito  $b$ ), à ligação (subscrito  $c$ ) e à seção (subscrito  $s$ ). O parâmetro que avalia a rigidez da ligação,  $S_c$ , pode ser obtido através de um dos modelos matemáticos que representam o seu comportamento momento-rotação (Apêndice B). Já o parâmetro que avalia a resistência da seção-

transversal,  $S_s$ , representa nessa formulação a rigidez à flexão do elemento de mola, sendo calculado através da Equação (4.189).

Para as seções internas da viga-coluna, a relação incremental de equilíbrio momento-rotação é dada pela Equação (4.195). Através dessa relação e, usando (4.208a-d), ou seja, considerando o equilíbrio de forças e condições de compatibilidade de deslocamentos, a relação momento-rotação incremental pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{si} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{sj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + S_{si} & -S_{si} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{si} & k_{(3,3)} + S_{si} & k_{(3,6)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{(6,3)} & k_{(6,6)} + S_{sj} & -S_{sj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{sj} & S_{sj} + S_{cj} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{sj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.209)$$

Como os momentos incrementais internos  $\Delta M_{si}$  e  $\Delta M_{sj}$  são iguais a zero, pois todas as cargas são aplicadas nos nós externos globais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_{ci}}{S_{si} + S_{ci}} & 0 \\ 0 & \frac{S_{ci}}{S_{si} + S_{ci}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{S_{si}}{S_{si} + S_{ci}} & 0 \\ 0 & \frac{S_{si}}{S_{si} + S_{ci}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (4.210)$$

Com a substituição de  $\Delta \theta_{si}$  e  $\Delta \theta_{sj}$  na terceira e quarta linhas de (4.209), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sci} & -S_{sci} & 0 & 0 \\ -S_{sci} & k_{(3,3)} + S_{sci} & k_{(3,6)} & 0 \\ 0 & k_{(6,3)} & k_{(6,6)} + S_{scj} & -S_{scj} \\ 0 & 0 & -S_{scj} & S_{scj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.211)$$

onde os parâmetros,  $S_{csi}$  e  $S_{csj}$ , avaliam os efeitos combinados da semi-rigidez da ligação e da inelasticidade do aço nos pontos nodais  $i$  e  $j$  do elemento híbrido, respectivamente. Tais parâmetros representam a rigidez equivalente dos elementos de mola e são definidos como:

$$S_{csi} = \frac{S_{ci} S_{si}}{(S_{ci} + S_{si})} \quad (4.212a)$$

$$S_{csj} = \frac{S_{cj} S_{sj}}{(S_{cj} + S_{sj})} \quad (4.212b)$$

Similarmente, realizando a condensação estática para  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$ , encontra-se a relação entre as rotações nodais do elemento de viga-coluna e as rotações das extremidades do elemento híbrido:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_{csi}(k_{(6,6)} + S_{csj})}{\beta_{cs}} & -\frac{S_{csj}k_{(3,6)}}{\beta_{cs}} \\ -\frac{S_{csi}k_{(6,3)}}{\beta_{cs}} & \frac{S_{csj}(k_{(3,3)} + S_{csi})}{\beta_{cs}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.213)$$

na qual  $\beta_{cs} = (S_{csi} + k_{(3,3)})(S_{csj} + k_{(6,6)}) - k_{(3,6)}k_{(6,3)}$ .

A substituição de  $\Delta\theta_{bi}$  e  $\Delta\theta_{bj}$  na primeira e quarta linhas de (4.201), produz:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{csi} - \frac{S_{csi}^2}{\beta_{cs}}(S_{csj} + k_{(6,6)}) & \frac{S_{csi}S_{csj}k_{(3,6)}}{\beta_{cs}} \\ \frac{S_{csi}S_{csj}k_{(6,3)}}{\beta_{cs}} & S_{csj} - \frac{S_{csj}^2}{\beta_{cs}}(S_{csi} + k_{(3,3)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.214)$$

Finalmente, a relação força-deslocamento para elemento híbrido no sistema corrotacional pode ser formulada como (Chan e Chui, 2000):

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & S_{csi} - \frac{S_{csi}^2}{\beta_{cs}}(S_{csj} + k_{(6,6)}) & \beta_{cs}S_{csi}S_{csj}k_{(3,6)} \\ 0 & \beta_{cs}S_{csj}S_{csi}k_{(6,3)} & S_{csj} - \frac{S_{csj}^2}{\beta_{cs}}(S_{csi} + k_{(3,3)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.215)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $A$  é a área da seção transversal e  $L$  é o comprimento do elemento finito. Numa forma simplificada, a equação anterior é reescrita como:

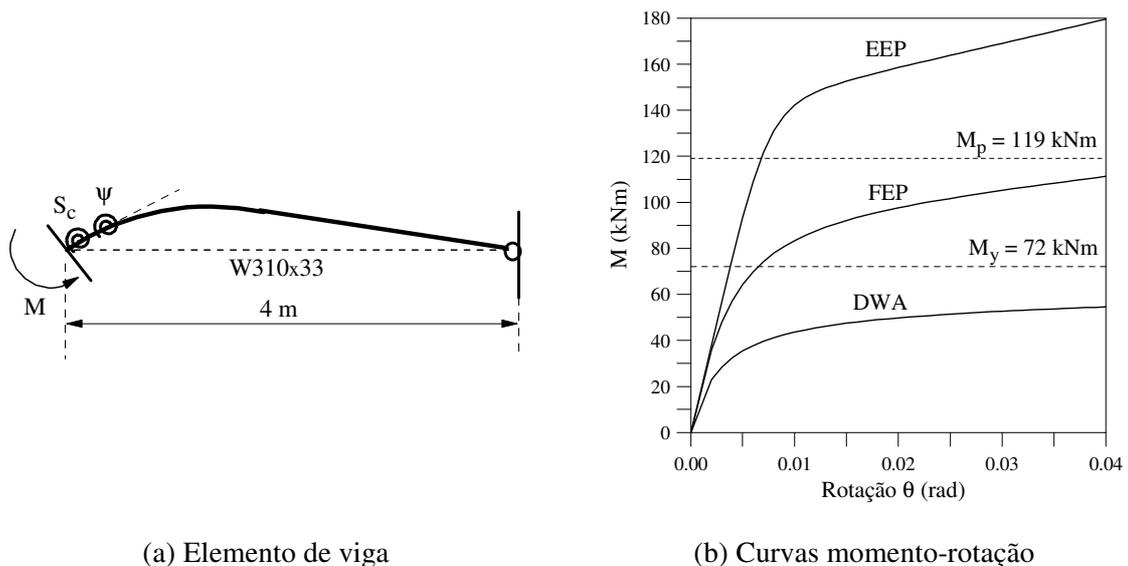
$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (4.216)$$

cuja transformação para o sistema global de coordenadas é feita seguindo o mesmo processo realizado na Seção 4.5.2 com a Equação (4.198).

Para demonstrar numericamente a interação entre os efeitos da flexibilidade da ligação e da plasticidade, considere o membro com ligações semi-rígidas ilustrado na Figura 4.31a. A viga tem comprimento  $L=4$  m e sua seção transversal é constituída por perfil W310x33.

Adota-se o módulo de elasticidade igual a 200 GPa e para a tensão de escoamento  $\sigma_y$  é usado 248 MPa. A tensão residual,  $\sigma_r$ , é considerada igual a  $0.3\sigma_y$ . Com essas informações, tem-se que os momentos de escoamento,  $M_y = (\sigma_y - \sigma_r)W$ , e de plastificação,  $M_p = \sigma_y Z$ , são iguais a 72 kNm e 119 kNm, respectivamente. Os coeficientes  $W$  e  $Z$  são o momento elástico e plástico da seção e valem, respectivamente,  $0.415 \times 10^6 \text{ mm}^3$  e  $0.48 \times 10^6 \text{ mm}^3$ .

A Figura 4.31b mostra as curvas momento-rotação das ligações estudadas. Conforme o que se apresentou no início desta seção, percebe-se, analisando a figura, que DWA (*Double Web-Angle*) é uma ligação de baixa resistência, e FEP (*Flush End-Plate*) e EEP (*Extended End-Plate*) são ligações de resistência parcial e total, respectivamente. A Tabela 4.3 detalha os parâmetros dessas ligações. Na modelagem do comportamento momento-rotação das ligações utiliza-se o modelo de potências com quatro parâmetros (ver Apêndice B).



**Figura 4.31** Viga com ligações semi-rígidas

Como nenhuma plastificação ocorre na extremidade do membro se a ligação DWA for utilizada, apenas o comportamento da viga com as ligações FEP e EEP será analisado. A Figura 4.32a mostra a variação dos parâmetros que representam a rigidez da ligação,  $S_c$ , e os efeitos acoplados,  $S_{cs}$ , com o momento aplicado,  $M$ .

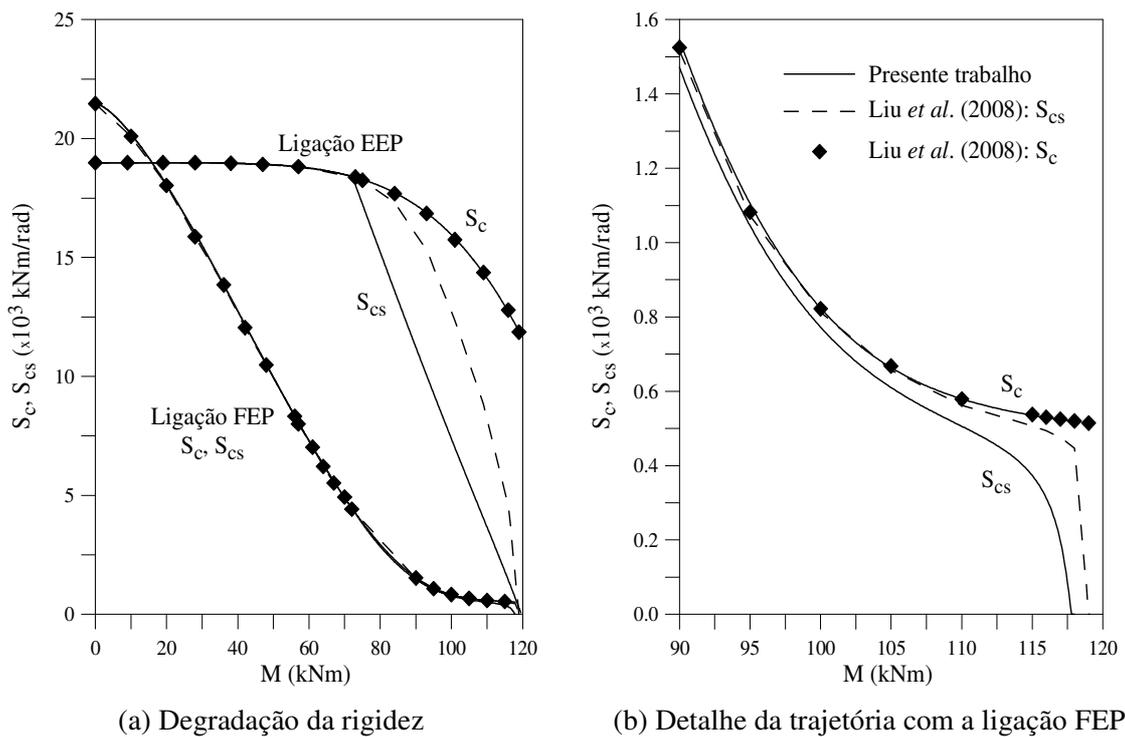
Os resultados para as duas ligações são apresentados. A Figura 4.32b apresenta, com mais detalhe, as curvas para a ligação FEP no final do processo de carregamento. Pode ser

verificado que  $S_c$  e  $S_{cs}$  são iguais até o início do processo de plastificação da seção. A partir daí, o parâmetro  $S_{cs}$  reduz-se gradativamente a zero.

Portanto, pode-se concluir que o comportamento plástico da seção tem uma maior influência na degradação de rigidez do elemento. Comparam-se os resultados com aqueles obtidos por Liu *et al.* (2008) embora eles utilizem um modelo analítico diferente para definição da rigidez inelástica da seção representada pelo parâmetro  $S_s$ .

**Tabela 4.3** Parâmetros das ligações

Ligação	$M_0$ (kNm)	$S_{cini}$ (kNm/rad)	$R_p$ (kNm/rad)	$n$
DWA	55.935	20114	69.608	0.964
FEP	95.146	21470	468.950	1.450
EEP	137.86	18984	1041.860	5.110



**Figura 4.32** Interação entre a flexibilidade da ligação e a plastificação do membro

# Capítulo 5

## Exemplos de Validação das Formulações para Análise Estática

### 5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é validar as dez formulações para análise estática não linear que estão presentes no sistema computacional e foram apresentadas no capítulo anterior. Para isso serão estudados alguns problemas estruturais clássicos nos quais a solução numérica obtida neste trabalho será comparada com as soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura. Iniciando o estudo, na Seção 5.2, as formulações que consideram apenas os efeitos da não linearidade geométrica serão testadas através da análise de estruturas esbeltas submetidas a grandes deslocamentos e rotações. Vale ressaltar que estruturas esbeltas podem perder a estabilidade sem que as cargas aplicadas sejam suficientes para causar a degradação do material. Assim, no estudo da estabilidade desses elementos estruturais pode-se considerar que o material permanece no regime linear elástico e considerar a perda da estabilidade causada apenas pelos efeitos da não linearidade geométrica. Com esses problemas, a eficiência da metodologia para detecção de pontos críticos, ou seja, pontos limites e de bifurcação, poderá ser verificada. Na seção seguinte, além desses efeitos de segunda ordem, a influência da flexibilidade da ligação será analisada. As formulações para análise inelástica de segunda ordem são checadas na Seção 5.4 onde se analisam quatro sistemas estruturais. E, encerrando este capítulo, na Seção 5.5, a análise inelástica de segunda ordem de estruturas com ligações semi-rígidas será efetuada para comprovar a validade das duas formulações desenvolvidas para essa finalidade.

## 5.2 Não Linearidade Geométrica

Nesta seção, quatro sistemas estruturais clássicos de estabilidade elástica fortemente não lineares são estudados. As três formulações descritas na Seção 4.3 do Capítulo 4, SOF-1, SOF-2 e SOF-3, desenvolvidas com essa finalidade são testadas em todos os exemplos. Essas formulações seguem os princípios das metodologias propostas, respectivamente, por Alves (1993), Yang e Kuo (1994) e Pacoste e Eriksson (1997). Vale ressaltar que a formulação SOF-3 foi desenvolvida em referencial Lagrangiano total e baseia-se na teoria de vigas de Timoshenko, enquanto as demais em referencial Lagrangiano atualizado e seguindo a teoria de vigas de Bernoulli. Para obter a trajetória de equilíbrio completa das estruturas analisadas, as estratégias do comprimento de arco e do deslocamento generalizado foram selecionadas. Estudam-se quatro estruturas esbeltas: uma coluna engastada-livre, o pórtico de Lee, uma viga submetida a momento fletor e um arco circular. Considera-se que o material apresenta comportamento elástico e admite-se uma tolerância de convergência igual a  $10^{-4}$  no processo iterativo. Como critério para avaliar a carga crítica, o GSP (*Generalized Stiffness Parameter*), definido na Seção 4.2.1, foi usado. Segundo Yang e Kuo (1994) o valor nulo desse parâmetro indica um ponto onde a reta tangente à curva carga-deslocamento tem inclinação nula.

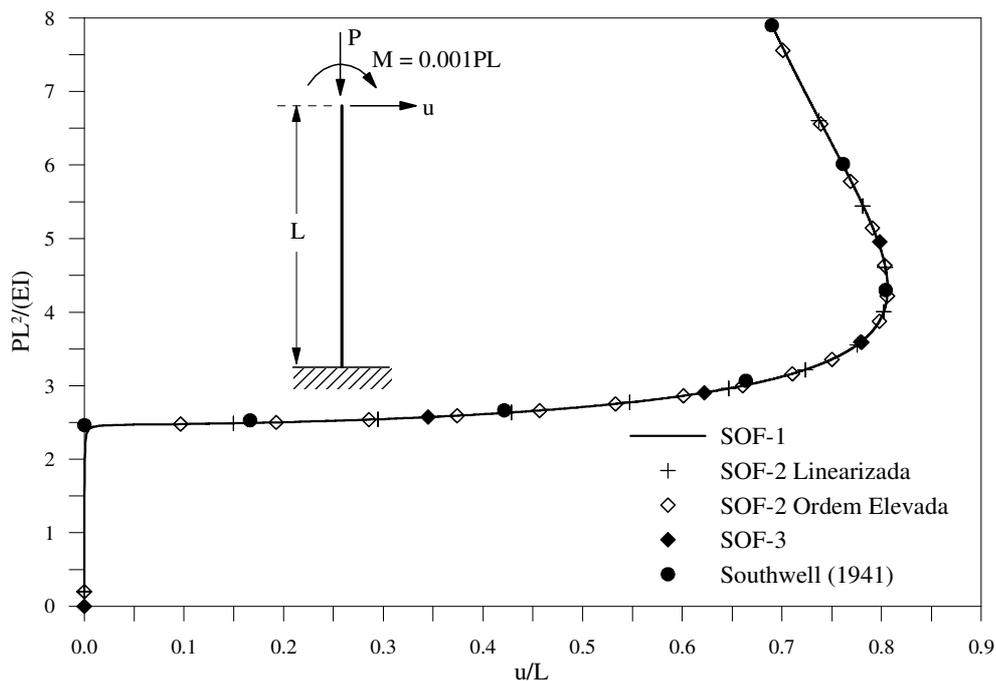
### 5.2.1 Coluna Engastada-Livre

Estuda-se aqui uma coluna onde uma das extremidades está engastada e a outra livre, como mostra a Figura 5.1. A coluna tem comprimento  $L$  e rigidez à flexão  $EI$ . No topo dessa coluna é aplicada uma carga concentrada  $P$  e uma pequena imperfeição de carga,  $M = 0.001PL$ , é introduzida para evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação. O módulo de elasticidade transversal,  $G$ , é considerado como sendo a metade do módulo de elasticidade,  $E$ .

A análise da estabilidade é executada discretizando a coluna com nove elementos finitos. O método de Newton-Raphson modificado foi usado. Como estratégia de incremento de carga e de iteração, adotou-se a técnica do comprimento de arco cilíndrico. Para a convergência o critério baseado em carga e deslocamento foi escolhido, e o incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , para o primeiro passo incremental foi considerado igual a  $0.2EI/(PL^2)$  com  $P = 1$ .

Os caminhos não lineares de equilíbrio do modelo estrutural, obtidos com as formulações SOF-1, SOF-2 (linearizada e ordem elevada) e SOF-3, são exibidos também

na Figura 5.1. Pode-se observar que o problema analisado exibe em sua trajetória de equilíbrio uma região de grandes deslocamentos horizontais  $u$  e carga praticamente constante, apresentando ainda, um ponto limite de deslocamento. A Tabela 5.1 informa o deslocamento horizontal no topo da coluna para dois níveis de carga. O carregamento e o deslocamento foram adimensionalizados na figura e na tabela. A relação de carga  $PL^2/EI = 4.3$ , onde  $I$  representa o momento de inércia da coluna, corresponde ao ponto limite de deslocamento.



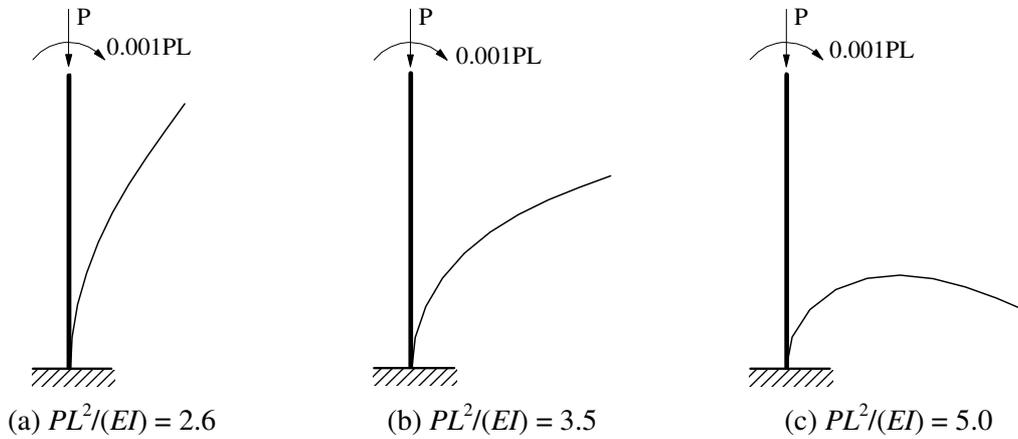
**Figura 5.1** Coluna engastada-livre e sua trajetória de equilíbrio

**Tabela 5.1** Deslocamento horizontal normalizado,  $u/L$ , no topo da coluna

$PL^2/EI$	Southwell (1941)	Formulações		
		<i>SOF-1</i>	<i>SOF-2</i>	<i>SOF-3</i>
4.3	0.8041	0.8062	0.8061	0.8077
7.9	0.6898	0.6901	0.6888	0.6923

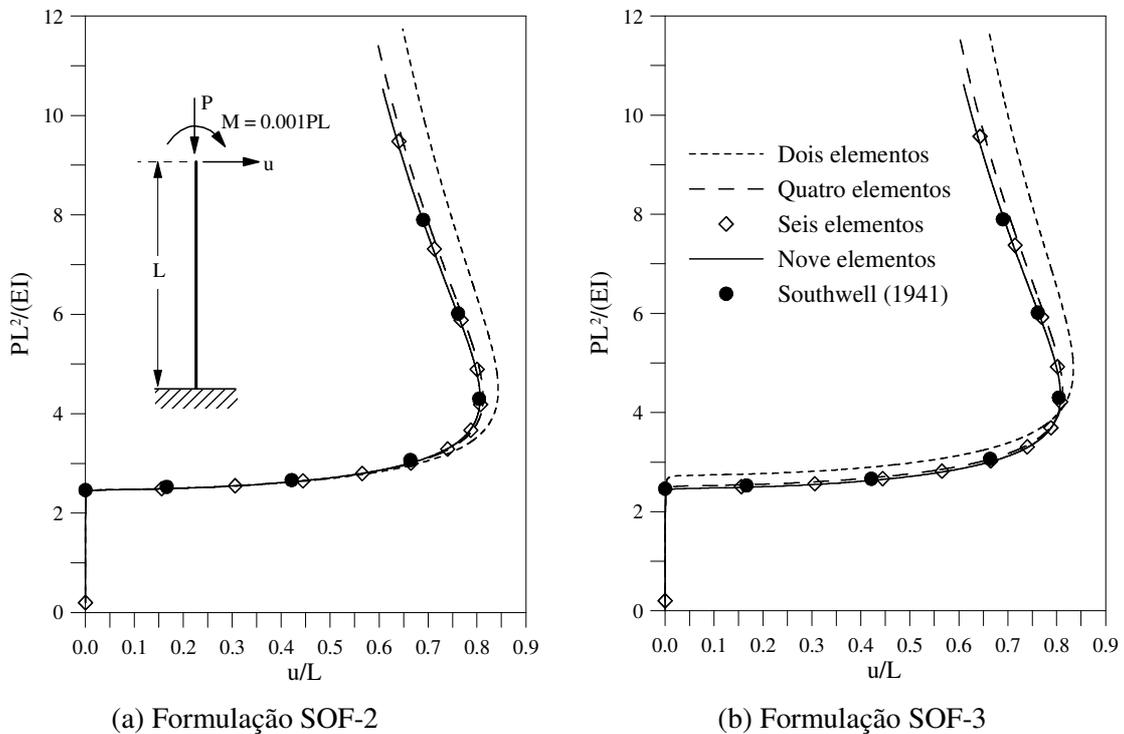
Através da Figura 5.1 e da Tabela 5.1 percebe-se que os resultados encontrados estão muito próximos da solução analítica dada por Southwell (1941), o que comprova a eficiência das formulações na solução desse problema. As respostas obtidas com a formulação SOF-2 através da metodologia linearizada, na qual se despreza as parcelas não lineares das relações correspondentes às deformações incrementais, e ordem elevada foram

coincidentes. Adicionalmente, as configurações deformadas para as relações de carregamento,  $PL^2/EI = 2.6$ ,  $3.5$  e  $5.0$  são ilustradas a seguir na Figura 5.2. A condição inicial indeformada da estrutura é também representada.



**Figura 5.2** Configurações deformadas em alguns níveis de carregamento

Um estudo sobre a influência do número de elementos usados na discretização do problema é realizado. As trajetórias de equilíbrio obtidas com dois, quatro, seis e nove elementos são exibidas na Figura 5.3.

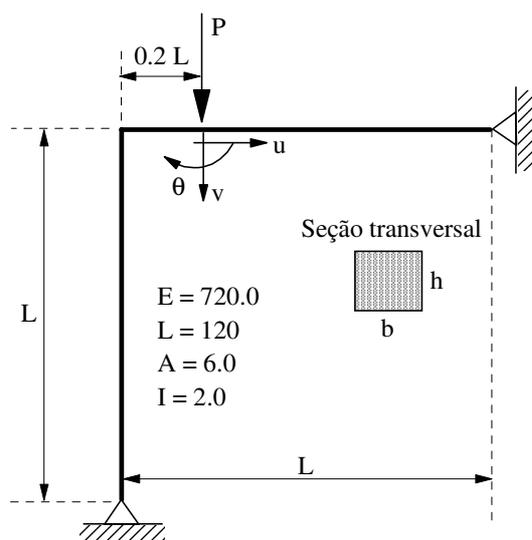


**Figura 5.3** Análise de convergência

Considerou-se na obtenção das curvas as formulações SOF-2 e SOF-3. É importante ressaltar que SOF-3 é uma formulação desenvolvida em referencial Lagrangiano total e baseada na teoria de vigas de Timoshenko. Percebe-se que, com apenas dois elementos finitos, a formulação SOF-2 forneceu bons resultados no trecho inicial da trajetória. Para as malhas mais refinadas, as curvas para as duas formulações são semelhantes.

### 5.2.2 Pórtico de Lee

O segundo exemplo corresponde a uma estrutura frequentemente usada para validar formulações de elementos finitos e estratégias de solução não linear. O problema a ser analisado nesta seção, conhecido como Pórtico de Lee, ilustrado na Figura 5.4, foi primeiramente estudado e resolvido analiticamente por Lee *et al.* (1968). Posteriormente, essa estrutura foi analisada numericamente por vários autores, incluindo Schweizerhof e Wriggers (1986), Simo e Vu-Quoc (1986), Lee (1988), Coulter e Miller (1988), Chen e Blandford (1993), Pacoste e Eriksson (1997) e Galvão (2004), considerando o material elástico. Outros autores, tais como, Cichon (1984), Hsiao *et al.* (1988) e Park e Lee (1996) resolveram o problema considerando, também, o material com comportamento elasto-plástico. Um estudo sobre a influência de parâmetros geométricos e condições de contorno na resposta de pórticos em L foi conduzido por Galvão *et al.* (2005). Verificou-se também, nesse estudo, a sensibilidade da estrutura a imperfeições iniciais.

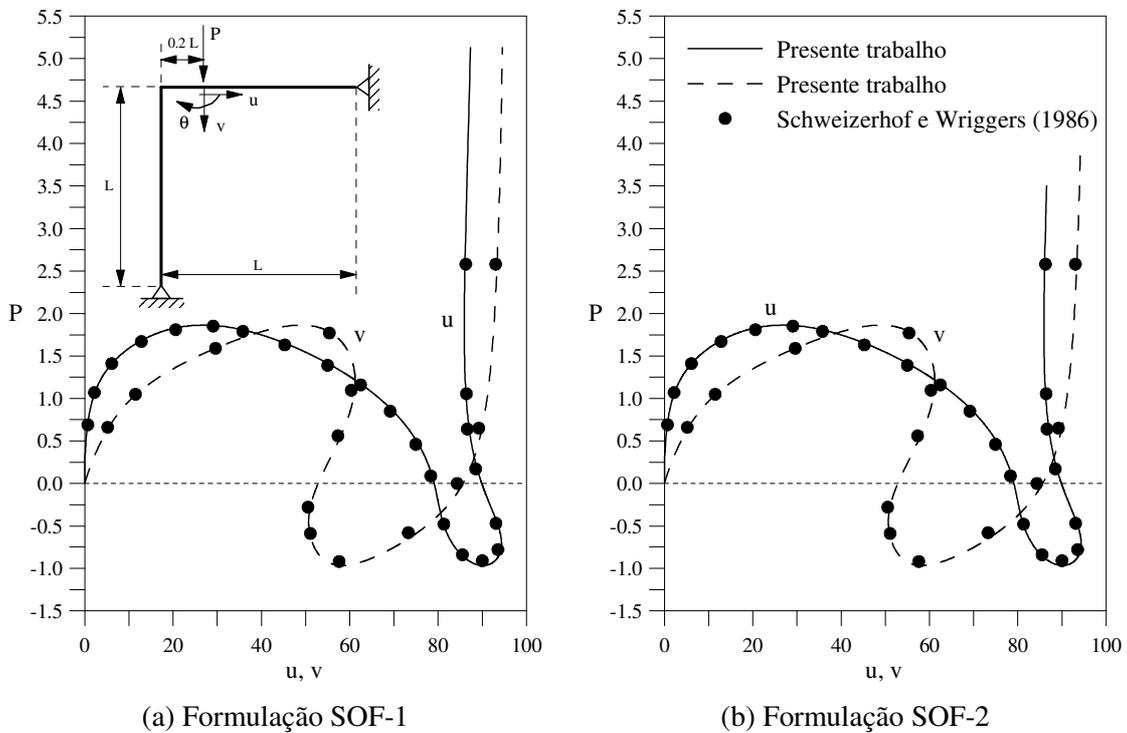


**Figura 5.4** Pórtico de Lee: geometria e carregamento

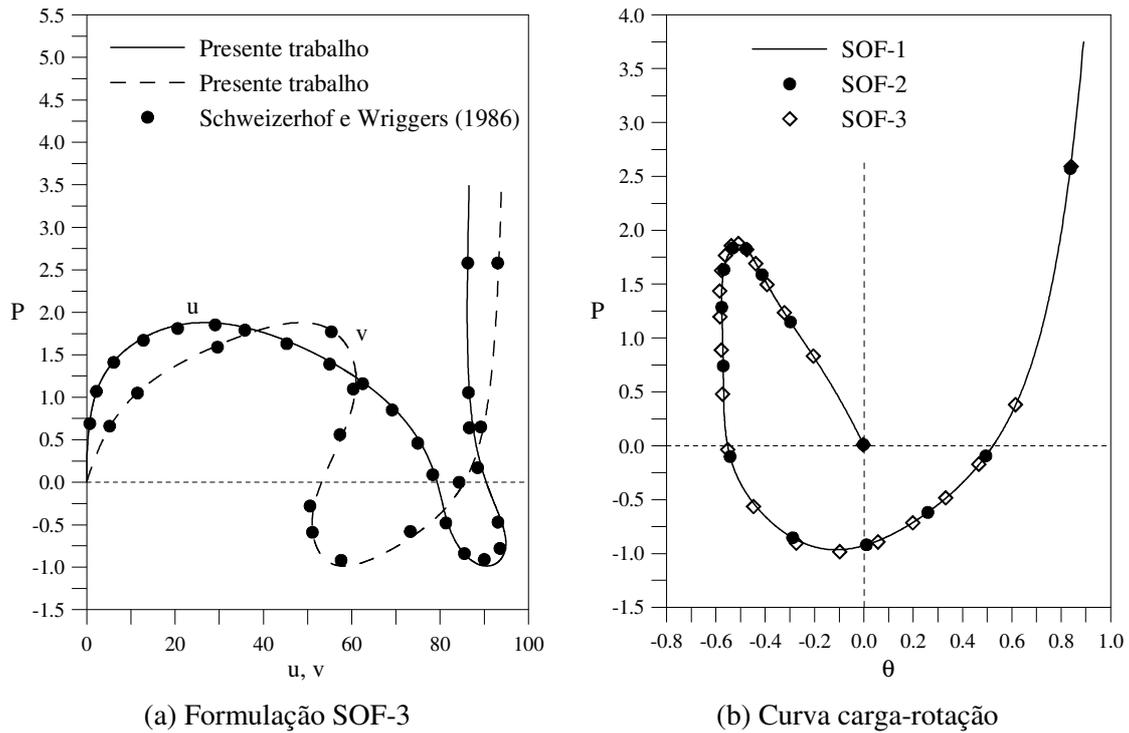
Trata-se de um sistema estrutural constituído por uma viga e uma coluna, com propriedades físicas e geométricas idênticas, conectadas rigidamente entre si e com apoios rotulados em suas extremidades. A viga é submetida a uma carga vertical concentrada de intensidade  $P$ .

As análises foram efetuadas através de modelos estruturais compostos de vinte elementos finitos, dez em cada um dos membros e, novamente, testou-se as três formulações geometricamente não lineares. O método de Newton-Raphson padrão e a estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado proposta por Yang e Kuo (1994) foram considerados no processo de solução. Para controle do fator de carga  $\Delta\lambda^0$  usou-se o parâmetro de rigidez GSP. Seu valor inicial foi considerado igual a  $10^{-2}$ . O critério de convergência baseado em deslocamentos foi adotado.

Nesse problema, o fenômeno da instabilidade só ocorre após o aparecimento de grandes deslocamentos. Isso pode ser verificado através das trajetórias de equilíbrio encontradas. As curvas carga-deslocamento obtidas controlando os deslocamentos horizontal e vertical,  $u$  e  $v$ , e a rotação,  $\theta$ , do ponto de aplicação da carga são ilustradas nas Figuras 5.5 e 5.6. Nas Figuras 5.5a-b e 5.6a apresentam-se, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio obtidas com as formulações SOF-1, SOF-2 e SOF-3.



**Figura 5.5** Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee



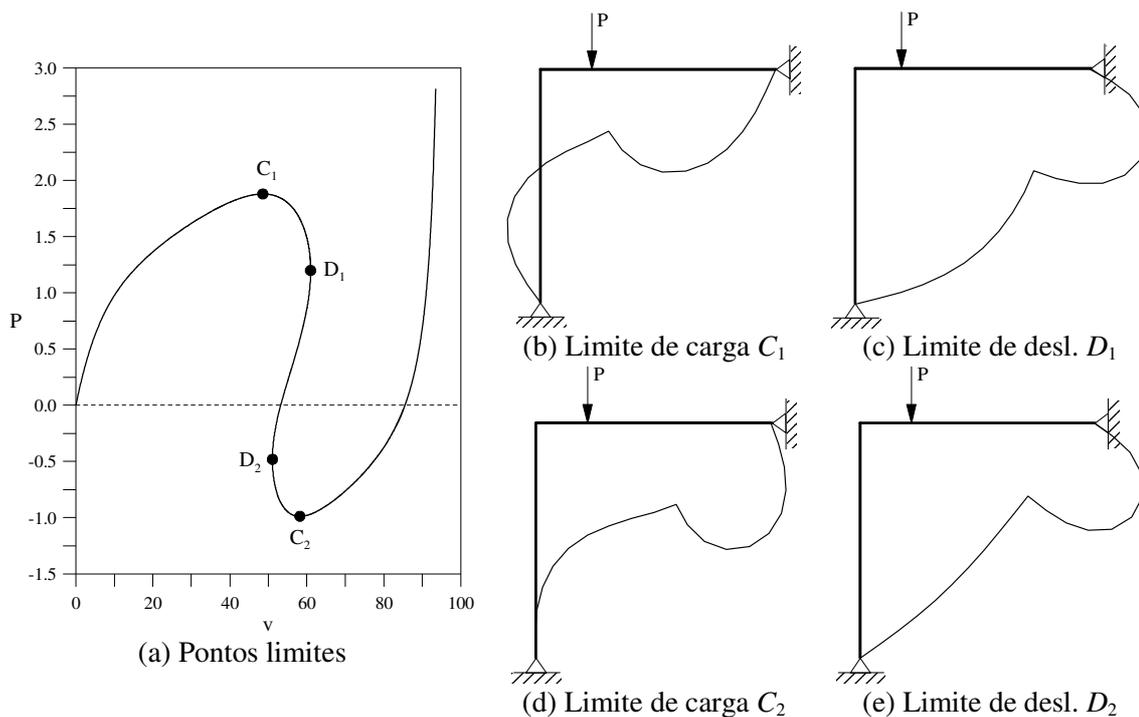
**Figura 5.6** Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee

Para comparação foram usados resultados numéricos, obtidos usando também o Método dos Elementos Finitos, fornecidos por Schweizerhof e Wriggers (1986). Na Figura 5.6b, as curvas carga-rotação encontradas com as mesmas formulações são ilustradas e comparadas.

Novamente, pode-se observar com esse exemplo que os resultados encontrados, usando qualquer uma das três formulações, praticamente coincidem com aqueles da literatura.

O caminho não linear de equilíbrio, como se pode observar nas curvas carga-deslocamento vertical, apresenta dois pontos limites de carga (pontos  $C_1$  e  $C_2$ ) e dois pontos limites de deslocamento (pontos  $D_1$  e  $D_2$ ). A Figura 5.7a mostra a localização desses pontos limites. Para tais pontos a configuração deformada da estrutura é exibida nas Figuras 5.7b-d. O fator de escala utilizado nessa representação é 1:1.

Os valores encontrados para os pontos limites são sumarizados na Tabela 5.2 a seguir. As cargas limites,  $P_{lim}$ , e os correspondentes deslocamentos verticais,  $v$ , do ponto de aplicação da carga, obtidos usando as três formulações, são apresentados. Novamente, como no problema anterior, os resultados usando a formulação SOF-2 linearizada e ordem elevada foram iguais.



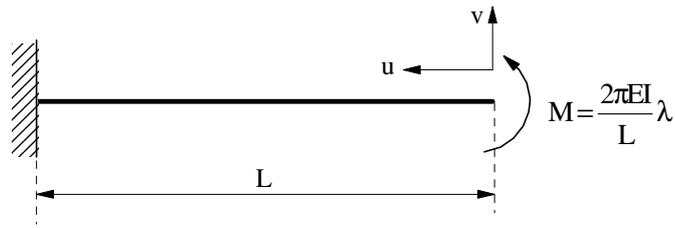
**Figura 5.7** Configurações deformadas referentes aos pontos limites

**Tabela 5.2** Carga e deslocamento vertical ( $P_{lim}; v$ ) relativos aos pontos limites

Pontos Limites	Formulações		
	<i>SOF-1</i>	<i>SOF-2</i>	<i>SOF-3</i>
<i>Carga</i>	1.8630; 49.023	1.8629; 48.932	1.8795; 48.622
	-0.9658; 58.256	-0.9656; 58.300	-0.9866; 58.213
<i>Deslocamento</i>	1.2051; 61.210	1.2044; 61.209	1.1991; 60.975
	-0.4497; 50.734	-0.4543; 50.732	-0.4807; 51.045

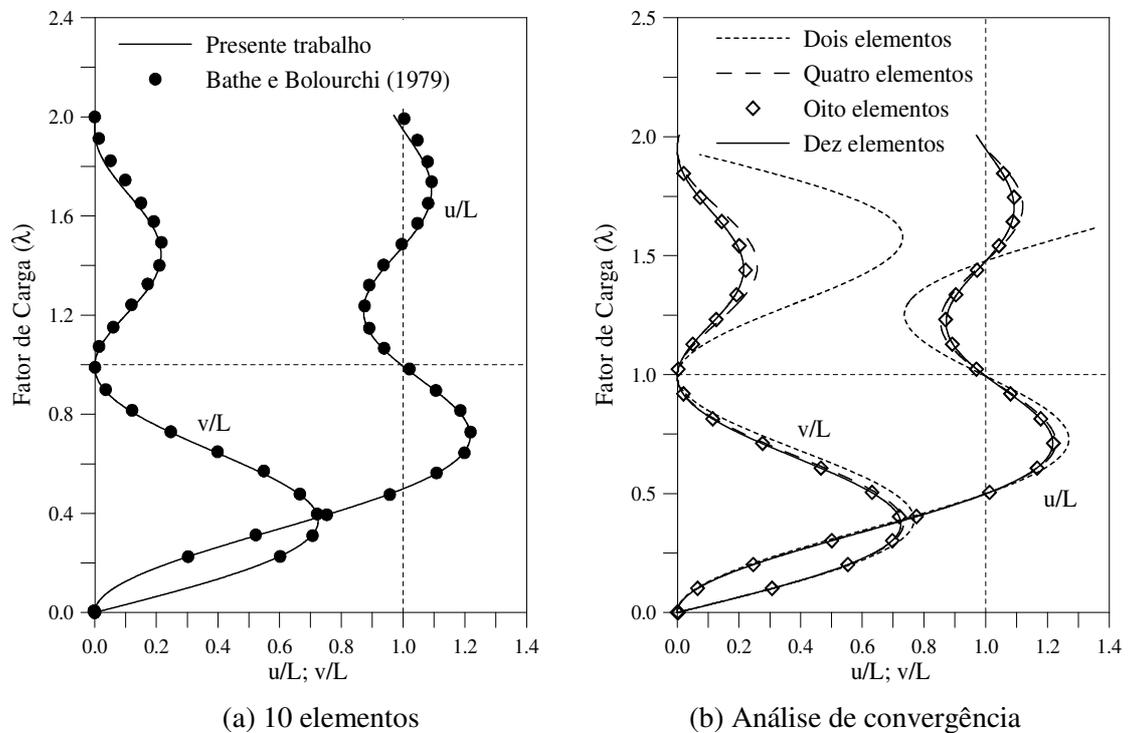
### 5.2.3 Viga Engastada-Livre

Um problema clássico de uma viga submetida a momento fletor na extremidade livre é ilustrado na Figura 5.8. Essa estrutura foi analisada por vários pesquisadores, entre os quais se encontram Bathe e Bolourchi (1979), Simo e Vu-Quoc (1986), Crisfield (1990) e Gummadi e Palazotto (1998) para testar a precisão das metodologias por eles propostas. A viga, que está engastada em uma das extremidades e livre em outra, tem comprimento  $L$  e seção transversal retangular. O módulo de elasticidade transversal,  $G$ , é considerado a metade do módulo de elasticidade,  $E$ . Nesse estudo, o momento fletor aplicado na extremidade foi aumentado variando o parâmetro de carga  $\lambda$  de 0.0 a 2.0. Para  $\lambda = 2.0$ , tem-se que a viga se deforma com a extremidade livre rotacionando  $720^\circ$ .



**Figura 5.8** Viga engastada-livre: geometria e carregamento

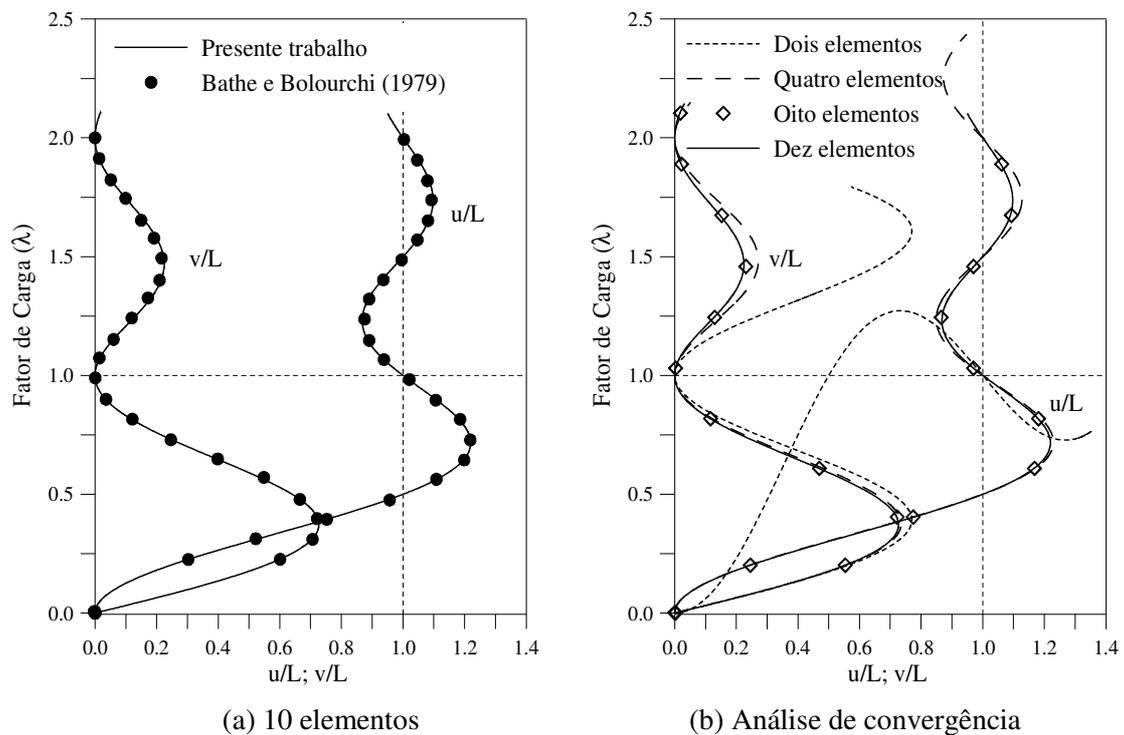
O método de Newton-Raphson modificado, juntamente com a estratégia de iteração comprimento de arco cilíndrico, foi usado. Dessa forma, adotou-se o incremento automático do comprimento de arco para definir o incremento inicial do parâmetro de carga. Dez elementos foram usados na discretização e apenas as formulações SOF-1 e SOF-3 foram empregadas na análise da estrutura. As Figuras 5.9a e 5.10a mostram as trajetórias de equilíbrio obtidas com as formulações SOF-1 e SOF-3, respectivamente. São ilustradas a variação dos deslocamentos horizontal,  $u$ , e vertical,  $v$ , da extremidade livre da viga com o parâmetro de carga,  $\lambda$ . Os resultados são comparados aos de Bathe e Bolourchi (1979).



**Figura 5.9** Curvas carga-deslocamento obtidas com a formulação SOF-1

Embora as trajetórias estejam em bom acordo com aquelas obtidas por Bathe e Bolourchi (1979), comparando as Figuras 5.9a e 5.10a, percebe-se que os resultados são melhores usando a formulação SOF-3.

A influência do número de elementos usados na modelagem da viga foi realizada e está ilustrada nas Figuras 5.9b e 5.10b. Com dois elementos e usando a formulação SOF-3, a variação do deslocamento horizontal,  $u$ , com a carga apresenta uma discrepância relativamente grande comparada à outra formulação. Para os outros casos, as respostas são próximas.

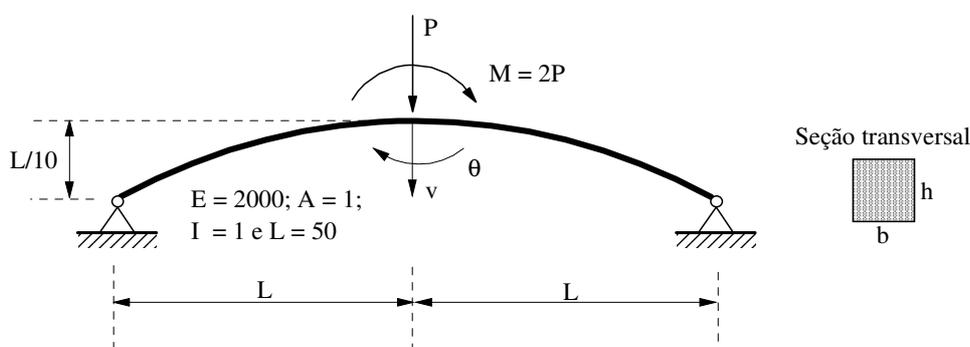


**Figura 5.10** Curvas carga-deslocamento obtidas com a formulação SOF-3

### 5.2.4 Arco Circular

A Figura 5.11, a seguir, ilustra o próximo problema usado para verificar a capacidade das três formulações na análise de problemas fortemente não lineares. Tem-se um arco circular birrotulado que será analisado considerando duas condições de carregamento. Primeiramente o arco estará submetido a uma carga vertical de magnitude  $P$  aplicada no seu eixo de simetria (sistema perfeito) e, em seguida, a uma carga excêntrica representada por essa força  $P$  associada a uma carga momento  $M$  de valor  $2P$ . As propriedades físicas e geométricas usadas na análise são mostradas também na Figura 5.11.

A estrutura foi discretizada com vinte e seis elementos finitos. Porém, para análise considerando o sistema perfeito apenas metade do arco foi usada na modelagem. Nesse caso, treze elementos finitos foram adotados e impediram-se o deslocamento horizontal e a rotação do ponto nodal coincidente com o eixo de simetria.



**Figura 5.11** Arco abatido birrotulado: geometria e carregamento

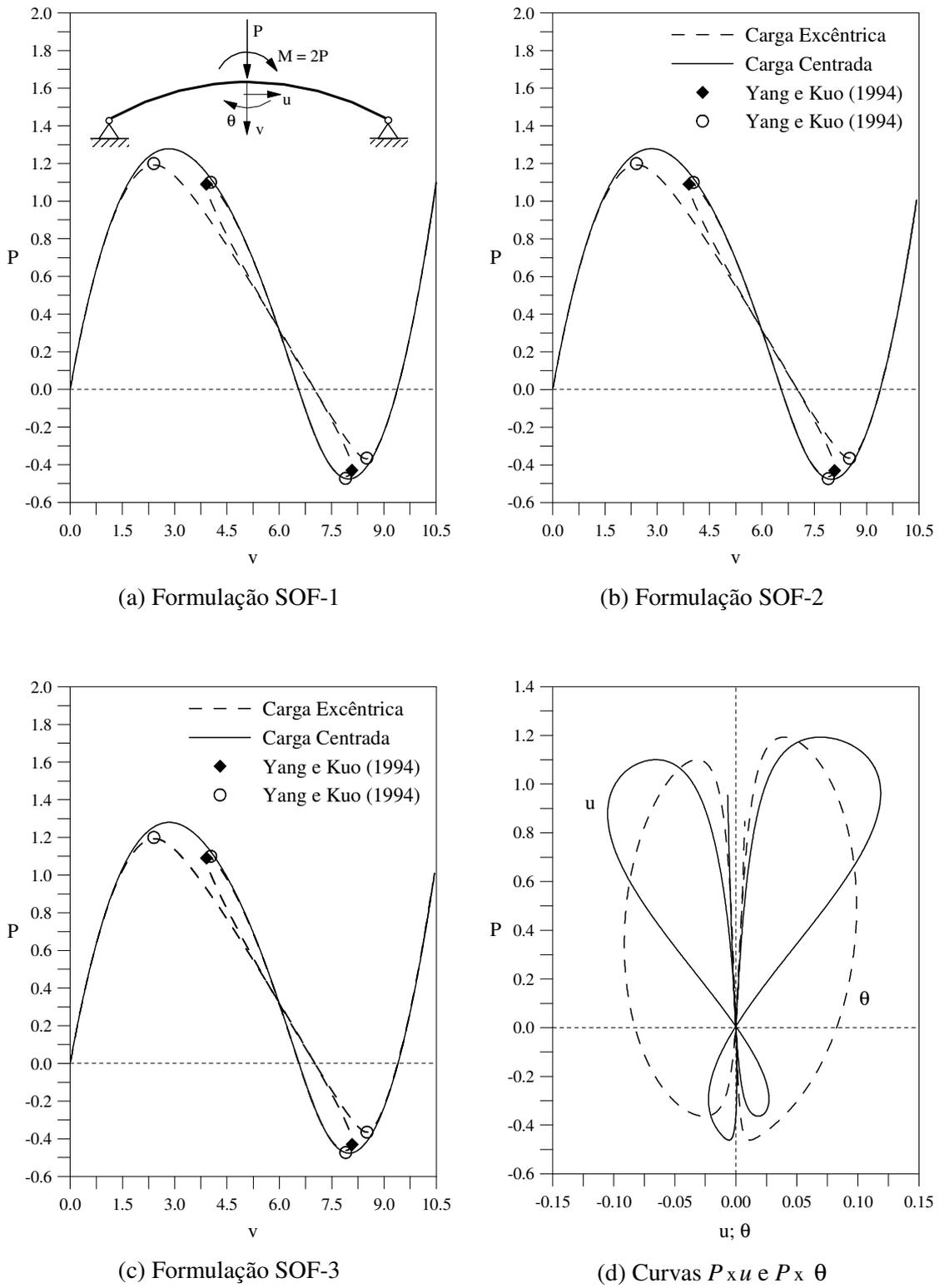
O método de Newton-Raphson modificado acoplado à estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado foi adotado no processo de solução não linear. O parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$  foi controlado através do parâmetro de rigidez GSP. Seu valor inicial foi considerado igual a  $10^{-2}$ . O critério de convergência baseado em deslocamentos foi adotado.

Esse sistema estrutural apresenta um comportamento altamente não linear, como pode ser comprovado através da Figura 5.12a-c, que exibe as curvas carga-deslocamento vertical,  $v$ , do ponto onde a carga externa atua. As duas condições de carregamento são consideradas. No caso da carga excêntrica, a trajetória de equilíbrio apresenta quatro pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento. Para a carga  $P$  centrada, dois pontos limites de carga são observados. Nessa figura, mostram-se os resultados obtidos utilizando as três formulações. Além disso, são indicados os pontos limites de carga e deslocamento fornecidos por Yang e Kuo (1994).

Para evidenciar ainda mais o comportamento fortemente não linear da estrutura analisada, a Figura 5.12d a seguir mostra a variação do deslocamento horizontal e da rotação do ponto nodal central da estrutura quando submetida a carregamento excêntrico. Nessa figura os resultados foram obtidos usando a formulação SOF-2.

Na Tabela 5.3 podem ser verificados os valores para os pontos limites de carga e deslocamento que são comparados àqueles obtidos por Yang e Kuo (1994). Nota-se que os

resultados alcançados com as formulações são praticamente idênticos e em boa concordância com os de Yang e Kuo (1994).



**Figura 5.12** Trajetórias de equilíbrio

**Tabela 5.3** Valores de carga,  $P$ , e deslocamento vertical,  $v$ 

Pontos Limites	Yang e Kuo (1994)	Formulações		
		SOF-1	SOF-2	SOF-3
Carga	1.200; 2.40	1.192; 2.403	1.193; 2.402	1.194; 2.417
	-0.473; 7.90	-0.463; 7.894	-0.462; 7.889	-0.462; 7.898
	1.100; 4.03	1.096; 3.957	1.101; 3.995	1.099; 3.954
	-0.365; 8.51	-0.368; 8.499	-0.364; 8.500	-0.366; 8.512
Desl.	-0.431; 8.08	-0.419; 8.082	-0.419; 8.074	-0.419; 8.081
	1.09; 3.91	1.082; 3.913	1.087; 3.898	1.086; 3.913

Por fim, através da Figura 5.12 e da Tabela 5.3 e também dos exemplos anteriores, pode-se concluir que qualquer uma das três formulações pode ser utilizada para realizar uma análise de estruturas reticuladas planas onde o efeito da não linearidade geométrica é importante.

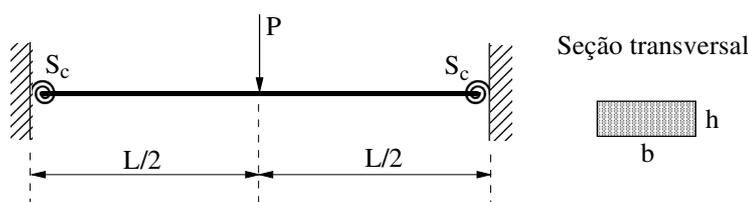
### 5.3 Ligações Semi-Rígidas e Não Linearidade Geométrica

As três formulações desenvolvidas para análise de segunda ordem de sistemas estruturais reticulados planos com ligações semi-rígidas serão empregadas nesta seção para o estudo de dois problemas. O primeiro deles refere-se a uma viga com as extremidades semi-rígidas e o segundo trata-se de um pórtico de dois andares com ligações viga-coluna semi-rígidas. Para a viga, a ligação apresenta comportamento momento-rotação linear e, para o pórtico, essa relação é não linear. Como o objetivo deste capítulo é a validação da metodologia proposta, as formulações SRF-1, SRF-2 e SRF-3 são checadas nos dois problemas. Os efeitos da não linearidade geométrica nessas formulações são considerados através da escolha, pelo usuário do programa, entre as formulações SOF-1 e SOF-2, que, como já mencionado no capítulo anterior, são baseadas na teoria de Bernoulli e definidas em referencial Lagrangiano atualizado.

Deve-se mencionar que, para os membros estruturais cujas ligações são consideradas perfeitamente rígidas, ou seja, para os quais apenas os efeitos de segunda ordem são importantes, as formulações SOF-1 e SOF-2 são usadas para definir a matriz de rigidez completa desses membros. Nos exemplos desta seção, a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga, com iteração a carga constante será adotada, pois o principal interesse é a obtenção da carga de colapso da estrutura. O incremento inicial do parâmetro de carga, no primeiro passo incremental, foi assumido igual a  $10^{-3}$  nos dois problemas.

### 5.3.1 Viga com Ligações Semi-Rígidas nas Extremidades

A Figura 5.13 ilustra a estrutura a ser analisada nesta seção. O comportamento dessa viga, considerando os apoios perfeitamente engastados, foi investigado por Mondkar e Powell (1977) e Yang e Saigal (1984). A viga, que tem comprimento  $L = 0.508$  m, é submetida a uma carga concentrada,  $P$ , no centro do vão. Como indicado, a seção transversal da viga é retangular, com dimensões  $b = 2.54$  cm e  $h = 0.3175$  cm, e considera-se o módulo de elasticidade igual a 207 GPa.

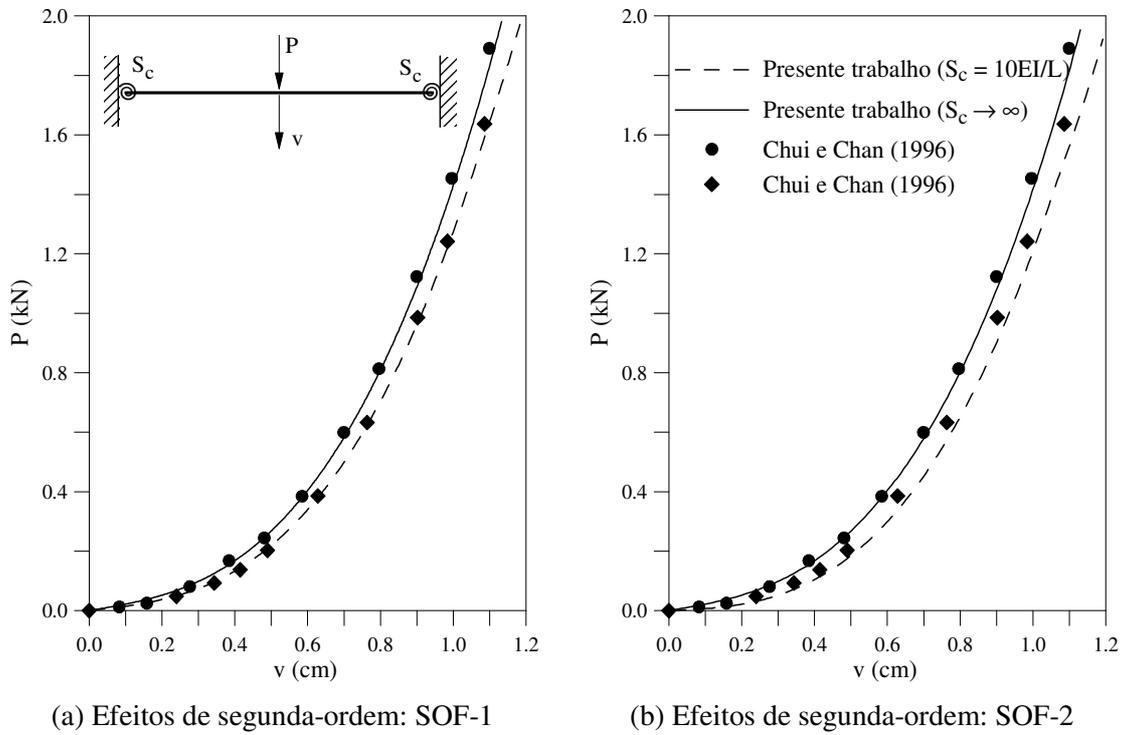


**Figura 5.13** Viga com ligações semi-rígidas: geometria e carregamento

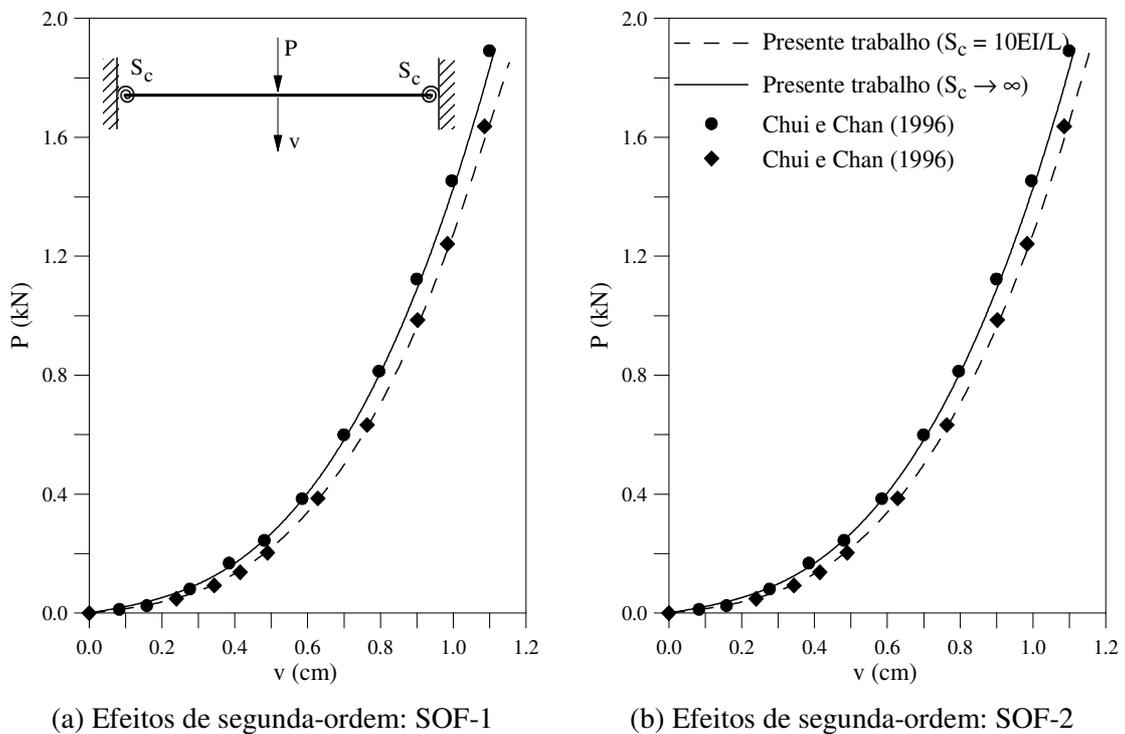
Para a análise, a viga foi discretizada com dez elementos. Vale ressaltar que apenas dois desses elementos foram modelados com molas de ligação nas extremidades. As ligações entre as extremidades da viga e os apoios foram consideradas rígidas e semi-rígidas. Para o caso de ligações rígidas membro-apoio, adotou-se, com o objetivo de verificar a eficiência das formulações no caso extremo, um valor elevado para a rigidez da ligação ( $S_c \rightarrow \infty$ ). Nesse caso, o parâmetro  $S_c$  foi considerado igual a  $10^{10} EI/L$ . Para a ligação semi-rígida, considerou-se a rigidez das ligações igual a  $10 EI/L$ . Nos dois casos, o modelo linear foi utilizado na modelagem da ligação. Esse modelo está detalhado no Apêndice B deste trabalho. Nesse contexto, a rigidez da ligação é considerada invariável durante todo o processo de carregamento. A carga  $P$  foi incrementada até atingir 2 kN.

As Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 ilustram a variação do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga,  $v$ , com o carregamento,  $P$ . Nas Figuras 5.14a, 5.15a e 5.16a estão representados os resultados obtidos com as formulações SRF-1, SRF-2 e SRF-3, respectivamente, simulando os efeitos da não linearidade geométrica através da formulação SOF-1. Já nas Figuras 5.14b, 5.15b e 5.16b têm-se a mesma variação, porém, os efeitos de segunda ordem são considerados mediante a formulação SOF-2. Comparam-se as respostas obtidas com a solução numérica encontrada em Chui e Chan (1996) que também realizaram a análise dinâmica dessa viga. Percebe-se, com as análises, que a rigidez da

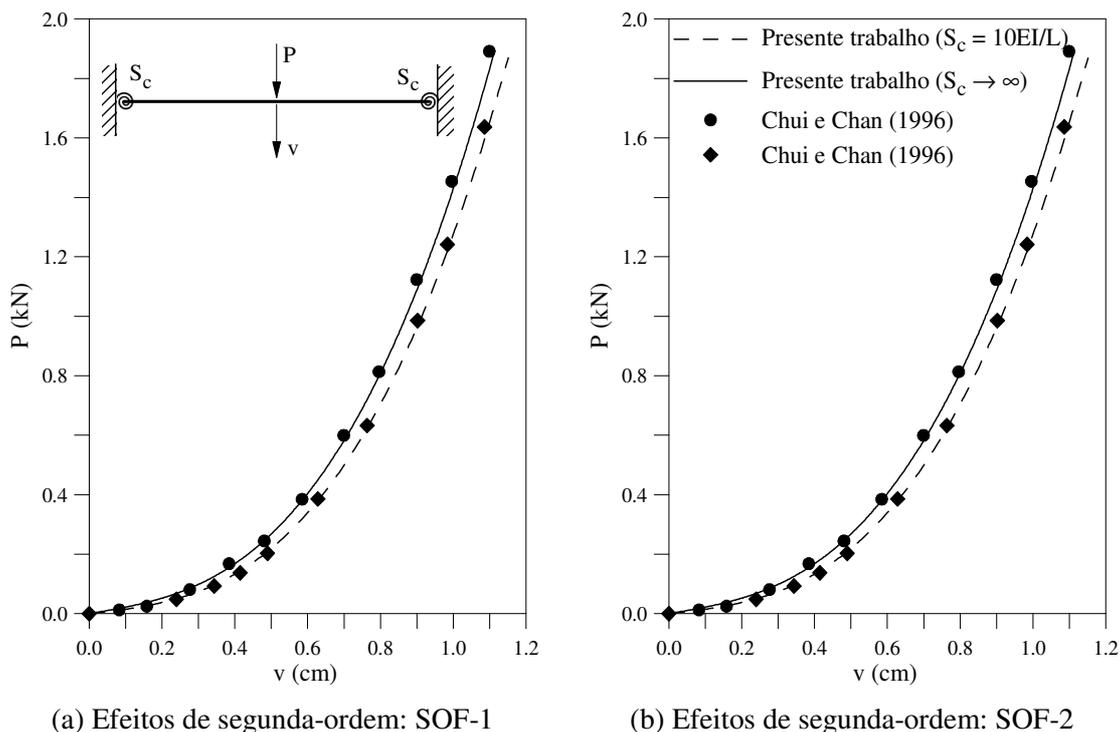
viga, matematicamente representada pela inclinação reta tangente à curva carga-deslocamento, aumenta com o acréscimo do carregamento.



**Figura 5.14** Trajetórias de equilíbrio usando a formulação SRF-1



**Figura 5.15** Trajetórias de equilíbrio usando a formulação SRF-2



**Figura 5.16** Trajetórias de equilíbrio usando a formulação SRF-3

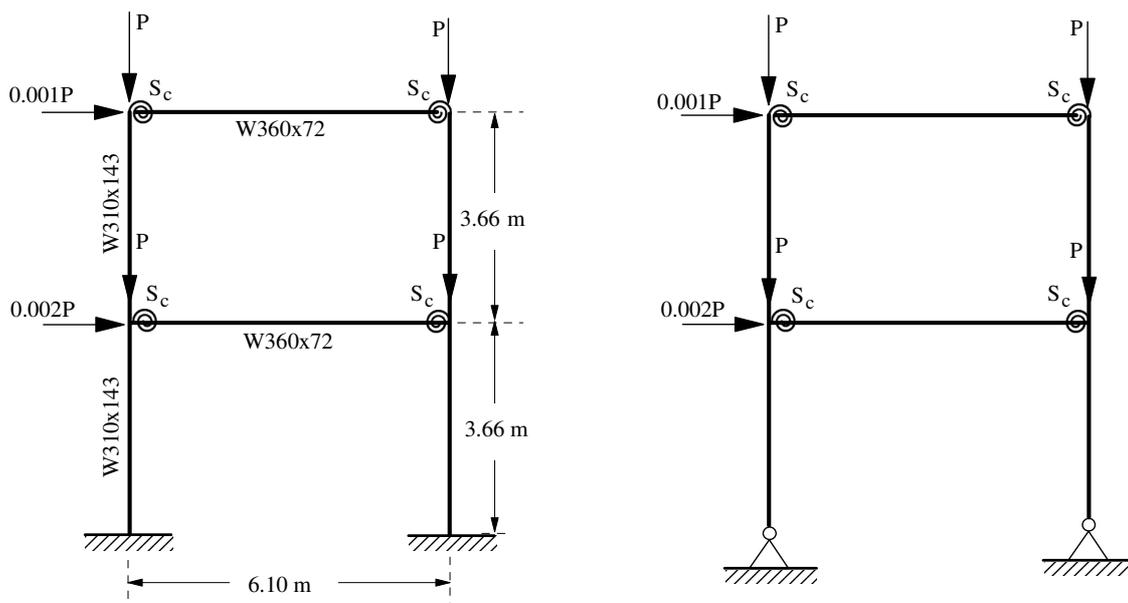
Além do que foi relatado no parágrafo anterior, verificando as figuras, pode-se concluir que as três formulações resolveram eficientemente o problema e, mais ainda, qualquer uma das formulações que simulam os efeitos de segunda-ordem, SOF-1 ou SOF-2, pode ser escolhida.

### 5.3.2 Pórticos de Dois Andares

A estrutura, que está esboçada na Figura 5.17, é o segundo exemplo desta seção. Refere-se a um pórtico de dois pavimentos, com ligações viga-coluna semi-rígidas de comportamentos não lineares, cuja capacidade de carga é investigada. São feitas análises considerando duas condições de apoios diferentes: engastados e rotulados. Essas duas situações são mostradas na Figura 5.17 a seguir.

Para as vigas é adotado o perfil W360x72 e para as colunas, perfil W310x143. Na discretização das vigas e colunas foram usados, respectivamente, dois e um elementos finitos. Além disso, foi considerado em todas as seções o módulo de elasticidade,  $E$ , igual a 200 GPa.

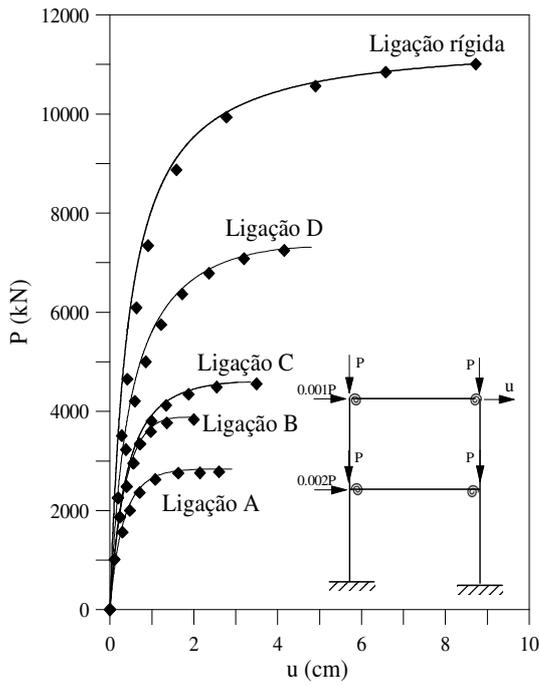
Imperfeições na estrutura são induzidas por meio de forças horizontais de pequena intensidade aplicadas no topo do primeiro e do segundo pavimentos, como pode ser visto também na Figura 5.17.



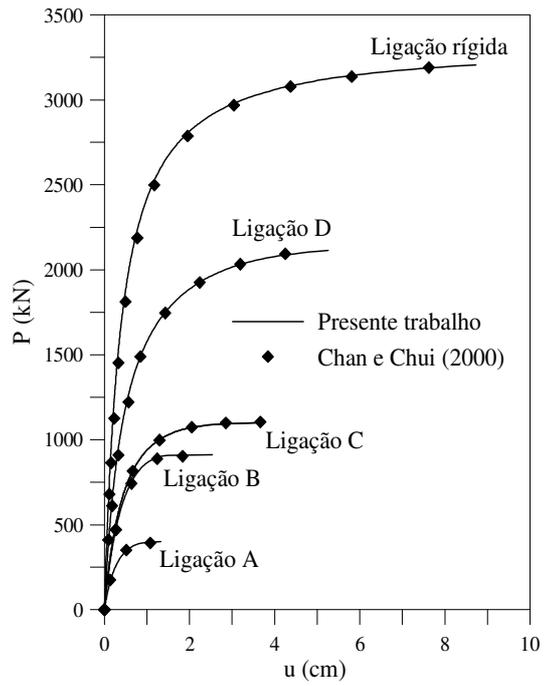
**Figura 5.17** Sistemas estruturais analisados: geometria e carregamento

Para representar o comportamento não linear das ligações viga-coluna, quatro tipos de ligações, modeladas através do modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986), foram usadas. As ligações consideradas são: cantoneira de alma simples (Ligação A), cantoneira de topo e assento (Ligação B), chapa de topo (Ligação C) e chapa de topo estendida (Ligação D). Detalhes dessas ligações são mostrados na Figura B.1 do Apêndice B. Segundo Chen e Lui (1991) e Chan e Chui (2000), a ligação A foi testada por Richard *et al.* (1982), enquanto B foi ensaiada por Azizinamini *et al.* (1985). Já as ligações C e D, de acordo com os mesmos autores, foram testadas por Ostrander (1970) e Johnson e Walpole (1981), respectivamente. Os valores dos parâmetros do modelo exponencial para essas ligações, baseados em ensaios experimentais (Chen e Lui, 1991) estão indicados no Apêndice B, na Tabela B.1. Além desses quatro modelos de ligações, é considerada a ligação viga-coluna como sendo perfeitamente rígida.

As Figuras 5.18a, 5.19a e 5.20a exibem, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio obtidas para o pórtico com apoios engastados considerando as formulações SRF-1, SRF-2 e SRF-3. Essas figuras mostram a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u$ , com a carga aplicada,  $P$ . É importante destacar que para obtenção dessas curvas foi utilizada a formulação geometricamente não linear SOF-2, que segue os fundamentos da metodologia proposta por Yang e Kuo (1994), na forma linearizada. Os resultados obtidos são comparados aos de Chan e Chui (2000). Já as Figuras 5.18b, 5.19b e 5.20b exibem, respectivamente, os resultados obtidos para o pórtico com apoios rotulados.

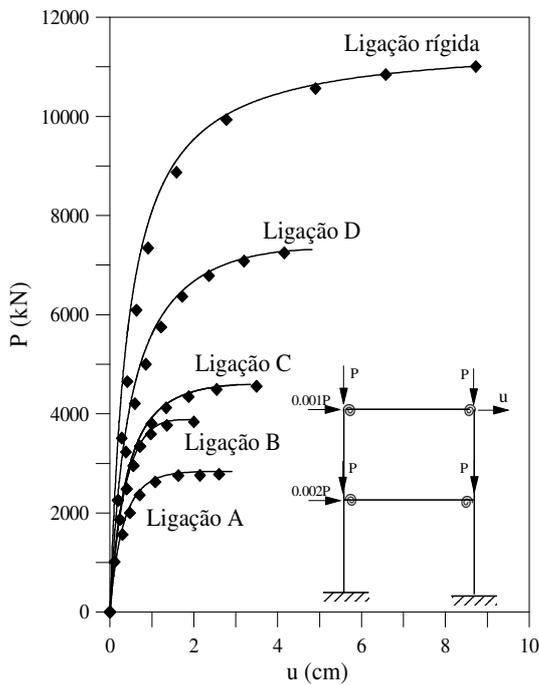


(a) Apoios engastados

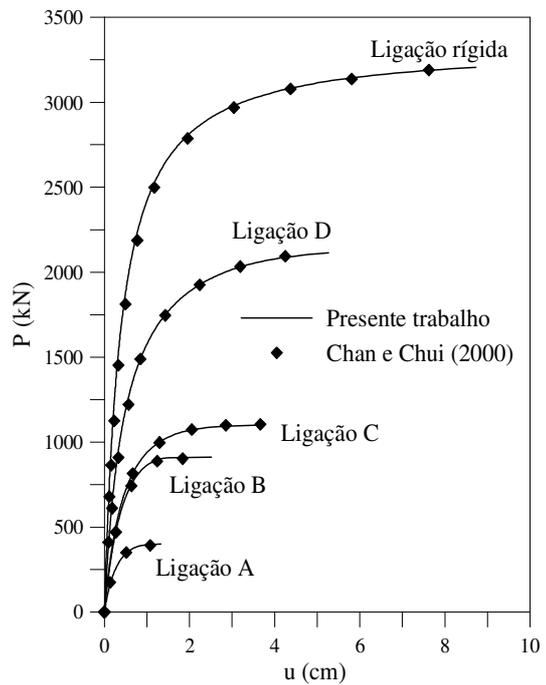


(b) Apoios rotulados

**Figura 5.18** Trajetórias de equilíbrio obtidas com a formulação SRF-1



(a) Apoios engastados

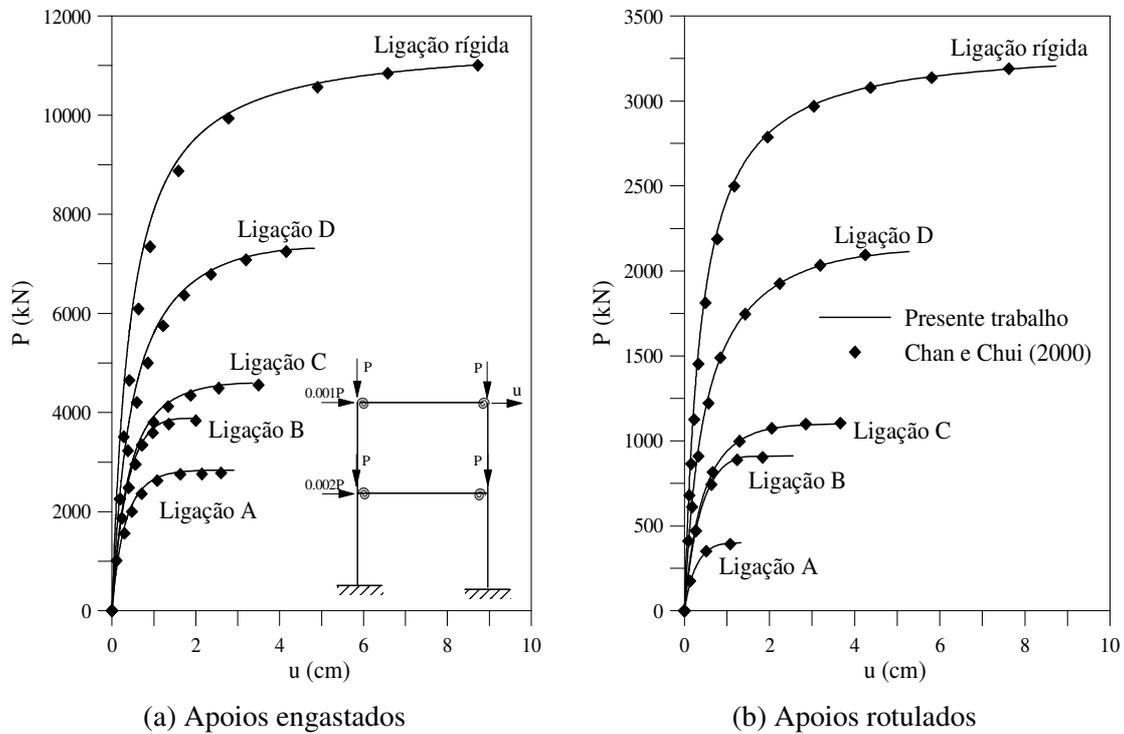


(b) Apoios rotulados

**Figura 5.19** Trajetórias de equilíbrio obtidas com a formulação SRF-2

Através da análise dessas figuras, percebe-se que as cargas limite são menores para as ligações mais flexíveis e, adicionalmente, o tipo de apoio, engastado ou rotulado,

desempenha um papel importante no comportamento estrutural. O apoio rígido eleva consideravelmente o valor da carga crítica. Portanto, o uso de apoios fixos e ligações mais rígidas seria uma forma de aumentar o valor da carga limite e diminuir o deslocamento horizontal.



**Figura 5.20** Trajetórias de equilíbrio obtidas com a formulação SRF-3

As Tabelas 5.4 e 5.5, mostradas a seguir, apresentam as cargas críticas para os pórticos com apoios engastados e rotulados, respectivamente. Os valores são comparados aos fornecidos por Chen e Lui (1991) e Chan e Chui (2000). O bom acordo entre os resultados é novamente observado.

**Tabela 5.4** Cargas limite de estabilidade  $P_{lim}$  (kN) para o pórtico com apoios engastados

Ligação	Chen e Lui (1991)	Chan e Chui (2000)	Formulações		
			SRF-1	SRF-2	SRF-3
A	2802.4	2838.0	2842.4	2842.4	2846.9
B	3825.5	3892.2	3887.7	3887.7	3878.9
C	4581.7	4617.3	4595.0	4595.0	4586.1
D	7228.4	7330.7	7317.3	7317.3	7406.3
Rígida	11254.0	11387.5	11320.7	11329.6	11316.3

**Tabela 5.5** Cargas limite de estabilidade  $P_{lim}$  (kN) para o pórtico com apoios rotulados

Ligação	Chen e Lui (1991)	Chan e Chui (2000)	Formulações		
			SRF-1	SRF-2	SRF-3
A	400.3	395.9	400.3	400.3	400.3
B	911.9	907.4	903.0	907.4	907.4
C	1076.5	1107.6	1098.7	1098.7	1098.7
D	2112.9	2121.8	2121.8	2121.8	2121.8
Rígida	3225.0	3318.4	3256.1	3256.1	3251.6

## 5.4 Inelasticidade do Aço e Não Linearidade Geométrica

Nesta seção, as formulações usadas para realizar a análise inelástica de segunda ordem de estruturas de aço são aplicadas ao estudo de cinco sistemas estruturais. Dessa forma, as formulações PHF-1 e PHF-2, que seguem, respectivamente, os princípios da metodologia proposta por Liew (1993) e Chan e Chui (2000) serão validadas. Os fundamentos dessas formulações foram introduzidos na Seção 4.5 do capítulo anterior.

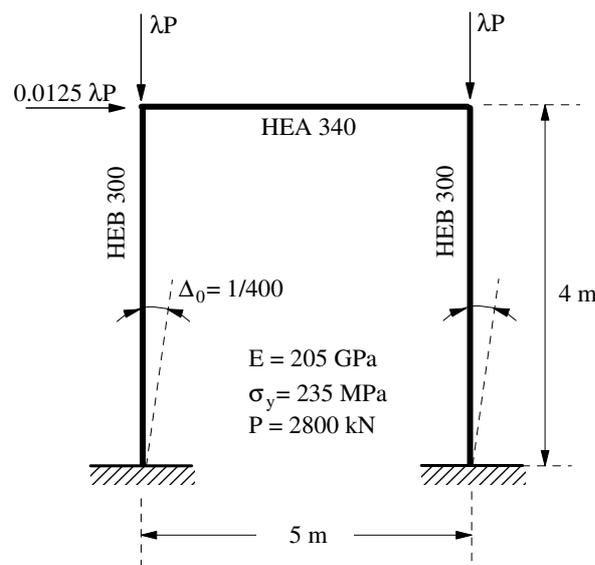
Nos exemplos desta seção, a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga, com iteração a carga constante será adotada, pois, como na seção anterior, o principal interesse é a obtenção da carga limite do sistema estrutural. Dessa forma, incrementos de carga muito pequenos, de forma a avaliar com precisão a carga de colapso do sistema, foram considerados. Para simular os efeitos de segunda ordem na metodologia PHF-2, a formulação SOF-2 simplificada é usada em todos os problemas desta seção. Na formulação PHF-1, funções de estabilidade desenvolvem esse papel.

### 5.4.1 Portal Simples

O primeiro exemplo desta seção, ilustrado na Figura 5.21, refere-se a um portal simples biengastado. É um problema clássico que foi analisado por Vogel (1985) e Ziemian (1990) através do método da zona plástica e, posteriormente, por Chen *et al.* (1996) usando o método da rótula plástica refinado.

As colunas são constituídas por perfis HEB300 e a viga é formada pelo perfil HEA400. Como indicado na mesma figura, considerou-se uma imperfeição inicial  $\Delta_0$  nas colunas. O módulo de elasticidade e a tensão de escoamento foram assumidos iguais a 205 GPa e 235 MPa, respectivamente. Para a tensão residual, 50% da tensão de escoamento foi o valor adotado seguindo as recomendações do ECCS (1983) para a relação  $D/B_f \leq 1.2$ , sendo  $D$  a altura e  $B_f$  a largura da mesa do perfil (veja Figura 4.26 do

Capítulo 4). Para o perfil HEA340, tem-se  $D = 330$  mm e  $B_f = 300$  mm, e para o perfil HEB300,  $D$  e  $B_f$  são iguais a 300 mm. A viga foi discretizada com quatro elementos, e cada uma das colunas com dois. As cargas aplicadas à estrutura podem ser observadas também na Figura 5.21. Nas extremidades da viga, cargas concentradas verticais de intensidade  $\lambda P$  são aplicadas e, no topo da coluna à esquerda, uma carga horizontal,  $0.0125\lambda P$ , atua. O termo  $\lambda$  é o parâmetro de carga que é alterado durante o processo incremental até alcançar a carga de colapso.

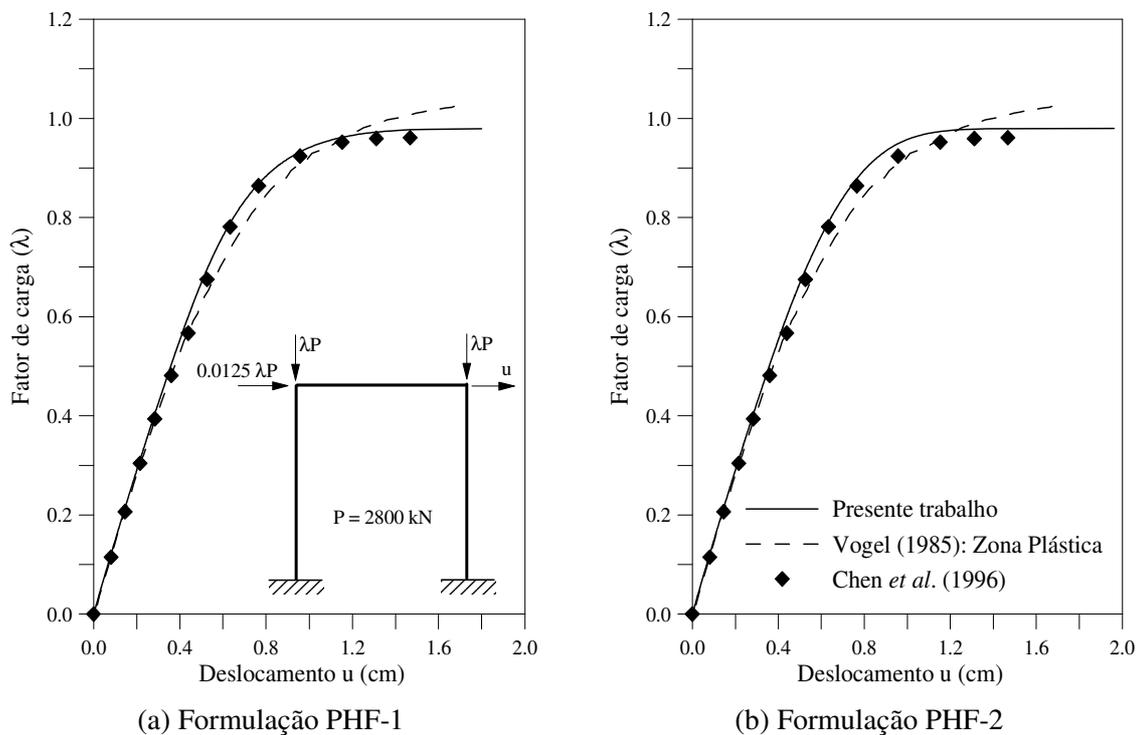


**Figura 5.21** Pórtico simples: geometria e carregamento

A Figura 5.22a-b mostra as curvas carga-deslocamento obtidas com as formulações PHF-1 e PHF-2, respectivamente. Foi considerado, na obtenção da trajetória de equilíbrio, o deslocamento horizontal,  $u$ , no topo da coluna à direita. Usam-se para comparação as trajetórias obtidas por Chen *et al.* (1996) e Vogel (1985). Observando as figuras, percebe-se que as trajetórias não diferem muito das curvas encontradas por esses autores. Para fatores de carga,  $\lambda$ , inferiores a 0.5, elas coincidem. Porém, os fatores de carga máximos estimados pelo método da rótula plástica refinado, usado neste trabalho e por Chen *et al.* (1996), são menores que os fatores obtidos pelo método da zona plástica usado por Vogel (1985). Os fatores de carga críticos serão fornecidos adiante.

A variação da força axial  $P$  e do momento fletor  $M$  na seção transversal da base da coluna à direita, durante o processo de carregamento, é ilustrada nas Figuras 5.23a-b para as duas formulações que vêm sendo testadas nesta seção, PHF-1 e PHF-2, respectivamente.

As superfícies de resistência plástica e de início de escoamento são também representadas. Na formulação PHF-1, conforme o estudo realizado no capítulo anterior, essas superfícies têm a mesma forma. Isso não ocorre para a formulação PHF-2. Percebe-se que a distribuição da plasticidade é dominada principalmente pela ação da força axial. Já o colapso da estrutura é associado com a instabilidade inelástica das colunas, sinalizado pelo deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u$ , que aumenta demasiadamente e não pela formação de rótulas plásticas. Observe que as forças internas não atingem a superfície de plastificação.



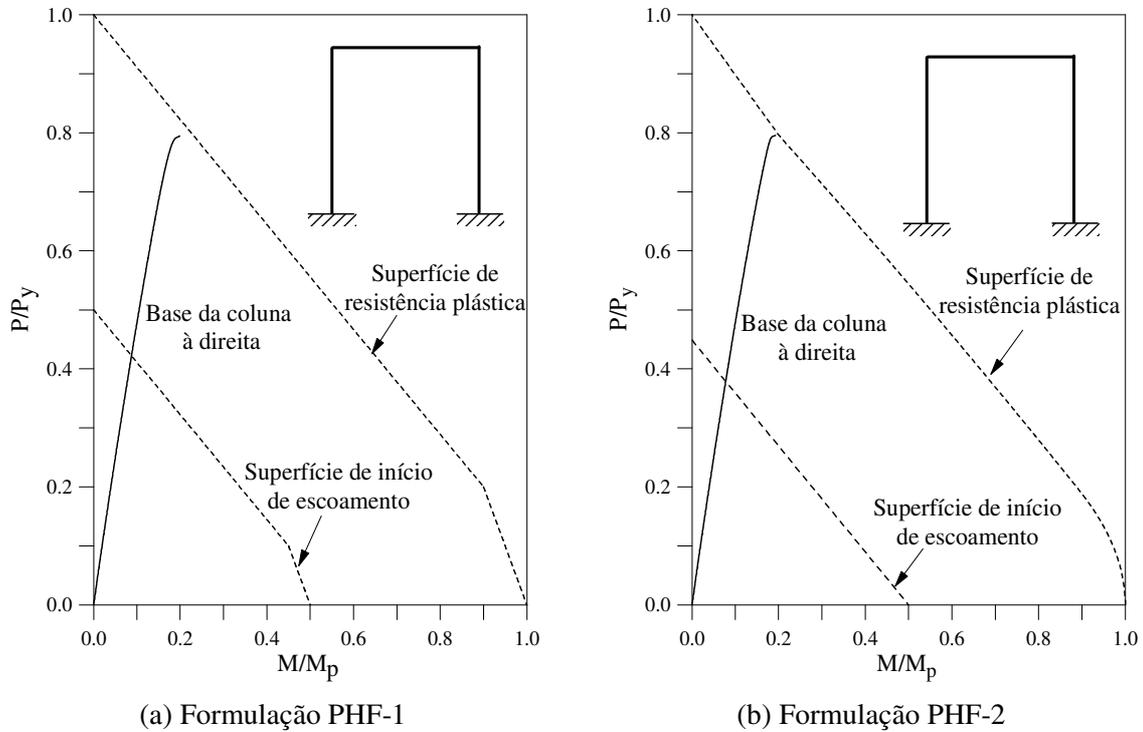
**Figura 5.22** Trajetórias de equilíbrio

As Figuras 5.24a-b exibem o grau de escoamento nos membros da estrutura no final da análise quando ocorre o colapso estrutural. O índice de escoamento,  $p$ , em porcentagem, representado no interior dos círculos, é calculado usando a relação:

$$p (\%) = 100(1 - \psi) \quad (5.1)$$

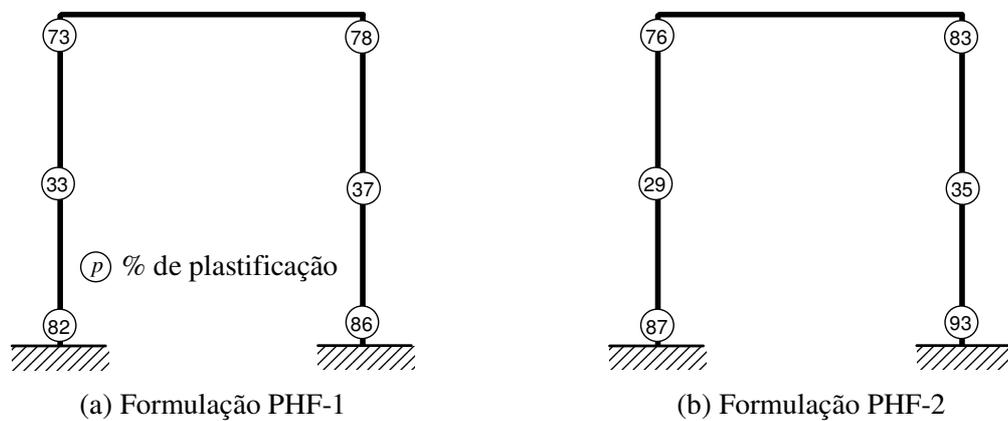
onde  $\psi$  é o parâmetro associado com o efeito da plastificação na extremidade do elemento. Esse coeficiente é unitário quando a seção encontra-se no regime elástico ( $p = 0$ ), e se anula quando a mesma se plastifica completamente ( $p = 100\%$ ). Embora a definição desse

índice de escoamento não forneça uma representação “exata” do grau de escoamento, ele estabelece uma informação útil referente à localização de seções críticas ou regiões com alto grau de plastificação nos sistemas estruturais.



**Figura 5.23** Distribuição de forças internas na base da coluna à direita

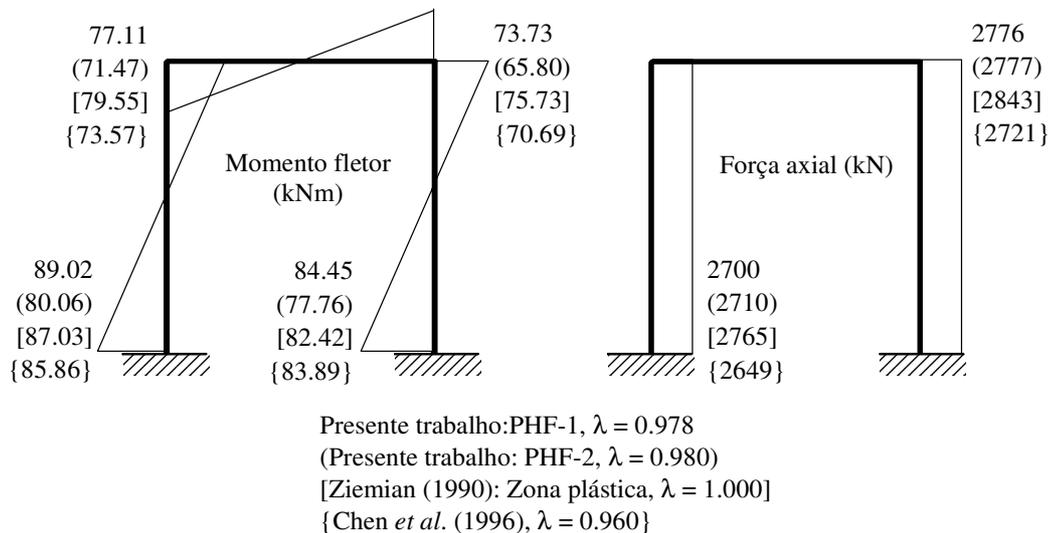
Observa-se pela Figura 5.24 que o topo e a base das colunas têm uma perda significativa de rigidez, com  $p$  variando em torno de 70% a 90% para as duas formulações. No estudo por zona plástica realizado por Ziemian (1990), aproximadamente 60% da área da seção transversal das colunas foi plastificada.



**Figura 5.24** Índice de plastificação dos membros da estrutura

A Figura 5.25 mostra os diagramas de momento fletor e força axial referentes à carga de colapso, que também é indicada na figura através do fator de carga  $\lambda$ . Embora não esteja representado nessa figura, Vogel (1985) encontrou o valor 1.022 para o fator de carga limite.

Os resultados alcançados com as duas formulações propostas são comparados aos obtidos por Ziemian (1990) através do método da zona plástica, e àqueles fornecidos por Chen *et al.* (1996) que usou, como já mencionado, o método da rótula plástica refinado. Os momentos fletores obtidos com a formulação PHF-2 foram menores que os encontrados com a formulação PHF-1. Porém, os resultados estão em bom acordo com os da literatura. Vale ressaltar que as forças axiais nas vigas são insignificantes se comparadas às forças axiais desenvolvidas nas colunas e, por esse motivo, não estão detalhadas.



**Figura 5.25** Cargas de colapso e diagramas de momento fletor e força axial

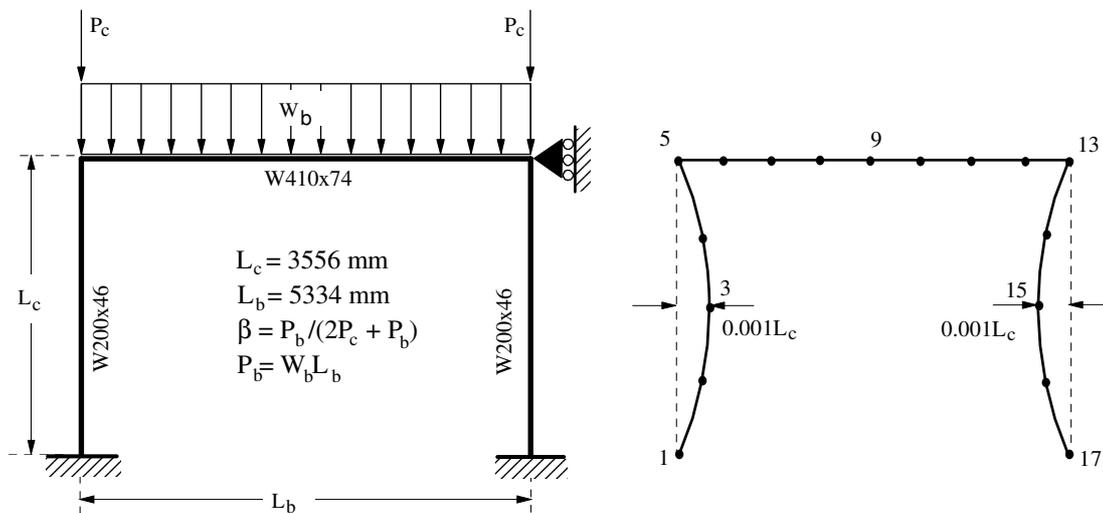
#### 5.4.2 Pórtico com Restrição ao Movimento Lateral

A estrutura a ser analisada é mostrada na Figura 5.26. O estudo do comportamento desse pórtico foi feito por Chen *et al.* (1990) usando o método da zona plástica e por Liew *et al.* (1993) e Chan e Chui (2000) através da abordagem por rótulas plásticas.

A viga é submetida a um carregamento uniformemente distribuído e uma restrição ao movimento lateral é imposta à estrutura para simular um contraventamento por um membro inclinado ou por um sistema rígido (uma parede de concreto, por exemplo). Os subscritos *b* e *c* na Figura 5.26 referem-se, respectivamente, à viga e à coluna. As

propriedades geométricas e físicas da estrutura e o esquema de carregamento aplicado estão também indicados nessa mesma figura.

Na análise por zona plástica feita por Chen *et al.* (1990) foi considerada a tensão residual máxima em todas as seções igual a 30% da tensão de escoamento. Neste trabalho, seguindo as recomendações da ECCS (1983), as tensões residuais máximas nas vigas e colunas foram consideradas iguais a 30% e 50% da tensão de escoamento, respectivamente. O módulo de elasticidade usado na análise é  $205 \text{ kN/mm}^2$  e a tensão de escoamento,  $235 \text{ N/mm}^2$ .

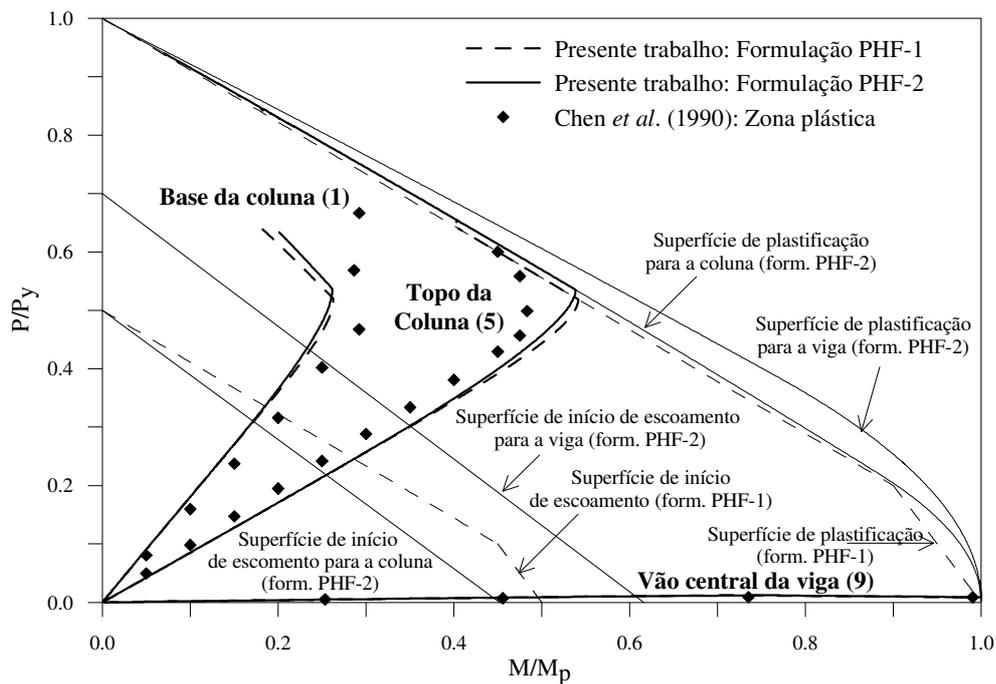


**Figura 5.26** Pórtico analisado: geometria, carregamento e discretização

As colunas são consideradas como tendo uma imperfeição geométrica de forma senoidal e com valor máximo igual a  $L_c/1000$  no seu ponto nodal central. Elas foram divididas em quatro elementos finitos para detectar a formação de possíveis rótulas plásticas entre as suas extremidades e, também, para aproximar a curvatura inicial do membro. A viga é discretizada com oito elementos para aproximar a carga distribuída como cargas concentradas nos pontos nodais desses elementos. A imperfeição geométrica inicial e a discretização efetuada são mostradas na Figura 5.26. Nesse estudo, os resultados foram obtidos para um fator de carga  $\beta$ , indicado também na Figura 5.26, igual a 0.34. Esse parâmetro define a razão entre a carga na viga e a carga total aplicada na estrutura.

A interação entre as forças internas em três seções da estrutura, ocorrida durante a análise, é mostrada na Figura 5.27. As seções escolhidas foram a base e o topo da coluna à esquerda, pontos nodais 1 e 5, respectivamente, e o centro da viga, ponto nodal 9. Esses

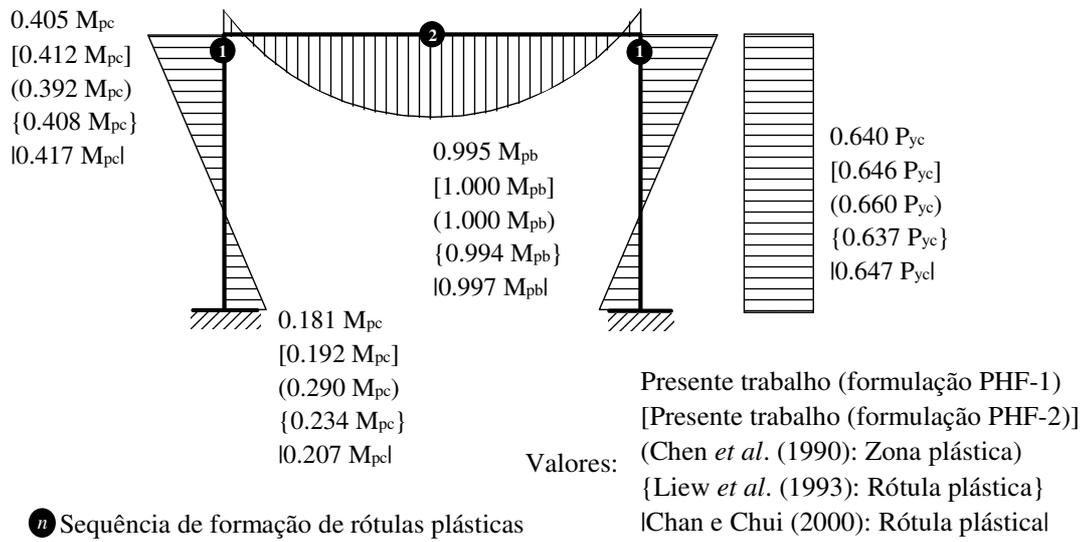
pontos nodais podem ser visualizados na Figura 5.26. A Figura 5.27 apresenta então a modificação na intensidade e direção das forças nessas seções transversais selecionadas, durante a aplicação do carregamento. As superfícies de início de escoamento e de plastificação para as metodologias PHF-1 e PHF-2 são também apresentadas. Na formulação PHF-2, as superfícies, que dependem das propriedades geométricas da seção, são diferentes para a viga e as colunas, pois os perfis adotados nesses membros são diferentes. Os resultados obtidos neste trabalho, através dessas formulações, são comparados aos de Chen *et al.* (1990). Como a força axial no topo das colunas aumenta, as forças internas que atuam nessa seção se movem em direção à superfície de resistência plástica da seção. Para um determinado nível de carga, através da interação entre a força axial e o momento fletor, essa superfície é atingida. Com a formação das rótulas plásticas no topo das colunas, ocorre uma redistribuição de momentos fletores na viga. Quando o momento plástico no centro da viga é alcançado, ocorre o desenvolvimento de um mecanismo que causa o colapso da estrutura com a formação de três rótulas plásticas.



**Figura 5.27** Distribuição das forças internas em três seções selecionadas

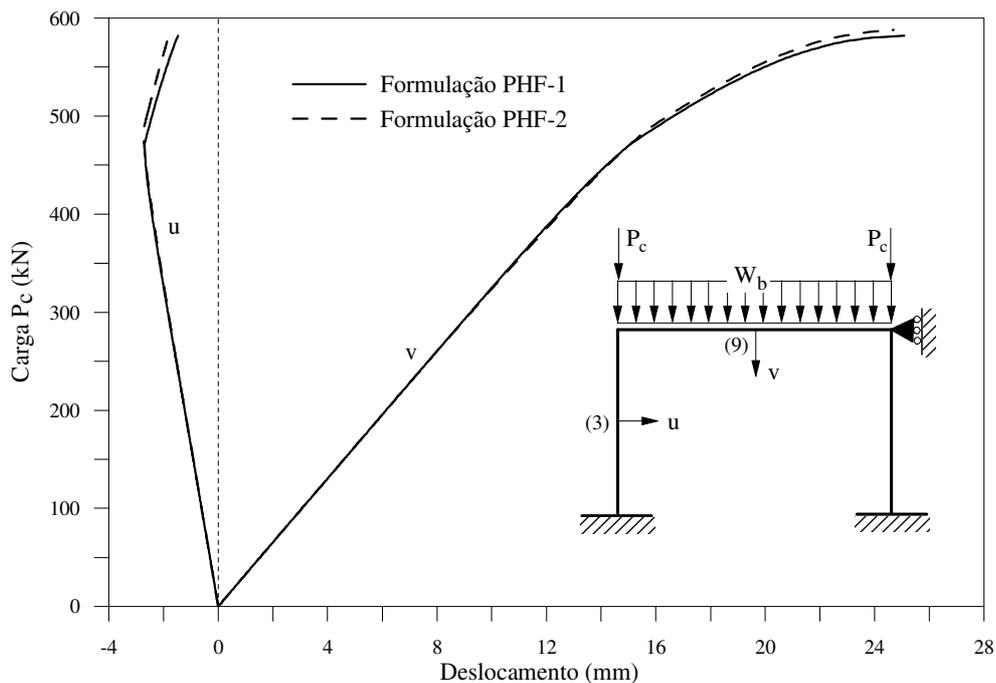
A carga limite obtida ao final da análise é associada com a formação de rótulas plásticas no topo das colunas e no vão central da viga. A Figura 5.28 mostra a distribuição do momento fletor e força axial para essa carga, ou seja, para a carga na qual a estrutura entra em colapso. As forças axiais nas vigas são desprezíveis e, por isso, elas não são

mostradas na figura. Os valores encontrados são comparados aos de Liew *et al.* (1993), Chan e Chui (2000) e Chen *et al.* (1990).



**Figura 5.28** Diagramas de momento fletor e força axial

A figura anterior mostra ainda a localização das três rótulas plásticas (duas, no topo das colunas e uma, no centro da viga). A boa aproximação entre os resultados pode ser observada. Os subscritos *b* e *c* referem-se à viga e à coluna, respectivamente,  $P_y$  é a carga axial de escoamento e  $M_p$  refere-se ao momento de plastificação. Finalmente, as curvas carga-deslocamento para o pórtico são mostradas na Figura 5.29.

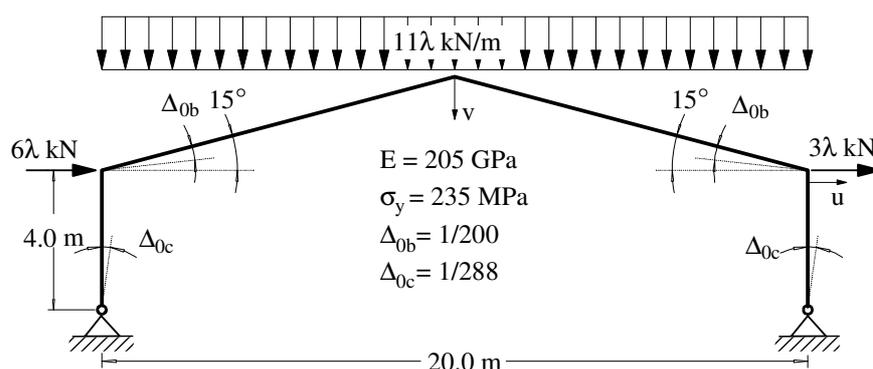


**Figura 5.29** Trajetórias de equilíbrio para o pórtico

Foram considerados, na obtenção das trajetórias de equilíbrio exibidas na Figura 5.29, o deslocamento horizontal,  $u$ , no centro da coluna à esquerda e o deslocamento vertical,  $v$ , no meio do vão da viga.

### 5.4.3 Pórtico Tipo Galpão

O terceiro problema a ser estudado nesta seção é o pórtico tipo galpão mostrado na Figura 5.30. Essa estrutura é usada para verificar a precisão e a confiabilidade das formulações para análise inelástica (Vogel, 1985; Ziemian, 1993). As propriedades geométricas, as propriedades físicas e o carregamento atuante são mostrados também na Figura 5.30. São aplicadas à estrutura imperfeições iniciais de valor  $1/200$  no prumo das colunas e  $1/288$  na inclinação das vigas. Para modelagem da estrutura, as colunas foram discretizadas com quatro elementos e cada uma das vigas, com vinte elementos.



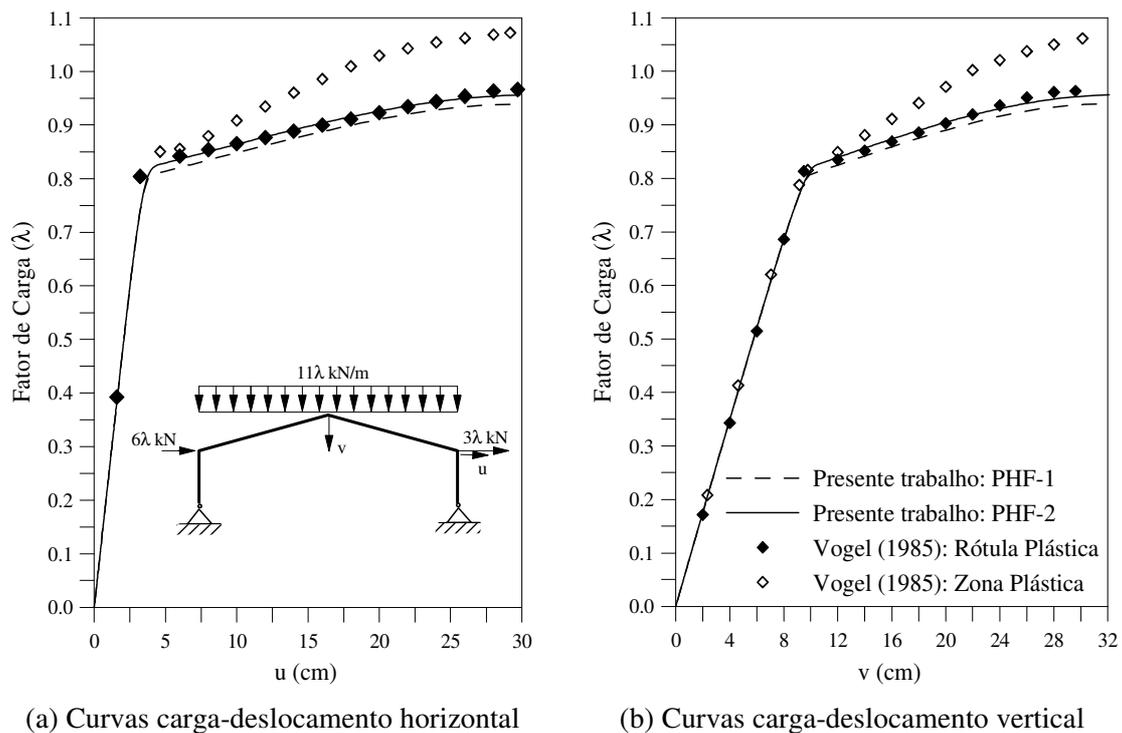
**Figura 5.30** Pórtico tipo galpão: geometria, carregamento e propriedades físicas

As Figuras 5.31a-b mostram as trajetórias de equilíbrio obtidas tomando-se como referência, respectivamente, o deslocamento horizontal no topo da coluna direita e o deslocamento vertical no ponto de ligação entre as vigas.

Pode-se observar que a resposta obtida na análise por zona plástica começa a desviar das respostas baseadas no método da rótula plástica após atingir, aproximadamente, o fator de carga  $\lambda$  igual a 0.8. Após esse fator de carga, para pequenos aumentos na carga aplicada, o deslocamento horizontal da coluna direita aumenta consideravelmente.

A Tabela 5.6 resume os fatores de carga limite,  $\lambda_{lim}$ , obtidos com as formulações PHF-1 e PHF-2. Percebe-se através dessa tabela e das figuras anteriores a boa concordância entre os resultados aqui obtidos e aqueles encontrados na literatura.

Entretanto, uma diferença existe quando se comparam os resultados com aquele obtido por Vogel (1985) usando o método da zona plástica. A resistência máxima obtida com esse método é maior que a obtida com o método da rótula plástica. Isso porque os efeitos do encruamento do aço, que aumentam a resistência da estrutura, são considerados na análise por zona plástica feita por Vogel (1985).



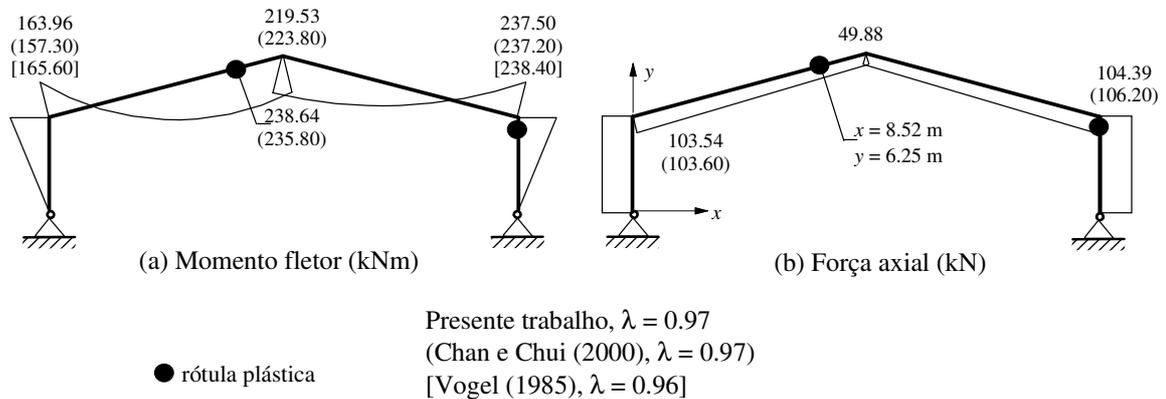
**Figura 5.31** Trajetórias de equilíbrio

**Tabela 5.6** Fator de carga limite,  $\lambda_{lim}$

Referência	$\lambda_{lim}$
Presente Trabalho: Formação PHF-1	0.94
Presente Trabalho: Formação PHF-2	0.97
Vogel (1985): Rótula Plástica	0.96
Vogel (1985): Zona Plástica	1.07
Chan e Chui (2000): Rótula Plástica	0.97
Chen <i>et al.</i> (1996): Rótula Plástica	0.95

Encerrando esse estudo, os diagramas de forças axiais e momentos fletores referentes à carga limite, obtidos com a formulação plástica-refinada PHF-2, são mostrados na Figura 5.32. Os valores encontrados são comparados aos de Chan e Chui (2000), Vogel (1985) e

Chen *et al.* (1996), utilizando também a formulação plástica-refinada. Observa-se que esses resultados estão em boa concordância com os da literatura. A figura ilustra também, utilizando um círculo preenchido, a posição de rótulas plásticas que se formaram durante o processo de análise.



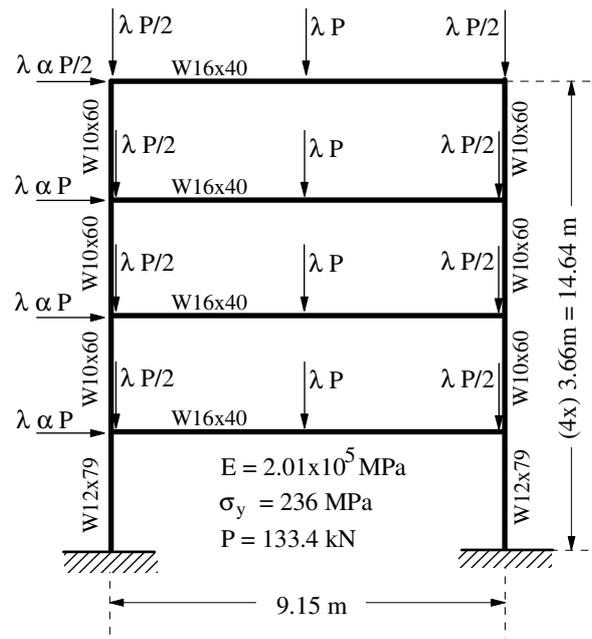
**Figura 5.32** Diagramas de momento fletor e força axial

#### 5.4.4 Pórtico de Quatro Andares

Considere o pórtico de quatro andares submetido a cargas horizontais e verticais concentradas nas vigas e colunas como mostra a Figura 5.33. Essa estrutura foi analisada inicialmente por Kassimali (1983) e recentemente por Yoo e Choi (2008) para validarem as formulações por eles propostas. Kassimali (1983) utilizou o método da rótula elasto-plástica. Já Yoo e Choi (2008) propõe em seu trabalho um novo método de análise de flambagem inelástica para determinar a carga crítica de estruturas metálicas. Nesse método a carga crítica é determinada através da análise de um problema de autovalor, e a teoria do módulo tangente e a curva de resistência para colunas do AISC-LRFD (AISC, 1986) são utilizados. Além desse método, eles utilizam também, para fins de comparação, o método da rótula plástica refinado.

Como indicado na Figura 5.33, as colunas do primeiro pavimento são constituídas por perfil W12x79 e as demais, por perfil W10x60. Já nas vigas, é utilizado o perfil W16x40. Os valores adotados para o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento são, respectivamente, 201 GPa e 236 MPa. A tensão residual é considerada como 30% da tensão de escoamento.

Nas vigas são aplicadas cargas verticais, de intensidades  $P$  e  $P/2$ , no centro do vão e nas ligações entre vigas e colunas, respectivamente. No topo das colunas, cargas horizontais,  $\alpha P$ , onde  $\alpha$  é um coeficiente adimensional, atuam. Durante a análise, essas cargas são incrementadas pelo parâmetro  $\lambda$  até que se atinja a carga de colapso. O valor considerado para a carga  $P$  é 133.4 kN. As vigas são discretizadas com dois elementos, e em cada coluna usa-se um elemento apenas.

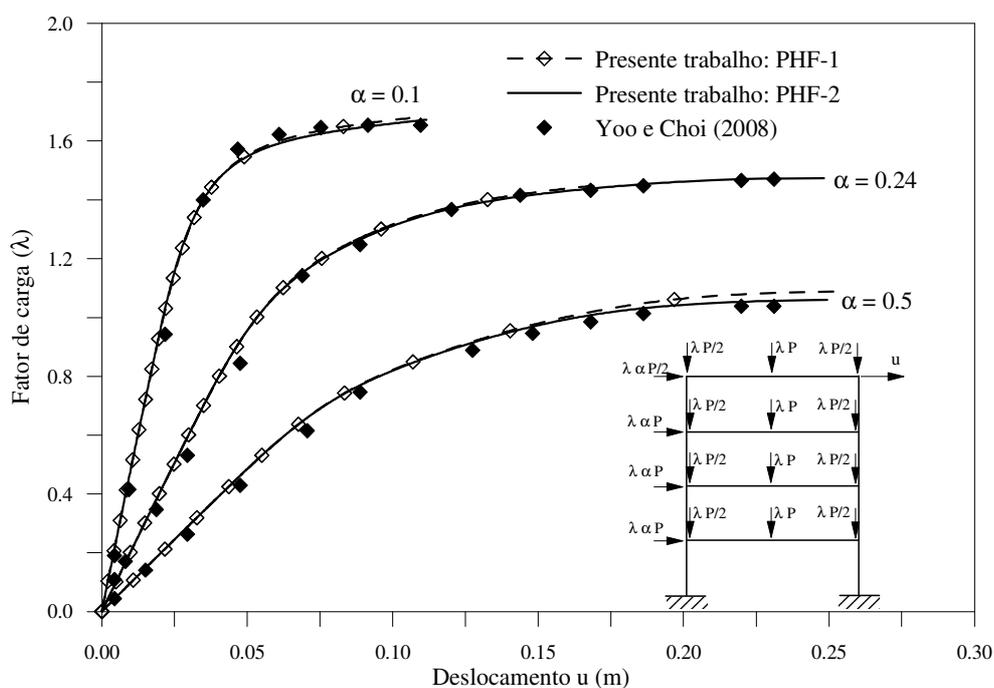


**Figura 5.33** Pórtico de quatro andares

A Figura 5.34 mostra a variação do deslocamento horizontal,  $u$ , do quarto pavimento durante o processo de carregamento. As respostas para  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.24$  e  $\alpha=0.5$  são exibidas. São mostrados também os resultados numéricos obtidos por Yoo e Choi (2008) usando o método da rótula plástica refinado. Observa-se que as respostas obtidas utilizando as duas metodologias (PHF-1 e PHF-2) estão em bom acordo com aquelas encontradas por Yoo e Choi (2008).

Para pequenos incrementos de carga, os resultados são praticamente coincidentes. Porém, à medida que se aproxima do fator de carga limite, no caso da formulação PHF-1, os resultados são mais próximos daqueles obtidos por Yoo e Choi para menores valores do parâmetro  $\alpha$ . No caso da formulação PHF-2, ocorre o contrário. A adoção de diferentes critérios para definir a plastificação da seção transversal pode ser a principal razão para as diferenças encontradas. A Tabela 5.7 sumariza os fatores de carga limite encontrados para

os mesmos valores de  $\alpha$ : 0.1, 0.24 e 0.5. Nessa tabela, além dos resultados obtidos neste trabalho, estão aqueles conseguidos por Yoo e Choi (2008) e Kassimali (1983). Verifica-se que os resultados obtidos por Kassimali (1983) superestimam as cargas limite. Isso porque no método da rótula elasto-plástica a degradação gradual da rigidez da seção transversal e o efeito das tensões residuais não são considerados.



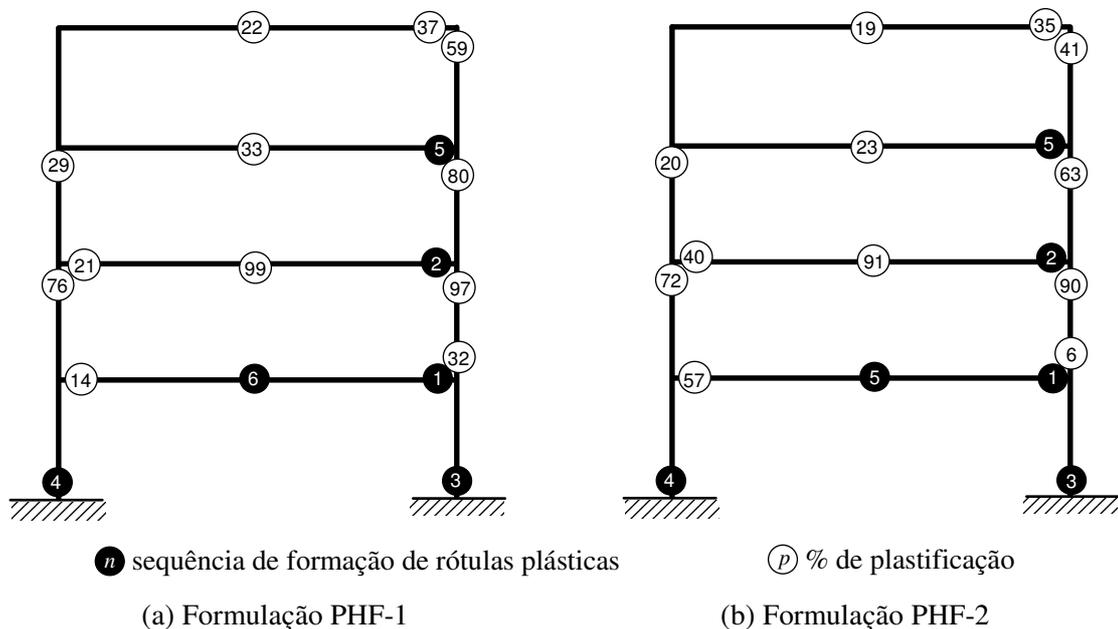
**Figura 5.34** Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de  $\alpha$

A análise termina quando a estrutura atinge o colapso. Como indicado na Tabela 5.7, isso ocorre, nas formulações PHF-1 e PHF-2, para os fatores de carga  $\lambda=1.055$  e  $\lambda=1.001$ , respectivamente. O desenvolvimento da plasticidade nas vigas e colunas do pórtico de quatro andares é exibido na Figura 5.35. Esse estudo foi feito para  $\alpha=0.5$ .

**Tabela 5.7** Fatores de carga de colapso

$\alpha$	Kassimali (1983)	Yoo e Choi (2008)	Formulações	
			PHF-1	PHF-2
0.1	1.687	1.660	1.607	1.680
0.24	1.502	1.479	1.448	1.421
0.5	1.075	1.062	1.055	1.001

Durante o histórico de carregamento, a estrutura desenvolve seis rótulas plásticas. A ordem de formação dessas rótulas é indicada no interior do círculo totalmente preenchido. A primeira rótula plástica ocorre na extremidade direita da viga do primeiro andar. Usando a formulação PHF-1, as rótulas se formam para os seguintes valores do parâmetro de carga  $\lambda$ : 0.903, 0.911, 1.037, 1.046, 1.052 e 1.055. Na formulação PHF-2, essas rótulas ocorrem para  $\lambda = 0.922, 0.942, 0.949, 0.998$  e 1.001. São mostradas também, na Figura 5.35, doze seções onde ocorre a degradação da rigidez. O grau de plastificação dessas seções, em porcentagem, é indicado no interior do círculo sem preenchimento.



**Figura 5.35** Plastificação da seção transversal para  $\alpha = 0.5$

## 5.5 Análise Avançada

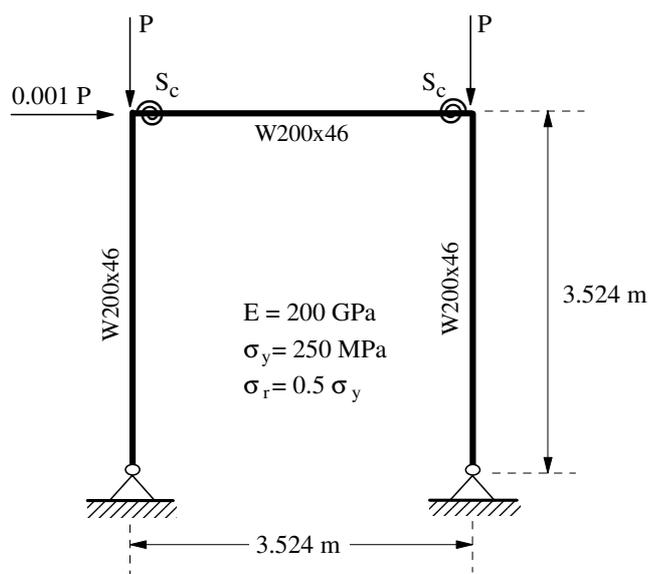
Quando se tem interesse na realização de uma análise inelástica de segunda ordem considerando o efeito da flexibilidade da ligação, as formulações AAF-1 ou AAF-2 devem ser adotadas. Essas formulações são uma extensão das formulações PHF-1 e PHF-2 aplicadas na seção anterior e com eficiência comprovada. Nesta seção, para validação desses novos métodos de análise, dois problemas serão apresentados. O primeiro trata-se de um pórtico simples birrotulado que tem ligações viga-coluna semi-rígidas com características constantes durante a análise. O outro exemplo, um pórtico de dois andares, cuja análise elástica foi realizada na Seção 5.3 deste capítulo, tem aqui seu comportamento inelástico verificado. Nesse problema, as ligações viga-coluna são não lineares, ou seja,

considera-se a perda de rigidez durante o processo de carregamento. Vale ressaltar que os modelos usados, neste trabalho, para representar matematicamente o comportamento de uma ligação estão detalhados no Apêndice B. Para simular os efeitos de segunda ordem na metodologia PHF-2, a formulação SOF-2 simplificada é usada em todos os problemas desta seção. Vale ressaltar que, como estudado no capítulo anterior, outras formulações podem também ser consideradas.

Na modelagem do sistema estrutural, o elemento finito ilustrado na Figura 4.29 do capítulo anterior é usado. Para as ligações assumidas rígidas, o parâmetro  $S_c$ , que representa a rigidez das ligações, é considerado como tendo um valor bastante elevado. Para o coeficiente  $S_s$  usado na formulação AAF-2, quando a seção se encontra no regime elástico, seu valor é considerado, por limitação numérica computacional, igual a  $1.0 \times 10^{16}$ .

### 5.5.1 Pórtico Simples Birrotulado

Para investigar o efeito da flexibilidade da ligação e da plastificação dos membros no comportamento global de uma estrutura, o pórtico simples com apoios rotulados e ligações viga-coluna semi-rígidas é analisado nesta seção. A estrutura ilustrada na Figura 5.36 foi investigada inicialmente por Lui e Chen (1988) e depois por Chan e Chui (2000). As vigas e colunas do pórtico são constituídas por perfis W200x46. Para o módulo de elasticidade considerou-se 200 GPa e para a tensão de escoamento, 250 MPa. A tensão residual foi assumida como sendo 50% da tensão de escoamento em todos os membros.



**Figura 5.36** Pórtico simples birrotulado

A estrutura foi discretizada com três elementos, um em cada membro, e obteve-se o comportamento pós-crítico do pórtico combinando a estratégia de comprimento de arco cilíndrico com o método de Newton-Raphson modificado. O incremento inicial do parâmetro de carga no primeiro passo incremental foi considerado igual a um.

A ligação viga-coluna permaneceu com rigidez constante durante a análise e igual a  $10 EI/L$ , sendo  $EI$  a rigidez à flexão e  $L$  o comprimento da viga. Na modelagem, o modelo linear foi usado para caracterizar a ligação. O parâmetro  $\gamma$ , que relaciona a rigidez do membro com a rigidez da ligação, de acordo com a discretização estabelecida, é igual a 0.76923. Vale ressaltar que o valor máximo de  $\gamma$  é 1.0 e, nesse caso, tem-se uma ligação rígida. No Apêndice B ou através da Equação 4.114 do Capítulo 4, encontra-se uma definição para esse parâmetro. O termo  $L$  que aparece nessa equação refere-se ao comprimento do elemento finito, que aqui coincidiu com o comprimento da viga, pois apenas um elemento foi usado para discretizá-la.

Ainda não foi comentado, mas existe a possibilidade de se realizar a análise elasto-plástica com o sistema computacional proposto. Nesse tipo de análise, os membros são considerados permanecerem em regime elástico até a capacidade limite da seção transversal ser alcançada, formando uma rótula plástica. Trata-se de uma metodologia aproximada e geralmente superestima as resistências e as rigidezes dos elementos no regime inelástico. Por esse e outros motivos já informados no Capítulo 4, esse método não é classificado como um método de análise avançada. Com o método refinado da rótula plástica, a redução gradual da rigidez da seção, à medida que as forças internas se aproximam da capacidade limite da seção, é considerada.

As análises elasto-plástica e plástica-refinada foram realizadas e as Figuras 5.37a-b ilustram as trajetórias de equilíbrio obtidas, respectivamente, com as formulações AAF-1 e AAF-2.

A variação do deslocamento horizontal,  $u$ , no topo do pavimento com o carregamento é mostrada. Como ressaltado anteriormente, percebe-se que as cargas críticas na abordagem elasto-plástica são maiores. Um bom acordo entre os resultados aqui encontrados e os de Chan e Chui (2000) pode ser verificado.

A formulação AAF-1, que é uma extensão da metodologia PHF-1, produz cargas limite menores que a formulação AAF-2. As cargas críticas obtidas com a análise pelo método refinado da rótula plástica foram  $1.24 EI/L^2$  e  $1.28 EI/L^2$  para as formulações AAF-1 e AAF-2, respectivamente. Chan e Chui (2000) obtiveram também o valor crítico  $1.28 EI/L^2$ .

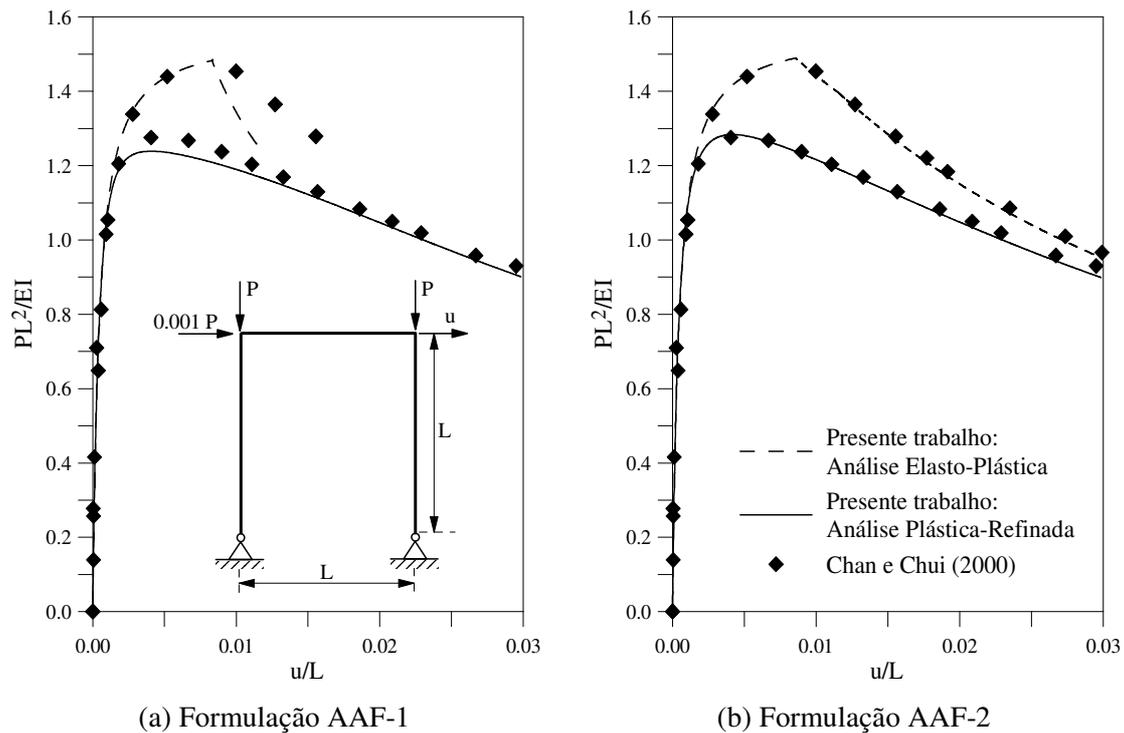


Figura 5.37 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico simples

### 5.5.2 Pórtico de Dois Andares

O último exemplo deste capítulo é mostrado na Figura 5.38. Um pórtico de dois andares com duas condições de apoio diferentes, engastados e apoiados, é analisado. A análise elástica dessa estrutura foi realizada na Seção 5.3.2 deste capítulo onde a sua capacidade de carga foi determinada. As vigas e colunas são constituídas por perfis W360x72 e W310x143, respectivamente. Três tipos de ligações viga-coluna são considerados: ligação A (cantoneira de alma simples), B (cantoneira de topo e assento) e C (ligação com chapa de topo), definidas na Seção 5.3.2. Vale ressaltar que a ligação C, com rigidez inicial igual a 12430 kNm/rad é mais rígida que as demais, e a ligação A, com rigidez 5424 kNm/rad, a mais flexível. O comportamento momento-rotação dessas ligações é representado através do modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986).

O módulo de elasticidade foi considerado igual a 200 GPa e a tensão de escoamento, 235 MPa. Baseando-se nas dimensões dos perfis e, de acordo com as prescrições do ECCS (1983), as tensões residuais são assumidas iguais a 50% e 30% da tensão de escoamento para as vigas e colunas, respectivamente. Na discretização das vigas adotaram-se dois elementos e, das colunas, um elemento apenas. Na análise, o método de Newton-Raphson modificado e a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga com iteração a carga constante foram utilizados.

As Figuras 5.39, 5.40 e 5.41 ilustram as trajetórias de equilíbrio obtidas considerando as estruturas com ligações viga-coluna tipos A, B e C, respectivamente.

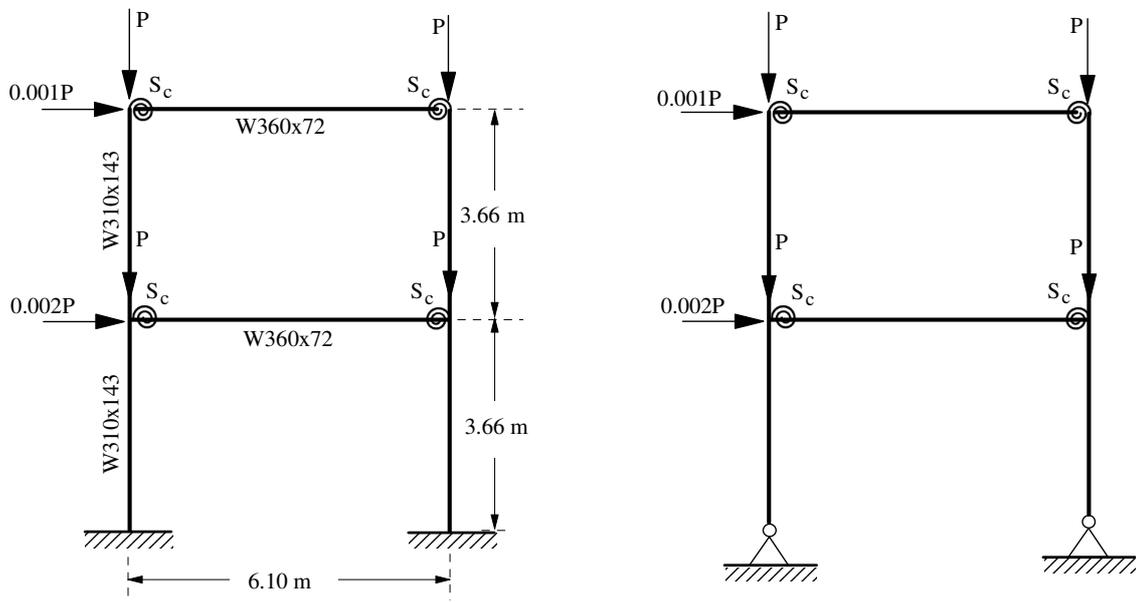


Figura 5.38 Sistemas estruturais analisados

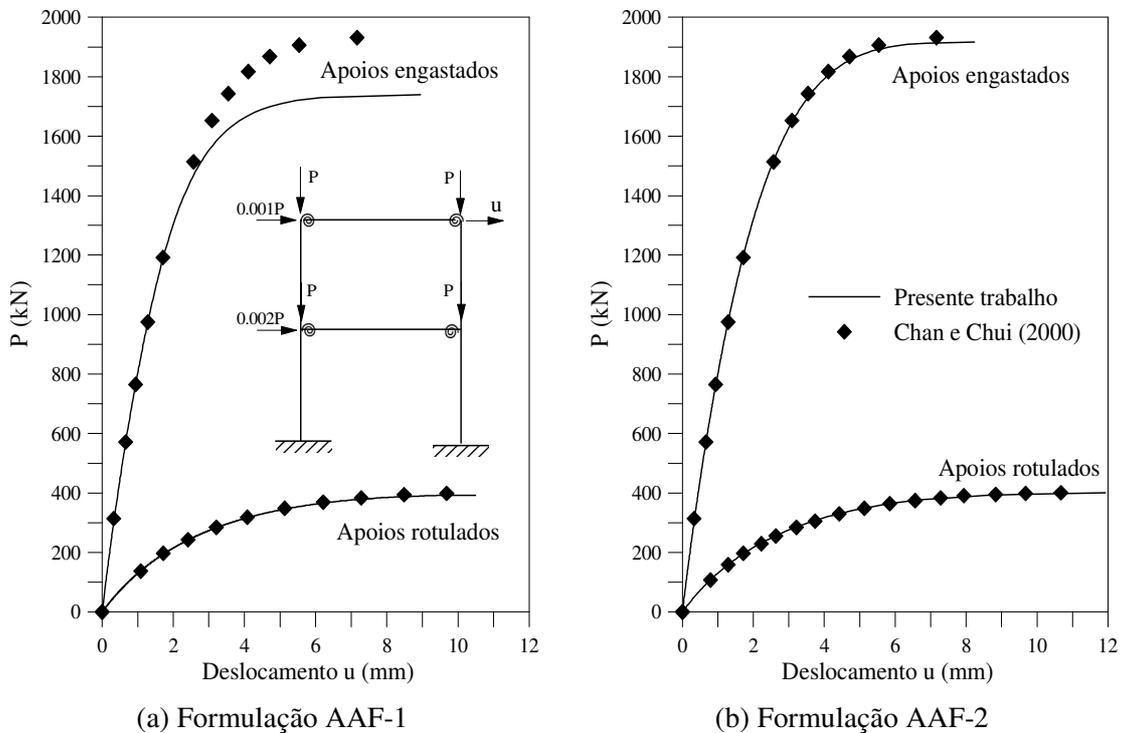
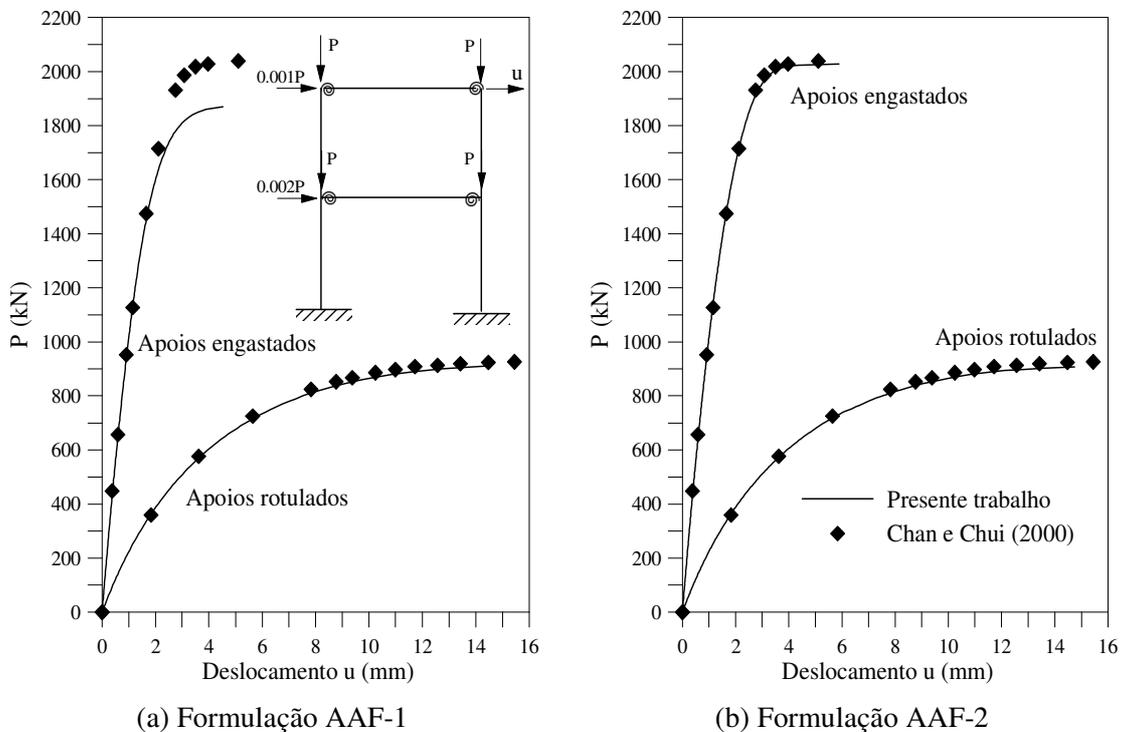


Figura 5.39 Trajetórias de equilíbrio considerando a ligação A

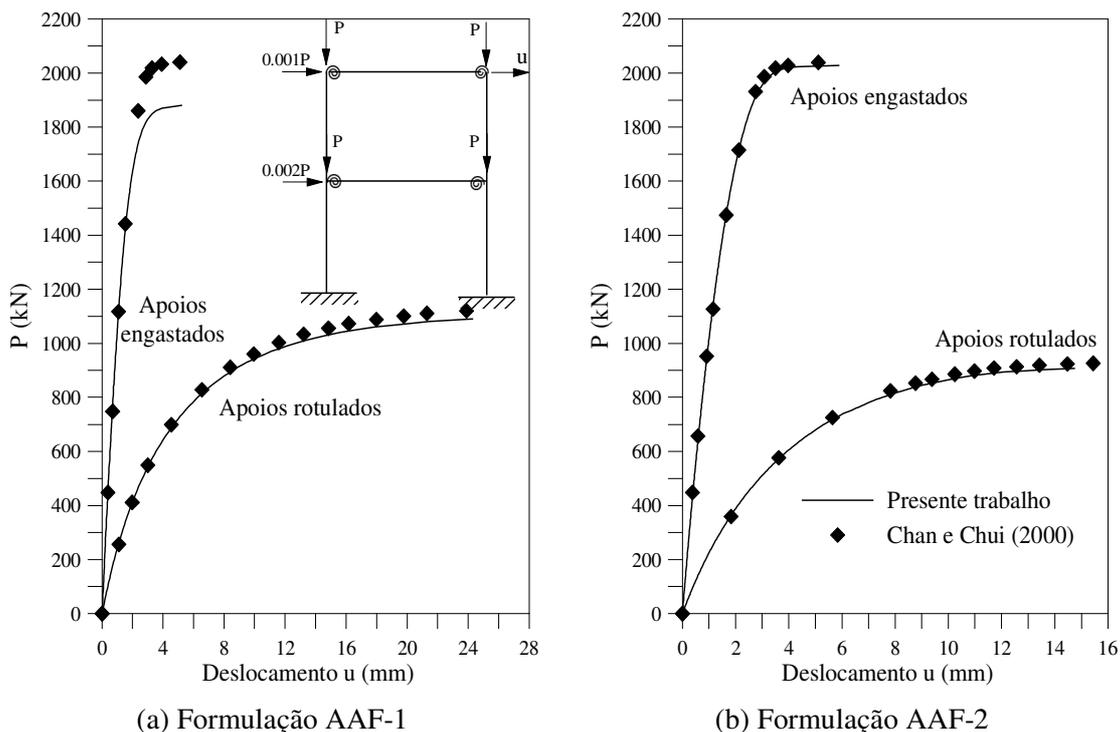
As respostas encontradas com a formulação AAF-1 são apresentadas nas Figuras 5.39a, 5.40a e 5.41a, e as curvas fornecidas pela formulação AAF-2 estão nas Figuras

5.39b, 5.40b e 5.41b. Os resultados são comparados aos de Chan e Chui (2000) que também usou o método da rótula plástica refinado. Como já comprovado em exemplos anteriores, as cargas limites são maiores para o pórtico com apoios engastados independente do tipo da ligação. No caso do pórtico com bases engastadas, o efeito dominante é o da plastificação dos membros. Isso pode ser comprovado através das Tabelas 5.8 e 5.9. Nessas tabelas, encontram-se os valores da carga de colapso para os pórticos com bases rotuladas e engastadas, respectivamente. Apresenta-se também a capacidade média de carga obtida na análise elástica realizada para essas estruturas na Seção 5.3.2. Esse valor médio foi calculado com base nos resultados obtidos com as formulações SRF-1, SRF-2 e SRF-3.



**Figura 5.40** Trajetórias de equilíbrio considerando a ligação *B*

Verifica-se que, para o pórtico com bases engastadas, as cargas limites obtidas com a análise elástica e inelástica são bastante diferentes. Para o pórtico com bases rotuladas, diferentemente, a plastificação dos membros não exerceu influência significativa na análise. As cargas obtidas na análise elástica e inelástica foram praticamente iguais. Verifica-se também que, independente do tipo de apoio, quanto mais rígida a ligação, maior é a carga de colapso.



**Figura 5.41** Trajetórias de equilíbrio considerando a ligação C

**Tabela 5.8** Cargas limites, em kN, para o pórtico com bases rotuladas

Ligação	Formulação		Chan e Chui (2000)	Análise Elástica
	AAF-1	AAF-2		
A	392.7	395.9	395.9	400.3
B	920.0	907.9	907.4	906.0
C	1090.0	1098.7	1098.7	1098.7

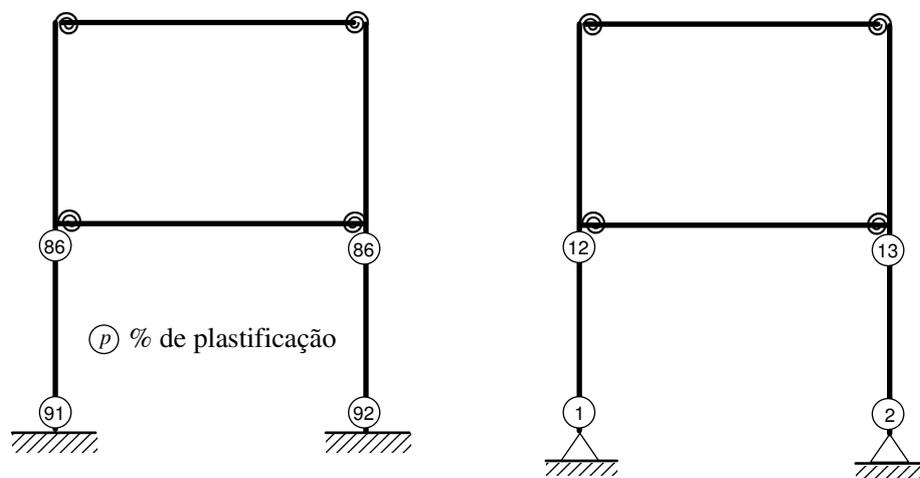
**Tabela 5.9** Cargas limites, em kN, para o pórtico com bases engastadas

Ligação	Formulação		Chan e Chui (2000)	Análise Elástica
	AAF-1	AAF-2		
A	1740.0	1917.2	1922.3	2843.9
B	1780.0	2028.4	2033.5	3884.8
C	1880.0	2032.8	2033.5	4592.0

Comparando as Figuras 5.39, 5.40 e 5.41 e as tabelas anteriores, percebe-se que a formulação AAF-1 forneceu resultados menores, sendo, portanto, mais conservadora que a formulação AAF-2. Verifica-se ainda que os resultados obtidos com a metodologia AAF-2 foram bastante próximos daqueles obtidos por Chan e Chui (2000).

A Figura 5.42 ilustra os membros do pórtico com apoios engastados e rotulados e ligação viga-coluna tipo *C* que perderam rigidez durante a análise. São exibidos os índices de plastificação desses membros. Os valores, como em exemplos anteriores, são fornecidos no interior do círculo. Apenas os resultados obtidos com a formulação PHF-2 são exibidos.

No pórtico com bases rotuladas, pode-se comprovar, como já observado anteriormente, que a plastificação dos membros tem pouca influência na resposta da estrutura. Assim como ocorreu em um dos problemas analisados neste capítulo, o colapso da estrutura é associado com a instabilidade inelástica das colunas, que foi sinalizado pelo deslocamento no topo da estrutura aumentando demasiadamente.



**Figura 5.42** Grau de plastificação dos membros da estrutura

# Capítulo 6

## Formulação Generalizada para Análise Dinâmica Não Linear

### 6.1 Introdução

Se as equações diferenciais que regem a física de um problema não dependem do tempo, classifica-o como estático ou permanente. Caso contrário, ele é dito dinâmico ou transiente e, nessas circunstâncias, as forças de inércia (pela segunda Lei de Newton, iguais ao produto da massa pela aceleração) passam a ser relevantes na sua análise.

Um estudo dinâmico diz respeito aos movimentos oscilatórios de um corpo, dotado de massa e elasticidade, e às forças a ele associadas. A maioria dos sistemas mecânicos está sujeita a certo grau de vibração e seu projeto requer, geralmente, a análise do seu comportamento oscilatório. Existem duas classes gerais de vibração, a livre e a forçada. A livre acontece quando um sistema oscila na ausência da ação de qualquer força externa, depois de ter sido excitada durante curta duração. Nesse caso, o movimento oscilatório recebe contribuições de todos os modos de vibração inerentes ao sistema. A vibração forçada, diferentemente, ocorre sob a excitação de forças externas. Matematicamente, isso aparece como uma não homogeneidade nas equações de movimento. Quando a solicitação é oscilatória, o sistema vibra na frequência da excitação. Se essa frequência coincide com uma das frequências naturais do sistema, forma-se um estado de ressonância, podendo resultar em amplas oscilações e causar o colapso de estruturas como, por exemplo, edifícios e pontes. Sendo assim, é de fundamental importância o cálculo das frequências naturais no estudo das vibrações.

Estruturas sujeitas à excitação dinâmica estão permanentemente cedendo energia para o ambiente. Na ausência de reposição de energia, a vibração do sistema é reduzida gradualmente. Esse processo caracteriza o amortecimento.

Dependendo das frequências de excitação e da correspondente resposta da estrutura, classificam-se as análises em problema de propagação de onda, dinâmica estrutural ou quase estático (Cook *et al.*, 1989). É importante destacar que essa é uma divisão criada para facilitar o estudo dos diversos fenômenos físicos existentes em dinâmica das estruturas, pois, na verdade, o que se observa é uma combinação desses casos gerando a resposta do sistema. Nos problemas de propagação de ondas, o carregamento e a resposta da estrutura são ricos em altas frequências. Esses problemas geralmente ocorrem, por exemplo, nas situações de impacto e cargas explosivas. Os problemas dinâmicos estruturais, também denominados inerciais, têm as respostas governadas por modos de baixas frequências. O tempo de análise, nesses casos, é bem maior do que nos problemas de propagação de onda. Os efeitos inerciais no caso de problemas quase estáticos são bastante reduzidos devido às baixas frequências de excitação. Cook *et al.* (1989) afirmam que, caso seja conveniente, eles podem ser desprezados e uma análise estática pode ser realizada, simplificando o processo de solução.

Com o avanço observado na tecnologia dos materiais, com o surgimento de aços de elevada resistência, as estruturas estão mais esbeltas e com vãos cada vez maiores. Isso as torna, cada vez mais, susceptíveis a problemas de vibrações excessivas. Sendo assim, a análise dinâmica, além da estática, deve constituir etapa obrigatória de um projeto estrutural.

A importância de se efetuar uma análise não linear e um estudo sobre os efeitos que alteram o comportamento estrutural foram discutidos nos Capítulos 3 e 4. Foi comprovado no capítulo anterior, com a análise estática de alguns sistemas estruturais, que a capacidade de transmissão de momentos das ligações semi-rígidas pode alterar significativamente a resposta estrutural. Com relação à análise dinâmica, segundo Chan e Chui (2000), o comportamento estrutural é consideravelmente mais afetado pelas ligações semi-rígidas. Sendo assim, merecem uma investigação cuidadosa. Porém, as pesquisas nesse sentido ainda são relativamente limitadas se comparadas à análise estática. Dentre os trabalhos que investigam o comportamento de estruturas com ligações semi-rígidas submetidas à excitação dinâmica podem ser citados: Chan e Ho (1994), Lui e Lopes (1997), Xu e Zhang (2001), Soares Filho (2002), Sophianopoulos (2003), Calado (2003), Galvão (2004), da Silva *et al.* (2008) e Mata *et al.* (2008).

Neste capítulo, que trata da metodologia usada na análise dinâmica de estruturas reticuladas planas, os efeitos decorrentes da não linearidade geométrica e da inelasticidade das ligações semi-rígidas entre os membros estruturais podem ser considerados. Inicialmente, na Seção 6.2, a formulação adotada nessa análise será desenvolvida. A equação básica que governa o movimento do sistema estrutural e a sua discretização, usando o Método dos Elementos Finitos, serão abordados. Na seção seguinte, menciona-se a importância de se realizar a análise de vibração livre de uma estrutura previamente carregada e o processo a ser seguido nesse caso será estabelecido. Para a análise transiente, o estudo na Seção 6.4 começa com uma discussão geral sobre os métodos numéricos de integração direta. Em seguida, a estratégia desenvolvida para solução do problema não linear é mostrada. Ainda nessa seção, apresenta-se o modelo usado para simular o comportamento histerético da ligação. Adicionalmente, alguns comentários referentes à técnica de seleção automática do incremento do intervalo de tempo serão feitos. Finalizando o capítulo, na Seção 6.5, tem-se o procedimento adotado para se obter a relação não linear entre a frequência de vibração livre e a amplitude da resposta dinâmica.

A verificação e a validação dos algoritmos de solução propostos e implementados no sistema computacional serão feitas no próximo capítulo com a análise de vibração livre e transiente de alguns sistemas estruturais.

## 6.2 Formulação Generalizada

O elemento finito usado para modelar o sistema estrutural na análise dinâmica refere-se ao elemento reticulado plano de viga-coluna com pontos nodais  $i$  e  $j$  exibido na Figura 6.1. Trata-se do mesmo elemento finito adotado para a análise estática. A consideração da flexibilidade da ligação é possível com o uso de molas fictícias, de rigidez rotacional  $S_c$ , nas extremidades dos membros. Apenas a deformação rotacional dos elementos de mola é considerada. Cabe enfatizar novamente que os elementos de ligação são fisicamente fixados às extremidades do elemento de viga-coluna, respeitando-se as condições de equilíbrio e compatibilidade. O estudo completo sobre tal elemento foi abordado na Seção 4.4 do Capítulo 4. As forças e os deslocamentos nodais do elemento finito estão ilustrados na Figura 6.1.

Na modelagem do sistema estrutural, assume-se que os elementos são inicialmente retos e prismáticos e suas seções transversais permanecem planas após a deformação. As tensões e deformações do membro são assumidas pequenas, de forma que não ultrapassem

o limite elástico do material. Entretanto, grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos.

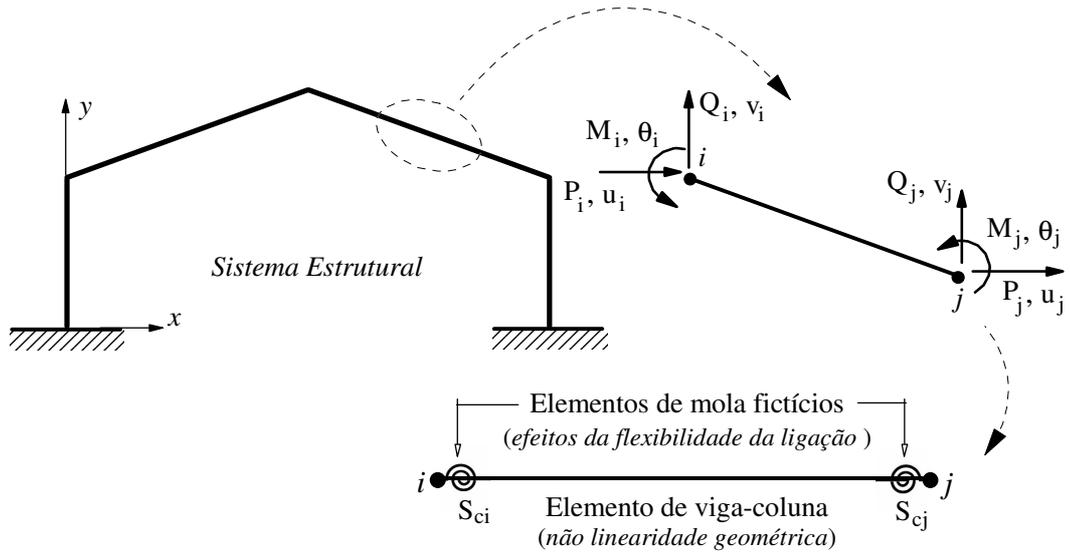
### 6.2.1 Equações Básicas

A equação de equilíbrio que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural pode ser obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais ou do Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Considerando que o sistema estrutural esteja submetido, além das tensões restauradoras provocadas pela deformação da estrutura e das forças externas, às forças inerciais e dissipativas, obtém-se a equação de equilíbrio para um elemento desse sistema, num instante  $t + \Delta t$ . Essa relação pode ser expressa como (Zienkiewicz e Taylor, 1991; Lewandowski, 1997a):

$$\int_{V} \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{V} \rho \ddot{d}_k \delta \dot{d}_k dV + \int_{V} \mu \dot{d}_k \delta \dot{d}_k dV = \delta d_k^T f_{ek} \quad (6.1)$$

onde  $\tau_{ij}$  representa o tensor de Cauchy em equilíbrio com a excitação externa  $f_{ek}$ ;  $\delta \varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformações virtuais de Green-Lagrange correspondentes aos deslocamentos arbitrários e cinematicamente compatíveis com as condições de contorno,  $\delta d_k$ ;  $\rho$  é a densidade ou a massa volumétrica (massa por unidade de volume), e  $\mu$  é o coeficiente de amortecimento viscoso do material. Para se determinar as configurações dos corpos em  $t + \Delta t$ , será utilizado o referencial Lagrangiano atualizado. Nesse caso, toma-se como referência para a análise a configuração de equilíbrio no instante  $t$ .

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que, se a uma estrutura deformável, em equilíbrio e submetida a um carregamento externo, é imposta uma pequena deformação virtual, o trabalho realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual produzido pelas forças internas ou tensões resultantes. Esse princípio é obtido a partir da definição de deslocamento virtual. Nesse sentido, se um deslocamento virtual for imposto em um corpo onde atua um conjunto de forças em equilíbrio estático, o trabalho virtual realizado pelas forças deve ser nulo durante o deslocamento. Essa afirmação é conhecida como o Princípio dos Deslocamentos Virtuais. O primeiro membro da equação anterior refere-se ao trabalho total interno, incluindo os efeitos das forças internas, das forças inerciais, que são dependentes da aceleração, e das forças de amortecimento, função da velocidade. Já a segunda parcela refere-se ao trabalho realizado pelas forças externas.



**Figura 6.1** Elemento finito adotado

As componentes cartesianas do tensor de Green-Lagrange para as deformações podem ser expressas através das componentes dos deslocamentos incrementais,  $\Delta d_i$  ( $i = 1, 2$ ), de acordo com a seguinte equação:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad (6.2)$$

na qual  $e_{ij}$  e  $\eta_{ij}$  são, respectivamente, as parcelas linear e não linear do tensor definidas como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(d_{i,j} + d_{j,i}) \quad (6.3)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}d_{k,i}d_{k,j} \quad (6.4)$$

Considerando as relações (6.2)-(6.4) tem-se:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta e_{ij} + \delta\eta_{ij} \quad (6.5)$$

sendo:

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta d_{i,j} + \delta d_{j,i}) \quad (6.6)$$

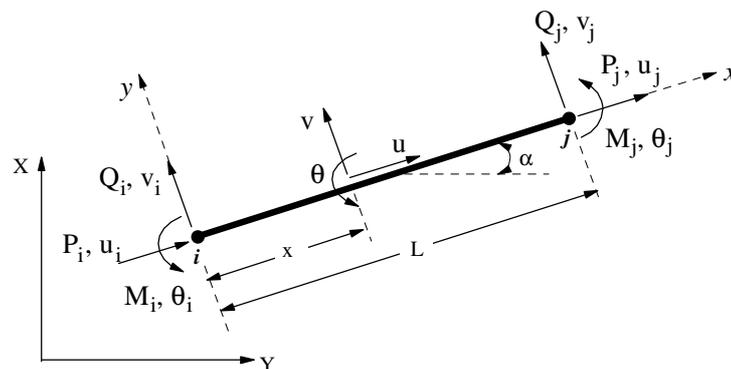
$$\delta\eta_{ij} = \frac{1}{2}(d_{k,i}\delta d_{k,j} + \delta d_{k,i}d_{k,j}) \quad (6.7)$$

### 6.2.2 Discretização do Sistema Estrutural

Seguindo o procedimento usual do Método dos Elementos Finitos e, de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 3, tem-se que os deslocamentos de um ponto qualquer ao longo do eixo do elemento de viga-coluna podem ser relacionados aos deslocamentos nodais usando as funções de interpolação, ou seja,

$$\mathbf{d}(x,t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{u}(t) \quad (6.8)$$

onde  $\mathbf{d}^T = \{u \ v \ \theta\}$  representa os deslocamentos de um ponto situado a uma distância  $x$  da extremidade esquerda do elemento de viga-coluna como mostra a Figura 6.2;  $\mathbf{H}$  é a matriz que contém as funções de interpolação, e  $\mathbf{u}^T = \{u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j\}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.



**Figura 6.2** Deslocamentos e forças nodais do elemento de viga-coluna

Como os vetores  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{u}$  são dependentes da variável tempo, derivando (6.8) em relação a essa variável, encontram-se as seguintes expressões:

$$\dot{\mathbf{d}}(x,t) = \mathbf{H}(x)\dot{\mathbf{u}}(t) \quad (6.9)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}(x,t) = \mathbf{H}(x)\ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (6.10)$$

Para as deformações, escreve-se o tensor de Green-Lagrange, baseando-se na Equação (6.2), como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta} \quad (6.11)$$

onde  $\mathbf{e}$  e  $\boldsymbol{\eta}$  são associados com os deslocamentos nodais incrementais através das relações:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_l \mathbf{u} \quad (6.12a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_{nl} \mathbf{u} \quad (6.12b)$$

sendo  $\mathbf{B}_l$  a matriz que descreve a relação entre deformação e deslocamento, considerando pequenas deformações e deslocamentos infinitesimais. Seus elementos são definidos a partir da matriz  $\mathbf{H}$ . A matriz deformação-deslocamento  $\mathbf{B}_{nl}$ , além de depender de  $\mathbf{H}$ , é função também dos deslocamentos nodais.

Sendo assim, as componentes incrementais do tensor de Green-Lagrange podem ser estabelecidas em função dos deslocamentos nodais como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}) \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (6.13)$$

Substituindo as relações (6.8)-(6.10) e (6.13) em (6.1) e colocando os deslocamentos virtuais em evidência, é possível chegar à equação:

$$\delta \mathbf{u}^T \left( \int_{V} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \left( \int_{V} \mathbf{H}^T \rho \mathbf{H} dV \right) \delta \ddot{\mathbf{u}} + \left( \int_{V} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} dV \right) \delta \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_e \right) = 0 \quad (6.14)$$

que é satisfeita, uma vez que os deslocamentos nodais,  $\delta \mathbf{u}$ , são arbitrários, ou seja, não todos nulos, se a seguinte igualdade for satisfeita:

$$\int_{V} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \left( \int_{V} \mathbf{H}^T \rho \mathbf{H} dV \right) \delta \ddot{\mathbf{u}} + \left( \int_{V} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} dV \right) \delta \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_e = 0 \quad (6.15)$$

Essa expressão (6.15) fornece a equação de movimento no sistema local de coordenadas para o elemento finito de viga-coluna e pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_e \quad (6.16)$$

na qual  $\ddot{\mathbf{u}}$  e  $\dot{\mathbf{u}}$  são, respectivamente, o vetor de acelerações e velocidades nodais,  $\mathbf{f}_e$  representa o vetor de cargas externas e  $\mathbf{f}_i$ , o vetor de forças internas. Esse último é obtido de forma incremental usando alguma das formulações que consideram os efeitos de segunda ordem e/ou da flexibilidade da ligação estudadas no Capítulo 4. Os termos  $\mathbf{M}_e$  e  $\mathbf{C}_e$  são, respectivamente, as matrizes de massa e de amortecimento do elemento finito adotado definidas, comparando (6.15) e (6.16), como:

$$\mathbf{M}_e = \int_{iV} \mathbf{H}^T \rho \mathbf{H} dV \quad (6.17)$$

$$\mathbf{C}_e = \int_{iV} \mathbf{H}^T \mu \mathbf{H} dV \quad (6.18)$$

Algumas considerações referentes à matriz de massa e o processo de obtenção dessa matriz para o elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas nas extremidades será apresentado na próxima seção.

Segundo Kuhl e Crisfield (1999), dificuldades na avaliação e geração de parâmetros associados à matriz de amortecimento, devido à ausência de informações relacionadas aos mecanismos de amortecimento das estruturas, fazem com que, em geral, não sejam consideradas as forças de amortecimento do sistema. Neste trabalho, tal matriz é estabelecida como sendo uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, escrita como:

$$\mathbf{C}_e = \mu_1 \mathbf{M}_e + \mu_2 \mathbf{K}_e \quad (6.19)$$

sendo  $\mu_1$  e  $\mu_2$  os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh.

O amortecimento de Rayleigh, representado pela Equação (6.19), leva à seguinte relação entre taxa modal de amortecimento,  $\xi$ , e frequência,  $\omega$  (Clough e Penzien, 1993; Wilson, 2002):

$$\xi = \mu_1 \frac{1}{2\omega} + \mu_2 \frac{\omega}{2} \quad (6.20)$$

que é ilustrada na Figura 6.3. São representados também os aspectos das curvas considerando um amortecimento proporcional apenas à massa e à rigidez do sistema estrutural.

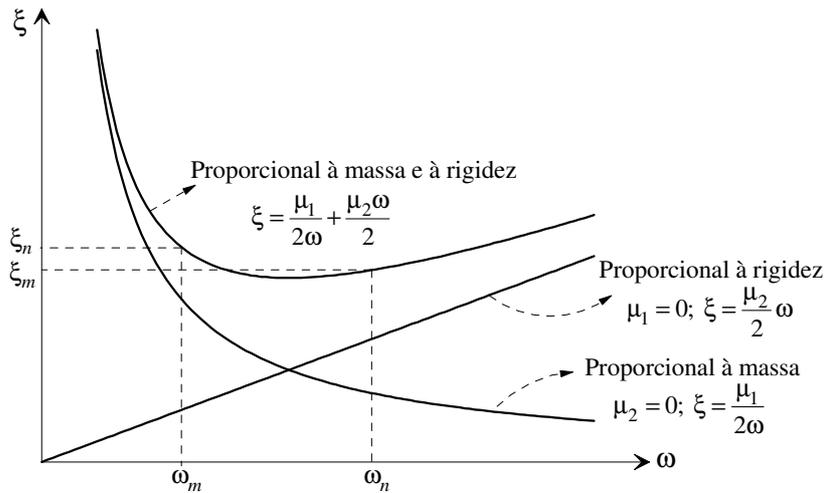
Os termos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  podem ser obtidos considerando duas taxas de amortecimento,  $\xi_m$  e  $\xi_n$ , referentes a duas frequências (modos) distintas,  $\omega_m$  e  $\omega_n$ , e resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_m} & \omega_m \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

Procedendo dessa forma, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_m^2 - \omega_n^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Usualmente, admite-se o mesmo coeficiente de amortecimento para ambas as frequências, ou seja,  $\xi_m = \xi_n = \xi$ . Nesse caso, os fatores de proporcionalidade são encontrados usando a forma simplificada da Equação (6.22), dada por:



**Figura 6.3** Relação entre a taxa de amortecimento,  $\xi$ , e a frequência,  $\omega$

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_m + \omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

De acordo com Clough e Penzien (1993), é recomendado que uma das frequências usadas para obtenção dos coeficientes de Rayleigh seja a frequência fundamental do sistema estrutural.

Quando o sistema analisado apresenta regiões constituídas de materiais com propriedades distintas, Bathe (1996) recomenda que os coeficientes de Rayleigh sejam diferentes para cada uma dessas partes.

A matriz de massa, representada pela Equação (6.17), é definida no sistema local de coordenadas e deve ser transformada para o referencial global. A transformação da matriz de massa é feita mediante a equação:

$$\mathbf{M}_{eg} = \mathbf{R}^T \mathbf{M}_e \mathbf{R} \quad (6.24)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação entre os dois sistemas definida através da Equação (4.84), e  $\mathbf{M}_{eg}$  representa a matriz de massa do elemento no sistema global de coordenadas.

A matriz de amortecimento é obtida diretamente usando a relação (6.19), porém, considerando as matrizes de massa e rigidez já definidas no sistema global. A transformação do vetor de forças internas,  $\mathbf{f}_i$ , para o sistema global é comentada no Capítulo 4.

Em seguida, considerando a contribuição de todos os elementos finitos usados na discretização, chega-se à equação geral de equilíbrio que governa a resposta dinâmica não linear do sistema estrutural:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ext} \quad (6.25)$$

na qual  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{F}_i$  representam, respectivamente, a matriz de massa, de amortecimento e o vetor de forças internas do sistema estrutural. No segundo membro da equação,  $\mathbf{F}_{ext}$  indica o vetor de forças externas.

Algumas considerações referentes à montagem da matriz de massa são feitas na seção seguinte.

### 6.2.3 Matriz de Massa

A matriz de massa calculada através da Equação (6.17) para o elemento de viga-coluna convencional, ou seja, com a hipótese de ligações perfeitamente rígidas, é referida como matriz de massa consistente. Essa matriz é simétrica e definida como:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

sendo  $A$  a área da seção transversal e  $L$  o comprimento do elemento. O parâmetro  $\rho$ , já definido anteriormente, representa a massa volumétrica (massa por unidade de volume).

Outro modelo bastante simples é o da massa concentrada (*lumped mass model*). Nesse caso, toda a massa dos elementos é transferida diretamente para seus nós e a matriz resultante é diagonal. Para o elemento de viga-coluna adotado neste trabalho, os termos,  $m_{e(k,k)}$ , não nulos dessa matriz são (Chopra, 1995):

$$m_{e(1,1)} = m_{e(2,2)} = m_{e(4,4)} = m_{e(5,5)} = \frac{\rho AL}{2} \quad (6.27a)$$

$$m_{e(3,3)} = m_{e(6,6)} = \frac{\rho AL^3}{24} \quad (6.27b)$$

A matriz de massa consistente do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas é determinada seguindo a metodologia proposta por Chan e Chui (1997; 2000). De acordo com esses autores, a função que descreve o campo de deslocamento transversal,  $v$ , para o elemento de viga-coluna convencional pode ser definida, na forma incremental, como:

$$\Delta v(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \quad (6.28)$$

na qual os coeficientes  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  são determinados considerando as seguintes condições de contorno:

$$\text{Em } x = 0: \Delta v = \Delta v_i \text{ e } \frac{d\Delta v}{dx} = \Delta \theta_{bi} \quad (6.29a)$$

$$\text{Em } x = L: \Delta v = \Delta v_j \text{ e } \frac{d\Delta v}{dx} = \Delta \theta_{bj} \quad (6.29b)$$

onde  $\Delta v_i$  e  $\Delta v_j$  são, respectivamente, os deslocamentos verticais incrementais dos nós  $i$  e  $j$ , e  $\Delta \theta_{bi}$  e  $\Delta \theta_{bj}$  são as rotações desses mesmos nós como exibido na Figura 6.4.

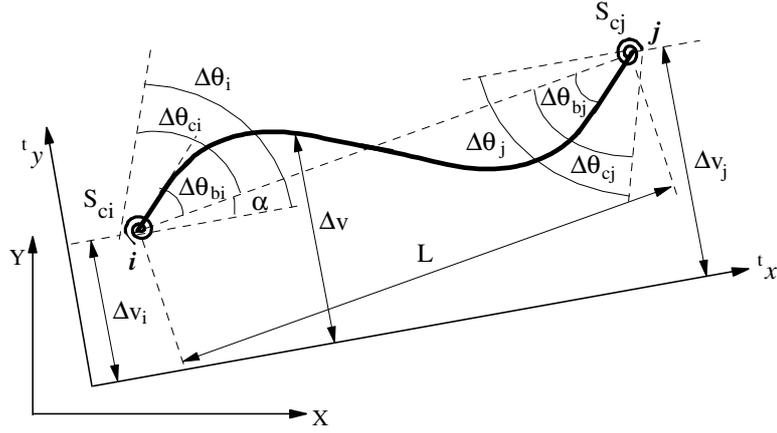
Substituindo os coeficientes obtidos na Equação (6.28), encontra-se a expressão que define o campo de deslocamentos transversais do elemento de viga-coluna:

$$\Delta v(x) = \begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_2^2 H_1 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (3-2H_1)H_1 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

com,  $H_1 = 1 - x/L$  e  $H_2 = x/L$ .

Para introduzir o efeito da flexibilidade da ligação na função anterior, a Equação (4.125) apresentada no Capítulo 4, que relaciona as rotações nodais do elemento de viga-coluna e as rotações nas extremidades do elemento de ligação, é considerada. A partir dessa equação, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$



**Figura 6.4** Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada

na qual  $k_{(3,3)} = k_{(6,6)} = 4EI/L$  e  $k_{(3,6)} = k_{(6,3)} = 2EI/L$ . Os parâmetros  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$  definem as rigidezes das ligações nas extremidades  $i$  e  $j$  do elemento, respectivamente. Os modelos matemáticos usados na descrição do comportamento momento-rotação da ligação e capazes de definir os parâmetros  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$  durante a análise estão descritos no Apêndice B.

Usando a relação (4.130) em (6.31) e substituindo a expressão resultante em (6.30), chega-se, finalmente, à função que descreve o campo de deslocamentos transversais para o elemento de viga com ligações semi-rígidas:

$$\Delta v(x) = \begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_2^2 H_1 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3-2H_1)H_1 & 0 & (3-2H_2)H_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} \quad (6.32a)$$

que pode ser escrita numa forma simplificada como:

$$\Delta v(x) = \mathbf{H}^* \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} \quad (6.32b)$$

na qual  $\mathbf{H}^*$  é a matriz que contém as funções de interpolação para o elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas.

Os elementos da matriz de massa, que sofrem a influência da rigidez da ligação, são encontrados usando essa nova matriz,  $\mathbf{H}^*$ , ao invés de  $\mathbf{H}$  na Equação (6.17). Os demais

termos são idênticos ao da matriz de massa para o elemento de viga-coluna convencional indicada na Equação (6.26).

### 6.3 Análise de Vibração Livre da Estrutura Pré-Carregada

As frequências naturais são propriedades inerentes ao sistema estrutural e dependem da sua distribuição de massa e rigidez. Os modos de vibração descrevem as configurações assumidas pelo sistema em vibração livre sob determinadas frequências naturais. Eles não possuem qualquer relação com a amplitude das oscilações e a cada modo está associada uma frequência natural.

Em geral, os sistemas estruturais estão sujeitos a certo grau de amortecimento decorrente da perda de energia pelo atrito, ar e outras resistências. Se o amortecimento é fraco, a sua influência torna-se muito pequena e, geralmente, não é considerada no cálculo das frequências naturais. O amortecimento, entretanto, é de grande importância ao limitar a amplitude de oscilação na ressonância.

A análise das frequências é fundamental no estudo da estabilidade de sistemas estruturais com trajetórias de equilíbrio fortemente não lineares. Sabe-se, pelo critério dinâmico de estabilidade que, se uma configuração de equilíbrio apresenta pelo menos uma das frequências com valor imaginário, ela é instável. Havendo uma frequência nula, o equilíbrio é indiferente ou crítico. Caso contrário, a configuração é considerada estável (Bazant e Cedolin, 1991).

Desprezando o efeito do amortecimento, a equação de movimento do sistema estrutural em vibração livre é definida, a partir de (6.25), como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

Nessas condições, supõe-se que uma frequência natural fará cada ponto da estrutura executar um movimento harmônico em relação a uma posição de equilíbrio estático. Todos os pontos passam por essa posição ao mesmo tempo e atingem um máximo também em um mesmo instante (amplitude do movimento). Dessa forma, admitindo-se a resposta:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi} \, \text{sen}(\omega t) \quad (6.34)$$

obtem-se a equação característica do problema, que pode ser escrita, na forma de um problema de autovalor generalizado, como:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (6.35)$$

na qual  $\omega^2$  é o autovalor, que representa uma frequência natural de vibração do sistema, em rad/s, ao quadrado; e  $\boldsymbol{\phi}$  é o autovetor correspondente, chamado modo de vibração, que contém as amplitudes do movimento associadas aos graus de liberdade nodais da estrutura. Vale informar que o número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural.

Para que o sistema de equações (6.35) admita solução diferente da trivial ( $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ ), é necessário que a seguinte equação seja satisfeita:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (6.36)$$

O desenvolvimento da expressão anterior fornece um polinômio característico cujas raízes definem as frequências de vibração do sistema estrutural. Com cada uma dessas frequências, obtêm-se os correspondentes modos de vibração usando (6.35). Entretanto, para sistemas com elevado número de graus de liberdade, essa forma de se resolver o problema de autovalor não é eficiente. Na literatura, podem ser encontrados algoritmos computacionais capazes de resolver o problema de autovalor e fornecer, de uma só vez, todas as frequências naturais e modos de vibração. Aqui, usa-se o método de Jacobi (Brebbia e Ferrante, 1986).

Neste trabalho, a influência do pré-carregamento estático nos modos e frequências de vibração de um sistema estrutural é estudada. Porém, como se consideram os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade da ligação no estudo, a solução para a Equação (6.35) não pode ser obtida diretamente. Isso porque a matriz de rigidez do sistema estrutural é não linear devido a alterações na geometria estrutural e na rigidez da ligação. Nesse caso, é necessário, antes de determinar as frequências naturais, conhecer a configuração de equilíbrio estático desse sistema para um determinado nível de carregamento. Assim, após seguir o procedimento descrito no Capítulo 3 para obtenção dessa configuração, avalia-se a matriz de rigidez e de massa e, através do método de Jacobi (Brebbia e Ferrante, 1986), determinam-se as frequências naturais e os correspondentes modos de vibração.

As etapas a serem seguidas no processo de cálculo resumido no parágrafo anterior são detalhadas na Tabela 6.1. Observa-se que é realizado o procedimento incremental-iterativo para resolver o problema estático não linear e, ao final do ciclo iterativo e após ter

sido estabelecido o equilíbrio do sistema, é feita a análise de vibração. Informações referentes à análise estática podem ser encontradas nos Capítulos 3 e 4 deste trabalho.

Cabe destacar que o efeito do pré-carregamento estático na estabilidade dinâmica de estruturas é discutido em vários trabalhos, entre eles, Simitzes (1983; 1990), Gonçalves (1994), Zeinoddini *et al.* (1999), Wu e Thompson (1999), Galvão (2004) e Machado e Cortínez (2007).

## **6.4 Análise Transiente Não Linear**

O objetivo desta seção é descrever a metodologia usada na obtenção da resposta transiente não linear do sistema estrutural. O algoritmo usado na implementação computacional dessa técnica é também descrito. As características dos métodos encontrados na literatura para integração das equações de movimento e da estratégia adaptativa para seleção automática do intervalo de tempo considerada na análise serão apresentadas. Ao final, estuda-se o modelo adotado na simulação do comportamento histerético da ligação.

### **6.4.1 Considerações sobre os Métodos de Integração Direta**

A formulação matemática utilizada na análise dinâmica estrutural é baseada em equações diferenciais parciais, tendo como variáveis o tempo e o espaço. A importância da aplicação dos métodos numéricos na solução de um problema estrutural, incorporando o tratamento de efeitos dinâmicos e não lineares, é indiscutível e sua utilização vem crescendo nos últimos anos. A primeira etapa para a utilização desses métodos na obtenção da resposta é a discretização das equações diferenciais parciais no espaço, semi-discretização, e no tempo. Com o Método dos Elementos Finitos essas equações são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Esse procedimento foi apresentado na Seção 6.2. Em seguida, elas devem ser discretizadas e integradas no tempo através da utilização de um algoritmo de integração. Várias técnicas estão disponíveis na literatura, possuindo, cada uma, particularidades que as tornam mais adequadas a certos tipos de problemas. Entretanto, de um modo geral, se classificam em implícitas e explícitas.

Os algoritmos explícitos são aqueles no qual a variável básica,  $\mathbf{X}$ , no instante atual,  $t + \Delta t$ , é determinada conhecendo a sua história e de suas derivadas nos instantes anteriores. Algumas condições de equilíbrio no instante  $t$  devem ser satisfeitas para cálculo dessa incógnita. Essa definição pode ser expressa pela relação:

**Tabela 6.1** Estratégia numérica para análise de vibração da estrutura pré-carregada

- 
1. Dados gerais: geometria, materiais, comportamento das ligações semi-rígidas, entre outros
  2. Define o vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
  3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ :  ${}^t\mathbf{U}$  e  ${}^t\lambda$
  4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$** 
    - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K} = \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c)$
    - 4b. Resolve:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
    - 4c. Define  $\Delta\lambda^0$  usando uma estratégia de incremento de carga
    - 4d. Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
    - 4e. Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$   
 ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
  5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:  $k = 1, 2, 3, \dots$** 
    - 5a. Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
    - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
    - 5c. Verifica a convergência  
**SIM** (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 5j*
    - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$
    - 5e. Obtém a correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , usando uma estratégia de iteração
    - 5f. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$ , com:  

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$$
    - 5g. Verifica a convergência:  
**SIM** (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 5j*  
**SIM** (Critério de forças e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 5j, apenas se houve a convergência no item 5c*
    - 5h. Atualiza o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :  
a) *Incremental*:  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$   
b) *Total*:  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
    - 5i. Retorna ao passo 5
    - 5j. Determina as frequências naturais e os correspondentes modos de vibração
      - a) Atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  e a matriz de massa  $\mathbf{M}$
      - b) Decompõe a matriz  $\mathbf{M}$  usando o método de Cholesky:  $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$
      - c) Obtém a matriz  $\mathbf{A} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1}$
      - d) Resolve o problema de autovalor padrão resultante  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$  usando o método de Jacobi (Brebbia e Ferrante, 1986) obtendo os autovalores ( $\omega^2$ ) e os correspondentes autovetores
  6. Atualiza a variável  $\mathbf{S}_c$  e outras que forem necessárias
  7. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

$$\mathbf{X}_{(t+\Delta t)} = f\left(\mathbf{X}_t, \dot{\mathbf{X}}_t, \ddot{\mathbf{X}}_t, \mathbf{X}_{(t-\Delta t)}, \dot{\mathbf{X}}_{(t-\Delta t)}, \dots\right) \quad (6.37)$$

Nos algoritmos implícitos, além de depender da história ao longo de tempos passados, a variável  $\mathbf{X}$  é função de seu próprio valor e de suas derivadas no tempo atual. Portanto, para sua determinação, condições de equilíbrio no instante  $t + \Delta t$  devem ser respeitadas. Essa definição pode ser resumida na relação:

$$\mathbf{X}_{(t+\Delta t)} = f\left(\mathbf{X}_{(t+\Delta t)}, \dot{\mathbf{X}}_{(t+\Delta t)}, \ddot{\mathbf{X}}_{(t+\Delta t)}, \mathbf{X}_t, \dot{\mathbf{X}}_t, \dots\right) \quad (6.38)$$

Sabe-se que a integração numérica eficiente das equações de movimento por um longo período de tempo é uma necessidade na análise de sistemas não lineares. Três características importantes para um método numérico são destacadas em Chopra (1995). A primeira refere-se à convergência. Nesse caso, diminuindo o incremento de tempo a solução deve aproximar-se da exata. A resposta numérica deve ser estável na presença de erros de arredondamento em virtude do elevado número de operações realizadas. E, encerrando, a terceira delas diz respeito à precisão, ou seja, os resultados devem ser suficientemente próximos da solução exata.

De acordo com Zienkiewicz e Morgan (1983), em problemas de propagação de onda, o intervalo de tempo necessário para uma integração precisa das frequências existentes na resposta do sistema é equivalente ou menor que o necessário para a garantia da estabilidade. Nesses casos, os algoritmos explícitos tornam-se mais adequados. Em problemas não lineares, o valor crítico para o intervalo de tempo é variável com o tempo, já que depende da máxima frequência natural do sistema, que se modifica ao longo da análise.

Para os problemas de dinâmica estrutural, os algoritmos implícitos apresentam melhor performance que os explícitos segundo Cook *et al.* (1989). Essa constatação deve-se especialmente ao fato de que nesses casos há maior interesse na integração das frequências mais baixas, permitindo, para os algoritmos implícitos, o uso de intervalos de tempo maiores. Porém, o uso dessas técnicas implica na necessidade da montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura o que, para determinados problemas não lineares, pode apresentar dificuldades para geração, a exemplo dos problemas de contato e dos que envolvem o atrito.

Bathe (1996) sugere a seguinte relação entre o intervalo de tempo,  $\Delta t$ , e a máxima frequência de vibração do sistema,  $\omega_{m\acute{a}x}$ :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{m\acute{a}x}} \quad (6.39)$$

sendo  $\Delta t_{cr}$  o intervalo de tempo crítico.

Quanto à estabilidade do processo de integração, os algoritmos explícitos apresentam uma restrição ao valor do incremento de tempo máximo usado na análise não linear. Essa estabilidade condicional pode levar a pequenos valores para o intervalo de tempo. Através da Equação (6.39), verifica-se que o valor crítico para o intervalo de tempo é inversamente proporcional à máxima frequência natural do sistema discreto, independente do tipo de solicitação aplicada à estrutura. Portanto, em problemas quase estáticos ou de dinâmica estrutural, os métodos explícitos tornam-se pouco eficazes, já que o intervalo crítico é bem menor que o necessário para uma integração razoavelmente precisa dos modos solicitados.

Algoritmos de integração direta, explícitos e implícitos, são amplamente apresentados na literatura. Destacam-se aqui, além de livros sobre elementos finitos tais como Bathe (1996) e Cook *et al.* (1989), os trabalhos realizados por Dokainish e Subbaraj (1989) e Subbaraj e Dokainish (1989) em que foram apresentados aspectos referentes à estabilidade dos métodos de integração explícitos e implícitos, entre eles, Diferença Central, Runge-Kutta, Newmark, Houbolt e Wilson- $\theta$ . Os algoritmos computacionais para implementação dos métodos na análise estrutural linear e não linear são mostrados nos dois trabalhos. Um método de integração no domínio do tempo, de passo único, para resolver problemas de dinâmica estrutural, denominado Método Generalizado, foi desenvolvido por Modak e Sotelino (2002). Foi mostrado que métodos clássicos, entre eles, Newmark, Wilson- $\theta$ , Colocação, HHT- $\alpha$  e Generalizado- $\alpha$  podem ser obtidos a partir da generalização proposta. O método foi obtido através de aproximações em série de Taylor do deslocamento, velocidade e aceleração entre dois instantes de tempo. Em 1984, Zienkiewicz *et al.* (1984), utilizando o método dos resíduos ponderados, também generalizaram os métodos de passo único através dos algoritmos SSpj (“*Single Step algorithms*”).

Nos últimos anos, tentando eliminar as altas frequências da resposta dinâmica, têm-se pesquisado algoritmos com dissipação numérica controlada. A principal dificuldade no desenvolvimento desses algoritmos está na definição do amortecimento numérico nas altas frequências sem introduzir um excessivo amortecimento em importantes modos de vibração de baixas frequências. Para contornar esse problema vários métodos foram propostos com as características: estabilidade incondicional, dissipativo e precisão de

segunda ordem. Entre eles destacam-se os métodos: Wilson- $\theta$  (Wilson *et al.*, 1973), o método  $\alpha$ H-Newmark (Hilber e Hughes, 1978), o método  $\alpha$ B-Newmark (Wood *et al.*, 1980), Houbolt (Houbolt, 1950), HHT- $\alpha$  (Hilber *et al.*, 1977),  $\alpha$ -generalizado (Hulbert e Chung, 1996), entre outros.

Para a análise dinâmica não linear de estruturas, os métodos mais convenientes e, portanto, mais utilizados, são os métodos de integração implícitos, em particular os da família de integradores temporais de Newmark (Chan e Chui, 2000). No entanto, o método de Newmark (Newmark, 1959) não é dissipativo, ou seja, não tem a capacidade de amortecer frequências mais altas ou espúrias.

Diversos procedimentos, adotados com frequência no desenvolvimento e na utilização de programas para análise dinâmica estrutural, interferem diretamente no desempenho computacional dos algoritmos. Um deles diz respeito à escolha de um determinado incremento de tempo,  $\Delta t$ , no início da simulação e a manutenção desse mesmo valor durante toda a análise. A definição no início da análise, que, em geral, é feita com base na experiência do analista, pode não só afetar o desempenho computacional do algoritmo, como também a qualidade da resposta obtida. No caso particular de se utilizar algoritmos explícitos, que têm o incremento de tempo controlado pela estabilidade do método, é necessária a utilização de um incremento máximo com o qual o algoritmo possa convergir para a solução. Esse problema torna-se ainda mais importante nos casos onde existam grandes variações nas condições de contorno e na geometria da estrutura (grandes deslocamentos). Nessas situações, a resposta obtida também sofre grandes variações e a utilização de um processo adaptativo para o incremento de tempo seria indicada.

Para minimizar esses problemas são utilizados procedimentos adaptativos para cálculo automático do incremento de tempo que, em geral, baseiam-se nas soluções obtidas nos passos anteriores. Tais procedimentos podem refinar ou aumentar automaticamente o incremento, sempre buscando um valor otimizado, levando-se em consideração a precisão e a estabilidade do método.

#### **6.4.2 Solução do Problema Transiente**

Neste trabalho, o procedimento incremental e iterativo que combina o método implícito clássico de Newmark (Newmark, 1959) com a técnica de Newton-Raphson são adotados na solução do problema transiente não linear representado pela Equação (6.25). As

equações básicas do método de Newmark, usado para integração direta das equações de movimento, serão apresentadas a partir de agora.

A técnica baseia-se na expansão em série de Taylor, que fornece uma aproximação para os deslocamentos e velocidades, no instante  $t + \Delta t$ , ou seja:

$$\mathbf{U}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{U}^{(4)}_t + \dots \quad (6.40a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{U}^{(4)}_t + \dots \quad (6.40b)$$

A partir dessas equações, Newmark desprezou os termos de quarta ordem ou superiores e as reescreveu da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t + \beta \Delta t^3 \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (6.41a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (6.41b)$$

na qual  $\gamma$  e  $\beta$  são os parâmetros característicos dessa técnica. Os valores desses coeficientes determinam a eficiência e a estabilidade do método. Para  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/6$  tem-se o método da aceleração linear. Como o próprio nome sugere, considera-se que a aceleração varia linearmente no intervalo de tempo entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  como mostra a Figura 6.5. Com essa hipótese, pode-se escrever:

$$\ddot{\mathbf{U}}_t = \frac{1}{\Delta t} (\ddot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \quad (6.42)$$

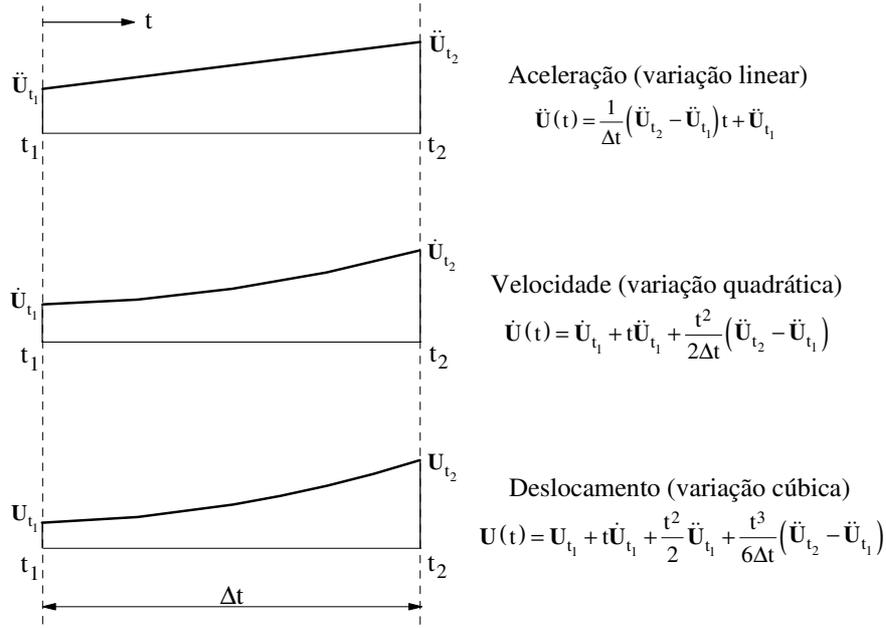
As equações padrões do método de Newmark, encontradas substituindo (6.42) nas relações (6.41a) e (6.41b), são definidas através das expressões:

$$\mathbf{U}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_t + \beta \ddot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} \right] \quad (6.43a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} \right] \quad (6.43b)$$

Usando (6.43a) encontra-se o vetor de acelerações. A equação que o define é escrita como:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{(t+\Delta t)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{U}_{(t+\Delta t)} - \mathbf{U}_t - \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t) - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (6.44)$$



**Figura 6.5** Equações de movimento considerando a aceleração com variação linear

Com esse resultado, a Equação (6.43b) é reescrita como:

$$\dot{U}_{(t+\Delta t)} = \dot{U}_t + \Delta t \left[ (1-\gamma)\ddot{U}_t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} (U_{(t+\Delta t)} - U_t - \Delta t\dot{U}_t) - \gamma \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \right] \quad (6.45)$$

Para que deslocamentos, velocidades e acelerações sejam conhecidos no instante  $t + \Delta t$ , é necessário que as equações de equilíbrio dinâmico (6.25) sejam satisfeitas nesse mesmo instante, ou seja,

$$\mathbf{M}\ddot{U}_{(t+\Delta t)} + \mathbf{C}\dot{U}_{(t+\Delta t)} + \mathbf{F}_{i(t+\Delta t)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r \quad (6.46)$$

sendo  $\mathbf{F}_r$  o vetor que define a direção e o sentido do carregamento externo, e  $\lambda$  é o parâmetro de carga que estabelece a intensidade desse vetor no instante considerado.

A substituição das relações (6.44) e (6.45) em (6.46) estabelece o equilíbrio dinâmico do sistema estrutural em  $t + \Delta t$  em função da variável deslocamento nesse mesmo instante. Assim, o sistema de equações é definido como:

$$\left[ \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \mathbf{U}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{U}_t + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_t \right] + \mathbf{C} \left[ \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{U}_t + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_t \right] + {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r \quad (6.47)$$

que, numa forma simplificada, é escrito como:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_{(t+\Delta t)} = \hat{\mathbf{F}} \quad (6.48)$$

sendo  $\hat{\mathbf{K}}$  e  $\hat{\mathbf{F}}$ , respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de forças efetivos, expressos através das seguintes equações:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (6.49a)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{U}_t + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{\mathbf{U}}_t\right] + \mathbf{C}\left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{U}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\ddot{\mathbf{U}}_t\right] \quad (6.49b)$$

O método de Newmark é incondicionalmente estável se,  $\gamma \geq 1/2$  e  $\beta \geq (2\gamma+1)^2/16$  (Subbaraj e Dokainish, 1989). Nessas situações, a amplitude do intervalo de tempo não afeta a estabilidade da solução.

Na análise transiente realizada com essa técnica, a rotina a ser seguida para obtenção do histórico das variáveis envolvidas requer que a equação de equilíbrio seja satisfeita em cada intervalo de tempo considerado, a partir de condições iniciais prescritas para os deslocamentos e velocidades. Para o problema linear, no qual a matriz de rigidez se mantém sempre constante, o procedimento inicia-se, em  $t=0$ , com a determinação das acelerações usando a relação de equilíbrio (6.46). Isso é feito, evidentemente, apenas se essas variáveis não forem prescritas. Em seguida, usando a Equação (6.48), calculam-se os deslocamentos no próximo instante,  $\Delta t$ . Com esses resultados, as acelerações podem ser encontradas com o uso da expressão (6.44). Assim, após determinar as velocidades através da Equação (6.43b), finaliza-se a análise para esse instante  $\Delta t$ . O cálculo continua para outros intervalos de tempo,  $2\Delta t$ ,  $3\Delta t$  e, assim sucessivamente, seguindo o mesmo procedimento descrito para o intervalo  $\Delta t$ . O algoritmo para esse caso linear não será apresentado neste trabalho, mas pode ser encontrado facilmente em Wilson (2002), Subbaraj e Dokainish (1989), Galvão (2004), entre várias outras referências.

Ao contrário da análise linear, sabe-se que para o caso não linear, a matriz de rigidez, que considera os efeitos de segunda ordem e da flexibilidade da ligação, se modifica. Tal matriz é função dos deslocamentos nodais, das forças internas em cada elemento e da rigidez das ligações. Sendo assim, a estratégia incremental-iterativa mostrada no Capítulo

3, juntamente com o método de Newmark são combinados para produzir a resposta dinâmica não linear de sistemas estruturais. Os passos computacionais a serem seguidos para se alcançar esse objetivo são detalhados na Tabela 6.2. Observa-se analisando a sequência de procedimentos que, ao final do ciclo iterativo, a rigidez da ligação é atualizada. Isso é feito apenas se a relação momento-rotação não linear estiver sendo considerada na modelagem das ligações. Para isso, adota-se uma técnica capaz de simular o comportamento da ligação quando submetida a cargas cíclicas que será apresentada ao final desta seção. Com o objetivo de melhorar a qualidade da resposta obtida tem-se como opção usar um procedimento capaz de selecionar automaticamente o incremento de tempo. Essa técnica, proposta por Jacob (1990) e usada por Galvão (2004), é explicada na próxima seção.

### **6.4.3 Estratégia Adaptativa para o Incremento de Tempo**

A proposta de utilização de um mecanismo adaptativo para um algoritmo de integração no tempo tem por objetivo geral melhorar o processo em relação a dois aspectos: eficiência e precisão. Sendo assim, busca-se utilizar o maior incremento de tempo possível mantendo o grau de precisão na resposta. Uma das premissas básicas para o sucesso da implementação da adaptação no tempo é que o seu custo não comprometa a eficiência do algoritmo.

Em um dos primeiros trabalhos referentes a esse assunto, Hibbitt e Karlsson (1979) desenvolveram uma estratégia para um algoritmo implícito que se baseava no vetor de forças residuais em um instante intermediário entre as soluções obtidas no início e no final do intervalo de tempo. Se as forças residuais excediam um limite especificado, o intervalo de tempo era reduzido. O método de Newmark foi usado pelos autores, que verificaram, entretanto, que o método proposto envolvia um alto custo computacional. Park e Underwood (1980) foram os primeiros a desenvolverem uma estratégia adaptativa aplicada a um algoritmo explícito, no caso, o clássico Método das Diferenças Centrais. A técnica proposta envolvia o cálculo das maiores frequências dominantes do sistema a partir dos vetores de deslocamentos e acelerações incrementais para todos os graus de liberdade. Em 1985, também utilizando as maiores frequências dominantes da estrutura, Bergan e Mollestad (1985) propuseram um esquema para cálculo automático do incremento de tempo. Nessa estratégia a decisão sobre o aumento ou redução do incremento de tempo era tomada a partir da frequência dominante calculada. Para evitar alterações constantes, os

autores introduziram uma função de ajuste que determina a sensibilidade do intervalo de tempo.

Vale ressaltar que técnicas adaptativas baseadas em outros métodos de integração numérica podem ser encontradas na literatura. Nesse contexto destacam-se os trabalhos de Hulbert e Jang (1995), que propuseram uma estratégia adaptativa desenvolvida especificamente para o Método Implícito Generalizado- $\alpha$  (Chung e Hulbert, 1993), e Press *et al.* (1992), com uma estratégia adaptativa que monitora o erro de truncamento no método Runge-Kutta.

No trabalho de Bergan e Mollestad (1985) foram apresentados alguns aspectos importantes que devem ser observados no desenvolvimento e implementação de um procedimento adaptativo, com o objetivo de torná-lo robusto e eficiente. Citam-se:

- i. Os ajustes no incremento de tempo devem ser feitos tomando como referência o valor inicial escolhido. É necessário que esse incremento de tempo inicial seja menor do que um determinado valor crítico para que o algoritmo seja capaz de gerar as soluções iniciais que servirão de parâmetro para os ajustes durante a simulação;
- ii. O incremento de tempo deve permanecer constante durante o regime permanente evitando que ocorram modificações desnecessárias que comprometam a estabilidade e a precisão do algoritmo;
- iii. Todos os parâmetros de entrada e controle do algoritmo adaptativo devem ser simples, de forma que o usuário possa prescrevê-los com facilidade;
- iv. O critério de erro adotado deve ter um custo computacional mínimo que não comprometa o desempenho do algoritmo;
- v. O algoritmo deve reagir imediatamente a mudanças súbitas no comportamento estrutural;
- vi. O incremento de tempo não deve ser alterado desnecessariamente.

A estratégia adaptativa introduzida por Jacob (1990) para algoritmos implícitos da família Newmark, baseada no trabalho de Bergan e Mollestad (1985) e usada por Galvão (2004) pode ser utilizada neste trabalho para obter a resposta transiente de um sistema estrutural. Alguns fundamentos básicos dessa metodologia serão agora apresentados.

Bergan e Mollestad (1985) estabeleceram, para definir a frequência dominante no instante  $t + \Delta t$ , a seguinte equação:

**Tabela 6.2** Estratégia numérica para análise transiente não linear

---



---

1. Dados gerais: geometria, materiais, comportamento das ligações semi-rígidas, entre outros
2. Define o vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
3. Consideram-se os deslocamentos,  ${}^t\mathbf{U}$ , velocidades,  ${}^t\dot{\mathbf{U}}$ , e acelerações,  ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ , no instante  $t$
4. **PARA CADA INSTANTE  $t + \Delta t$** 
  - 4a. Formam-se as matrizes de rigidez,  $\mathbf{K}$ , massa,  $\mathbf{M}$ , e amortecimento,  $\mathbf{C}$
  - 4b. Usando os parâmetros do método,  $\gamma$  e  $\beta$ , determinam-se as seguintes constantes:
$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right); a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right);$$

$$a_6 = a_0; a_7 = -a_2; a_8 = -a_3; a_9 = \Delta t(1 - \gamma); a_{10} = \alpha\Delta t$$
  - 4c. Monta-se a matriz de rigidez efetiva:  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$
  - 4d. Determina o vetor de cargas efetivo:
$$\hat{\mathbf{F}} = ({}^{t+\Delta t})\lambda\mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C}(a_4{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5{}^t\ddot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}_i$$
  - 4e. Obtém o vetor de deslocamentos nodais incrementais:  $\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$
5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:  $k = 1, 2, 3, \dots$** 
  - 5a. Avalia as estimativas para as acelerações, velocidades e deslocamentos nodais:
$$({}^{t+\Delta t})\ddot{\mathbf{U}}^k = a_0\Delta\mathbf{U}^k - a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}; ({}^{t+\Delta t})\dot{\mathbf{U}}^k = a_1\Delta\mathbf{U}^k - a_4{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_5{}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$$
  - 5b. Atualiza as coordenadas nodais
  - 5c. Obtém o vetor de forças internas:  $({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^k = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^k$
  - 5d. Calcula o vetor de forças residuais:
$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{R}^{(k+1)} = ({}^{t+\Delta t})\lambda\mathbf{F}_r - \left(\mathbf{M}({}^{t+\Delta t})\ddot{\mathbf{U}}^k + \mathbf{C}({}^{t+\Delta t})\dot{\mathbf{U}}^k + ({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^k\right)$$
  - 5e. Determina a correção dos deslocamentos,  $\delta\mathbf{U}$ :  $\hat{\mathbf{K}}\delta\mathbf{U}^{(k+1)} = ({}^{t+\Delta t})\mathbf{R}^{(k+1)}$
  - 5f. Atualiza o vetor de deslocamentos incrementais:  $\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} = \Delta\mathbf{U}^k + \delta\mathbf{U}^{(k+1)}$
  - 5g. Verifica-se a convergência do processo iterativo, usando a seguinte equação
$$\frac{|\Delta\mathbf{U}^{(k+1)}|}{|{}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k+1)}|} \leq \xi, \text{ sendo } \xi \text{ um fator de tolerância}$$
  - NÃO:** Retorne ao item 5
  - 5h. Obtém os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$ 

$$({}^{t+\Delta t})\ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = a_0\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} - a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}; ({}^{t+\Delta t})\dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = a_1\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} - a_4{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_5{}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{U}^{(k+1)} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k+1)}$$
6. **PARA O PRÓXIMO INSTANTE**
  - 6a. Avalia o vetor de forças internas:  $({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^{(k+1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k+1)}$
  - 6b. Atualiza a rigidez da ligação  $S_c$ , levando em consideração seu comportamento histerético
  - 6c. Se estiver sendo usada a estratégia adaptativa, seleciona-se um novo intervalo  $\Delta t$
  - 6d. Retorna ao item 4

---

$${}^{(t+\Delta t)}\omega = \sqrt{\frac{({}^{(t+\Delta t)}\Delta\mathbf{U}^T)\mathbf{K}({}^{(t+\Delta t)}\Delta\mathbf{U})}{({}^{(t+\Delta t)}\Delta\mathbf{U}^T)\mathbf{M}({}^{(t+\Delta t)}\Delta\mathbf{U})}} \quad (6.50)$$

na qual  ${}^{(t+\Delta t)}\Delta\mathbf{U}$  representa o incremento de deslocamentos ocorrido entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , e  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são, respectivamente, as matrizes de rigidez e massa do sistema estrutural. Segundo esses autores, essa expressão reflete a composição modal da resposta dinâmica no instante de tempo considerado.

Para determinar quando a rigidez deve ser reavaliada, considera-se que a frequência dominante encontrada usando (6.50) reflete não apenas a composição modal da resposta, mas também a rigidez do sistema estrutural, incorporando, dessa forma, o comportamento não linear.

Em instantes próximos a situações de amplitudes máximas ou mínimas, Jacob (1990) destaca que a expressão (6.50) pode não produzir resultados coerentes para a frequência dominante. Isso porque a norma dos deslocamentos se torna muito pequena. Para contornar essa deficiência, duas estratégias baseadas na norma média dos deslocamentos para o instante de tempo atual,  $t + \Delta t$ , foram consideradas por ele. Essa norma média foi definida através da relação:

$$\|\Delta\mathbf{U}\|_{(t+\Delta t)}^* = \frac{\|\Delta\mathbf{U}_{(t+\Delta t)}\|}{\Delta t} \quad (6.51)$$

A partir desse cálculo, o máximo e o mínimo histórico alcançados por esse valor eram registrados. Vale destacar que a determinação do mínimo histórico é iniciada após o instante em que o primeiro máximo local é detectado.

O primeiro critério verifica se a norma média é menor que uma fração do máximo histórico, ou seja,

$$\|\Delta\mathbf{U}\|_{(t+\Delta t)}^* < \frac{\|\Delta\mathbf{U}\|_{máx}^*}{\zeta} \quad (6.52)$$

e o segundo, checa se o valor está contido no seguinte intervalo:

$$\left[ \|\Delta\mathbf{U}\|_{min}^* \cdot \left( \frac{\|\Delta\mathbf{U}\|_{máx}^* - \|\Delta\mathbf{U}\|_{min}^*}{\zeta} \right) \right] \quad (6.53)$$

sendo  $\zeta$  um fator com valor compreendido entre 5 e 20.

Para as condições que satisfaçam aos dois critérios, (6.52) e (6.53), considera-se que a intensidade das variáveis envolvidas no cálculo da frequência dominante é relativamente

pequena e, nesse caso, o resultado poderia ser afetado por problemas numéricos. Assim, o intervalo de tempo do instante anterior deve ser mantido.

Mesmo em situações normais, nas quais os critérios anteriores não impeçam o cálculo da nova frequência dominante, Jacob (1990) recomenda que seja utilizado o seguinte artifício para filtrar as componentes de alta frequência:

$$\omega_{(t+\Delta t)}^* = \frac{{}^{(t+\Delta t)}\omega + {}^t\omega}{2} \quad (6.54)$$

Dessa forma, no cálculo da frequência dominante, a equação anterior deve ser usada ao invés de (6.50). O período característico correspondente a essa frequência pode ser calculado usando o resultado obtido em (6.54) como:

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_{(t+\Delta t)}^*} \quad (6.55)$$

Para se obter a estimativa para o intervalo de tempo, a relação:

$$\Delta t^* = \frac{T^*}{\nu} \quad (6.56)$$

que permite que a composição modal da resposta seja adequadamente representada, é considerada. O parâmetro  $\nu$  é definido através de uma comparação entre o número de iterações necessárias para a convergência no processo iterativo,  $N_{ite}$ , e o número ótimo de iterações,  $N_{ot}$ , que é definido pelo usuário do programa. Na primeira condição, se  $N_{ite}$  for menor que  $N_{ot}$ , o termo  $\nu$  é reduzido. Nesse caso, considera-se  $\nu = \nu/\xi$ . Quando os valores forem iguais,  $\nu$  permanece inalterado. E a terceira condição, caso  $N_{ite}$  seja maior  $N_{ot}$ , aumenta-se  $\nu$  de acordo com a relação  $\nu = \nu\xi$ . Nesse caso, reavalia-se a rigidez. O valor máximo e mínimo para  $\nu$  devem ser definidos também pelo usuário. Jacob (1990) recomenda para  $N_{ot}$ ,  $\xi$ ,  $\nu_{min}$  e  $\nu_{máx}$  os valores 3, 1.05, 50 e 500, respectivamente.

Finalmente, a estimativa para o intervalo de tempo para o próximo passo de solução é estabelecido, usando um parâmetro de controle,  $\kappa$ , através da seguinte relação:

$${}^{(t+\Delta t)}\Delta t = \kappa({}^t\Delta t) \quad (6.57)$$

com,

$$\kappa = \frac{\Delta t^*}{({}^t \Delta t)} \quad (6.58)$$

nas quais  ${}^t \Delta t$  representa o incremento do intervalo de tempo usado no processo de solução anterior e  $\Delta t^*$  é obtido usando (6.56). Os valores limites mínimo e máximo para  $\kappa$  são  $\kappa_{min}$  e  $\kappa_{max}$ . É importante destacar que o incremento do intervalo de tempo não é alterado se  $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$  e, além disso, a rigidez do sistema é reavaliada sempre que o intervalo de tempo for alterado. Os valores sugeridos para  $\kappa_{min}$ ,  $\kappa_{max}$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são, respectivamente, 0.5, 0.625, 1.6 e 1.8.

Com essas considerações, em instantes onde a influência da não linearidade é pequena, tem-se um aumento do intervalo de tempo. Entretanto, esse aumento é limitado para garantir a integração adequada dos modos com frequências próximas ou inferiores à dominante.

#### 6.4.4 Comportamento Histerético da Ligação Semi-Rígida

Para realizar uma análise estrutural mais realística é necessário considerar o verdadeiro comportamento das ligações. Foi mostrado no Capítulo 4 que as ligações sofrem uma perda de rigidez durante o processo de carregamento que é decorrente de imperfeições geométricas, descontinuidades nos elementos que compõem a ligação, entre outros fatores. Assim como na análise estática não linear, a metodologia para estudo da resposta dinâmica da estrutura deve monitorar continuamente a rigidez da ligação. Sabe-se que as ligações semi-rígidas quando submetidas a ações repetidas e alternadas desenvolvem um comportamento inelástico que provoca o amortecimento histerético. A histerese é caracterizada nesse caso pelo laço resultante da não coincidência das curvas momento-rotação da ligação semi-rígida definidas nas etapas de carregamento e descarregamento. Trata-se de uma importante fonte primária de amortecimento durante a vibração de uma estrutura.

Como existem poucos dados experimentais referentes ao comportamento das ligações semi-rígidas quando solicitadas por ações de natureza dinâmica, torna-se difícil simular o ciclo histerético em perfeito acordo com os resultados desses testes. Entretanto, estudos realizados por Tsai e Popov (1990), Korol *et al.* (1990) e Abolmaali e Razavi (2003) mostraram, através de testes com ligações, que as suas relações momento-rotação são estáveis e podem ser reproduzidas.

Por simplicidade, o comportamento inelástico das ligações semi-rígidas ao serem submetidas a cargas cíclicas será simulado, neste trabalho, através da técnica do endurecimento independente (*independent hardening model*). Uma importante vantagem do método é que qualquer função matemática que represente a relação momento-rotação da ligação sob cargas estáticas pode ser adotada. Sendo assim, os quatro modelos matemáticos implementados no sistema computacional, capazes de estabelecer essa relação não linear, podem ser usados. Esses modelos estão descritos no Apêndice B. São eles: exponencial, exponencial modificado, modelo de potências com quatro parâmetros e o multilinear. Vale ressaltar que apenas a influência do momento fletor na deformação da ligação é considerada.

Vários autores, entre os quais Ackroyd e Gerstle (1983), Azizinamini *et al.* (1987), Shi e Atluri (1989), Chen *et al.* (1996), Chan e Chui (2000), Sekulovic *et al.* (2002) e Sekulovic e Nefovska (2008) utilizam em suas análises o modelo de endurecimento independente. Nesse modelo, a rigidez da ligação na fase de descarregamento é estimada igual à sua rigidez inicial. Outras técnicas para aproximar o comportamento histerético das ligações semi-rígidas são encontradas na literatura. Dentre elas, pode-se citar o modelo de endurecimento cinemático (*kinematic hardening model*) que permite que se considere o efeito do endurecimento do material (Khudata e Geschwindner, 1997; Awkar e Lui, 1999), e a outra refere-se ao modelo *bounding-surface* (Zhu *et al.*, 1995). Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências citadas e em Chan e Chui (2000). A escolha de qualquer modelo deve, evidentemente, atender aos objetivos da análise.

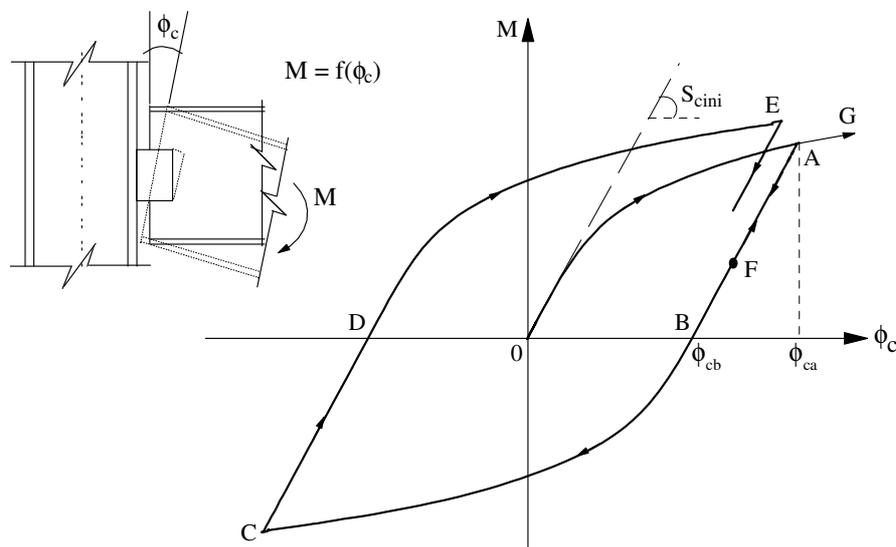
A Figura 6.6 ilustra o aspecto típico do comportamento histerético da ligação. Algumas fases ao longo da trajetória podem ser esclarecidas de acordo com essa figura. O trecho *OA* descreve o comportamento da ligação durante o processo inicial de carregamento da estrutura. Quando ocorre uma inversão no sentido da solicitação tem-se caracterizado o processo de descarregamento. Sendo assim, a intensidade do momento fletor que atua na ligação diminui. As setas estabelecem o sentido dos caminhos, indicando a variação do momento ao longo da análise. Os caminhos *AB* e *CD* na figura exibem tal situação.

Após o descarregamento completo, no qual se tem  $M = 0$ , ocorre novamente o processo de carregamento, comumente referido como carregamento reverso. Os trechos *BC* e *DE* exemplificam o processo de carregamento reverso e recarregamento, respectivamente. Observa-se que, após a primeira etapa de descarregamento completo, apenas uma parcela da deformação total,  $\phi_{ca}$ , é recuperada e a ligação permanece com uma

deformação residual permanente,  $\phi_{cb}$ . Isso acontece também após os outros ciclos de carga e descarga.

Com essas considerações, é possível estudar o procedimento usado na simulação do comportamento histerético, que tem as seguintes características:

i. *Carregamento*: Na condição de carregamento, as trajetórias, que são indicadas através de linha contínua na Figura 6.7a, iniciam-se num ponto ao longo do eixo das abscissas cuja coordenada corresponde à última rotação residual permanente,  $\phi_p$ . Na fase inicial de carregamento,  $OA$ , tem-se  $\phi_p=0$ . Essa rotação  $\phi_p$ , como mencionado anteriormente, é determinada após a fase de descarregamento completo.



**Figura 6.6** Comportamento histerético da ligação semi-rígida

Para se obter as equações que representam a relação momento-rotação nos casos de carregamento, considere o trecho  $DE$  na Figura 6.7a. O momento fletor  $M$  em qualquer posição dessa trajetória que se inicia em  $D$ , pode ser calculado de uma forma geral, como:

$$M = f(\phi_c - \phi_p) \quad (6.59)$$

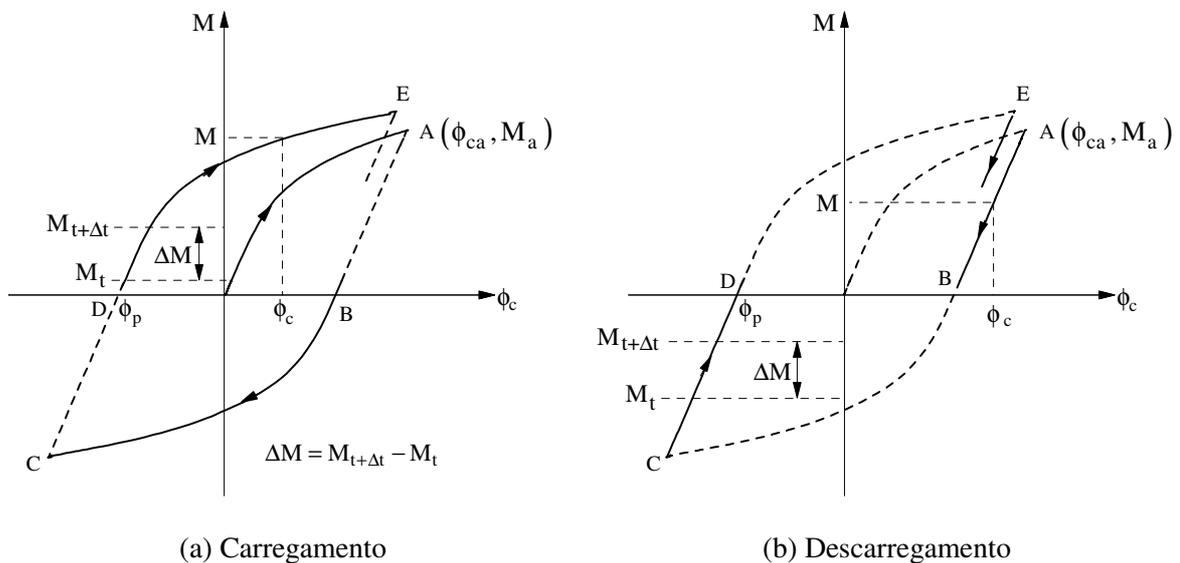
na qual a função  $f$  é definida de acordo com um modelo matemático que descreve o comportamento não linear momento-rotação da ligação quando submetida a carregamento estático, e  $\phi_c$  é a rotação correspondente a  $M$ . Já a rigidez da ligação, definida matematicamente como a inclinação da reta tangente à curva momento-rotação, é dada por:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{\phi_c = (\phi_c - \phi_p)} \quad (6.60)$$

Pode-se notar que a fase de carregamento é caracterizada pelo acréscimo de momento fletor,  $\Delta M$ , entre os instantes de tempo  $t$  (anterior) e  $t + \Delta t$  (atual). Além disso, o sinal de  $\Delta M$  é sempre igual ao do momento fletor atuante,  $M$ . Portanto, a condição de carregamento é verificada se a relação:

$$M \cdot \Delta M > 0 \quad (6.61)$$

for satisfeita.



**Figura 6.7** Modelo de endurecimento independente

ii. *Descarregamento*: No processo de descarregamento, a curva momento-rotação é linear, com inclinação igual à rigidez inicial da ligação. A Figura 6.7b exibe as regiões onde ocorre o descarregamento. A linha contínua é usada para tal finalidade. Na obtenção das equações momento-rotação nessa fase, considere o trecho  $AB$  do ciclo histerético representado nessa figura. Como a reta passa pelo ponto  $A(\phi_{ca}, M_a)$  e tem inclinação conhecida,  $S_{cini}$ , sua equação é definida como:

$$M = M_a - S_{cini} (\phi_{ca} - \phi_c) \quad (6.62)$$

na qual  $M_a$  estabelece o momento a partir do qual o descarregamento ocorre. Essa grandeza, referida como momento reverso, é encontrada usando a expressão (6.59). Assim, tem-se:

$$M_a = f(\phi_{ca} - \phi_p) \quad (6.63)$$

A inclinação da curva (6.62), como já destacado, é a rigidez inicial da ligação, que pode ser definida matematicamente, como:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{\phi_c} = S_{cini} \quad (6.64)$$

Observa-se facilmente que durante o processo de descarregamento, a relação,

$$M \cdot \Delta M < 0 \quad (6.65)$$

é obedecida.

Entretanto, alguns esclarecimentos adicionais devem ser feitos para se evitar possíveis problemas. Para isso, considere novamente a Figura 6.6. Se a ligação estiver sendo descarregada de  $A$  a  $F$  e voltar a ser carregada antes de completar o processo de descarregamento, o comportamento momento-rotação desse elemento deverá seguir a trajetória  $FA$  até alcançar o último momento reverso encontrado. A partir de então, o processo de carregamento segue a curva original momento-rotação obtida considerando a última rotação permanente,  $\phi_p$ , encontrada.

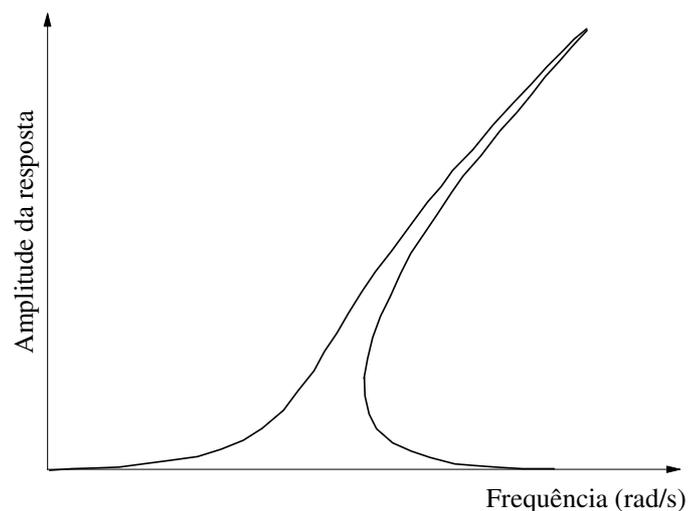
Com as observações do parágrafo anterior e as considerações feitas, conclui-se que, na condição de descarregamento, tem-se sempre  $|M| < |M_a|$ , e, nesse caso, as Equações (6.62), (6.64) e (6.65) são consideradas. Para o carregamento deve-se ter  $|M| \geq |M_a|$  e o comportamento momento-rotação é estabelecido com as expressões (6.59) e (6.60), observando a restrição (6.61).

É importante informar que, na implementação computacional desse procedimento, a rotação  $\phi_p$  deve ser armazenada após cada situação de descarregamento completo, bem como o momento reverso,  $M_a$ , sempre que for detectada uma alteração no sinal do incremento de momento,  $\Delta M$ . Adicionalmente, os intervalos entre dois instantes de tempo sucessivos devem ser pequenos para que essas grandezas sejam definidas com uma precisão adequada. Seguindo todas essas considerações, o algoritmo para simular o

comportamento histerético momento-rotação das ligações semi-rígidas é facilmente implementado. Exemplos numéricos que validam esse procedimento serão apresentados no próximo capítulo.

## 6.5 Análise de Vibração Não Linear

Com o aumento da flexibilidade das estruturas modernas, os efeitos da não linearidade geométrica provocam o surgimento de vibrações indesejáveis. Nesse caso, a relação entre frequência de vibração e a amplitude da resposta, curva de ressonância, estabelece uma importante informação referente à análise de vibração, pois fornece uma indicação sobre o tipo, *hardening* (endurecimento) ou *softening* (enfraquecimento), e grau de não linearidade do sistema estrutural. A Figura 6.8 exemplifica essa relação onde a influência da não linearidade na resposta é percebida através da inclinação da curva.



**Figura 6.8** Aspecto típico de uma curva de ressonância

Aproximações envolvendo técnicas de perturbação e método do balanço harmônico vêm sendo desenvolvidas para análise de vibrações não lineares em sistemas com poucos graus de liberdade (Xu e Cheng, 1994; Benounna e White, 1997; Kahn e Zarmi, 2004; Gavassoni Neto, 2007). Porém, ao contrário dos modelos numéricos de baixa dimensão onde diversas técnicas podem ser empregadas com relativa facilidade, para sistemas estruturais com grande número de graus de liberdade o conhecimento das curvas de ressonância torna-se bastante oneroso do ponto de vista computacional. Galvão (2004), usando o Método dos Elementos Finitos, adotou um procedimento de repetição simples

acoplado a um método de integração, que consistia em dar incrementos constantes na frequência de excitação harmônica. Dessa forma, para encontrar a resposta em cada passo incremental, as equações diferenciais de movimento eram integradas durante um intervalo de tempo capaz de garantir que a resposta nos estágios finais do processo estivesse em regime permanente. Nessa condição, os deslocamentos máximos e mínimos correspondentes à frequência considerada eram obtidos. Uma desvantagem dessa técnica é o grande esforço computacional envolvido, uma vez que o tempo de análise deve ser grande. Além disso, é impossível ultrapassar os pontos limites com os fenômenos *snap-through* e *snap-back* existentes e definir a trajetória completa da curva de ressonância.

Técnica mais eficiente para realizar o estudo da ressonância em estruturas com comportamento não linear foi desenvolvida por Lewandowski (1992; 1997a; 1997b). Na metodologia proposta, os métodos do balanço harmônico e dos Elementos Finitos juntamente com a restrição do comprimento de arco são usados para análise de ressonância de estruturas nas quais os efeitos da não linearidade geométrica são significantes. Mais recentemente, Ferreira e Serpa (2005) aplicaram o método do comprimento de arco na resolução de um sistema de equações não lineares para obter a curva de ressonância. A análise emprega o conceito das funções de descrição, onde o componente harmônico fundamental é considerado o mais relevante.

Neste trabalho, as curvas de ressonância das estruturas não serão obtidas, mas sim a relação não linear entre a frequência de vibração livre e a amplitude da resposta. Para isso, o primeiro modo de vibração da estrutura é excitado, impondo-se um campo inicial de deslocamentos igual à solução do primeiro modo de vibração considerando uma determinada amplitude. As tensões iniciais são determinadas e, em seguida, realiza-se a análise transiente, descrita na Seção 6.4, para obter para um nó selecionado, em geral um nó com grandes deslocamentos, a resposta no tempo. Com essa resposta e seguindo a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005) pode-se obter a relação entre a frequência de vibração e o deslocamento (ou rotação) para um ponto qualquer da estrutura. Para isso, consideram-se os deslocamentos,  $d_{1(i)}$  e  $d_{1(i+1)}$ , correspondentes a dois picos positivos e sucessivos nos instantes  $t_{(i)}$  e  $t_{(i+1)}$ , respectivamente, como ilustra a Figura 6.9. Através de uma média aritmética simples realizada com esses valores, define-se  $d_{1m(i)}$ . O deslocamento mínimo,  $d_{2(i)}$ , do pico entre  $t_{(i)}$  e  $t_{(i+1)}$  é também registrado. A partir daí, com essas duas grandezas,  $d_{1m(i)}$  e  $d_{2(i)}$ , a amplitude do deslocamento é definida como:

$$d_i = \frac{(d_{1m(i)} + |d_{2(i)}|)}{2} \quad (6.66)$$

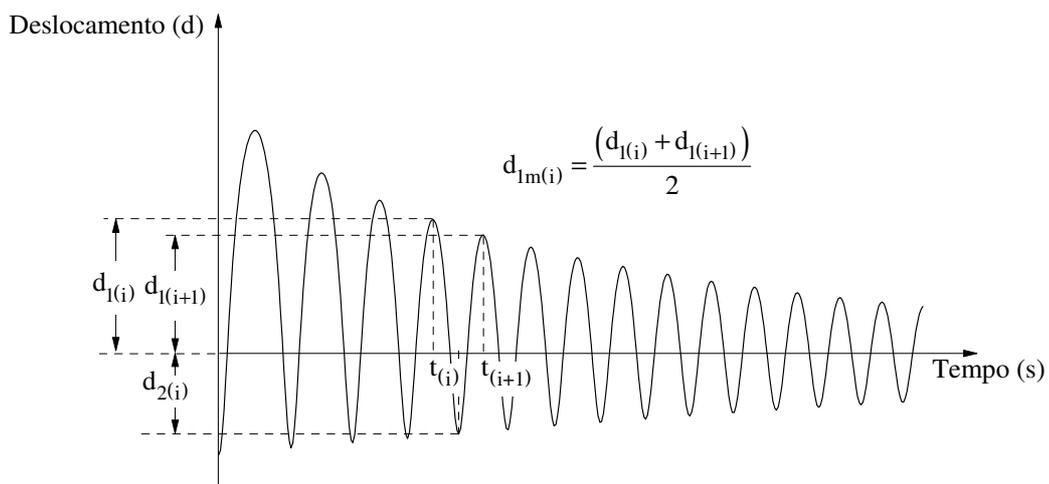
O período,  $T_i$ , e a correspondente frequência de vibração (em Hz),  $f_i$ , são calculados através das seguintes relações:

$$T_i = t_{(i+1)} - t_{(i)} \quad (6.67)$$

$$f_i = \frac{1}{T_i} \quad (6.68)$$

Todos os deslocamentos máximos e mínimos ao longo da trajetória são similarmente considerados para obtenção de outros pontos ( $f_i$ ,  $d_i$ ) usando (6.68) e (6.66). Ao final, esses pares de valores são representados graficamente para fornecerem a relação frequência-deslocamento procurada. No próximo capítulo, essa técnica será utilizada e tal relação poderá ser observada.

Na análise, o intervalo de tempo deve ser pequeno para se obter a resposta e, conseqüentemente, os pontos limites com boa precisão. Um baixo amortecimento deve ser considerado também. Cabe ressaltar que o programa desenvolvido determina automaticamente esses pontos de máximos e mínimos ao longo da análise e, posteriormente, calcula os deslocamentos,  $d_i$ , e as frequências de vibração,  $f_i$ .



**Figura 6.9** Processo de obtenção dos deslocamentos  $d_i$

# Capítulo 7

## Exemplos de Validação da Formulação para Análise Dinâmica Não Linear

### 7.1 Introdução

Neste capítulo, a formulação desenvolvida anteriormente para análise dinâmica não linear é usada para obter a resposta de nove sistemas estruturais reticulados planos, cujas soluções analíticas ou numéricas são encontradas na literatura. O objetivo dessas análises é, principalmente, validar tal formulação e a estratégia de solução propostas. Serão realizadas análises de vibração livre, na Seção 7.2, além da análise transiente, apresentada na Seção 7.3. Estruturas com ligações rígidas e semi-rígidas com características momento-rotação lineares e não lineares foram selecionadas para o estudo. Será mostrado, na Seção 7.3, que a importância de se considerar o comportamento não linear de uma ligação está no amortecimento introduzido na estrutura. Esse amortecimento é medido pela capacidade de dissipação de energia da ligação em cada ciclo, que, por sua vez, pode ser avaliada através do cálculo da área interior à curva que relaciona a força atuante na ligação e a sua deformação. A dissipação se dá pela histerese resultante da deformação desse elemento quando submetido a cargas cíclicas. Neste trabalho, apenas a atuação do momento fletor é considerada. A influência da capacidade de dissipação de energia na redução da resposta da estrutura será observada. Cabe informar que os modelos matemáticos usados para descrever o comportamento momento-rotação de uma ligação semi-rígida estão detalhados no Apêndice B deste trabalho.

Em todas as análises, os efeitos da não linearidade geométrica podem ser considerados através das formulações SOF-1 ou SOF-2. Para simular os efeitos da

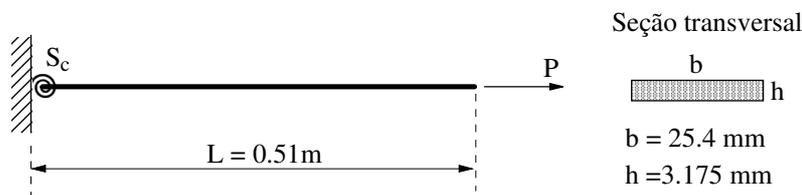
flexibilidade da ligação têm-se como opções as formulações SRF-1, SRF-2 ou SRF-3. Todas essas formulações foram abordadas e validadas, respectivamente, nos Capítulos 4 e 5.

## 7.2 Análise de Vibração Não Linear

Nesta seção, será realizada a análise de vibração livre de três sistemas estruturais. Ligação semi-rígida com comportamento linear, ou seja, com rigidez constante, é adotada nos três problemas para mostrar a importância da consideração da sua flexibilidade nas respostas estruturais. Estudam-se uma coluna, um arco senoidal e um pórtico em L. As análises estáticas realizadas com essas estruturas são também apresentadas. O método de Newton-Raphson modificado e a estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado foram considerados no processo de solução não linear. Adotou-se o parâmetro de rigidez GSP para controle de carga. O critério de convergência baseado em cargas e deslocamentos e uma tolerância de  $10^{-5}$  foram considerados.

### 7.2.1 Coluna com Ligação Semi-Rígida

A estrutura ilustrada na Figura 7.1 é o primeiro problema a ser analisado neste capítulo. Tem-se uma coluna, esboçada na posição horizontal, na qual uma das extremidades é semi-rígida e a outra se encontra livre, submetida a uma carga axial  $P$  aplicada na extremidade livre. O objetivo com esse problema é verificar a influência do pré-carregamento estático na vibração dessa coluna.



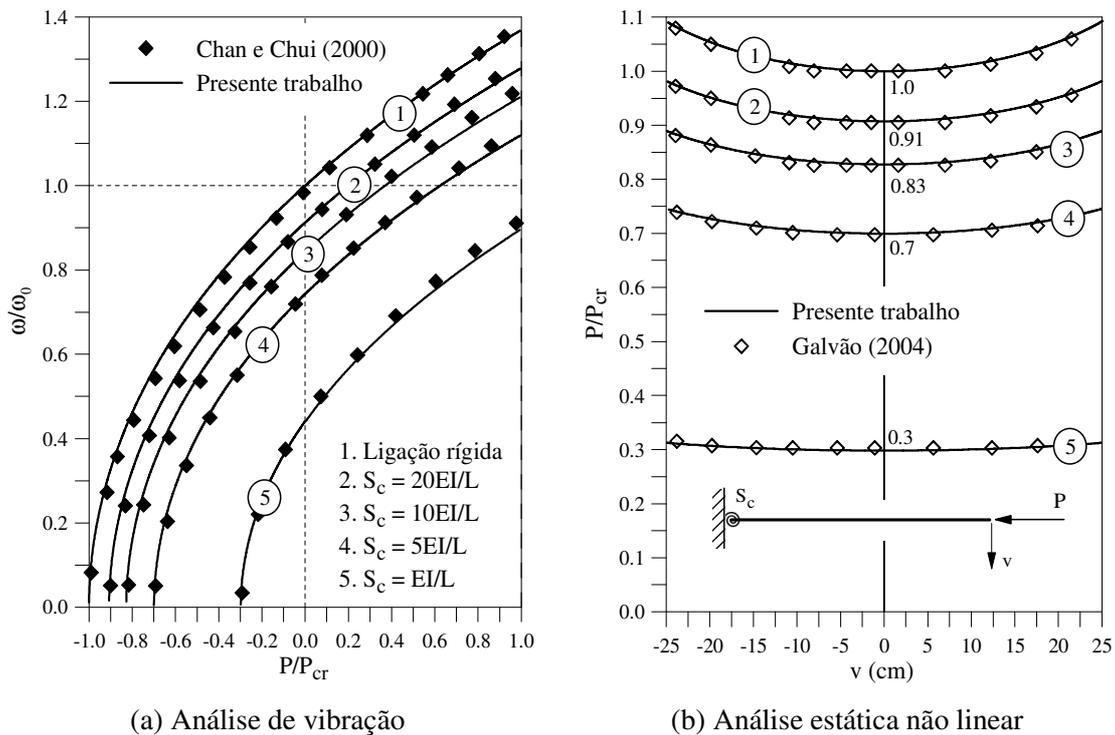
**Figura 7.1** Coluna com ligação semi-rígida

Nas análises, as propriedades geométricas e do material foram determinadas através das relações  $EI = 14 \text{ Nm}^2$  e  $\rho A = 3.82 \text{ Ns}^2/\text{m}^2$ . O comprimento da coluna,  $L$ , e as características da seção transversal estão indicados na Figura 7.1. Na discretização da estrutura, consideraram-se dez elementos finitos com as mesmas características, sendo que

apenas um desses elementos é modelado com molas nas extremidades para simular a ligação semi-rígida. Os outros nove são elementos de viga-coluna convencionais com hipóteses de ligações perfeitamente rígidas.

O incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , foi assumido igual a 0.001, e as formulações SOF-2 linearizada e SRF-1 foram usadas.

Análises de vibração livre da estrutura previamente carregada, considerando a ligação rígida e semi-rígida com diferentes rigidezes, foram realizadas e os resultados são ilustrados na Figura 7.2a. A técnica usada para se efetuar essa análise é descrita na Seção 6.3 do capítulo anterior. Estudos para a carga  $P$  de tração e compressão foram feitos. As rigidezes consideradas para a ligação, caracterizadas pelo parâmetro  $S_c$ , foram:  $20EI/L$ ,  $10EI/L$ ,  $5EI/L$  e  $EI/L$ . As frequências de vibração,  $\omega$ , foram divididas pela menor frequência natural da coluna engastada-livre, ou seja, com a hipótese de ligação perfeitamente rígida,  $\omega_0 = 107.747$  rad/s. Já a carga  $P$  foi adimensionalizada usando a carga crítica de flambagem dessa mesma coluna cujo valor é  $P_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2)$ .



**Figura 7.2** Influência da rigidez da ligação nas análises de vibração e estática não lineares

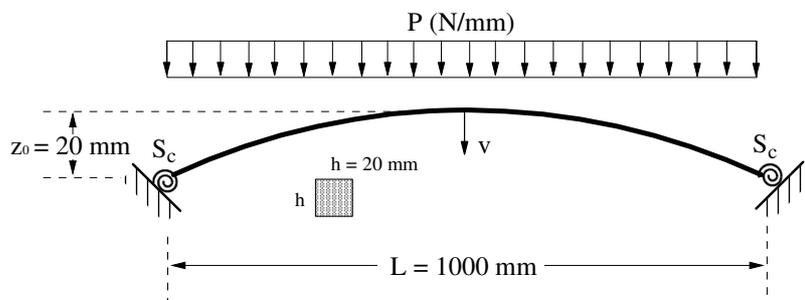
É possível observar como a força axial altera significativamente a frequência natural da coluna. Nota-se que as frequências diminuem com o aumento da intensidade do carregamento, se esse for de compressão. De forma contrária, as frequências aumentam

quando a carga axial é de tração. Além disso, elas se tornam maiores para as ligações mais rígidas. Para verificar a precisão dos resultados usam-se as respostas encontradas por Chan e Chui (2000).

Adicionalmente, apresenta-se, na Figura 7.2b, a trajetória de equilíbrio resultante da análise estática não linear dessa estrutura, considerando, como anteriormente, diferentes valores para o parâmetro  $S_c$ . A variação do deslocamento da extremidade livre,  $v$ , com o carregamento é representada. Como já comprovado no Capítulo 4, verifica-se que as cargas críticas são menores para as ligações mais flexíveis. Observa-se ainda, comparando as Figuras 7.2a e 7.2b, que, quando as frequências se anulam, tem-se definida a carga crítica da coluna. Como exemplo, no caso da ligação com rigidez  $S_c = 5 EI/L$ , quando a frequência é zero, a carga crítica é  $P = 0.7P_{cr}$ , sendo  $P_{cr}$  a carga crítica para a coluna engastada-livre, já definida anteriormente. Essa estrutura foi analisada numericamente também por Galvão (2004) que usou na sua discretização uma malha constituída por dez elementos finitos, onde o elemento com ligação na extremidade foi considerado extremamente pequeno, com tamanho  $L/500$ , para que fosse possível garantir a precisão dos resultados. Os valores fornecidos por esse autor estão também representados na Figura 7.2b e são usados para comparação.

### 7.2.2 Arco Senoidal Abatido

Os arcos esbeltos são estruturas que podem apresentar, dependendo das condições de apoio e do tipo e intensidade do carregamento, um comportamento altamente não linear. Nesta seção estuda-se um arco senoidal submetido a um carregamento uniformemente distribuído,  $P$ , como ilustra a Figura 7.3. As características geométricas da estrutura estão ilustradas nessa figura.

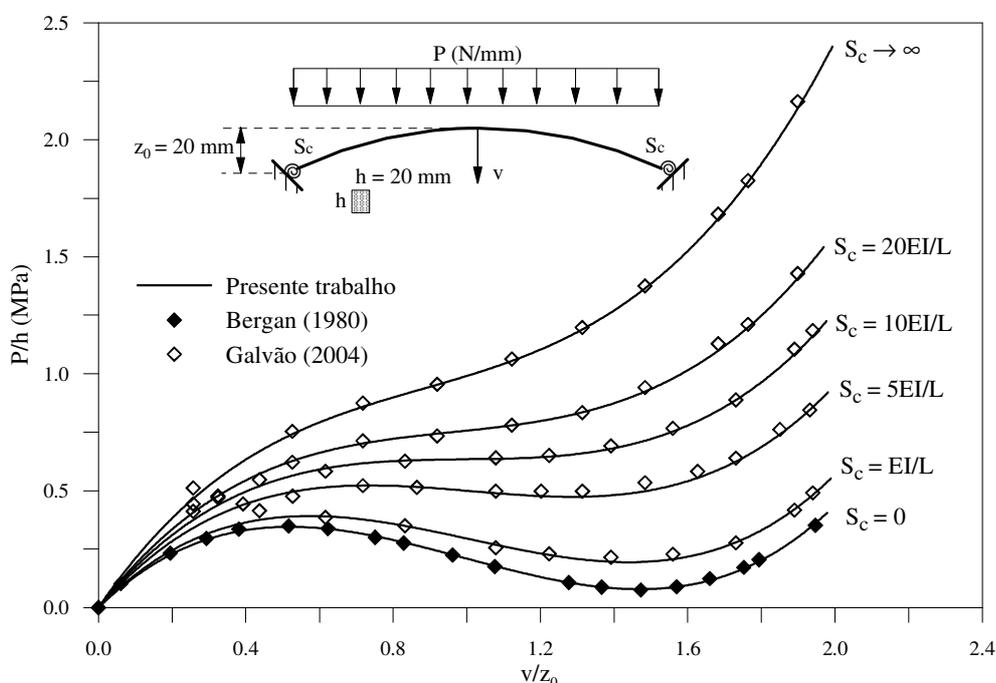


**Figura 7.3** Arco com ligações semi-rígidas submetido a carregamento estático

O módulo de elasticidade,  $E$ , e a massa volumétrica,  $\rho$ , foram considerados iguais a 205 MPa e  $78 \text{ kg/m}^3$ .

Novamente, o objetivo é avaliar o efeito do pré-carregamento estático na vibração da estrutura. Isso é feito aplicando o carregamento externo de forma incremental e, após o processo iterativo de solução do problema estático não linear, obtêm-se as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura nessa nova configuração de equilíbrio.

A Figura 7.4 exibe a trajetória de equilíbrio da estrutura considerando a rigidez dos apoios variável. Está representada a variação do deslocamento vertical no centro do arco,  $v$ , com a carga atuante,  $P$ . Esse deslocamento e a carga são expressos divididos pela altura do arco,  $z_0$ , e pela altura da seção,  $h$ , respectivamente.

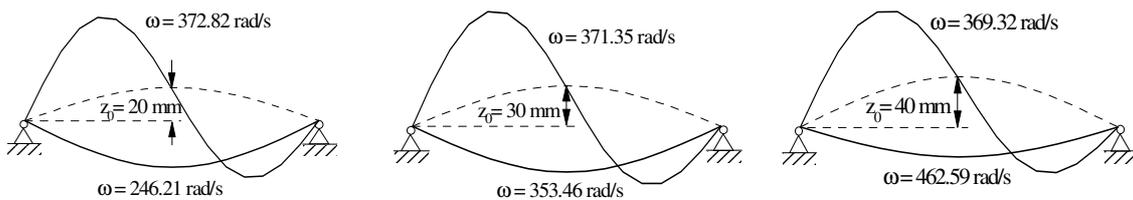


**Figura 7.4** Trajetórias de equilíbrio considerando as ligações com diferentes rigidezes

Observa-se, para as ligações mais flexíveis, que apresentam menores valores para o parâmetro  $S_c$ , a presença de dois pontos limites de carga. Para os apoios mais rígidos, esses pontos desaparecem e o arco continua apresentando uma trajetória de equilíbrio não linear, porém, sempre crescente. A curva obtida para o arco com as extremidades simplesmente apoiadas,  $S_c=0$ , é comparada com a solução analítica fornecida por Bergan (1980). As outras, com os resultados encontrados por Galvão (2004), que usou, assim como no problema apresentado na seção anterior, os elementos finitos das extremidades com tamanho bastante inferior aos demais para conseguir resultados satisfatórios. A boa

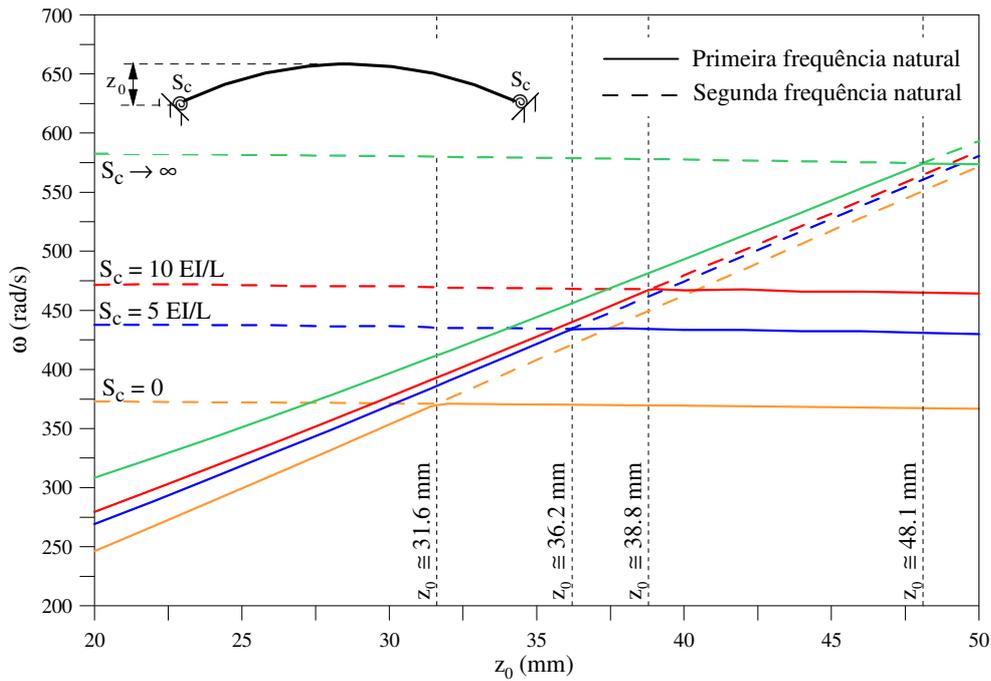
concordância entre as respostas é percebida em todos os casos. Vale ressaltar que as formulações SOF-2 linearizada e SRF-3 foram aplicadas para simular, respectivamente, os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações. O incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , foi considerado igual a 0.1.

Iniciando o estudo sobre as frequências e os modos de vibração, a Figura 7.5 mostra o aspecto dos dois primeiros modos de vibração para o arco com apoios rotulados e três diferentes alturas,  $z_0$ : 20, 30 e 40 mm. As frequências naturais,  $\omega$ , associadas a esses modos estão também indicadas. Nota-se, para o arco com alturas iguais a 20 e 30 mm, que o primeiro modo de vibração, ou seja, aquele correspondente à menor frequência natural, se mantém simétrico. Já as frequências correspondentes ao segundo modo, que é assimétrico, permanecem praticamente constantes. Para o arco com altura 40 mm, a simetria é verificada, diferentemente, no segundo modo de vibração.



**Figura 7.5** Modos de vibração para o arco com diferentes alturas

Para realçar o comportamento observado no parágrafo anterior, a Figura 7.6 representa a variação das duas primeiras frequências naturais do arco com a rigidez dos apoios,  $S_c$ , e a altura,  $z_0$ . Em todos os casos, enquanto a primeira frequência natural cresce linearmente com a altura, a segunda se mantém praticamente constante. Nesse caso, tem-se o primeiro modo de vibração simétrico e o correspondente à segunda frequência, assimétrico, como verificado na Figura 7.5 para o arco birrotulado. Com o aumento na altura do arco, as duas frequências se aproximam e a partir de um determinado valor crítico, no qual as duas frequências tornam-se iguais, ocorre o contrário, ou seja, a primeira frequência se mantém constante enquanto a outra cresce linearmente com a altura. No caso dos apoios rotulados, isso ocorre para  $z_0 \cong 31.6$  mm. Dessa forma, para alturas superiores a 31.6 mm, os comportamentos dos modos se alteram como ilustrado na Figura 7.5. Essa altura crítica depende da rigidez dos apoios; quanto mais flexível, menor é o seu valor. Seus valores para o arco com ligações rígidas e semi-rígidas estão também indicadas na Figura 7.6.

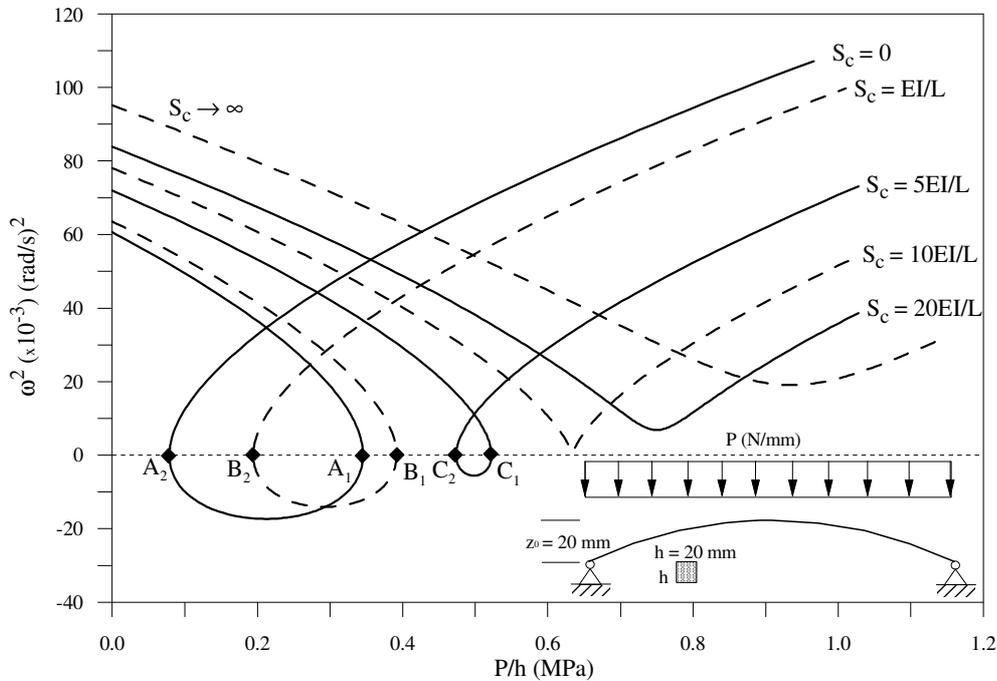


**Figura 7.6** Variação das duas menores frequências naturais com os parâmetros  $z_0$  e  $S_c$ .

A relação não linear entre a carga  $P$  e a menor frequência natural de vibração do arco com altura  $z_0 = 20$  mm foi verificada, considerando, novamente, diferentes condições de apoio. As curvas obtidas, ilustradas na Figura 7.7, mostram não apenas a influência do pré-carregamento estático nas frequências naturais, mas, também, como já destacado no capítulo anterior, indicam, de acordo com o critério dinâmico de instabilidade, configurações de equilíbrio estáveis e instáveis ao longo da trajetória. Observando a figura e se baseando nesse critério, as trajetórias instáveis localizam-se entre os pontos limites  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  e  $C_2$ . A Tabela 7.1 mostra os valores para tais pontos e os comparam aos encontrados por Galvão (2004). Sabe-se que construções metálicas que utilizaram arcos abatidos, por exemplo, em coberturas, podem perder a estabilidade quando submetida a cargas estáticas ou dinâmicas devido à corrosão nos apoios dessas estruturas. Nesses casos, o que ocorre é um aumento na flexibilidade desses apoios e, conseqüentemente, a rigidez global da estrutura diminui alterando sensivelmente as suas características estáticas e dinâmicas. Dessa forma, percebe-se, mais uma vez, a importância de se realizar uma análise mais rigorosa a respeito do comportamento não linear de uma estrutura.

As Figuras 7.8, 7.9 e 7.10 exibem as trajetórias de equilíbrio do arco com altura 20, 30 e 40 mm, respectivamente. A variação das duas primeiras frequências naturais do arco após ter sido carregado é também mostrada nessas figuras. Verifica-se, para as alturas 30 e 40 mm, que antes de se atingir o primeiro ponto limite de carga, surge um ponto de

bifurcação ao longo do caminho de equilíbrio. Com isso, então, o arco perde sua estabilidade e as curvas tornam-se altamente não lineares. É importante ressaltar, mais uma vez, que as configurações de equilíbrio instáveis são caracterizadas por apresentarem pelo menos uma das frequências naturais negativas.



**Figura 7.7** Influência do pré-carregamento estático na menor frequência de vibração do arco

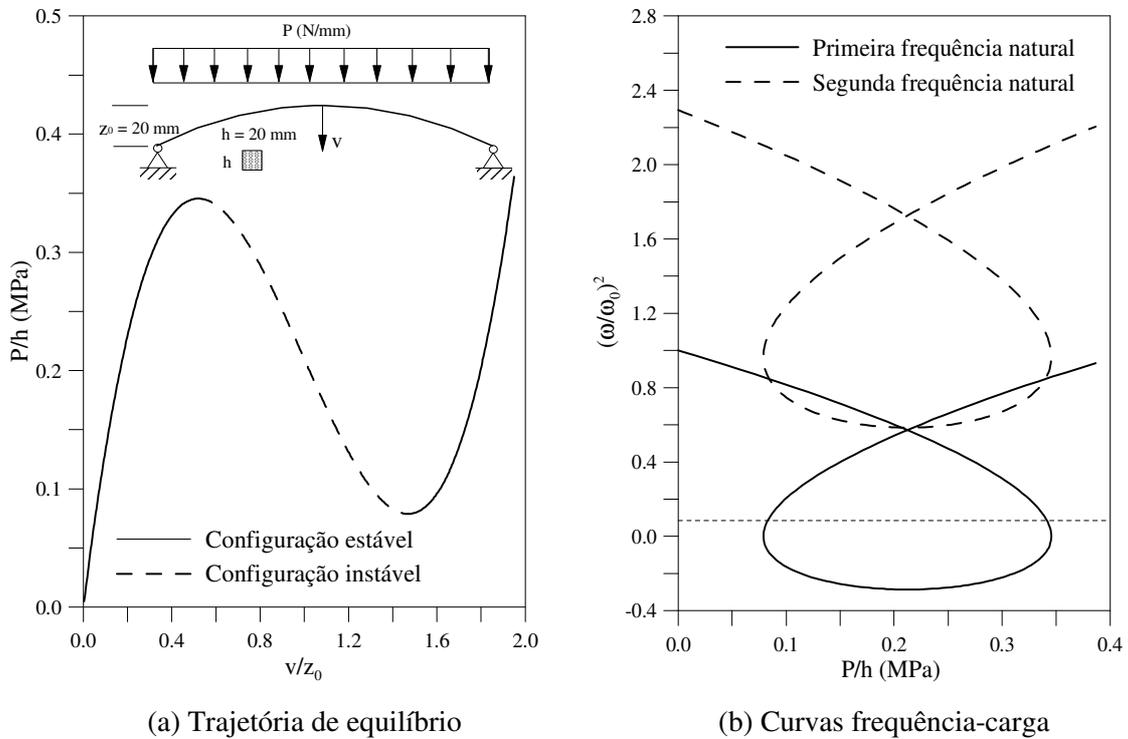
Com o aumento da altura do arco, observa-se ainda que a segunda frequência torna-se também negativa. Isso indica a importância do estudo dos outros modos de vibração na análise da estabilidade de uma estrutura. Nas Figuras 7.8, 7.9 e 7.10, as frequências foram divididas pela menor frequência natural para o arco sem carregamento, cujo valor pode ser encontrado na Figura 7.5.

**Tabela 7.1** Relação  $P/h$  (MPa) referente aos pontos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  e  $C_2$  na Figura 7.7

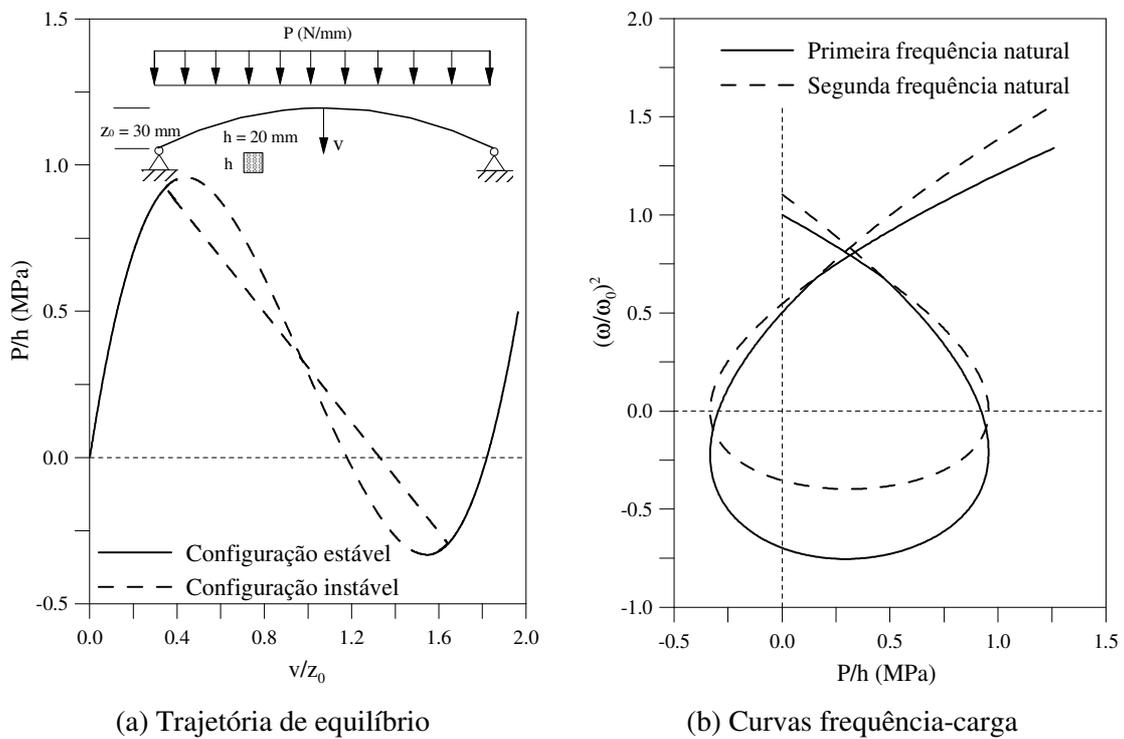
Referência	$A_1$	$A_2$	$B_1$	$B_2$	$C_1$	$C_2$
<i>Presente Trabalho</i>	0.3454	0.0789	0.3916	0.1944	0.5212	0.4737
<i>Galvão (2004)</i>	0.3456	0.0790	0.3919	0.1952	0.5256	0.4795

Na Figura 7.11 tem-se a relação não linear entre a frequência e a amplitude de vibração livre para a estrutura analisada. A metodologia usada na obtenção dessa relação foi descrita na Seção 6.5 do capítulo anterior. Para obtenção dessa resposta, um leve

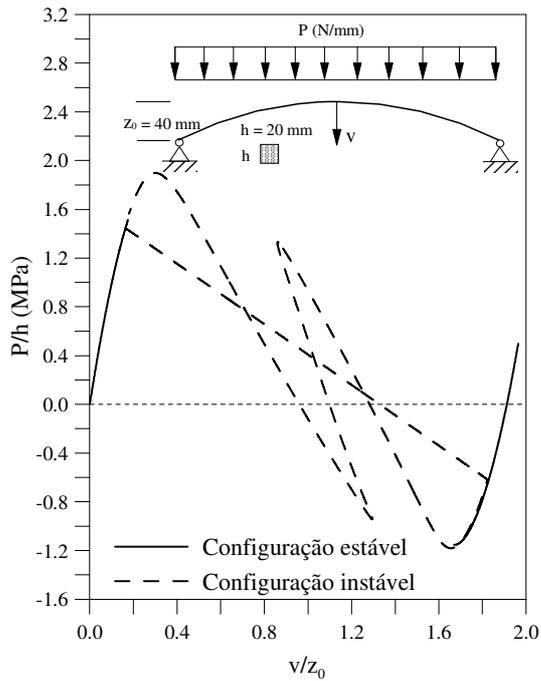
amortecimento, com taxa  $\xi=0.01$  referente aos dois primeiros modos, e incrementos de tempo,  $\Delta t$ , constantes e iguais  $10^{-5}$  foram considerados.



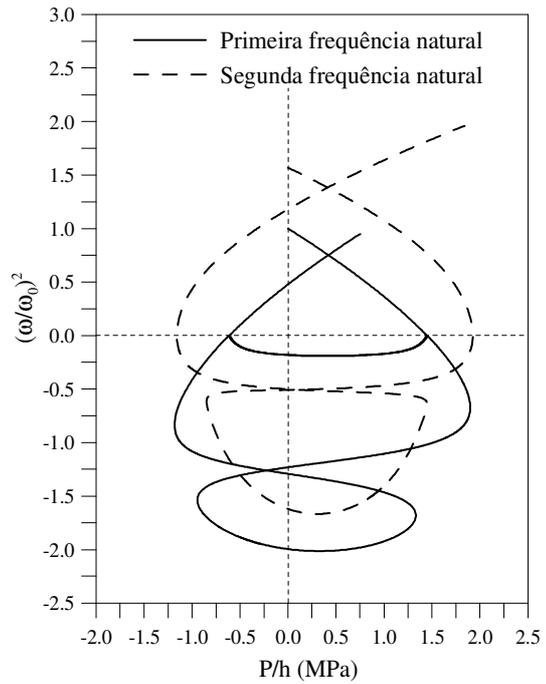
**Figura 7.8** Respostas para o arco com altura  $z_0 = 20$  mm



**Figura 7.9** Respostas para o arco com altura  $z_0 = 30$  mm

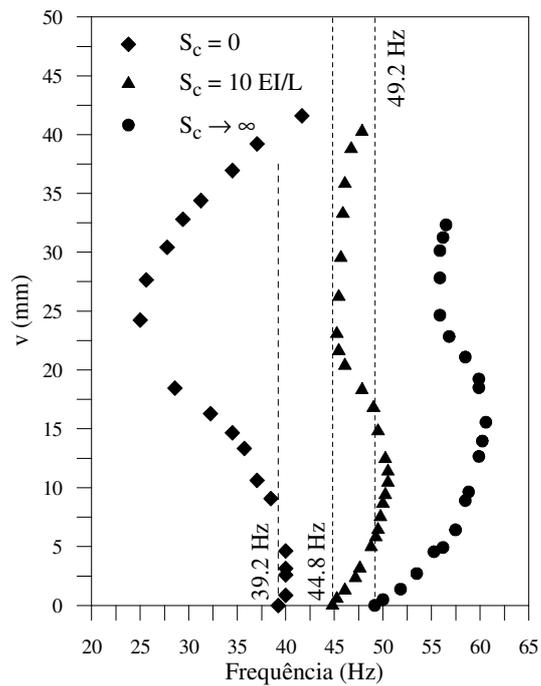


(a) Trajetória de equilíbrio

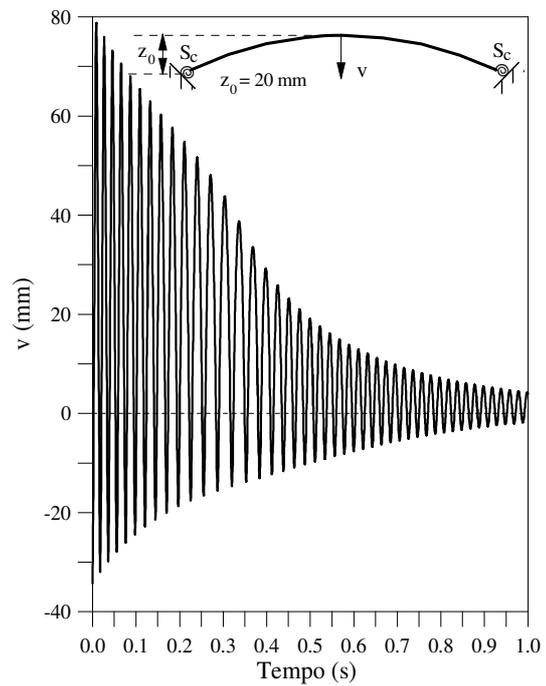


(b) Curvas frequência-carga

**Figura 7.10** Respostas para o arco com altura  $z_0 = 40$  mm



(a) Relação frequência-amplitude



(b) Resposta transitente para  $S_c = 0$

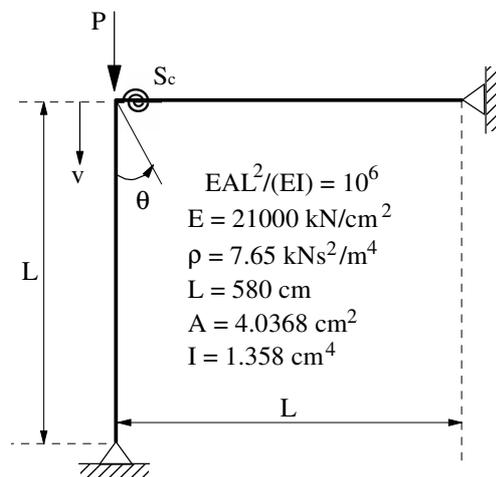
**Figura 7.11** Análise de vibração não linear

Na Figura 7.11a, mostra-se a relação entre a frequência e a amplitude de vibração livre para a estrutura analisada. Estudou-se o arco com três diferentes condições de apoios:

rotulados ( $S_c = 0$ ), perfeitamente rígidos ( $S_c \rightarrow \infty$ ) e semi-rígidos ( $S_c = 10 EI/L$ ). Nas três situações, observa-se inicialmente um comportamento semelhante com a curva se deslocando para a direita indicando o aumento de rigidez estrutural (*hardening*). Nesse caso, ocorre um aumento da frequência natural à medida que a amplitude do deslocamento cresce. Em seguida, para amplitudes bem maiores, verifica-se uma região com perda de rigidez estrutural (*softening*). Para o arco com apoios rotulados esse comportamento ocorre, diferentemente dos outros, para menores amplitudes de vibração. As frequências naturais, em Hz, para o arco com ligações rígidas, semi-rígidas e rotuladas estão também indicadas nessa figura. Os valores encontrados foram, respectivamente, 39.2, 44.8 e 49.2 Hz. Adicionalmente, a resposta no tempo para o arco com apoios rotulados e configuração inicial altamente deformada é exemplificada na Figura 7.11b.

### 7.2.3 Pórtico em L

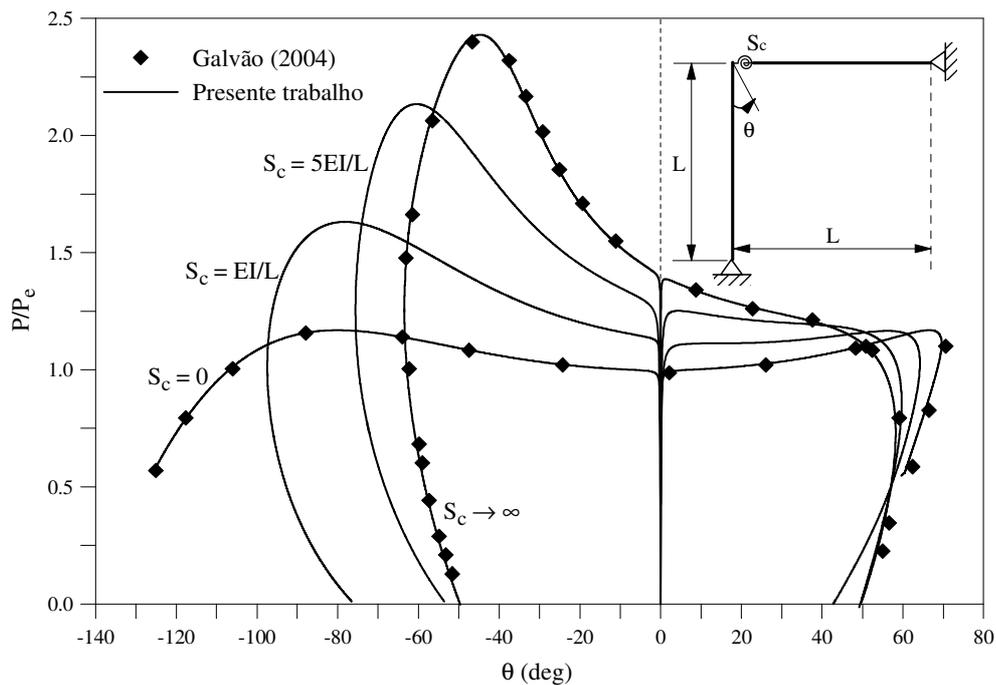
O último exemplo desta seção, usado no estudo da vibração não linear de sistemas estruturais reticulados planos, é apresentado na Figura 7.12. Um pórtico em L, com as extremidades simplesmente apoiadas é a estrutura considerada. As propriedades geométricas e do material são indicadas, também, na figura mencionada. Uma carga concentrada  $P$  é aplicada no topo da coluna.



**Figura 7.12** Pórtico em L com ligações semi-rígidas

Inicialmente, assim como nos dois problemas estruturais anteriores, a análise estática não linear do pórtico em L é realizada. A estrutura foi discretizada com 20 elementos finitos iguais, dez em cada um dos membros, viga e coluna.

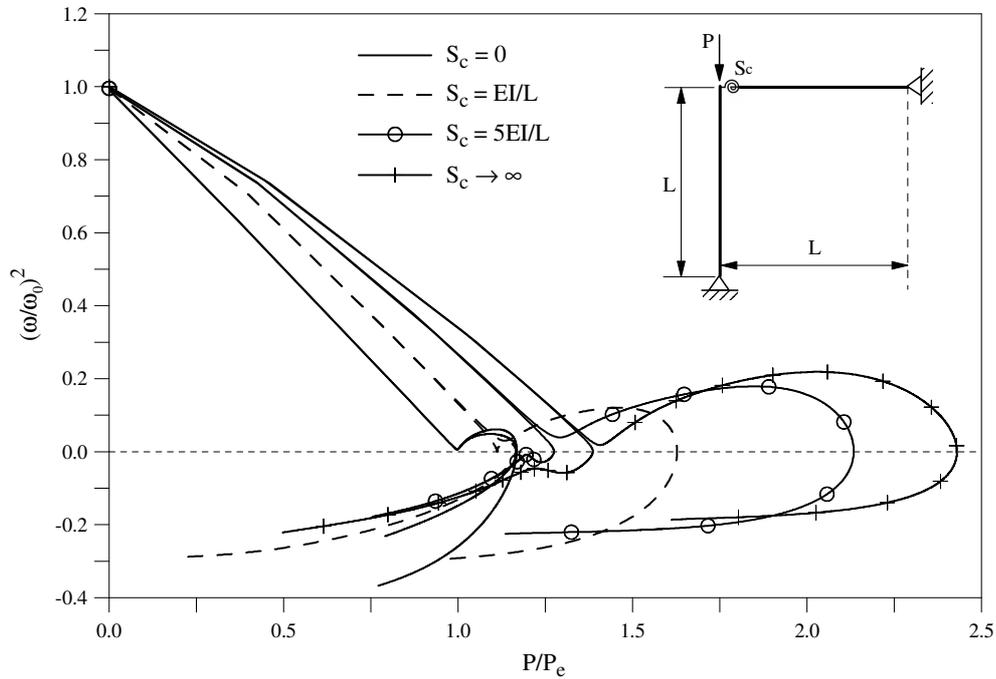
A Figura 7.13 mostra as trajetórias de equilíbrio obtidas controlando-se a rotação,  $\theta$ , no topo da coluna. Nessa figura, a carga foi dividida pela carga de flambagem de Euler,  $P_e = \pi^2 EI/L^2$ . As formulações SOF-2 e SRF-3, que introduzem na análise os efeitos de segunda ordem e da flexibilidade da ligação, respectivamente, foram consideradas nesse estudo. Na análise, assumiram-se as hipóteses de ligações viga-coluna rígidas ( $S_c \rightarrow \infty$ ), rotuladas ( $S_c = 0$ ) e semi-rígidas ( $S_c = EI/L$  e  $S_c = 5EI/L$ ). Uma pequena imperfeição de carga foi considerada para definição das curvas. Como já destacado em análises anteriores, o aumento da rigidez da ligação aumenta a carga crítica da estrutura. Entretanto, para o pórtico em análise, com esse aumento, percebe-se que a inclinação inicial do caminho pós-crítico torna-se maior, o que aumenta sua sensibilidade a imperfeições. As respostas encontradas referentes à variação da rotação com o carregamento para o pórtico com ligação rígida e rotulada são comparadas com aquelas obtidas por Galvão (2004), que usou na sua modelagem elementos com ligações semi-rígidas de tamanho  $L/1000$ .



**Figura 7.13** Influência da rigidez da ligação no comportamento pós-flambagem do pórtico

A relação não linear entre a carga atuante e a primeira frequência natural é exibida na Figura 7.14. A alteração na rigidez da ligação foi considerada nesse estudo. A frequência, em todos os casos, está adimensionalizada pela frequência natural do pórtico com ligação rígida,  $\omega_0$ . Nota-se, que o trecho com aspecto linear refere-se ao caminho fundamental de

equilíbrio observado na Figura 7.13. Nas vizinhanças do ponto de bifurcação é onde as não linearidades têm início.

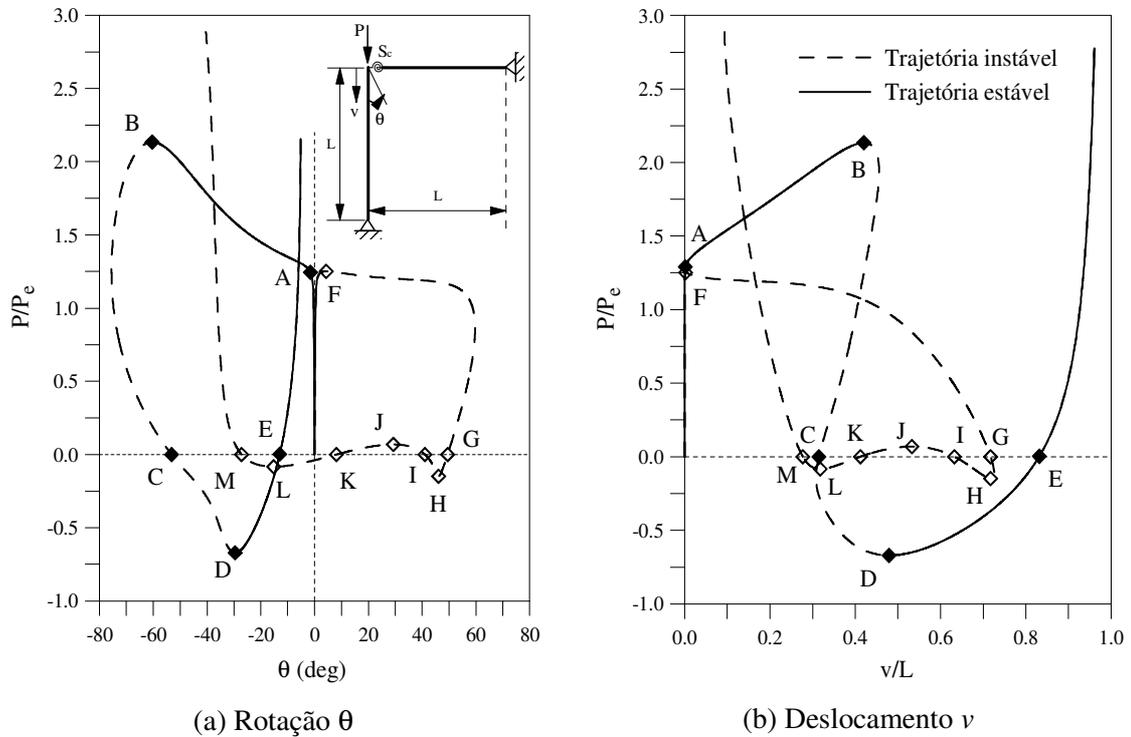


**Figura 7.14** Influência da rigidez da ligação na relação carga-frequência natural

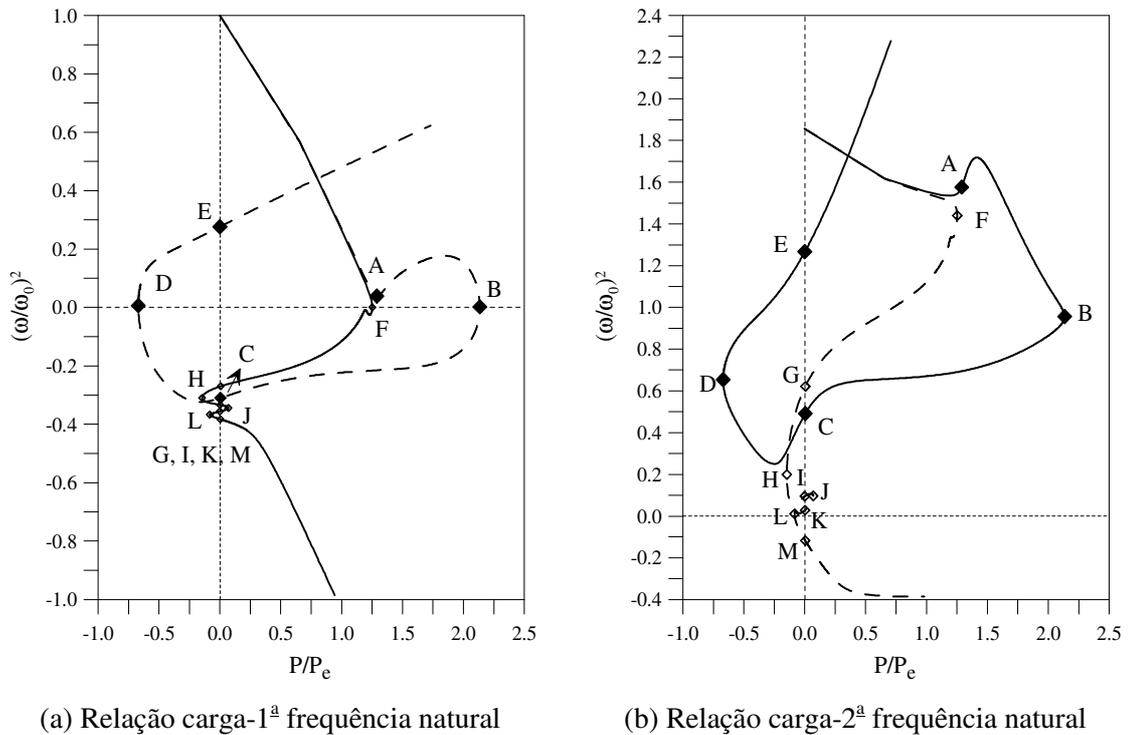
As respostas estática e de vibração não linear para o pórtico em L com ligação viga-coluna de rigidez  $5EI/L$  são apresentadas nas Figuras 7.15 e 7.16. Na primeira são exibidas as trajetórias de equilíbrio, nas quais são representadas as variações da rotação,  $\theta$ , e do deslocamento vertical,  $v$ , no topo da coluna. Já na Figura 7.16 mostra-se o comportamento das duas primeiras frequências com a variação do carregamento  $P$ . Novamente, observa-se a influência do pré-carregamento estático nas frequências de vibração da estrutura. As letras maiúsculas, que variam de A a M, identificam algumas configurações de referência nas duas figuras. Apenas as regiões das trajetórias, nas Figuras 7.15a e 7.15b, representadas com traço contínuo são estáveis. Já se sabe que, nesses casos, então, todas as frequências naturais têm valores reais. Nas configurações de equilíbrio instáveis, representadas pela linha tracejada nas mesmas figuras, pelo menos uma das frequências naturais é imaginária. Sendo assim, nas Figuras 7.16a e 7.16b, as regiões que apresentam a relação  $(\omega/\omega_0)^2$  negativa se caracterizam como instáveis.

A variação dos três primeiros modos de vibração com a flexibilidade da ligação viga-coluna para a estrutura descarregada é esboçada na Figura 7.17. As frequências

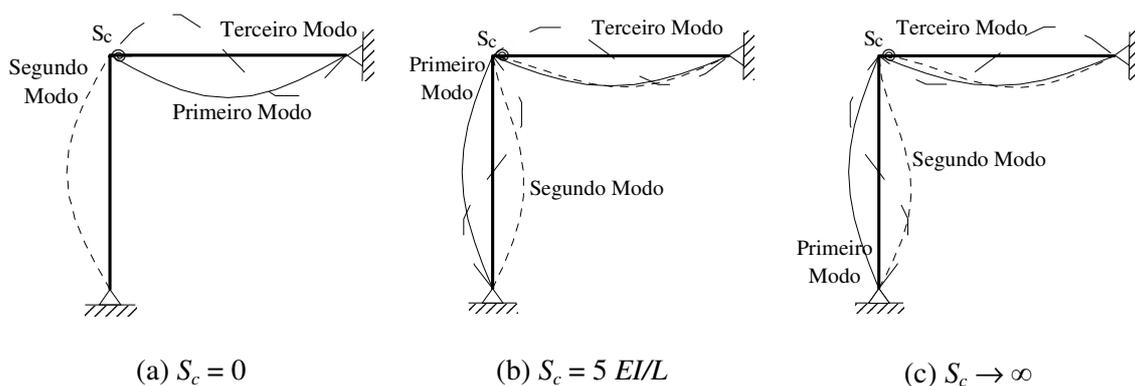
correspondentes a esses modos, denotadas por  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , estão resumidas na Tabela 7.2, onde são indicados também os resultados obtidos por Galvão (2004).



**Figura 7.15** Trajetórias de equilíbrio do pórtico para  $S_c = 5EI/L$



**Figura 7.16** Relação carga-frequência para  $S_c = 5EI/L$



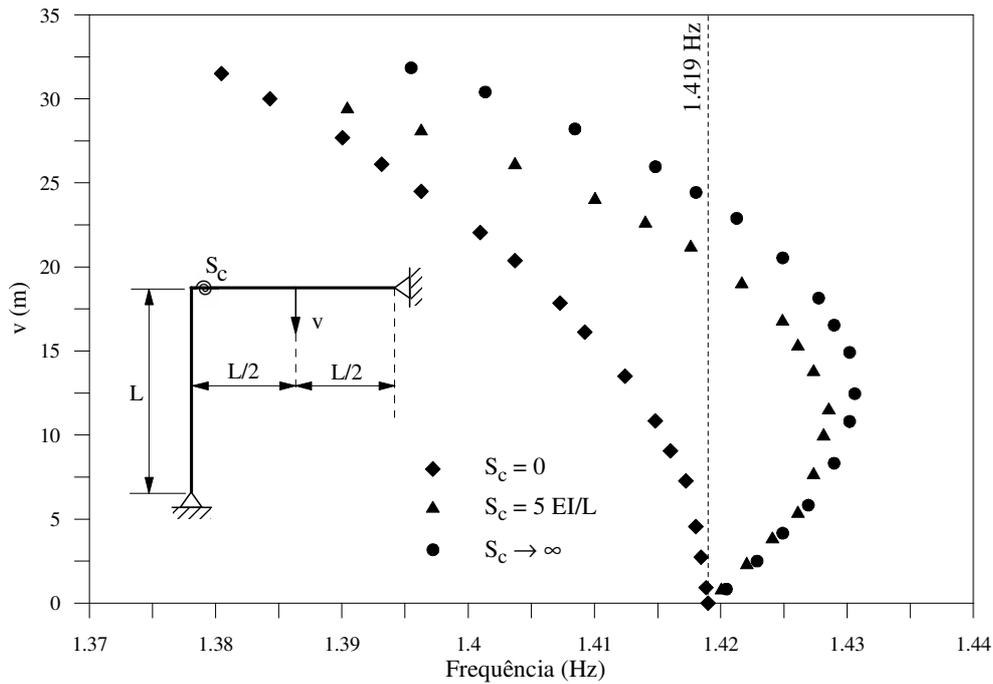
**Figura 7.17** Modos de vibração do pórtico

Através da Tabela 7.2 pode-se observar que a primeira e a terceira frequências de vibração permanecem constantes independentemente da rigidez da ligação. Para a ligação rotulada,  $S_c = 0$ , as duas primeiras frequências são coincidentes. Das três frequências mostradas, apenas a segunda é influenciada pela flexibilidade da ligação.

Finalizando esta seção, a Figura 7.18 apresenta a relação não linear entre a frequência e a amplitude de vibração obtida através da metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005) e mostrada na Seção 6.5 do Capítulo 6. Ligação vigacoluna com diferentes rigidezes iniciais, que se mantiveram constantes durante a análise, foram consideradas. Quando a rigidez da ligação é nula,  $S_c = 0$ , observa-se um comportamento do tipo *softening* com a perda de rigidez do sistema estrutural. Nesse caso, como já verificado no exemplo anterior, a frequência de vibração diminui à medida que a amplitude do deslocamento,  $v$ , aumenta. Para os dois outros casos, ou seja,  $S_c = 5EI/L$  e  $S_c \rightarrow \infty$ , ao contrário, um comportamento do tipo *hardening*, com um aumento da rigidez do pórtico e da frequência, é percebido. A taxa de amortecimento  $\xi$  considerada nessa análise foi 0.01 para os dois primeiros modos de vibração.

**Tabela 7.2** Variação das três primeiras frequências de vibração com a rigidez da ligação

Referência	Frequências (rad/s)	Parâmetro $S_c$			
		0	$EI/L$	$5EI/L$	$\infty$
Presente trabalho	$\omega_1$	8.915	8.915	8.915	8.915
	$\omega_2$	8.915	10.238	12.131	13.928
	$\omega_3$	35.665	35.665	35.665	35.665
Galvão (2004)	$\omega_1$	7.040	7.490	7.640	7.670
	$\omega_2$	8.920	9.820	11.530	13.250
	$\omega_3$	33.950	34.360	34.520	34.560



**Figura 7.18** Relação não linear frequência-amplitude

### 7.3 Análise Transiente

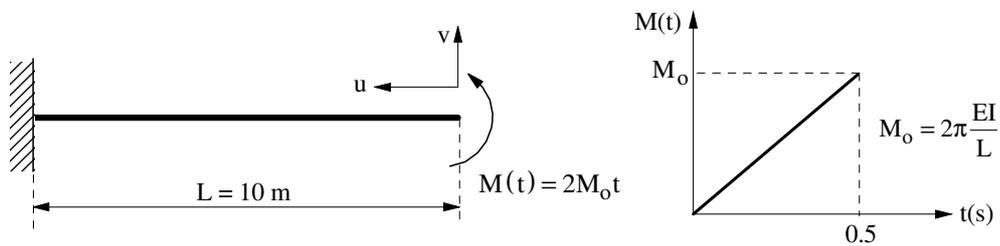
O objetivo desta seção é realizar a análise transiente de estruturas metálicas reticuladas planas com ligações rígidas e semi-rígidas. Inicialmente, para verificar a validade da estratégia desenvolvida, que se baseia no método de Newmark, três problemas estruturais simples, duas vigas e o pórtico de Williams, são estudados. Depois, para validar a técnica desenvolvida para simular o comportamento histerético da ligação e verificar a sua influência na resposta dinâmica de um sistema estrutural, outros três são analisados: um pórtico em L com as extremidades engastadas, um portal simples e um pórtico de dois andares. É importante esclarecer que foram adotadas, como referência principal, as estruturas analisadas por Chan e Chui (2000). Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  característicos do método de Newmark foram considerados iguais a 0.5 e 0.25, respectivamente.

Nos exemplos onde se consideram massas concentradas, provenientes de forças gravitacionais (lajes e mobiliário, por exemplo) que possam gerar alguma perturbação na estrutura, elas são introduzidas diretamente na matriz de massa global do sistema. Neste trabalho, consideram-se apenas as massas concentradas que possuam deslocabilidades nas direções  $x$  e  $y$ , desconsiderando o efeito rotacional das mesmas. Sendo assim, cada massa concentrada deve estar associada a um ponto nodal para que seja possível a sua adição aos termos da diagonal principal da matriz de massa global do sistema. Evidentemente, essa

soma deve ser realizada nos graus de liberdade adequados. Na maioria das análises transientes nenhum amortecimento viscoso foi considerado.

### 7.3.1 Viga Engastada-Livre

Nesta seção um problema clássico de uma viga engastada-livre, que teve seu comportamento analisado no Capítulo 5 quando submetida a um momento fletor estático na extremidade livre, é agora avaliada sob a influência de um carregamento dinâmico. A viga com 10 m de comprimento é ilustrada na Figura 7.19. O momento fletor linearmente crescente,  $M(t)$ , é aplicado durante 0.5 s na extremidade livre, e a análise transiente é realizada apenas durante esse período.

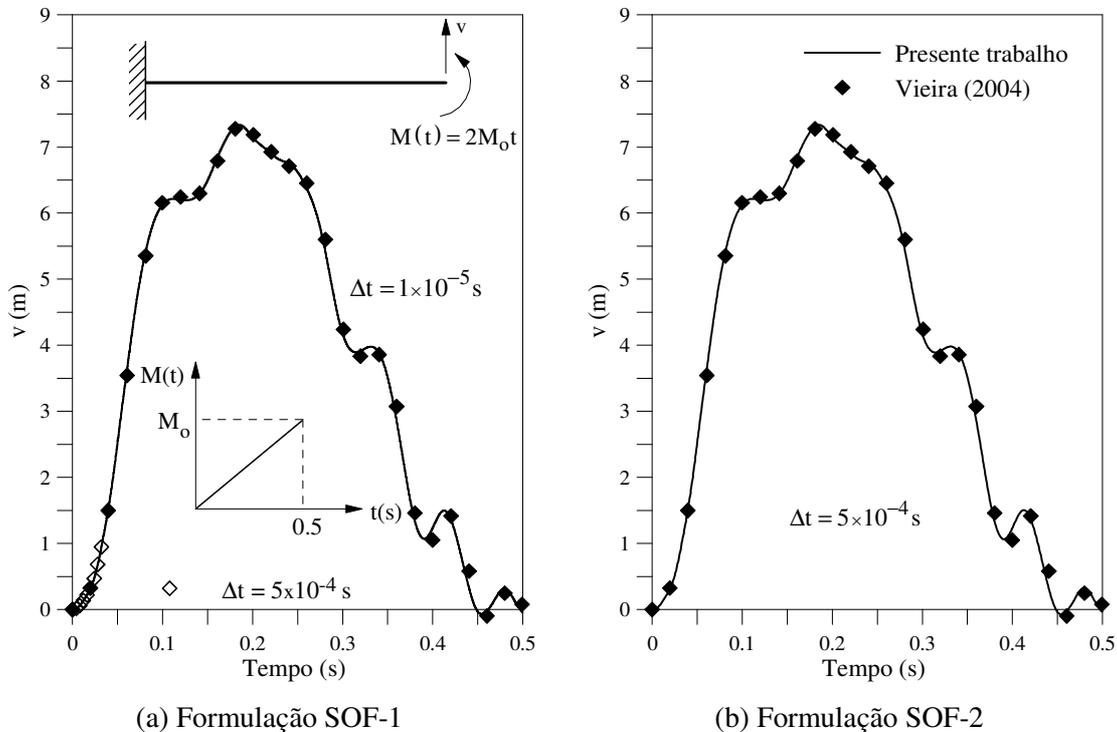


**Figura 7.19** Viga engastada-livre: geometria e carregamento

As propriedades físicas e geométricas da viga são: área  $A = 1 \text{ m}^2$ , inércia  $I = 0.083 \text{ m}^4$ , módulo de elasticidade  $E = 205 \text{ GPa}$  e massa volumétrica  $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$ . Na discretização da viga foram adotados dez elementos finitos. Com esse problema estrutural, as formulações geometricamente não lineares SOF-1 e SOF-2 serão testadas e, além disso, a estratégia adaptativa estudada no capítulo anterior será usada. No processo incremental-iterativo, ilustrado na Tabela 6.2, uma tolerância  $10^{-6}$  foi estabelecida para garantir a precisão dos resultados.

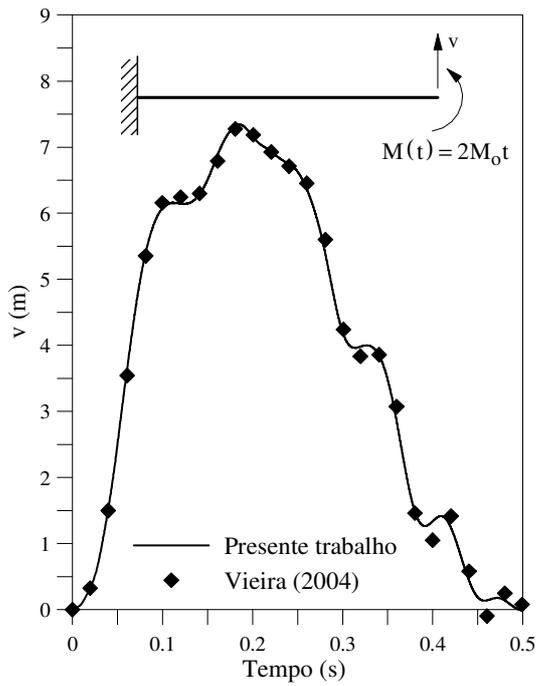
As Figuras 7.20a e 7.20b exibem os históricos de deslocamento vertical,  $v$ , na extremidade livre, conseguidos com as formulações SOF-1 e SOF-2, respectivamente. Nessa primeira análise, obtiveram-se as respostas com intervalos de tempo constantes e iguais a  $10^{-5} \text{ s}$  e  $5 \times 10^{-4} \text{ s}$  para cada uma dessas duas formulações. Cabe ressaltar que usando a formulação SOF-1 e  $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ , a análise foi interrompida no instante 0.0325s por problemas de convergência. Sendo assim, um incremento de tempo menor foi necessário. Essa resposta é indicada também na Figura 7.20a.

Sendo assim, para a formulação SOF-1, efetuaram-se 50000 incrementos de tempo e, para SOF-2, 1000 incrementos foram necessários. A formulação SOF-2 mostrou-se então mais eficiente na solução desse problema, produzindo as respostas de forma mais rápida.

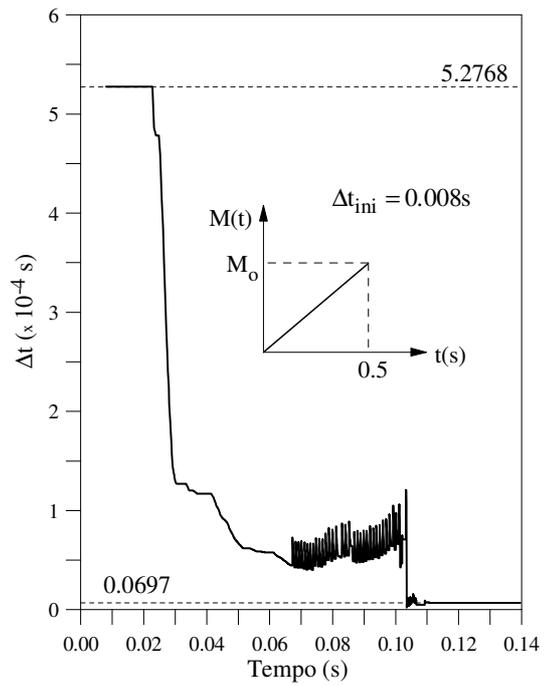


**Figura 7.20** Resposta no tempo considerando os incrementos de tempo constantes

Agora, o mesmo estudo é feito utilizando a estratégia adaptativa que define automaticamente a intensidade do incremento de tempo  $\Delta t$  de acordo com a não linearidade do problema. A variação do deslocamento vertical  $v$  na extremidade livre da viga com o tempo é representada nas Figuras 7.21 e 7.22 para as formulações que simulam os efeitos de segunda ordem, SOF-1 e SOF-2, respectivamente. Para a análise considerando a formulação SOF-1, o incremento de tempo inicial selecionado foi  $\Delta t_{ini} = 0.008$  s, e a variação desse intervalo durante do processo de solução, a partir do segundo incremento, é ilustrada na Figura 7.21b. Observa-se que, já nesse segundo passo incremental, o intervalo  $\Delta t$  diminui para  $5.2768 \times 10^{-4}$  s. O valor mínimo foi  $\Delta t = 0.0697 \times 10^{-4}$  s, sendo mantido constante a partir de 0.11s até o final da análise. Isso pode ser verificado através da Figura 7.21b. O número de incrementos necessários para produzir a resposta durante 0.5 s permaneceu 50000. Desse total de incrementos, em apenas 994 deles a matriz de rigidez foi reavaliada.

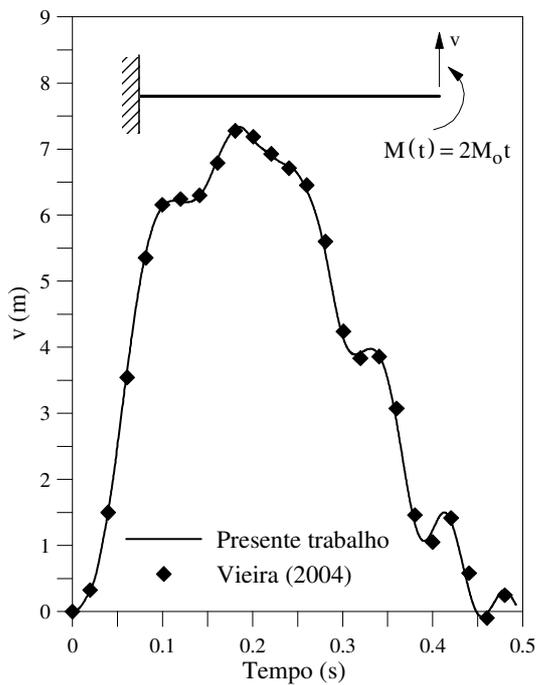


(a) Histórico de deslocamento

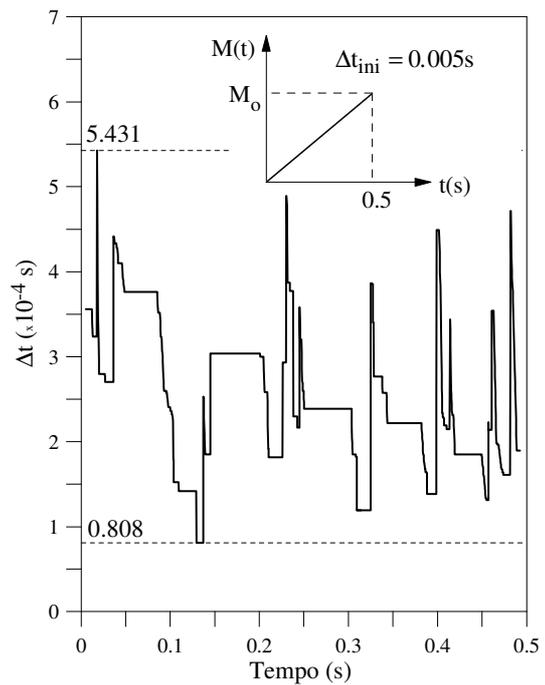


(b) Variação de  $\Delta t$

**Figura 7.21** Resposta no tempo obtida usando a formulação SOF-1



(a) Histórico de deslocamento



(b) Variação de  $\Delta t$

**Figura 7.22** Resposta no tempo obtida usando a formulação SOF-2

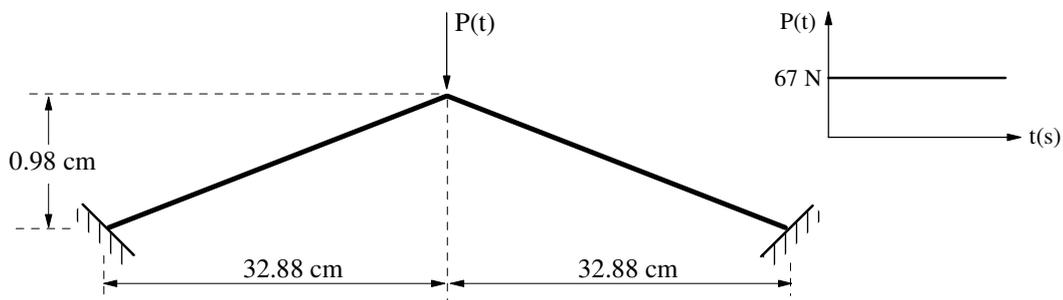
Usando a formulação SOF-2, a variação do intervalo  $\Delta t$  durante a análise é mostrada na Figura 7.22b. Como no caso anterior, para o segundo incremento,  $\Delta t$  também diminuiu,

tendo valor máximo e mínimo, durante a análise, iguais a  $5.431 \times 10^{-4}$  s e  $0.808 \times 10^{-4}$  s, respectivamente. A matriz de rigidez foi determinada 1461 vezes e 2199 incrementos foram necessários.

Nas Figuras 7.20, 7.21 e 7.22 estão indicados também os resultados obtidos por Vieira (2004). Uma boa concordância entre as respostas pode ser notada. Com essas análises, conclui-se que a adoção de intervalos de tempo sempre constantes no processo de integração das equações de movimento foi mais adequada quando se utilizou a formulação de segunda ordem SOF-2.

### 7.3.2 Pórtico de Williams

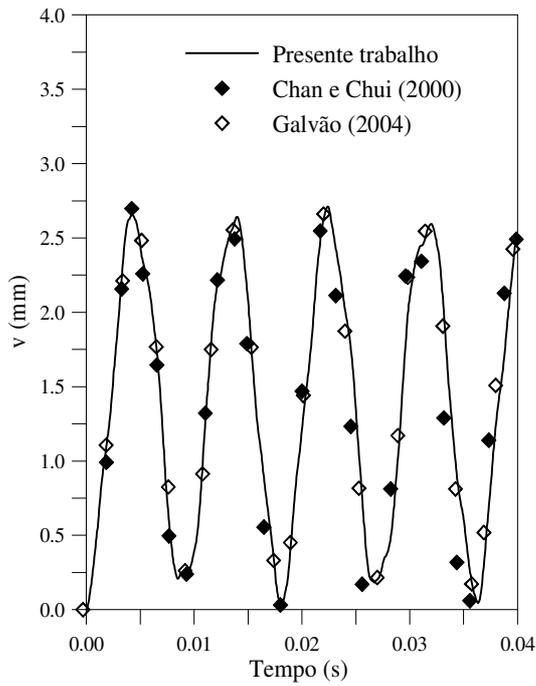
O segundo problema desta seção é apresentado na Figura 7.23. Trata-se de uma estrutura, conhecida como pórtico de Williams (Williams, 1964), bastante utilizada para testar formulações não lineares e verificar a eficiência de implementações computacionais. As características geométricas dessa estrutura estão indicadas também na Figura 7.23. A altura do pórtico é 0.98 cm e sua largura, 65.76 cm.



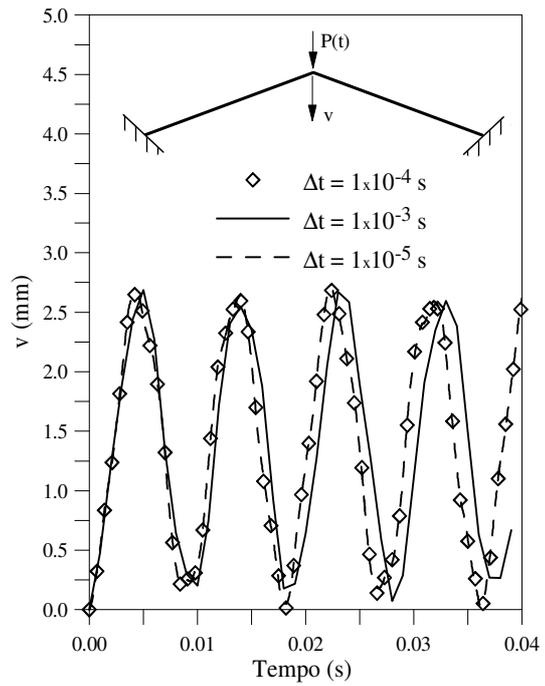
**Figura 7.23** Pórtico de Williams: geometria e carregamento

A estrutura constituída por dois membros de seções retangulares com área  $A = 1.1806 \text{ cm}^2$  e inércia  $I = 0.036 \text{ cm}^4$  foi discretizada com 20 elementos finitos. O módulo de elasticidade e a massa volumétrica adotados para esses dois membros foram, respectivamente, 71.02 GPa e  $2714.5 \text{ N s}^2/\text{m}^4$ . O pórtico é submetido a uma carga concentrada  $P$  de intensidade 67 kN e seu comportamento será analisado durante 0.04 s. Mais uma vez, as duas formulações SOF-1 e SOF-2 serão usadas.

As respostas para o deslocamento vertical  $v$  no topo da estrutura obtidas através das formulações SOF-1 e SOF-2, são ilustradas nas Figuras 7.24 e 7.25, respectivamente. O mesmo intervalo de tempo,  $\Delta t = 10^{-4}$  s, foi usado nas duas análises.

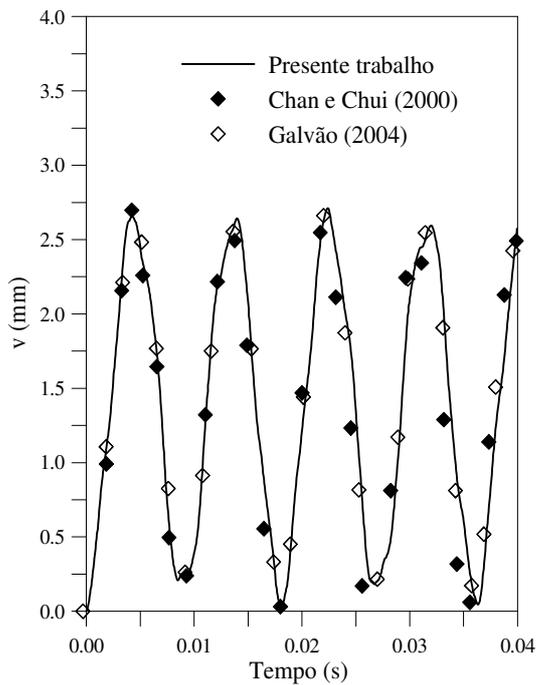


(a) Histórico de deslocamento ( $\Delta t = 10^{-4}$  s)

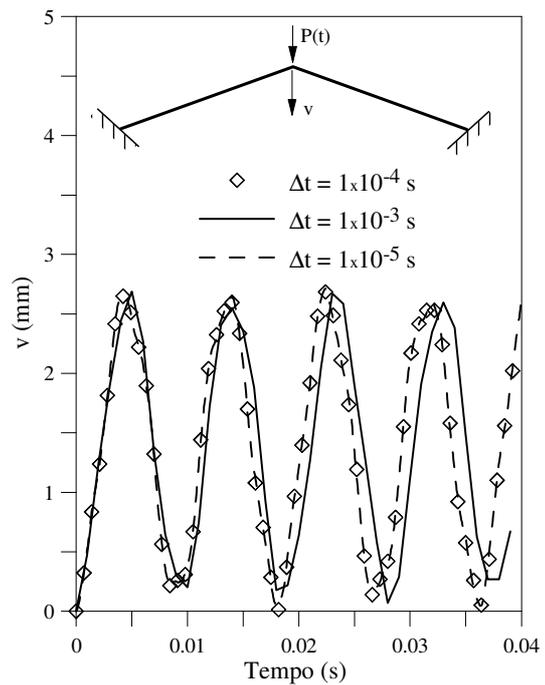


(b) Estudo da convergência

**Figura 7.24** Resposta no tempo obtida com a formulação SOF-1



(a) Histórico de deslocamento ( $\Delta t = 10^{-4}$  s)



(b) Estudo da convergência

**Figura 7.25** Resposta no tempo obtida com a formulação SOF-2

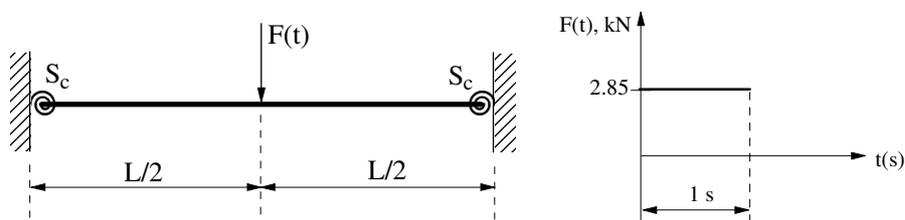
Verifica-se que os resultados nos dois casos foram bastante satisfatórios se encontrando em boa concordância com aqueles fornecidos por Chan e Chui (2000) e Galvão (2004) representados, também, nas figuras. Isso mostra que as duas formulações,

ao contrário do que ocorreu no exemplo da seção anterior, foram igualmente eficientes para a solução desse problema.

Uma variação no incremento de tempo  $\Delta t$  é agora estabelecida para avaliar a sua influência na qualidade das respostas. Vale ressaltar que esse incremento não sofreu alteração durante as análises. Foram selecionados um intervalo de tempo menor e outro maior que  $10^{-4}$ , para o qual já se verificaram as respostas. Sendo assim, análises com incrementos iguais a  $10^{-5}$  e  $10^{-3}$  s foram realizadas e estão indicadas nas Figuras 7.24b e 7.25b, que ilustram a variação do deslocamento vertical,  $v$ , durante o tempo de análise. Pode-se notar que as respostas considerando  $\Delta t = 10^{-3}$  s não foram adequadas e para o incremento de tempo menor, os resultados se mantiveram iguais àqueles com  $\Delta t = 10^{-4}$  s. Esse comportamento foi observado nas análises com as duas formulações, SOF-1 e SOF-2.

### 7.3.3 Viga com Ligações Semi-Rígidas

A viga com ligações semi-rígidas de mesmo comportamento nas extremidades, ilustrada na Figura 7.26, é a próxima estrutura selecionada. Essa estrutura foi analisada também no Capítulo 5 para verificar a eficiência das formulações não lineares desenvolvidas para considerar o efeito das ligações semi-rígidas.

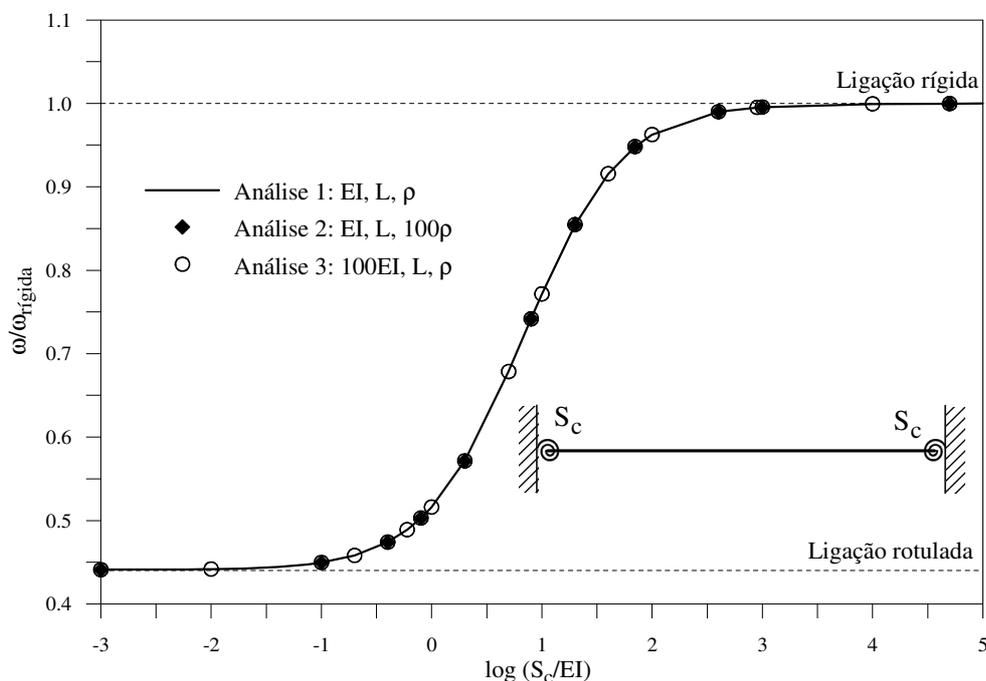


**Figura 7.26** Viga com ligações semi-rígidas nas extremidades

A viga tem 51 cm de comprimento,  $L$ , e possui seção transversal retangular com área  $A = 0.806 \text{ cm}^2$  e inércia  $I = 0.00677 \text{ cm}^4$ . O módulo de elasticidade e a massa volumétrica foram adotados iguais a 206.84 GPa e  $2778.6 \text{ N s}^2/\text{m}^4$ , respectivamente. Na discretização da estrutura, dez elementos finitos foram usados.

Para mostrar, mais uma vez, a influência das ligações semi-rígidas na frequência natural mínima da estrutura, a relação entre a rigidez da ligação,  $S_c$ , e essa frequência,  $\omega$ , é ilustrada na Figura 7.27. O parâmetro  $S_c$  foi adimensionalizado usando a rigidez à flexão da viga,  $EI$ , e  $\omega$ , através da menor frequência natural da viga com ligações rígidas. Observa-se que o comportamento é não linear para as relações  $\log(S_c/EI)$  compreendidas

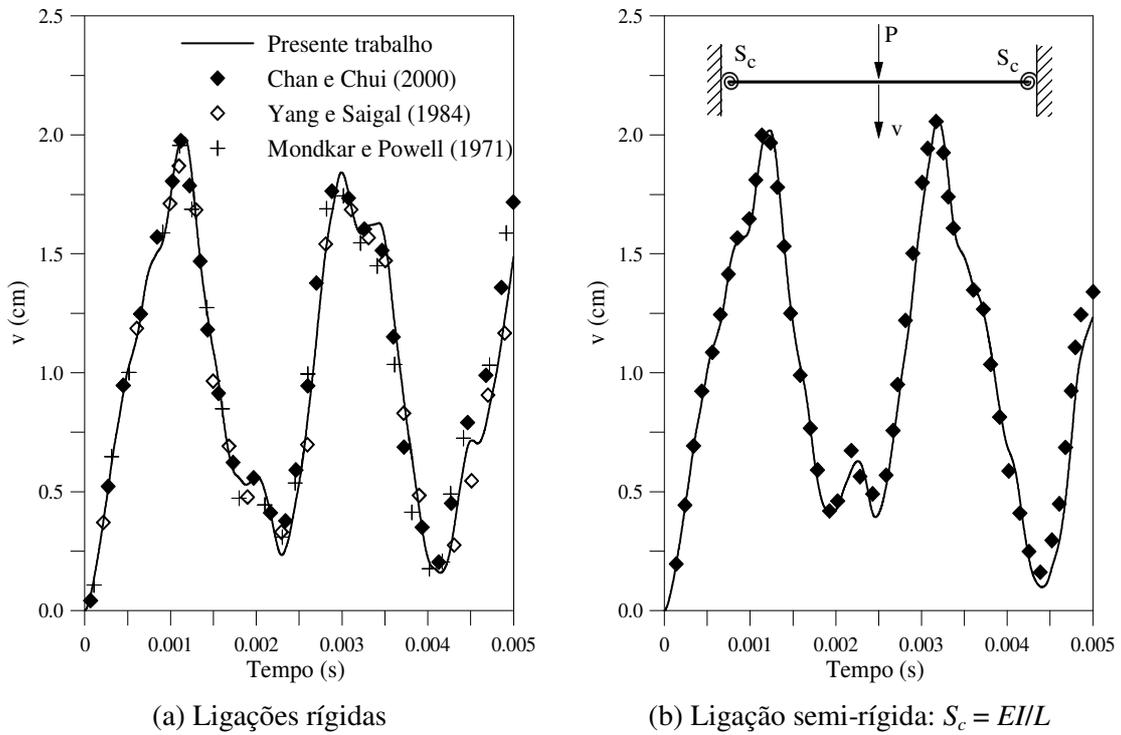
entre, aproximadamente, -1.0 e 3.0. Nessas situações, o comportamento semi-rígido das ligações torna-se importante e deve ser considerado na análise de vibração. Para relações inferiores a -1.0, as ligações podem ser consideradas como rotuladas, e para valores maiores que 3.0, como rígidas. Vale ressaltar que três análises foram realizadas alterando a massa volumétrica,  $\rho$ , e a rigidez a flexão da viga,  $EI$ , como indicado na figura. Em todos os casos, as relações foram idênticas. No estudo realizado por Ackroyd e Gerstle (1982) para descrever os efeitos da flexibilidade da ligação no comportamento de uma viga, foi demonstrado que a rigidez da ligação deve ser considerada nas análises quando a relação  $EI/(S_cL)$  estiver compreendida entre 0.05 e 2.0.



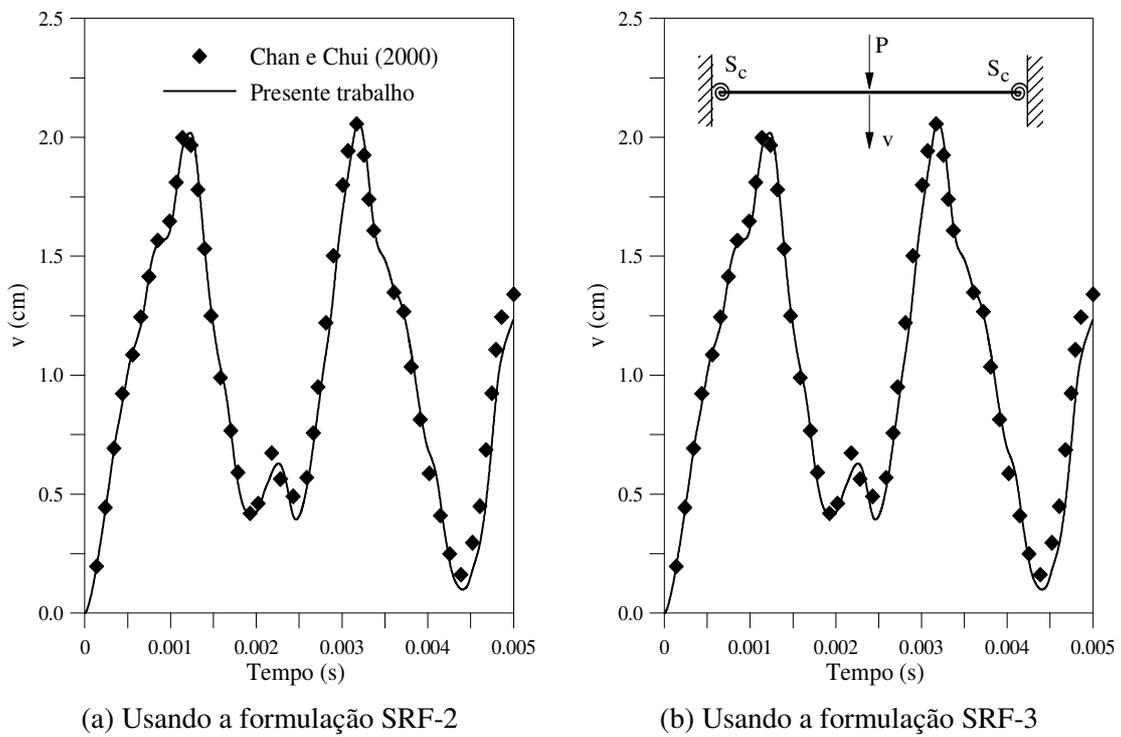
**Figura 7.27** Influência da rigidez da ligação na frequência natural da estrutura

Para a análise transiente, incrementos de tempo constantes e de magnitude  $10^{-5}$  s foram usados. Uma carga  $P=2.85$  kN foi aplicada na estrutura durante 1 s, e o deslocamento vertical no centro da viga, ponto de aplicação da carga, foi controlado durante 0.005s. Realizaram-se duas análises considerando as ligações perfeitamente rígidas e semi-rígidas com comportamento linear. Os resultados obtidos usando a formulação SRF-1 (flexibilidade da ligação) e SOF-2 (não linearidade geométrica) são mostrados na Figura 7.28. As respostas encontradas por Chan e Chui (2000), Yang e Saigal (1984) e Mondkar e Powell (1971) estão indicadas nessa figura para fins de comparação. O

comportamento linear da ligação semi-rígida é caracterizado pelo parâmetro  $S_c = EI/L$  permanecendo constante durante a análise.



**Figura 7.28** Análise transiente para a viga



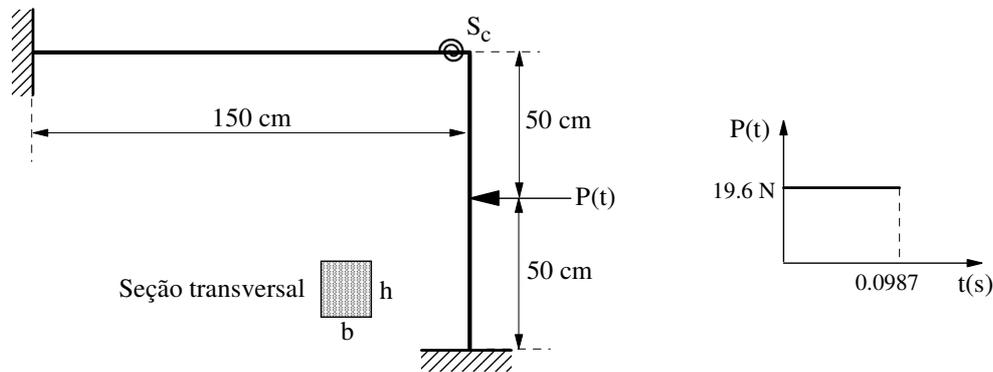
**Figura 7.29** Histórico de deslocamento para a viga com  $S_c = EI/L$

Através da análise anterior (Figura 7.27), para  $S_c = EI/L$ , a relação  $\log (S_c/EI)$  indica que o comportamento semi-rígido da ligação deve ser considerado na análise de vibração da viga. Os históricos de deslocamento encontrados com as outras formulações capazes de simular os efeitos da inelasticidade da ligação, SRF-2 e SRF-3, estão ilustrados nas Figuras 7.29a e 7.29b, respectivamente.

A proximidade entre os resultados encontrados neste trabalho e os de Chan e Chui (2000) indicam que, assim como SRF-1, as formulações SRF-2 e SRF-3 se mostraram adequadas para simular a flexibilidade da ligação.

### 7.3.4 Pórtico Biengastado em L

Para validar, principalmente, a metodologia implementada para simular o comportamento histerético da ligação, a estrutura ilustrada na Figura 7.39a é estudada. Trata-se de um pórtico em forma de L com as extremidades engastadas, constituído por uma viga e uma coluna de comprimentos 150 cm e 100 cm, respectivamente. No estudo, a ligação entre esses dois membros é considerada como sendo perfeitamente rígida e semi-rígida. Nesse último caso, uma ligação com placa de extremidade (*header plate*) com rigidez inicial,  $S_{cini}$ , igual a 137.3 Nm/rad foi usada. As seguintes relações entre as propriedades geométricas da seção transversal e do material são consideradas:  $EI = 41.48 \text{ Nm}^2$  e  $\rho A = 11.08 \text{ N s}^2/\text{m}^2$ .

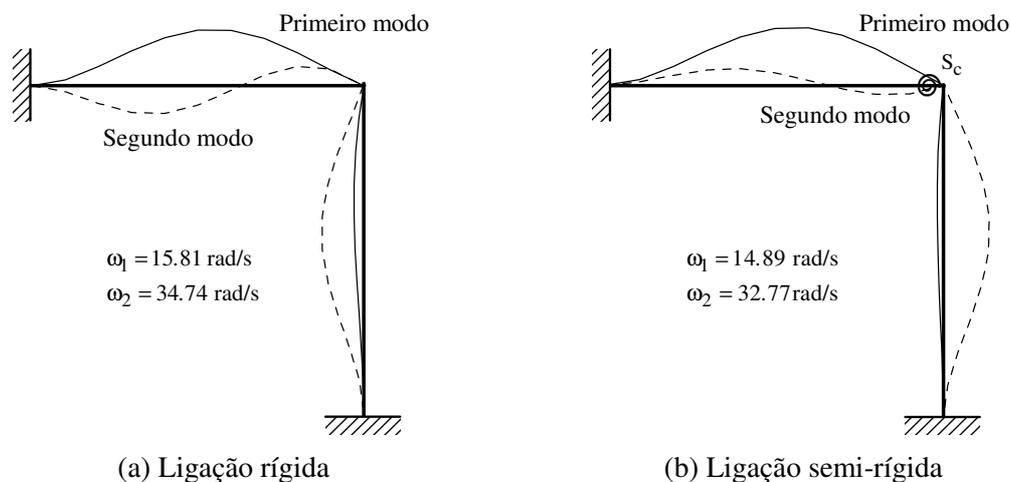


**Figura 7.30** Estrutura analisada: geometria e carregamento

Discretizou-se a estrutura com dez elementos finitos de mesmo tamanho em cada um dos membros, viga e coluna.

Inicialmente, um estudo sobre os modos e frequências naturais da estrutura com ligação rígida e semi-rígida é efetuado. Kawashima e Fujimoto (1984) mediram experimentalmente a frequência natural de vibração dessa estrutura com a hipótese de

ligação viga-coluna rígida, e, também, a determinaram numericamente considerando a ligação semi-rígida. Além desses autores, Shi e Atluri (1989) e Chan e Chui (2000) utilizaram essa estrutura para testar as formulações numéricas para análise estática e dinâmica por eles desenvolvidas. A Figura 7.31 ilustra os dois primeiros modos de vibração e, na Tabela 7.3, comparam-se as frequências naturais correspondentes a esses modos com os resultados encontrados por Kawashima e Fujimoto (1984), nas análises numérica e experimental, Shi e Atluri (1989) e Chan e Chui (2000). Pode-se observar que os resultados estão em boa concordância com os da literatura.



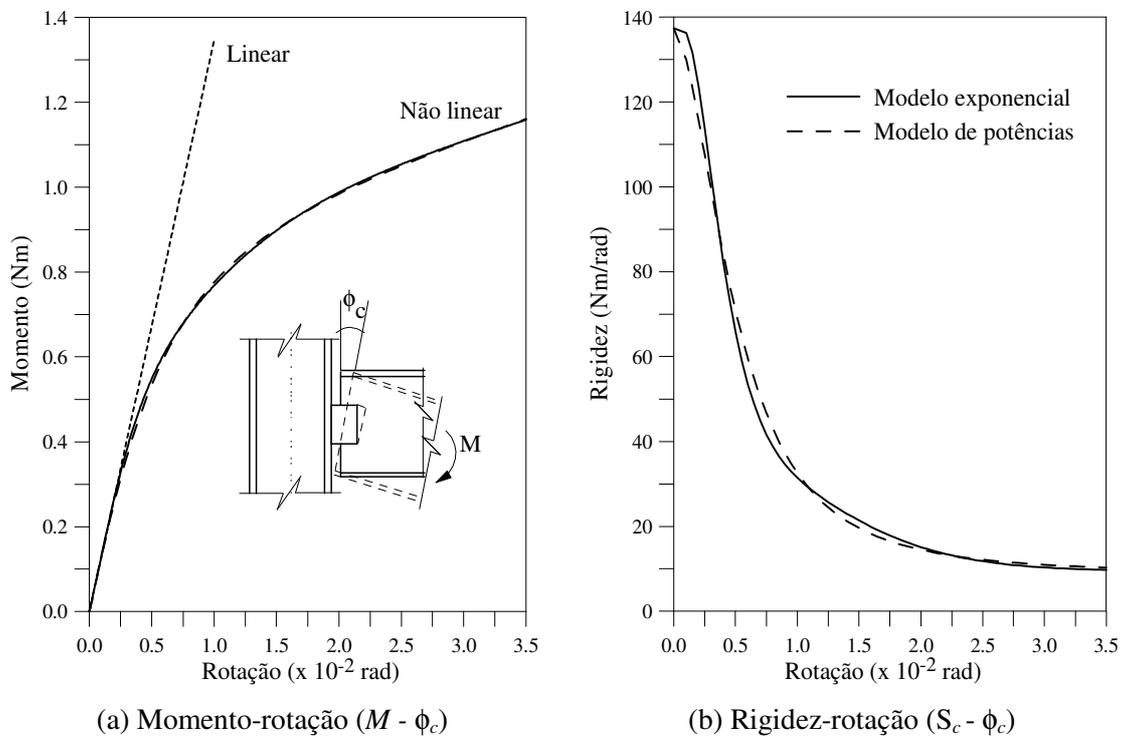
**Figura 7.31** Dois primeiros modos de vibração do pórtico

**Tabela 7.3** Duas primeiras frequências naturais de vibração,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , em rad/s

Ligação	Presente trabalho	Kawashima e Fujimoto (1989)		Shi e Atluri (1989)	Chan e Chui (2000)
		Numérico	Experimental		
Rígida	$\omega_1 = 15.81$	$\omega_1 = 16.30$	$\omega_1 = 15.50$	$\omega_1 = 15.87$	-
	$\omega_2 = 34.74$	$\omega_2 = 35.90$	$\omega_2 = 30.80$	$\omega_2 = 35.30$	-
Semi-rígida	$\omega_1 = 14.90$	$\omega_1 = 14.90$	-	$\omega_1 = 14.75$	$\omega_1 = 15.22$
	$\omega_2 = 32.77$	$\omega_2 = 33.00$	-	$\omega_2 = 32.06$	$\omega_2 = 33.52$

Para avaliar a resposta dinâmica dessa estrutura, aplicou-se uma carga de impacto de curta duração  $P(t)$  e de intensidade constante igual a 19.6 N na altura central da coluna como mostrado na Figura 7.30. Nesse estudo, deseja-se verificar, principalmente, a influência do comportamento não linear da ligação na resposta. Para isso, a representação matemática da curva momento-rotação da ligação semi-rígida torna-se necessária. Adicionalmente, para checar a importância da função adotada nessa representação, dois

modelos serão considerados: exponencial (Chen e Lui, 1986) e de potências com quatro parâmetros (Richard e Abbott, 1975). Os parâmetros para o modelo exponencial, representado pela Equação (B.3) do Apêndice B, são:  $m=6$ ,  $C_1=1.078915$ ,  $C_2=-18.148410$ ,  $C_3=52.890917$ ,  $C_4=-34.035435$ ,  $C_5=-37.194613$ ,  $C_6=43.896458$ ,  $\alpha=0.000384$ ,  $R_{kf}=95.55031$  kgf cm/rad e  $M_o=0$ . Com esses dados, obtêm-se o momento em kgf cm. Para obtê-lo com a unidade Nm basta multiplicar o resultado encontrado por 0.0981. Para o modelo de potências com quatro parâmetros, Equação (B.9), além da rigidez inicial fornecida anteriormente, os seguintes termos foram usados na modelagem:  $R_p = 8.826$  Nm/rad,  $M_o = 0.883$  Nm e  $n = 1.7$ . A Figura 7.32 ilustra o comportamento momento-rotação e rigidez-rotação para essa ligação usando esse dois modelos.



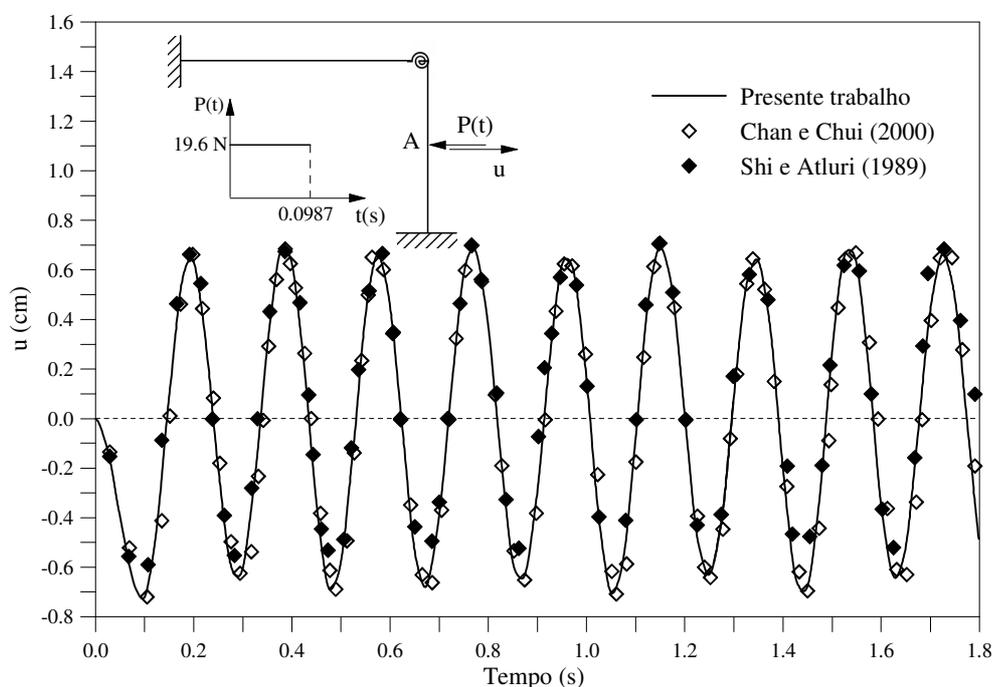
**Figura 7.32** Comportamento da ligação semi-rígida

As análises assumindo o comportamento linear e não linear da ligação foram feitas também por Shi e Atluri (1989) e Chan e Chui (2000). Shi e Atluri (1989) descreveram a relação momento-rotação através do modelo de Ramberg-Osgood (Chan e Chui, 2000). O parâmetro de rigidez da ligação,  $S_c$ , nesse caso, foi definido, através de uma relação rigidez-momento, como (Chan e Chui, 2000):

$$S_c = \frac{M_o / \phi_o}{1 + n |M / M_o|^n} \quad (7.1)$$

usando os coeficientes:  $\phi_0 = 0.00603$  rad,  $M_0 = 0.828$  Nm e  $n = 4.32$ .

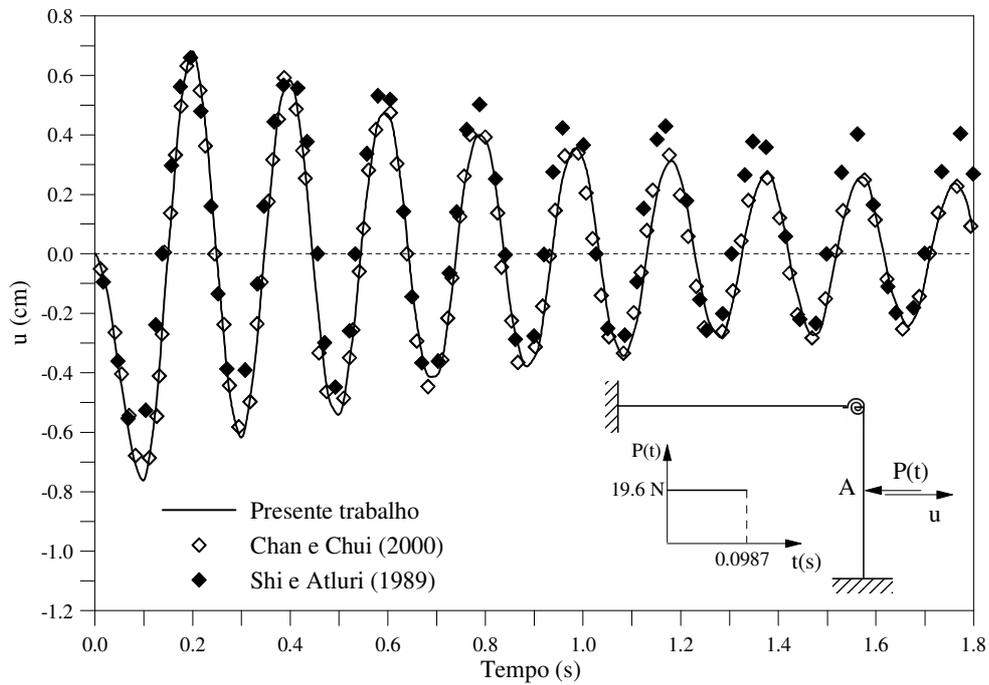
Na análise transiente desse problema, incrementos constantes de tempo,  $\Delta t = 10^{-4}$  s, foram usados. Para convergência do processo iterativo de solução considerou-se uma tolerância  $\xi$ , igual a  $10^{-4}$ . A Figura 7.33 exibe a resposta estrutural no tempo, obtida considerando a ligação com comportamento linear, ou seja, com a rigidez da ligação,  $S_c$ , mantida constante durante a análise. Controlou-se o deslocamento horizontal  $u$  do ponto de aplicação da carga e a sua variação durante o tempo de análise, 1.8 s, é representada na figura citada. As respostas encontradas são comparadas àquelas obtidas por Chan e Chui (2000) e Shi e Atluri (1989).



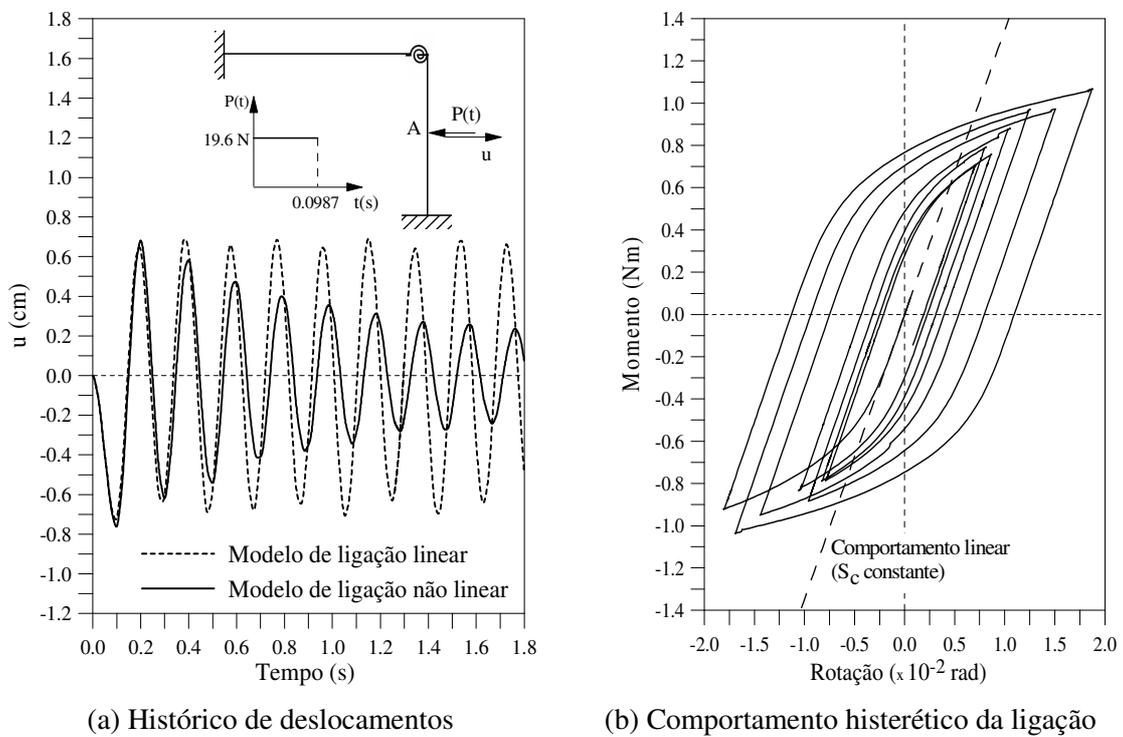
**Figura 7.33** Resposta transiente considerando a ligação com comportamento linear

A estrutura é analisada, mais uma vez, considerando, entretanto, o comportamento não linear da ligação. Os resultados obtidos usando o modelo exponencial para descrever o comportamento da ligação são apresentados na Figura 7.34. Novamente, usam-se para validação os resultados obtidos por Chan e Chui (2000) e Shi e Atluri (1989). Uma diferença na resposta encontrada por Shi e Atluri (1989) e as demais é percebida. Através da Figura 7.35a usada para comparar as respostas encontradas assumindo o comportamento linear e não linear da ligação, verifica-se, claramente, a redução na resposta em decorrência da dissipação de energia resultante da deformação da ligação. Além disso, observa-se que os períodos de vibração foram praticamente iguais para a ligação com comportamento

linear e não linear. Na Figura 7.35b, o ciclo histerético representando a resposta momento- rotação da ligação obtida nessa análise dinâmica é ilustrado.



**Figura 7.34** Resposta transiente considerando a ligação com comportamento não linear

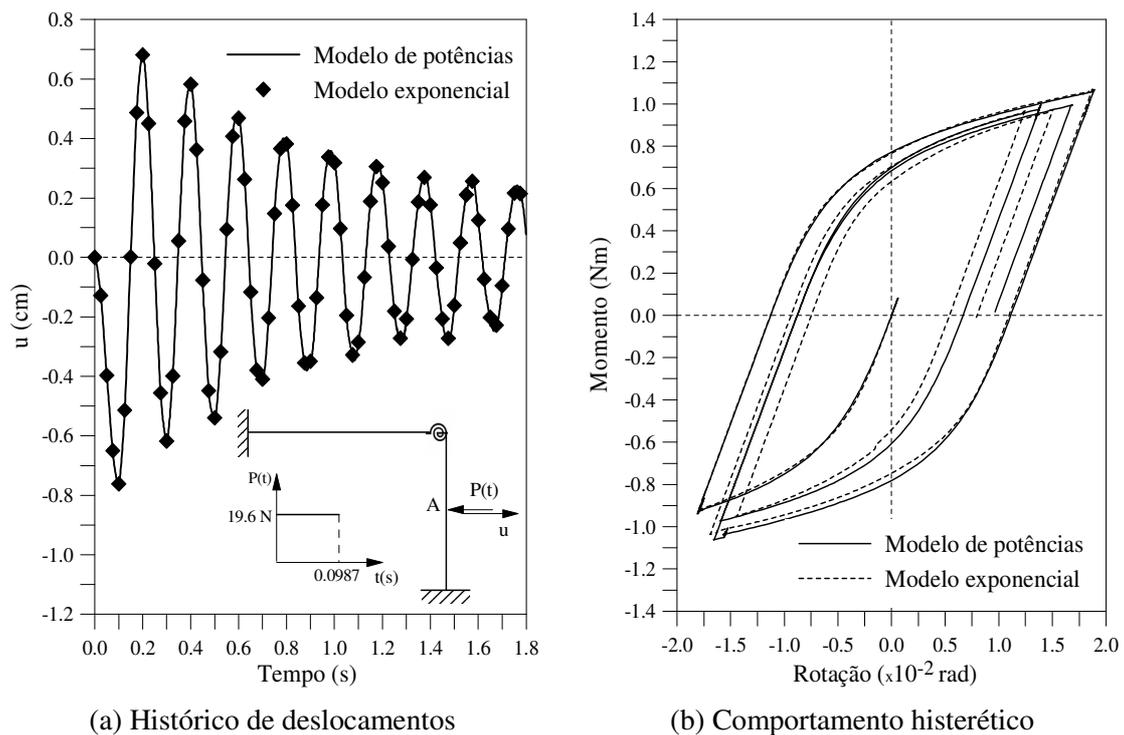


(a) Histórico de deslocamentos

(b) Comportamento histerético da ligação

**Figura 7.35** Resposta transiente para o pórtico em L

Para investigar a influência da escolha do modelo matemático para descrição do comportamento momento-rotação da ligação, a mesma análise é refeita usando, agora, o modelo de potências com quatro parâmetros. A variação do deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga,  $u$ , com o tempo, e o comportamento histerético da ligação são mostrados na Figura 7.36 para os dois modelos, exponencial e de potências. Observa-se que os resultados obtidos para o histórico de deslocamentos, Figura 7.36a, foram coincidentes, o que permite afirmar que o modelo usado para representar o comportamento da ligação não teve influência sobre a resposta. Uma pequena diferença é verificada no comportamento histerético da ligação, curva momento-rotação, podendo ser observada também na Figura 7.32b, que mostra alguma variação nas aproximações estabelecidas para a rigidez da ligação nos dois modelos. Para permitir uma melhor visualização, apenas os dois primeiros ciclos de carregamento e descarregamento da ligação foram representados na Figura 7.36b.



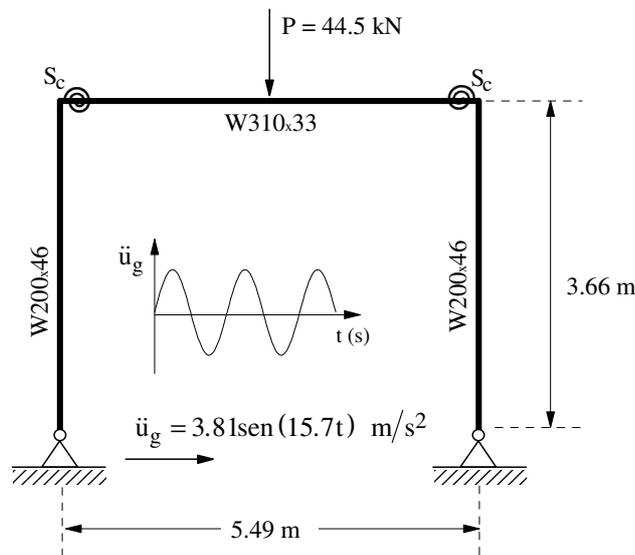
**Figura 7.36** Respostas obtidas com dois diferentes modelos de ligação

### 7.3.5 Pórtico Simples

O pórtico simples ilustrado na Figura 7.37 é a segunda estrutura destinada à verificação da eficiência da metodologia para análise dinâmica de estruturas com ligações semi-rígidas, nas quais o comportamento histerético das ligações é considerado. Trata-se de uma

estrutura comumente usada para validar técnicas desenvolvidas para análise estática não linear de estruturas reticuladas planas. Nesse contexto, podem ser citados os trabalhos de Lui e Chen (1986), Chen e Zhou (1987), Al-Bermani e Kitipornchai (1992) e Chan e Chui (2000), que investigou inclusive a sua resposta dinâmica. A análise transiente dessa estrutura foi realizada, também, por Al-Bermani *et al.* (1994).

As colunas do pórtico são formadas por perfis W200x46 e a viga é constituída por perfil W310x33. Adotou-se o módulo de elasticidade e a massa volumétrica iguais a 205 GPa e 7830 kg/m<sup>3</sup> nesses membros.



**Figura 7.37** Pórtico simples sob excitação de base

Outro tipo de carregamento que pode ser considerado nas análises consiste na excitação do solo na base das estruturas. Trata-se de um problema bastante importante na análise dinâmica estrutural, pois permite simular os efeitos provocados por terremotos. A excitação nesse caso é fornecida através de uma função que retrata a variação da aceleração do solo com o tempo. Cabe informar que essa é uma informação registrada durante um abalo sísmico. Para simular esse carregamento, o vetor de forças externas na Equação (6.24) é definido como (Chan e Chui, 2000; Sekulovic e Nefovska, 2008):

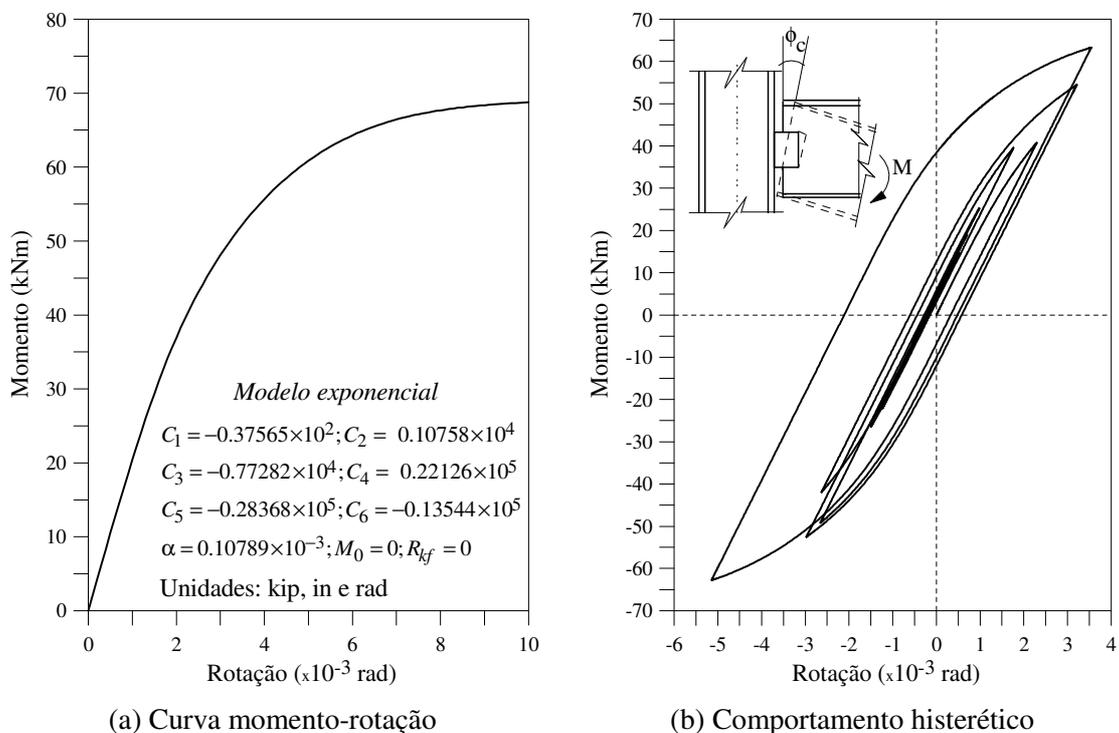
$$\mathbf{F}_{ext} = \ddot{u}_g(t) \mathbf{M} \mathbf{F}_r \quad (7.2)$$

na qual  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa da estrutura,  $\mathbf{F}_r$  é o vetor que define a direção de translação do movimento do solo e  $\ddot{u}_g(t)$  descreve a aceleração do solo.

Sendo assim, para investigar o comportamento dinâmico dessa estrutura submetida a uma excitação harmônica de base, de amplitude  $3.81 \text{ m/s}^2$  e frequência de vibração igual a  $15.7 \text{ m/s}^2$ , como ilustrado na Figura 7.37, dez elementos finitos em cada um dos membros foram adotados para a sua discretização.

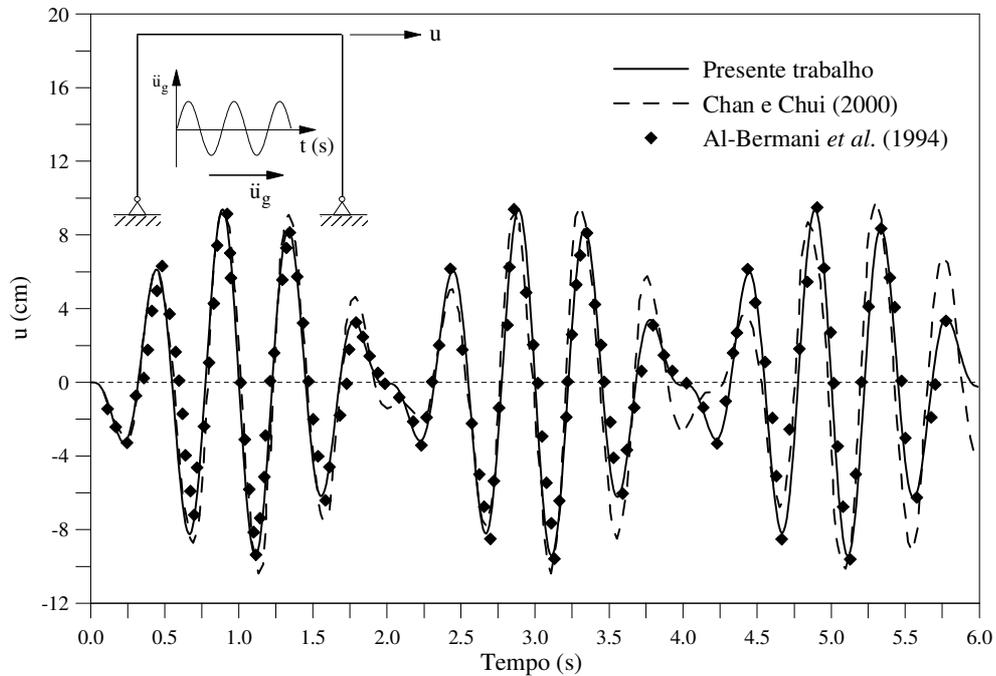
As ligações viga-coluna foram consideradas idealmente rígidas e semi-rígidas. Nesse último caso, apenas a influência do comportamento momento-rotação não linear dessas ligações, ilustrado na Figura 7.38a, é verificada. Os parâmetros requeridos pelo modelo exponencial na representação dessa curva estão, também, indicados nessa figura. Para simular os efeitos da não linearidade geométrica, a formulação SOF-2 linearizada foi usada. Apenas dois dos elementos finitos, situados nas extremidades da viga, foram modelados com ligações semi-rígidas nos pontos nodais, sendo as suas matrizes de rigidez obtidas através da formulação SRF-1 estudada no Capítulo 4. Seguindo a modelagem usada por Chan e Chui (2000), massas concentradas provenientes da carga gravitacional  $P$ , de magnitude  $2268.78 \text{ kg}$ , foram consideradas nas extremidades da viga.

Na integração numérica das equações de movimento, utilizaram-se incrementos de tempo,  $\Delta t$ , constantes e iguais a  $10^{-3} \text{ s}$ . Uma tolerância de  $10^{-5}$  foi considerada no critério convergência do processo iterativo mostrado na Tabela 6.2 do Capítulo 6.

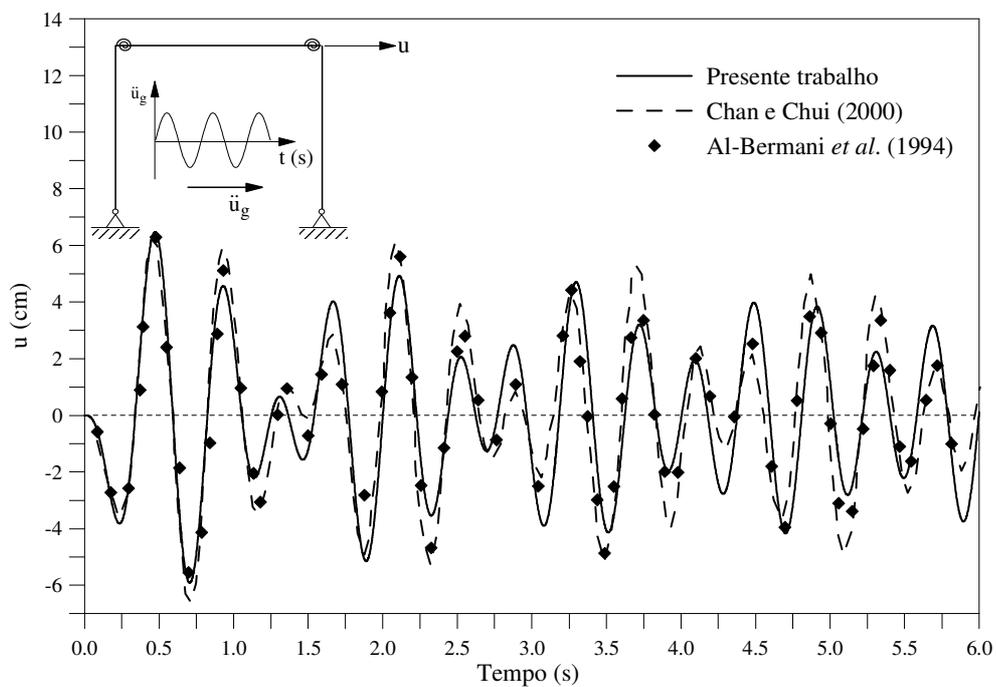


**Figura 7.38** Comportamento da ligação semi-rígida

As respostas dinâmicas da estrutura, considerando as ligações viga-coluna rígidas e semi-rígidas, são ilustradas, respectivamente, nas Figuras 7.39 e 7.40. Representa-se a variação do deslocamento horizontal no topo da coluna direita,  $u$ , durante o tempo de análise, 6 s.



**Figura 7.39** Resposta transiente para o pórtico com ligações rígidas

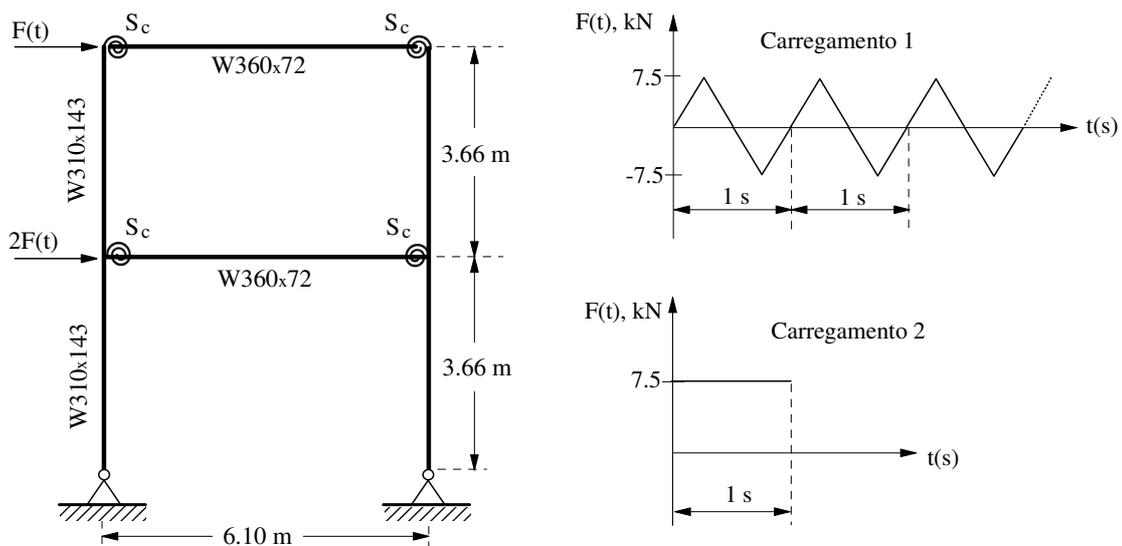


**Figura 7.40** Resposta transiente para o pórtico com ligações semi-rígidas

Pode-se observar o bom acordo entre os resultados obtidos neste trabalho e aqueles encontrados por Al-Bermani *et al.* (1994) no caso das ligações serem rígidas. Utilizam-se também para comparação as respostas fornecidas por Chan e Chui (2000). Para a hipótese de ligações semi-rígidas, Figura 7.35, alguma diferença pode ser notada, porém, percebe-se que o período de vibração encontrado neste trabalho e os da literatura são bastante próximos. Ainda nessa figura, verifica-se, mais uma vez, a diminuição da amplitude dos deslocamentos ao longo da análise conseguida com a dissipação de energia favorecida pelas ligações semi-rígidas. O comportamento histerético momento-rotação das ligações é ilustrado na Figura 7.38b mostrada anteriormente. Cabe informar que essa curva não foi fornecida nas referências para comparação.

### 7.3.6 Pórtico de Dois Andares

Para validar, mais uma vez, a metodologia numérica usada na simulação do comportamento histerético da ligação, o pórtico de dois andares ilustrado na Figura 7.41 é investigado. Essa estrutura também foi utilizada no Capítulo 5 para validar as formulações e implementações computacionais desenvolvidas para realizar a análise estática de estruturas de aço reticuladas planas com ligações semi-rígidas. Verificou-se, nas análises estáticas realizadas com essa e outras estruturas, que a capacidade de carga é consideravelmente afetada pelo comportamento não linear da ligação.

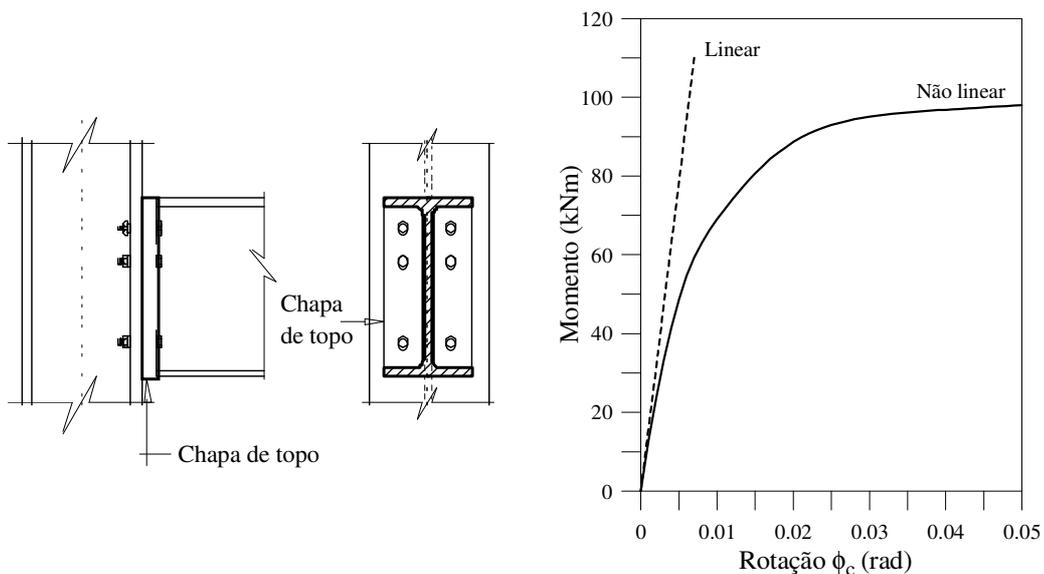


**Figura 7.41** Pórtico de dois andares: geometria e carregamentos dinâmicos

Para as vigas é adotado o perfil W360x72 e para as colunas, perfil W310x143. Na discretização das vigas e colunas foram usados, respectivamente, dois e um elementos finitos. Além disso, foi considerado em todas as seções o módulo de elasticidade,  $E$ , igual a 205 GPa. Nas extremidades e no centro da viga foram adotadas massas concentradas de intensidades 3730 kg e 7460 kg, respectivamente.

O pórtico de dois pavimentos com bases apoiadas é estudado com as hipóteses de ligações viga-coluna rígidas e semi-rígidas com comportamentos lineares e não lineares. São feitas análises dinâmicas submetendo a estrutura a dois tipos de carregamentos, um cíclico e um pulso retangular, como mostra também a Figura 7.41. Essas cargas são aplicadas no topo dos pavimentos.

A Figura 7.42 ilustra o detalhe e o comportamento da ligação adotada. Usou-se uma ligação com chapa de topo para conectar os membros, viga e coluna. O seu comportamento não linear momento-rotação foi representado através do modelo exponencial. No Apêndice B, Tabela B.1, estão indicados os parâmetros considerados nesse modelo.

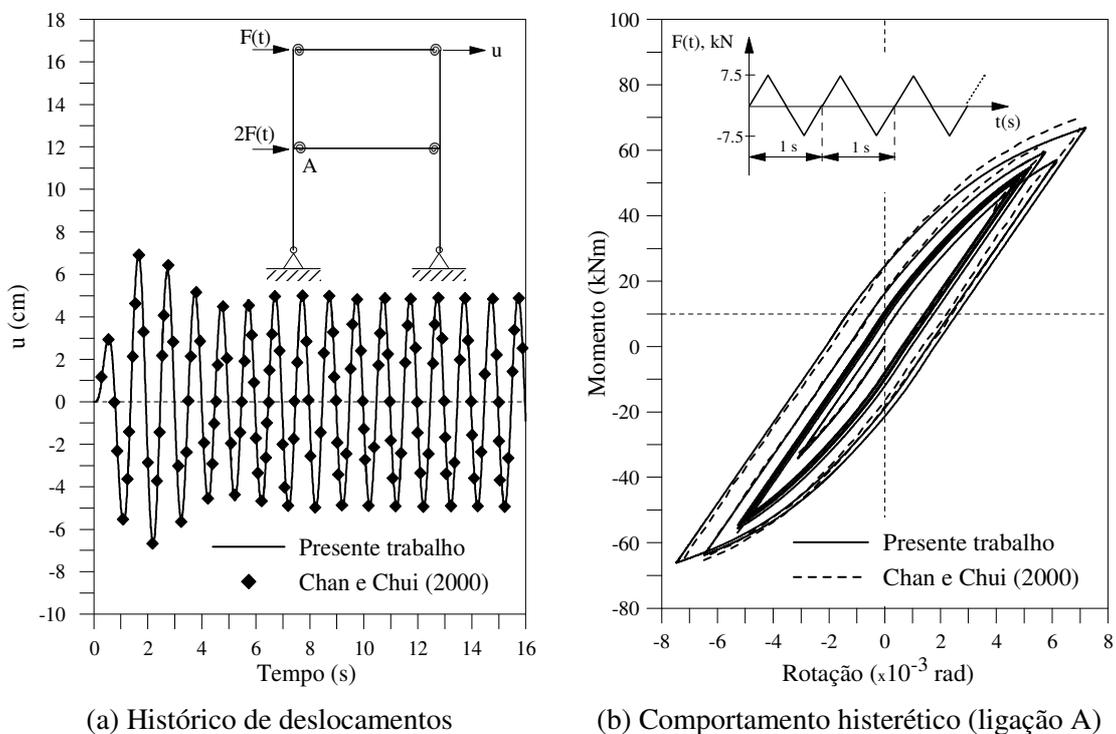


**Figura 7.42** Detalhe e comportamento da ligação com chapa de topo

Inicialmente, a estrutura é submetida ao carregamento cíclico e a resposta obtida para o deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u$ , é representado na Figura 7.43a. Nessa análise foram adotados incrementos de tempo constantes,  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$  s, e uma tolerância  $\xi$  no processo iterativo igual a  $10^{-4}$ .

Verifica-se que o deslocamento oscila, inicialmente, com amplitudes que variam em torno de  $\pm 7$  cm caracterizando o regime transiente e, após 6 s, aproximadamente, entra em

regime permanente, que é percebido pelo movimento constante com os deslocamentos variando em torno de  $\pm 5$  cm. Conclui-se, então, que, durante esse período de resposta constante, a energia introduzida na estrutura pelas cargas externas excitantes e a energia dissipada por ela através das ligações semi-rígidas são aproximadamente iguais. Isso pode ser verificado observando a Figura 7.43b, que ilustra o comportamento momento-rotação da ligação durante o tempo total de análise, 16 s. Durante o regime permanente, os ciclos de carregamento e descarregamento são coincidentes. Comparam-se, mais uma vez, os resultados encontrados aos de Chan e Chui (2000). Como abordado na Seção 7.1, a energia dissipada em cada ciclo pode ser medida calculando a área no interior da curva momento-rotação gerada nas etapas de carregamento e descarregamento da ligação.

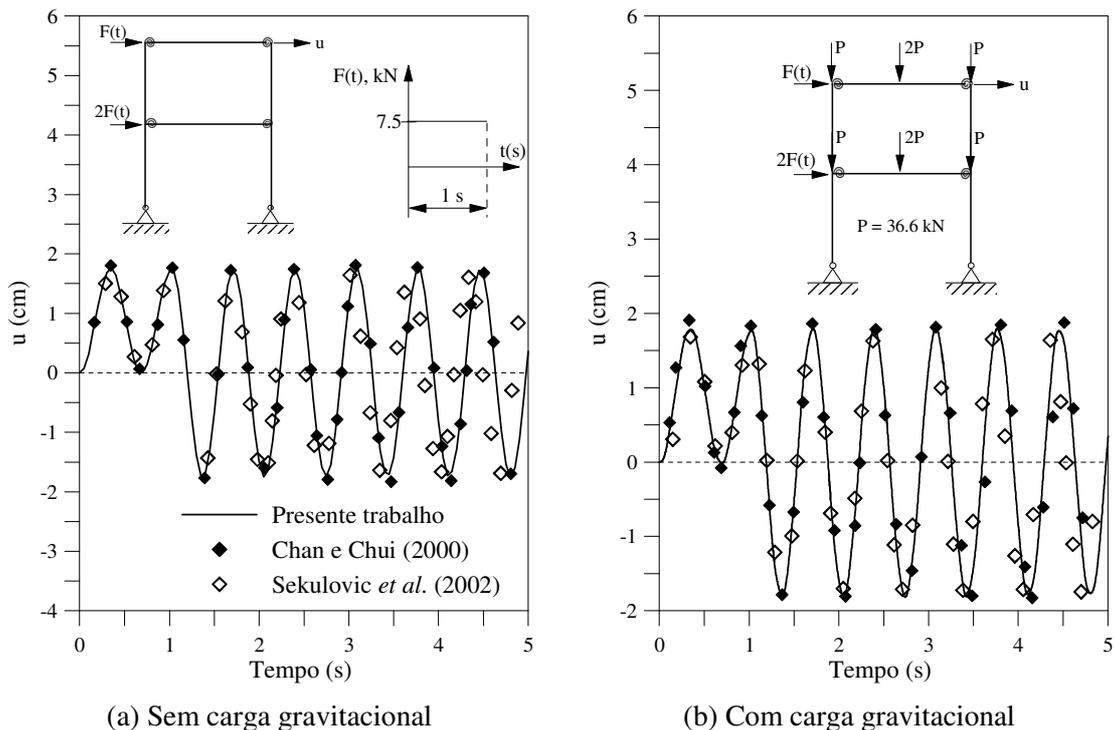


**Figura 7.43** Análise dinâmica considerando o carregamento 1

Para prever de uma forma mais realística o comportamento da estrutura, foram consideradas cargas gravitacionais aplicadas estaticamente à estrutura, de magnitudes 36.6 kN e 73.2 kN, atuando nas extremidades e no centro das vigas, respectivamente. Essas cargas induzem esforços axiais nas colunas e, em virtude desses esforços, surgem momentos fletores adicionais, reduzindo a rigidez desses membros e, conseqüentemente, do sistema estrutural. Para esse estudo, as análises serão realizadas, agora, considerando o carregamento 2, que refere-se a um pulso retangular de 7.5 kN atuando durante 1s, já

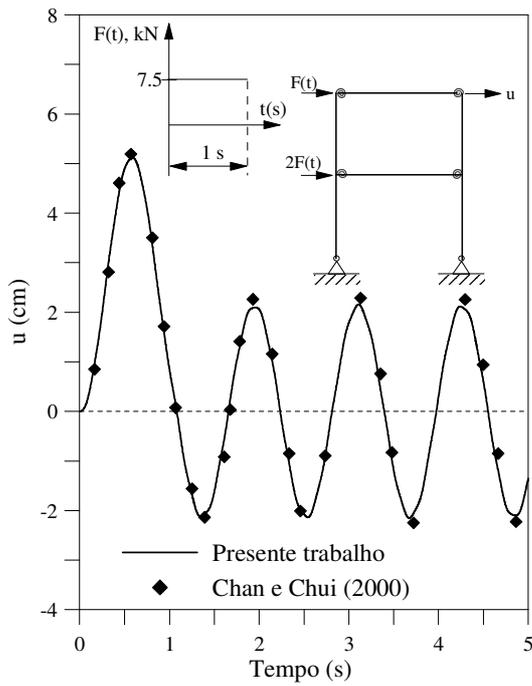
mostrado na Figura 7.41. Adotaram-se, também, incrementos constantes de tempo,  $\Delta t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$ , e uma tolerância  $\xi = 10^{-4} \text{ s}$  para estabelecer a convergência da solução no processo iterativo. As Figuras 7.44a, 7.45a e 7.46a exibem os históricos de deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u$ , sem a presença das forças gravitacionais e considerando as ligações rígidas e semi-rígidas com comportamentos lineares e não lineares, respectivamente. Nas Figuras 7.44b, 7.45b e 7.46b, têm-se as mesmas análises considerando, entretanto, as forças gravitacionais. Comparam-se os resultados aos de Chan e Chui (2000) e Sekulovic *et al.* (2002). Verifica-se que os resultados conseguidos neste trabalho se aproximam melhor dos encontrados por Chan e Chui (2000).

Observando todas essas figuras, verifica-se que as amplitudes dos deslocamentos são maiores quando as forças gravitacionais atuam. Como já destacado, isso ocorre devido à influência dos efeitos de segunda ordem provocados pelas cargas gravitacionais que reduzem a rigidez das colunas. Essa influência é menor no caso das ligações rígidas.

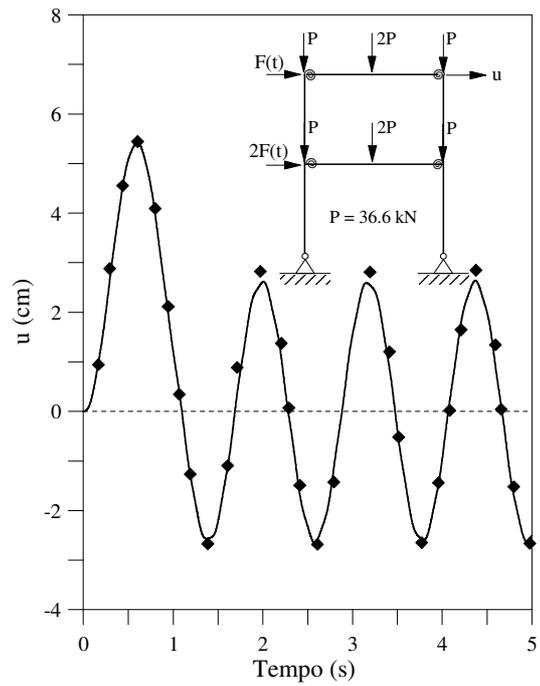


**Figura 7.44** Análise dinâmica: ligações rígidas e atuação da carga 2

Para comparação, nas figuras 7.47 e 7.48, são ilustradas, conjuntamente, as respostas encontradas anteriormente assumindo as ligações rígidas e semi-rígidas, quando se consideram ou não a atuação das cargas gravitacionais. Agora, o tempo total de análise é 10 s.

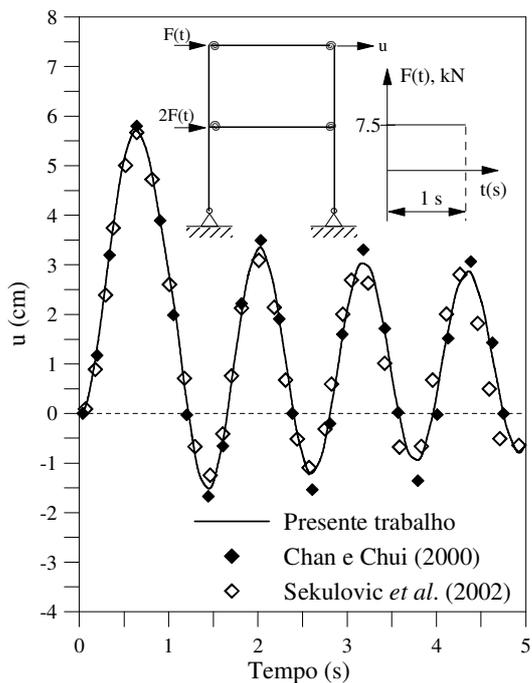


(a) Sem carga gravitacional

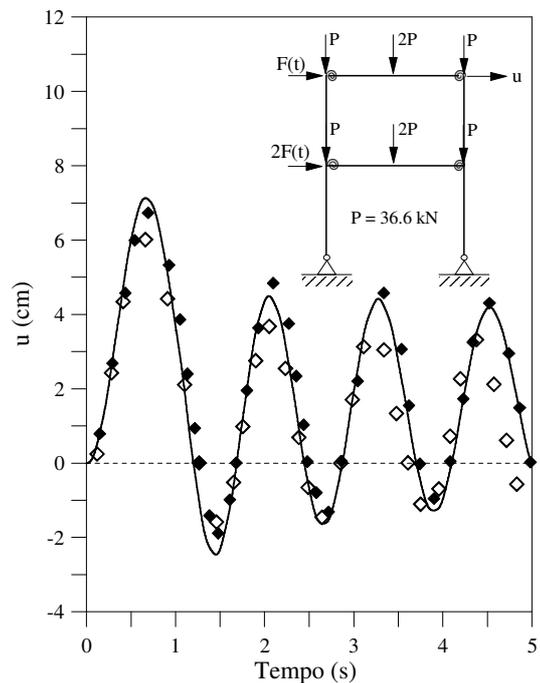


(b) Com carga gravitacional

**Figura 7.45** Análise dinâmica: ligações semi-rígidas ( $S_c$  constante) e atuação da carga 2



(a) Sem carga gravitacional

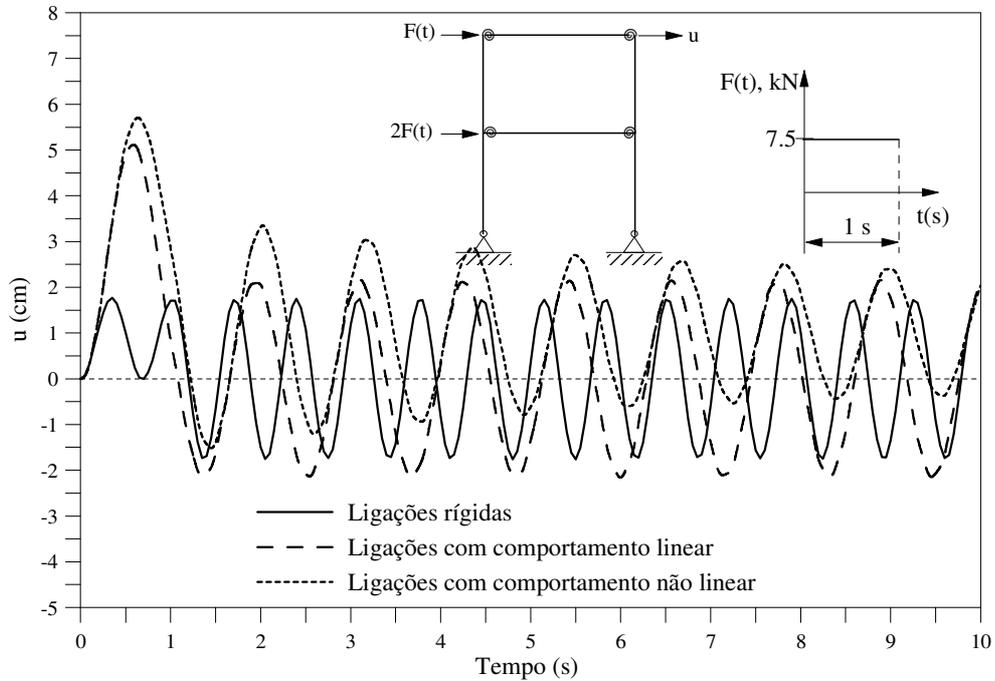


(b) Com carga gravitacional

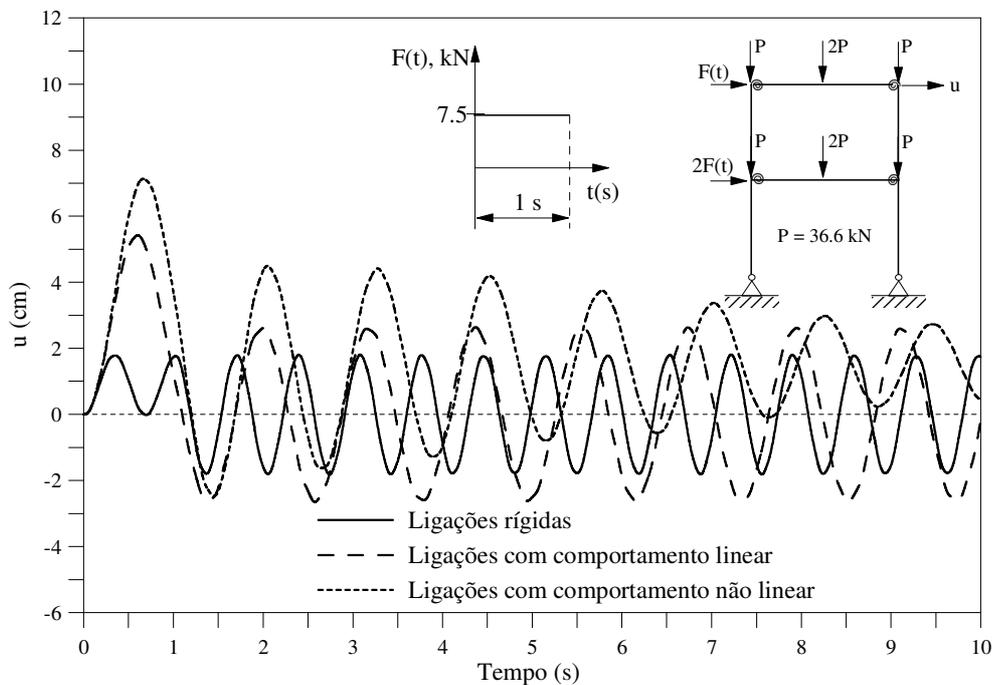
**Figura 7.46** Análise dinâmica: ligações semi-rígidas ( $S_c$  variável) e atuação da carga 2

Nota-se como o amortecimento histerético promovido pelas ligações semi-rígidas com comportamento não linear faz com que as amplitudes dos deslocamentos diminuam

sucessivamente durante a análise. Para a estrutura com ligações rígidas ou semi-rígidas com rigidez constante, a resposta permanece constante após o período de atuação do carregamento dinâmico.



**Figura 7.47** Comparação entre as respostas do pórtico sem cargas gravitacionais



**Figura 7.48** Comparação entre as respostas do pórtico com cargas gravitacionais

Verifica-se também, através das Figuras 7.46 e 7.47 que, para as ligações com comportamento não linear, que sofrem deformações permanentes, a resposta não oscila em torno da configuração indeformada da estrutura,  $u = 0$ , como nos outros dois casos. Outra observação é com relação à frequência de vibração, que é maior quando se consideram as ligações rígidas. Quando ligações semi-rígidas com comportamento não linear são adotadas, o contrário é observado.

Com a análise desse sistema estrutural e baseando-se nos estudos dos dois problemas anteriores, pode-se concluir que o algoritmo usado para descrever a curva momento-rotação da ligação sob cargas dinâmicas é eficiente e adequado para representar o comportamento histórico de uma ligação independentemente do modelo matemático usado para descrevê-la.

# Capítulo 8

## **Análise Avançada de Sistemas Estruturais de Porte Médio**

### **8.1 Introdução**

Encerrando os capítulos referentes ao estudo e à validação das formulações não lineares desenvolvidas, serão realizadas agora análises avançadas de sistemas estruturais de porte médio, nas quais se consideram os efeitos da não linearidade geométrica, da flexibilidade da ligação e da plastificação dos membros. Para a análise dinâmica, encontram-se desenvolvidas apenas formulações capazes de simular os dois primeiros efeitos. Deve-se enfatizar que o problema da inelasticidade do aço é tratado através do método da rótula plástica refinado, que permite capturar a transição do escoamento inicial da seção até sua plastificação total.

O objetivo dessas análises é, ainda, validar as formulações implementadas. Para isso, usam-se três sistemas estruturais de porte médio cujas respostas das suas análises estáticas ou dinâmicas são encontradas na literatura para comparação. Têm-se, como exemplos, um pórtico de seis pavimentos e quadro duplo, outro com sete andares e o terceiro, com quatro, que serão apresentados, respectivamente, nas Seções 8.2, 8.3 e 8.4 deste capítulo. Análises não lineares estáticas, elásticas e inelásticas, assim como a dinâmica serão efetuadas para todos esses sistemas estruturais. A metodologia numérica considerada nessas análises e as formulações adotadas na simulação dos efeitos não lineares são encontradas nos Capítulos 4 e 5 deste trabalho. Já os modelos matemáticos usados na representação do comportamento momento-rotação das ligações semi-rígidas estão detalhados no Apêndice B.

## 8.2 Pórtico de Seis Andares

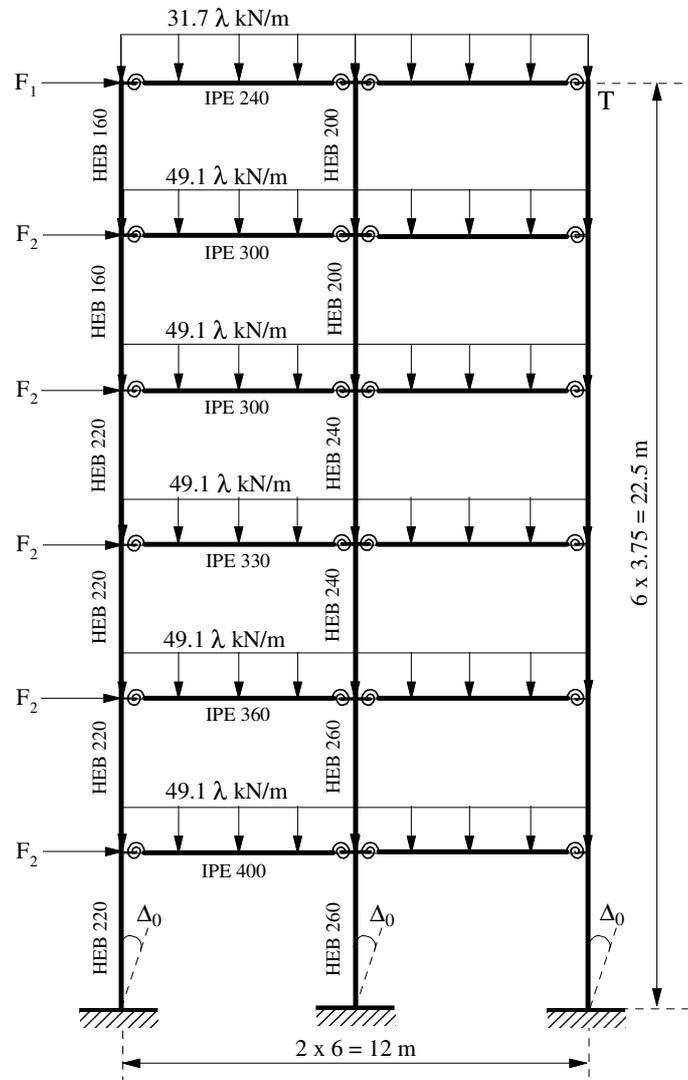
O pórtico de seis pavimentos e quadro duplo ilustrado na Figura 8.1 é o primeiro exemplo deste capítulo. A análise dessa estrutura com ligações rígidas entre vigas e colunas é um problema clássico, que foi proposto por Vogel (1985) para calibração de formulações inelásticas. Por essa razão, essa estrutura é conhecida na literatura como o pórtico de Vogel. Porém, para realizar uma análise estrutural mais realística, ligações semi-rígidas com comportamento não linear serão adotadas para interligar vigas e colunas. Como se sabe, molas com rigidez rotacional são usadas para modelar as ligações e, na Figura 8.1, elas estão esboçadas para representá-las. A análise estrutural convencional, no qual as ligações são assumidas perfeitamente rígidas serão também realizadas com o objetivo de verificar as suas diferenças em relação àquelas considerando as ligações como semi-rígidas.

O pórtico tem 22.5 m de altura e 6 m de vão em cada um dos quadros, como mostra a Figura 8.1. Os seguintes perfis metálicos comerciais constituem as vigas: IPE 240, IPE 300, IPE 330, IPE 360 e IPE 400. As colunas são formadas por perfis HEB 160, HEB 200, HEB 220, HEB 240 e HEB 260, como indicado na mesma figura. Nessa figura tem-se também o carregamento atuante. Nas vigas, cargas uniformemente distribuídas com intensidades  $31.7\lambda$  kN/m e  $49.1\lambda$  kN/m, sendo  $\lambda$  um fator de carga, são consideradas. No topo das colunas em cada um dos seis pavimentos, cargas concentradas de intensidades  $F_1$  e  $F_2$  são aplicadas. Em todas as vigas e colunas, o módulo de elasticidade é assumido igual a 205 GPa e uma imperfeição geométrica inicial  $\Delta_0$  nas colunas é considerada. O valor dessa imperfeição será informado mais adiante de acordo com a análise realizada.

Quatro diferentes tipos de ligações viga-coluna são consideradas: cantoneira de alma simples (Ligação A), cantoneira de topo e assento (Ligação B), chapa de topo (Ligação C) e chapa de topo estendida (Ligação D). O comportamento momento-rotação de tais ligações é representado através da função exponencial proposta por Lui e Chen (1986). Os parâmetros requeridos pelo modelo para essa representação são informados na Tabela B.1 do Apêndice B. As curvas momento-rotação,  $M-\phi_c$ , e rigidez-rotação,  $S_c-\phi_c$ , dessas ligações estão ilustradas na Figura 8.2. O comportamento linear momento-rotação, no qual a rigidez das ligações não sofre nenhuma degradação, é também considerado nas análises. Nesse caso, ela é definida em função do fator fixo,  $\gamma$ , que varia de 0, para as ligações rotuladas, a 1, para as ligações rígidas. O valor da rigidez inicial,  $S_{cini}$ , das ligações semi-rígidas A, B, C

e  $D$ , em  $\text{kNm/rad}$  são, de acordo com a Tabela B.1, iguais a 5424, 10759.75, 12430 e 34804, respectivamente.

As análises não lineares, estática e dinâmica, desenvolvidas com esse pórtico serão apresentadas a seguir nas duas próximas seções.

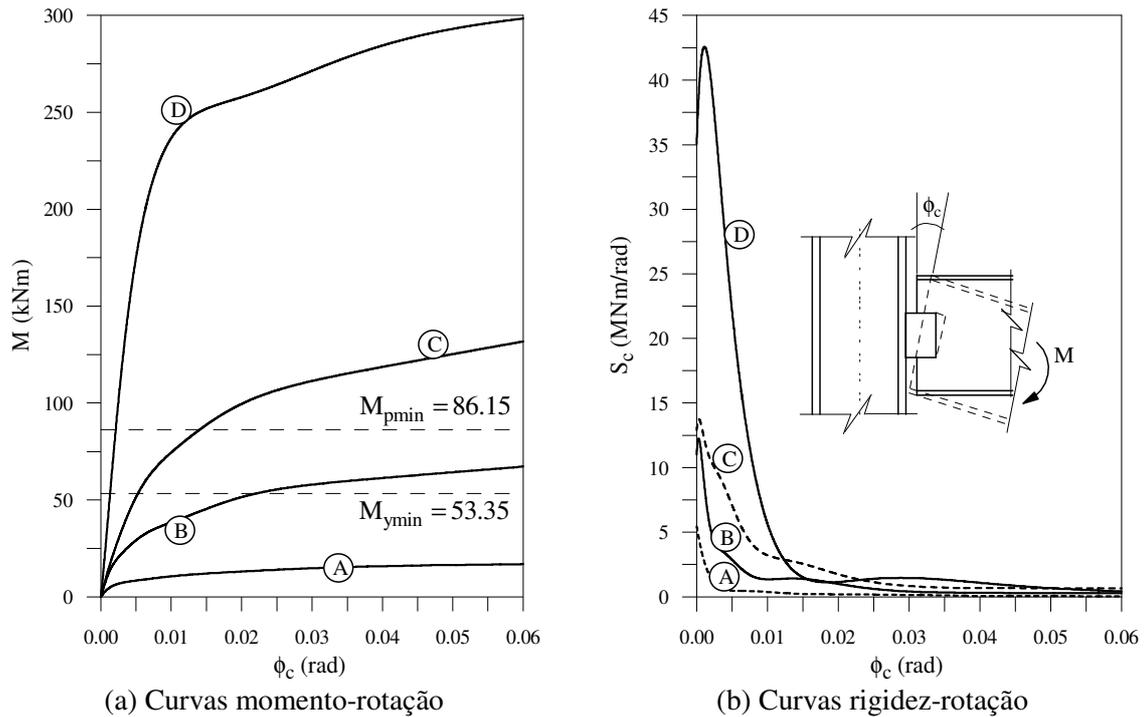


**Figura 8.1** Pórtico de seis andares: geometria e carregamento

### 8.2.1 Análise Estática Não Linear

Serão realizadas análises estáticas considerando o material com comportamento elástico linear e não linear. Nessas análises, a carga uniformemente distribuída foi representada como um conjunto de cargas nodais equivalentes, e as cargas concentradas  $F_1$  e  $F_2$ , adotadas iguais, respectivamente, a  $10.23\lambda$  kN e  $20.44\lambda$  kN. A imperfeição,  $\Delta_0$ , é assumida igual a  $1/300$ .

Tendo como objetivo principal nas análises a determinação da carga de colapso do pórtico, escolheu-se a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga com iteração a carga constante. O incremento inicial desse parâmetro, que em função dessa escolha é mantido constante durante todo o processo incremental-iterativo, foi assumido igual a 0.01. O método de Newton-Raphson padrão e uma tolerância  $\zeta = 10^{-4}$  capaz de assegurar a convergência da solução no processo iterativo foram usados.

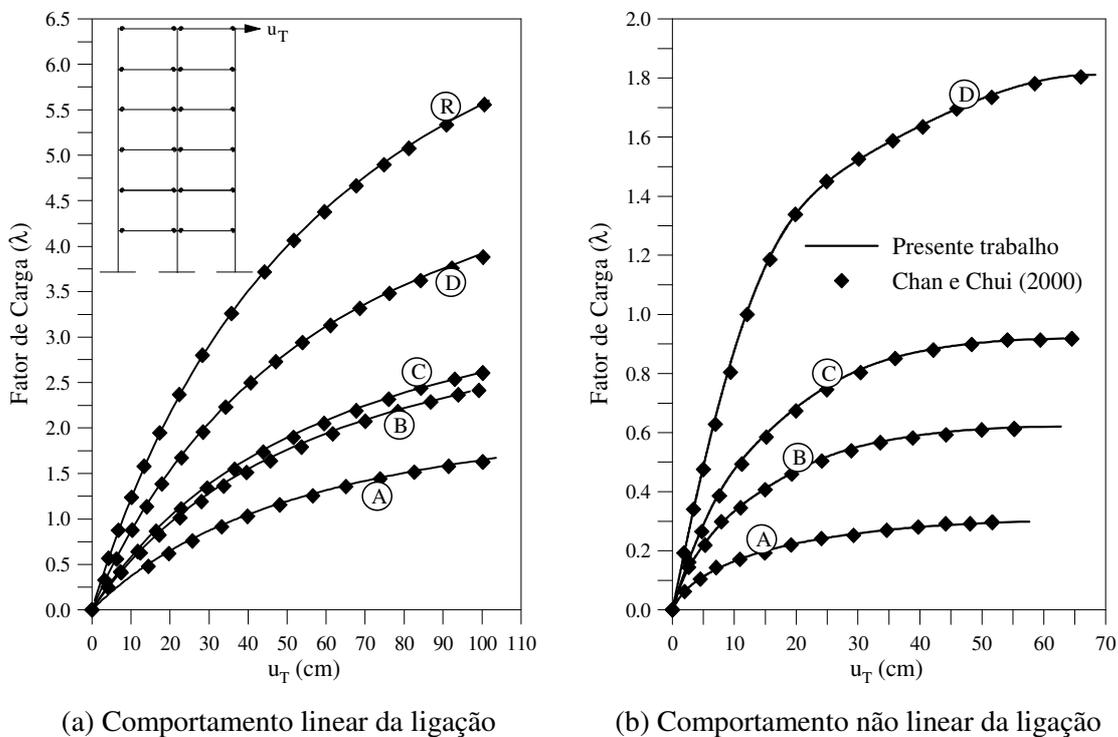


**Figura 8.2** Comportamento de ligações viga-coluna

Para as análises elásticas foram usados quatro elementos finitos na discretização das vigas e apenas um elemento finito em cada coluna. Os elementos das extremidades das vigas são modelados com molas nas extremidades para simular o efeito da flexibilidade da ligação. Os demais seguem a forma convencional com a hipótese de ligações idealmente rígidas. Os efeitos de segunda ordem e da flexibilidade da ligação são introduzidos nas análises elásticas através das formulações SOF-2 linearizada e SRF-3, respectivamente.

O estudo é realizado, como anteriormente mencionado, considerando as ligações viga-coluna rígidas e semi-rígidas. As trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Vogel obtidas com a hipótese de ligações tipo A, B, C e D com comportamento linear e não linear são mostradas nas Figuras 8.3a e 8.3b, respectivamente. Representam-se nessas figuras a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u_T$ , com o fator de carga,  $\lambda$ . A

curva carga-deslocamento para o pórtico com ligações rígidas está também ilustrada na Figura 8.3a. Os resultados numéricos obtidos por Chan e Chui (2000) são indicados nessas figuras para comparação. Na Tabela 8.1 são informados os fatores de carga limite alcançados nessas análises. Pode-se notar, observando as Figuras 8.3a e 8.3b e, também, a Tabela 8.1, a influência da ligação semi-rígida na resposta. O efeito da não linearidade da ligação, que considera a perda de rigidez da ligação durante o processo de carregamento, faz com que a estrutura atinja níveis de capacidade de carga, representados pelo fator  $\lambda$ , bastante inferiores à hipótese de ligações rígidas ou com semi-rigidez constante. Além disso, as cargas de colapso são menores, como esperado, para as ligações mais flexíveis, ou seja, com menor rigidez inicial.



**Figura 8.3** Influência da rigidez da ligação nas análises elásticas

Já nas análises inelásticas, assumiu-se a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , com valor  $235 \text{ N/mm}^2$  e as tensões residuais  $\sigma_r$  nas vigas e colunas foram consideradas iguais, respectivamente, a 30% e 50% dessa tensão de escoamento. A definição desses valores para as tensões residuais, que baseia-se na relação  $D/B$ , sendo  $D$  a altura do perfil e  $B$  a largura da sua mesa, é fornecida na Figura 4.26 do Capítulo 4. Assim como na análise elástica, quatro elementos finitos foram usados na discretização das vigas, e para as colunas, diferentemente, adotaram-se dois elementos finitos. Isso permite acompanhar com

mais rigor o processo de plastificação desses membros. É importante mencionar que Ziemian (1993), empregando os métodos da zona plástica e da rótula plástica, estudou o comportamento desse pórtico. Ele considerou as ligações entre as vigas e as colunas rígidas. Outros autores, incluindo Toma e Chen (1991), também realizaram a análise inelástica dessa estrutura.

**Tabela 8.1** Fator de carga de colapso,  $\lambda_{lim}$ , obtido na análise elástica

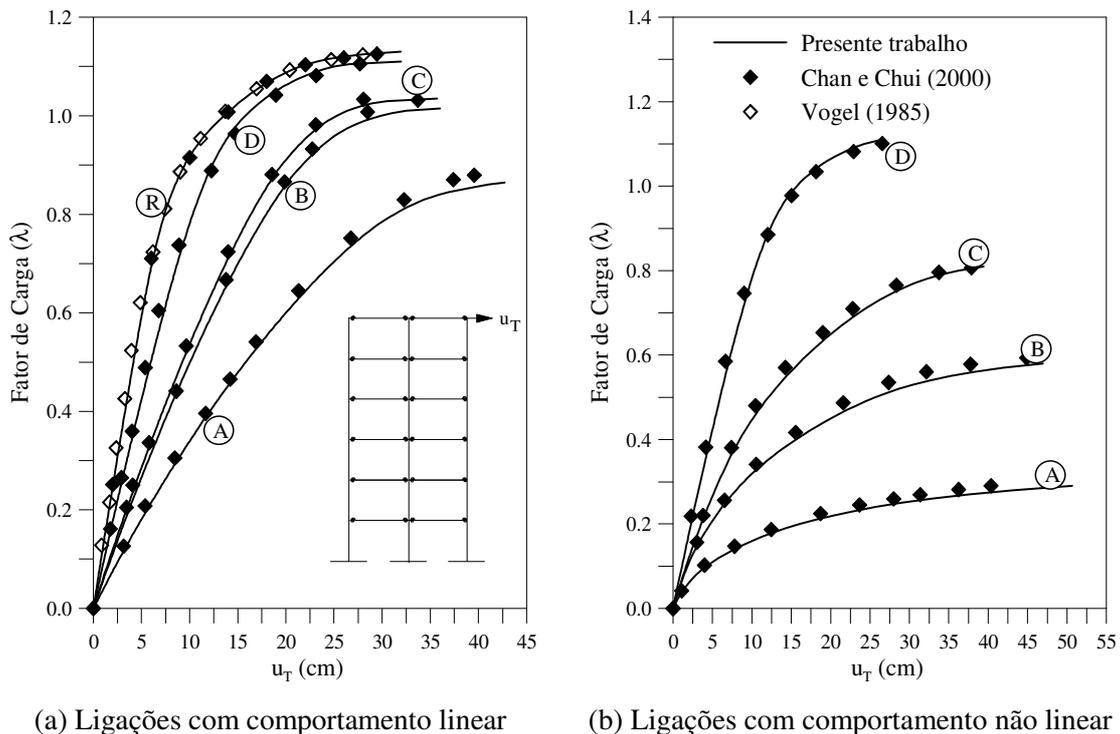
<b>Ligação</b>	<b>Comportamento linear</b>	<b>Comportamento não linear</b>
<i>A</i>	2.35	0.306
<i>B</i>	3.00	0.621
<i>C</i>	3.20	0.918
<i>D</i>	5.20	1.811
<i>Rígida</i>	8.10	-

Para efetuar as análises inelásticas, as formulações PHF-2 e AAF-2 são adotadas. A primeira, PHF-2, considera de forma conjunta os efeitos da não linearidade geométrica e da inelasticidade do aço, sendo usada somente quando as ligações são consideradas rígidas. A outra formulação, AAF-2, simula de forma conjunta esses efeitos e a flexibilidade da ligação. Como descrito no Capítulo 4, nessas duas abordagens, o processo de plastificação dos membros é acompanhado através de uma mola fictícia situada nas extremidades do elemento finito, cuja rigidez é ajustada de acordo com o grau da plasticidade na seção transversal. Quando a seção encontra-se em regime elástico, a rigidez da mola é infinita. Ao se formar uma rótula plástica, essa rigidez se anula. Para considerar a influência da não linearidade geométrica, a formulação SOF-2 simplificada foi usada juntamente com essas duas formulações.

Os caminhos de equilíbrio da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 8.4a e 8.4b. Para definição das curvas carga-deslocamento mostradas nessas figuras, usou-se, como referência, o deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u_T$ , como indicado na Figura 8.1. Na Figura 8.4a, as ligações são admitidas terem comportamento linear. A trajetória de equilíbrio do pórtico com ligações rígidas está também ilustrada nessa figura. A relação não linear das ligações tipo *A*, *B*, *C* e *D* foi também considerada e as respostas encontradas, nesse caso, estão na Figura 8.4b.

Dessa análise, conclui-se que o comportamento inelástico pré-crítico do sistema estrutural em estudo, independente do tipo de ligação escolhido, é bastante influenciado

pelo modelo de ligação adotado, linear ou não linear. Além disso, como já observado anteriormente na análise elástica, os fatores de carga limite,  $\lambda_{lim}$ , indicados na Tabela 8.2, são maiores quando o modelo linear é adotado para representar o comportamento das ligações. Uma exceção ocorre para a ligação mais rígida tipo *D*. Nesse caso, a inelasticidade dos membros domina o comportamento estrutural, pois a capacidade de momento da ligação é superior ao momento de plastificação das seções transversais. Na Figura 8.2 tem-se indicados os momentos de plastificação,  $M_p$ , e de início de escoamento,  $M_y$ , máximos e mínimos nas vigas do pórtico de seis andares. Os momentos plásticos nas vigas formadas pelos perfis IPE 240, IPE 300, IPE 330, IPE 360 e IPE 400 são, respectivamente, 86.15, 147.67, 189.01, 239.47 e 307.14 kNm. O cálculo dessas grandezas é feito usando a relação  $M_p = \sigma_y Z$ , sendo  $Z$  o módulo plástico da seção. Já os momentos de início de escoamento,  $M_y = (\sigma_y - \sigma_r)W$  na qual  $W$  é o módulo elástico, para esses mesmos perfis são, na mesma ordem, 53.35, 91.64, 117.3, 148.6 e 190.16 kNm. Comparam-se, novamente, os resultados aos de Chan e Chui (2000).



**Figura 8.4** Influência da rigidez da ligação nas análises inelásticas

Para os pórticos com ligações mais flexíveis, dos tipos *A* e *B*, é possível observar que o comportamento global do sistema estrutural é dominado predominantemente pela flexibilidade da ligação, pois os momentos últimos,  $M_u$ , dessas ligações são menores que

os momentos plásticos das seções das vigas. Para a ligação tipo *B*, o início de plastificação nos membros ocorre. Já o comportamento do pórtico quando as ligações viga-coluna são do tipo *C* é governado pelo acoplamento dos três efeitos não lineares considerados na análise: segunda ordem, inelasticidade do aço e flexibilidade da ligação.

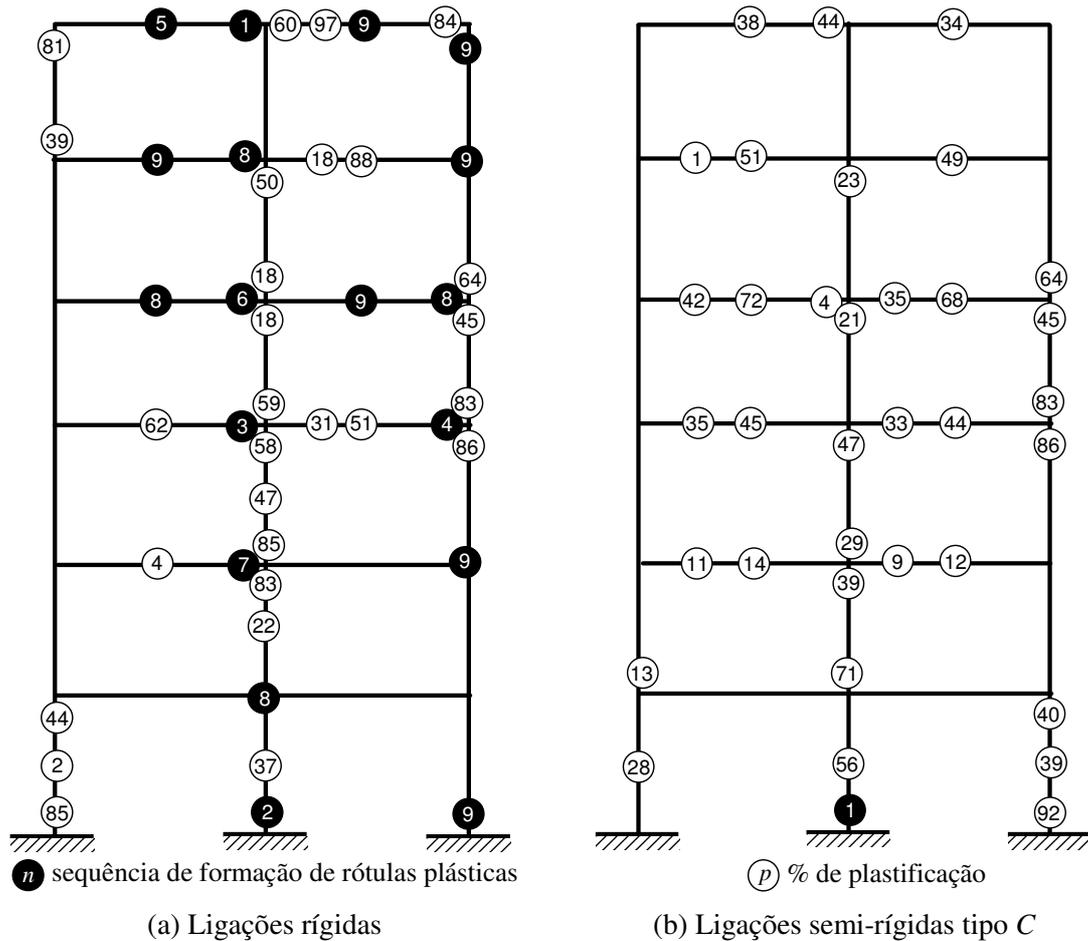
**Tabela 8.2** Fator de carga de colapso,  $\lambda_{lim}$ , obtido na análise inelástica

Ligação	Modelo de ligação linear		Modelo de ligação não linear	
	Presente trabalho	Chan e Chui (2000)	Presente trabalho	Chan e Chui (2000)
<i>A</i>	0.89	0.89	0.31	0.31
<i>B</i>	1.01	1.03	0.60	0.59
<i>C</i>	1.03	1.04	0.82	0.81
<i>D</i>	1.11	1.11	1.10	1.11

Com a hipótese de ligações rígidas, o colapso estrutural é atingido quando o fator de carga  $\lambda$  é 1.135. A Figura 8.5a ilustra a distribuição da plasticidade nos membros estruturais do pórtico com todas as suas ligações rígidas. Quando a resistência limite da estrutura é alcançada, observa-se que dezoito seções transversais se plastificaram. A ordem de formação das rótulas é indicada no interior do círculo totalmente preenchido. As rótulas plásticas ocorrem quando o fator de carga  $\lambda$  atinge os seguintes níveis: 0.965, 1.040, 1.045, 1.080, 1.110, 1.115, 1.120, 1.125 e 1.135. Mostram-se ainda na Figura 8.5a outras vinte e oito seções transversais onde o processo de degradação da rigidez teve início. O índice de escoamento ou plastificação dessas seções, em porcentagem, é representado no interior do círculo sem preenchimento. Esse parâmetro é calculado usando a Equação (5.1) definida no Capítulo 5. Trata-se de uma informação útil para a localização de seções transversais com grau de plastificação elevado nos sistemas estruturais. Para o pórtico com ligações semi-rígidas tipo *C* com comportamento não linear, observa-se, na Figura 8.5b, que apenas uma rótula plástica é desenvolvida durante o histórico de carregamento. Essa rótula está localizada na base da coluna central e surge quando a estrutura atinge o colapso. Como indicado na Tabela 8.2, isso ocorre para  $\lambda = 0.82$ . Entretanto, existem trinta e cinco seções transversais em processo de plastificação. Desse total, nove seções apresentam índice de escoamento superior a 50%.

Ainda como respostas das análises estáticas, as Figuras 8.6a e 8.6b mostram a variação dos deslocamentos horizontais da coluna mais à direita do pórtico obtida considerando o comportamento do material elástico e inelástico, respectivamente. As

ligações tipo A, B, C e D foram, mais uma vez, consideradas para esse estudo. As respostas ilustradas referem-se ao comportamento estrutural quando a capacidade de carga é atingida. Na Figura 8.6b, correspondente à análise inelástica, verifica-se que os deslocamentos sofridos pelo sistema estrutural são menores para as ligações mais rígidas. Na análise elástica, ao contrário, o deslocamento lateral da estrutura é menor quando ligações mais flexíveis são usadas, como indica a Figura 8.6a.

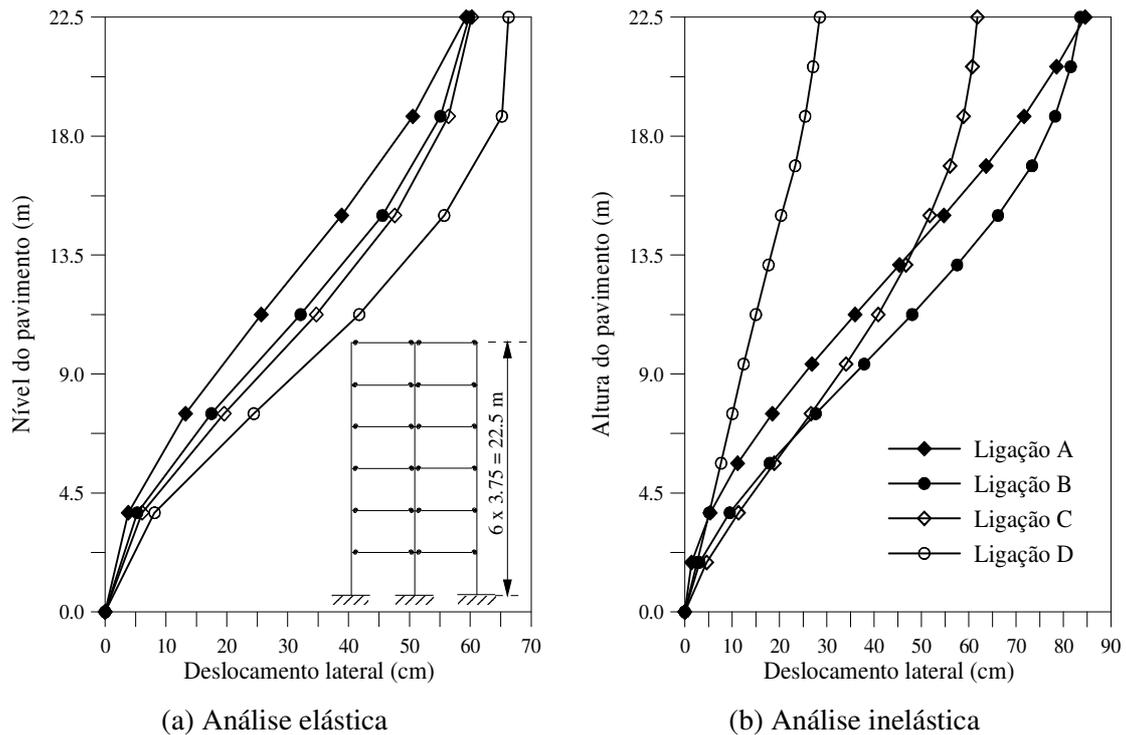


**Figura 8.5** Distribuição da plasticidade nos membros estruturais

Para a estrutura com todas as ligações rígidas, a Figura 8.7 mostra os diagramas de esforços solicitantes obtidos no instante de colapso estrutural. Na Figura 8.7a tem-se a distribuição de esforços normais de compressão nas colunas e, na Figura 8.7b são indicados o momento máximo no vão central das vigas e o momento na extremidade direita de cada uma delas. Para as colunas, apenas no primeiro pavimento, para o qual se tem os esforços máximos, os momentos têm as suas magnitudes indicadas. As respostas obtidas por Chan e Chui (2000), representadas nas figuras entre parênteses, e os esforços

encontrados por White (1988), que estão indicados entre colchetes, são também ilustrados para comparação. Os fatores de carga de colapso obtidos por esses autores são também resumidos.

Em todas as análises desta seção pode-se observar a boa concordância entre os resultados encontrados neste trabalho e aqueles fornecidos na literatura, o que valida as formulações não lineares desenvolvidas e as implementações realizadas.

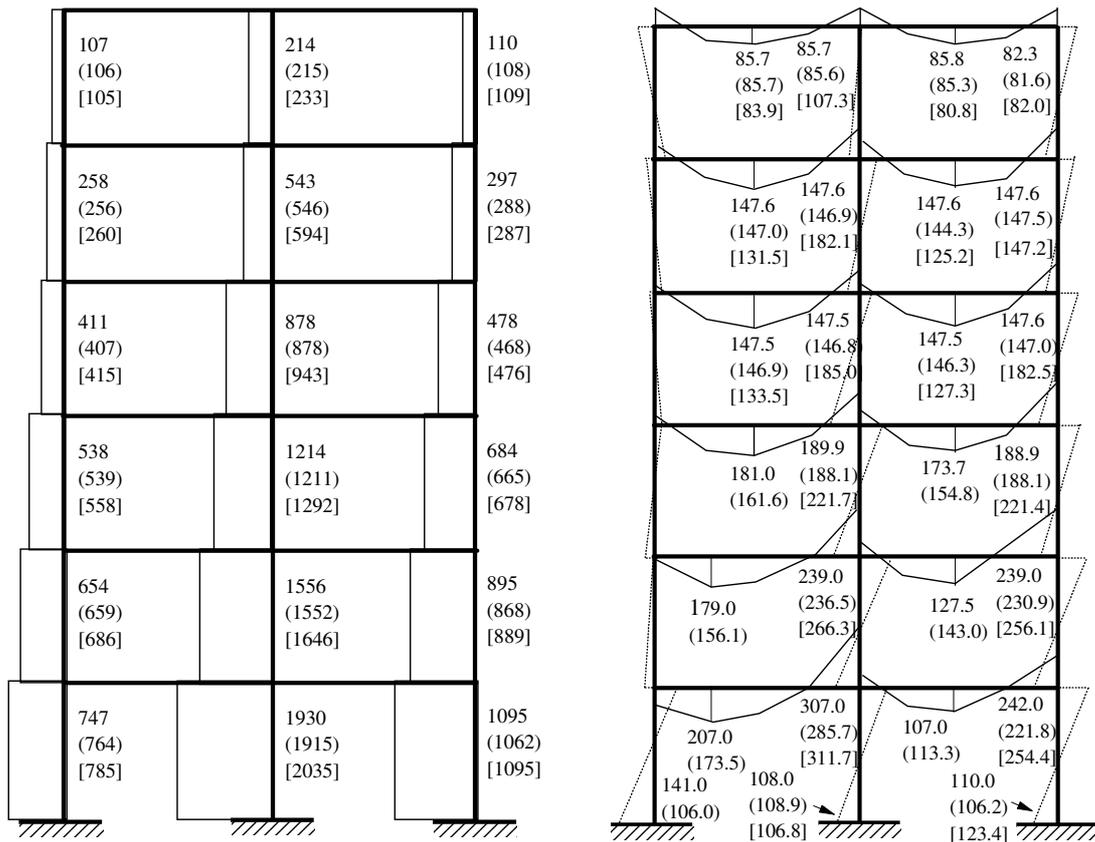


**Figura 8.6** Deslocamentos laterais do pórtico de seis andares

### 8.2.2 Análise Dinâmica Não Linear

Agora será realizada a análise dinâmica do pórtico de seis andares ilustrado anteriormente na Figura 8.1. O material é considerado elástico e a imperfeição inicial nas colunas é assumida igual a  $1/450$  seguindo a modelagem usada por Chan e Chui (2000). Nenhum amortecimento viscoso será considerado nas análises para evidenciar o efeito provocado pelo comportamento não linear das ligações semi-rígidas na resposta estrutural. Apenas a ligação tipo *C* é adotada nesses estudos.

As cargas estáticas uniformemente distribuídas nas vigas são transformadas em cargas nodais equivalentes  $P$  e consideradas como massas adicionais ( $m = P/g$ , sendo  $g$  a aceleração da gravidade e  $m$  a massa correspondente) que, juntamente com o peso próprio de todos os membros estruturais, formam a matriz de massa do sistema.



Presente trabalho:  $\lambda = 1.135$ ; (Chan e Chui (2000),  $\lambda = 1.130$ ); [White (1988),  $\lambda = 1.180$ ]

(a) Esforço normal em kN

(b) Momento fletor em kNm

**Figura 8.7** Diagrama de esforços solicitantes para o pórtico com ligações rígidas

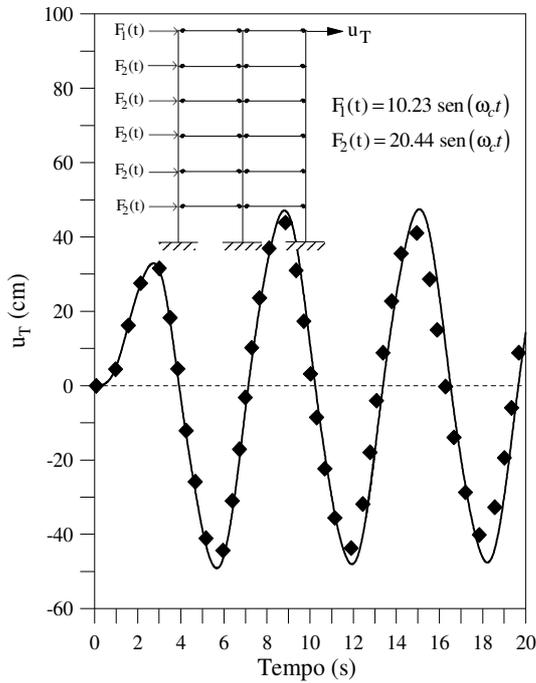
No topo das colunas são aplicadas cargas harmônicas,  $F_1$  e  $F_2$ , iguais a  $10.23 \sin \omega_c(t)$  e  $20.44 \sin \omega_c(t)$ . Para a massa volumétrica  $\rho$ ,  $7800 \text{ N s}^2/\text{m}^4$  foi o valor adotado. No modelo estrutural, quatro elementos finitos nas vigas e dois em cada uma das colunas foram usados.

Na análise transiente, as formulações SOF-2 e SRF-2 simulam os efeitos da não linearidade geométrica e a flexibilidade da ligação, respectivamente. Incrementos constantes de tempo,  $\Delta t = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$ , foram usados. Para convergência do processo iterativo de solução considerou-se uma tolerância igual  $10^{-4}$ .

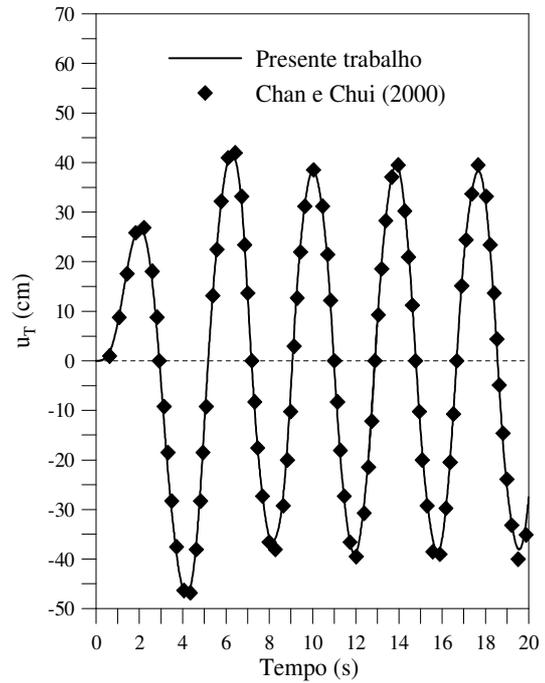
Assumindo as ligações rígidas, a frequência natural fundamental é  $2.41 \text{ rad/s}$ . Quando se adotam ligações semi-rígidas, esse valor é  $1.66 \text{ rad/s}$ .

As Figuras 8.8a-d exibem as respostas estruturais no tempo obtidas para quatro diferentes frequências de vibração,  $\omega_c$ , das forças de excitação  $F_1$  e  $F_2$ . As frequências de excitação consideradas são  $1.00$ ,  $1.66$ ,  $2.41$  e  $3.30 \text{ rad/s}$ . O comportamento não linear das ligações foi adotado nas análises. Controlou-se o deslocamento horizontal no topo do

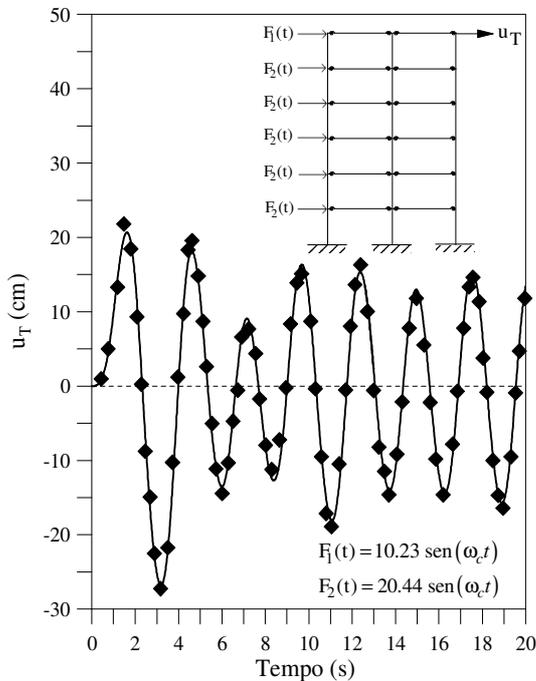
pórtico,  $u_T$ , e a sua variação durante o tempo de análise, 20 s, é representada nas figuras anteriormente citadas.



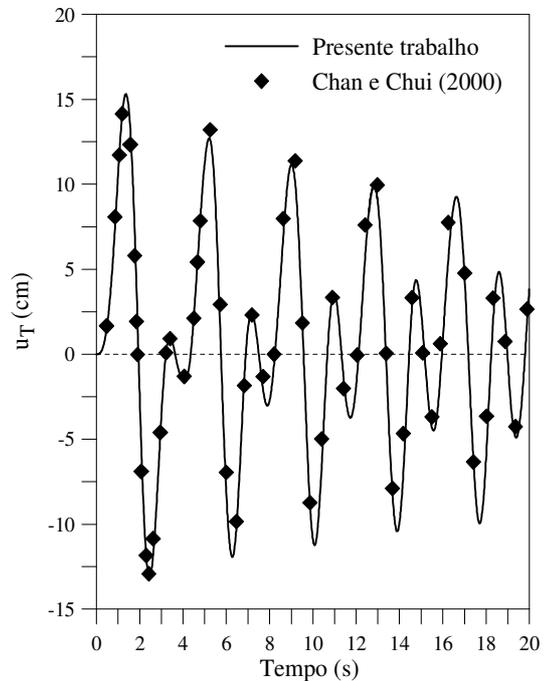
(a)  $\omega_c = 1$  rad/s



(b)  $\omega_c = 1.66$  rad/s



(c)  $\omega_c = 2.41$  rad/s

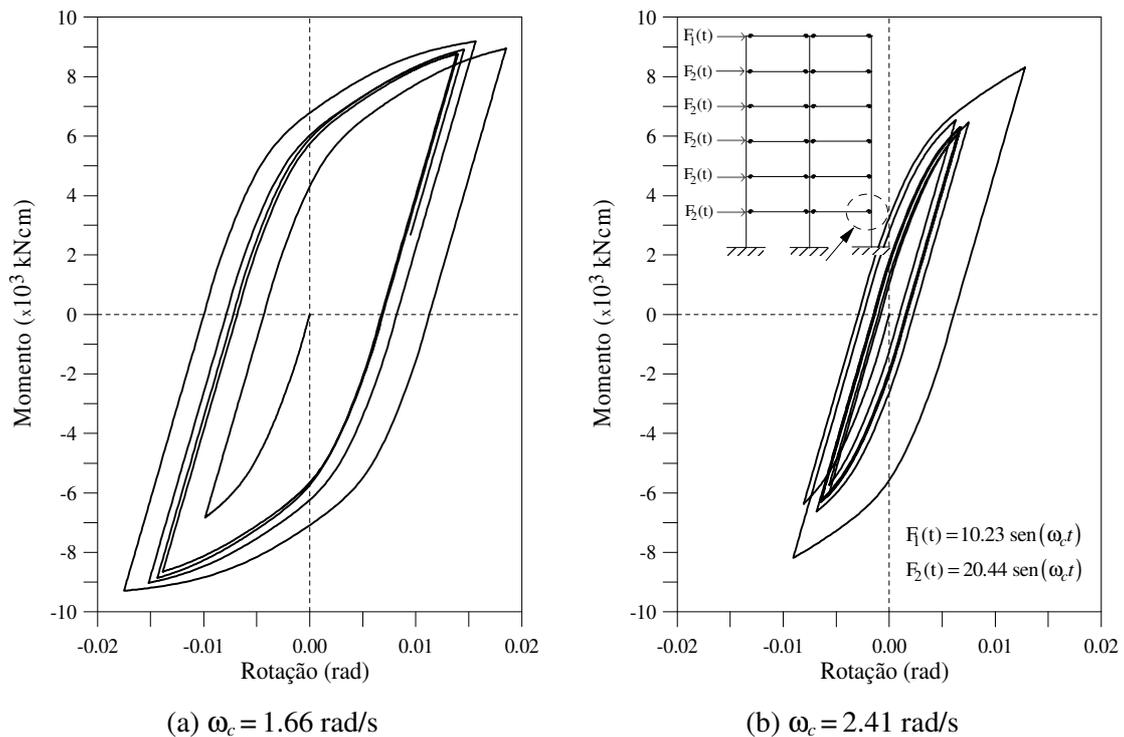


(d)  $\omega_c = 3.33$  rad/s

**Figura 8.8** Resposta dinâmica para o pórtico de Vogel com ligações semi-rígidas

Os ciclos histeréticos momento-rotação para uma das ligações viga-coluna do pórtico são mostradas nas Figuras 8.9a e 8.9b para  $\omega_c = 1.66 \text{ rad/s}$  e  $\omega_c = 2.41 \text{ rad/s}$ , respectivamente. A ligação considerada nessas representações está indicada por uma seta na Figura 8.9b. A proximidade entre os resultados deste trabalho e aqueles encontrados por Chan e Chui (2000) valida a metodologia proposta para simular o comportamento histerético das ligações.

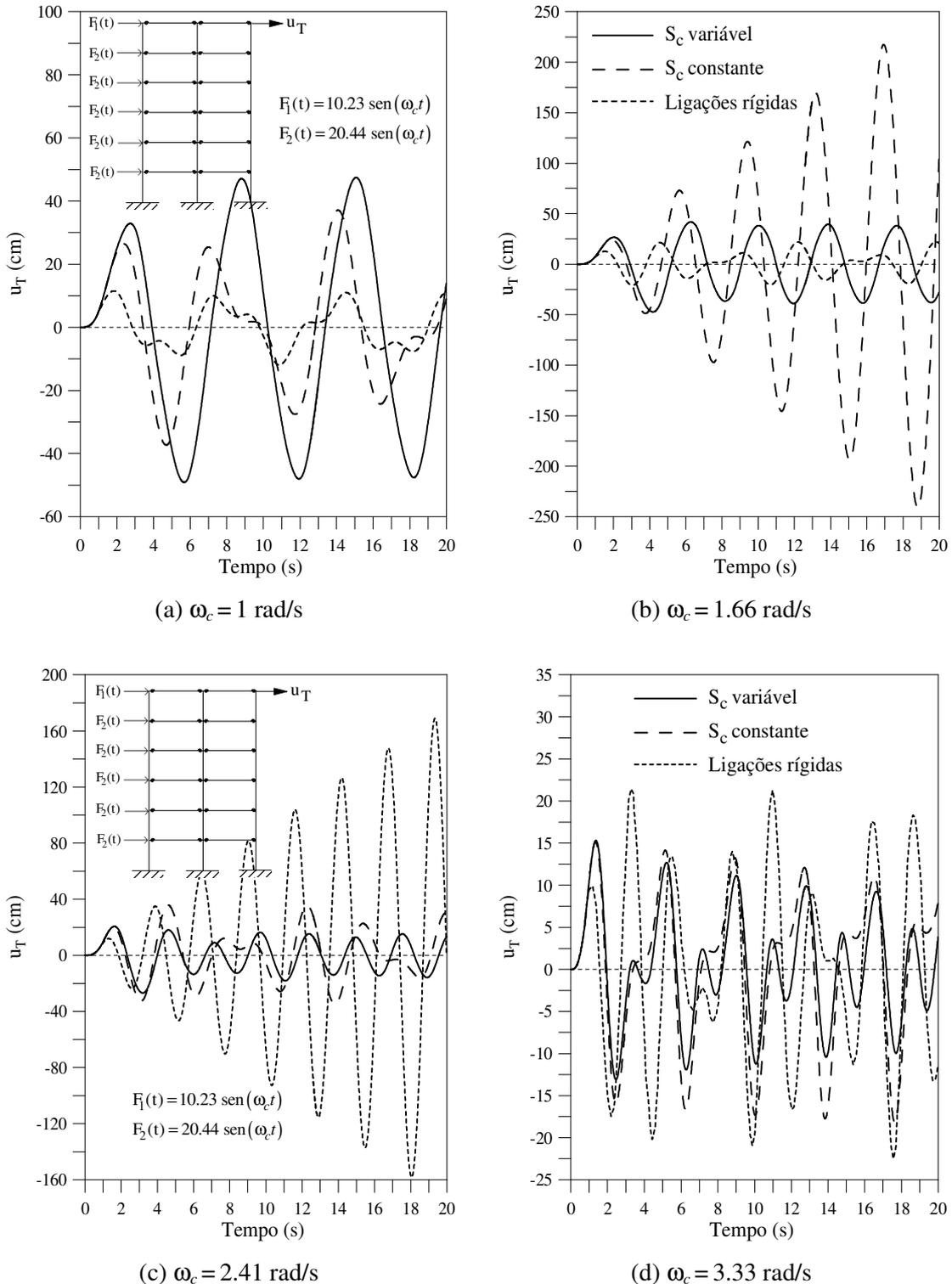
Análises transientes assumindo as ligações entre as vigas e colunas rígidas e semi-rígidas foram realizadas e os históricos de deslocamento no topo da estrutura são apresentados nas Figuras 8.10a-d. Quando a frequência de vibração das forças de excitação é baixa, observa-se que o deslocamento sofrido pela estrutura ao considerar o comportamento não linear das ligações ( $S_c$  variável), é bastante superior aos demais. O contrário é notado quando atuam cargas harmônicas com altas frequências.



**Figura 8.9** Ciclo histerético momento-rotação

Ressalta-se que, embora os deslocamentos obtidos considerando o comportamento não linear das ligações possam ser amplificados ou amortecidos dependendo da frequência de vibração das forças harmônicas  $F_1$  e  $F_2$ , o efeito de ressonância, observado na Figura 8.10b para a ligação com comportamento linear e na Figura 8.10c para as ligações rígidas, não ocorre quando o comportamento não linear é adotado. Isso acontece devido ao

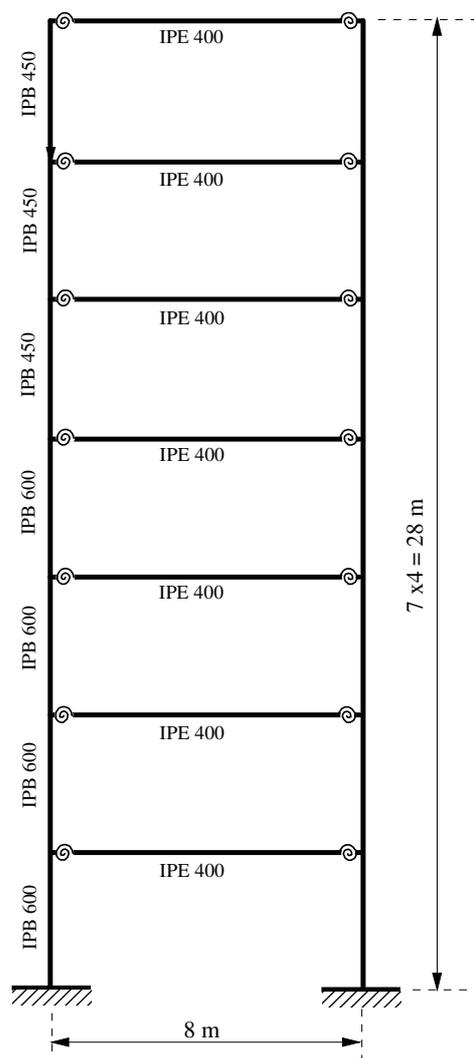
amortecimento histerético favorecido pelas ligações semi-rígidas não lineares, em função da sua capacidade de dissipação de energia em cada ciclo. Torna-se evidente, então, a importância da consideração de ligações semi-rígidas com comportamento momento-rotação não linear nas análises dinâmicas de estruturas metálicas.



**Figura 8.10** Resposta dinâmica para o pórtico com ligações rígidas e semi-rígidas

### 8.3 Pórtico de Sete Andares

O segundo problema estrutural deste capítulo está exemplificado na Figura 8.11. Trata-se de um pórtico de sete andares com 28 m de altura e 8 m de vão. A geometria da estrutura e os perfis que constituem as vigas e as colunas são indicados nessa figura. Além da ligação rígida entre os membros estruturais, ligações semi-rígidas dos tipos *E* e *F* foram usadas para conectar vigas e colunas. O comportamento não linear momento-rotação e rigidez-rotação para essas duas ligações são mostrados na Figura 8.12.

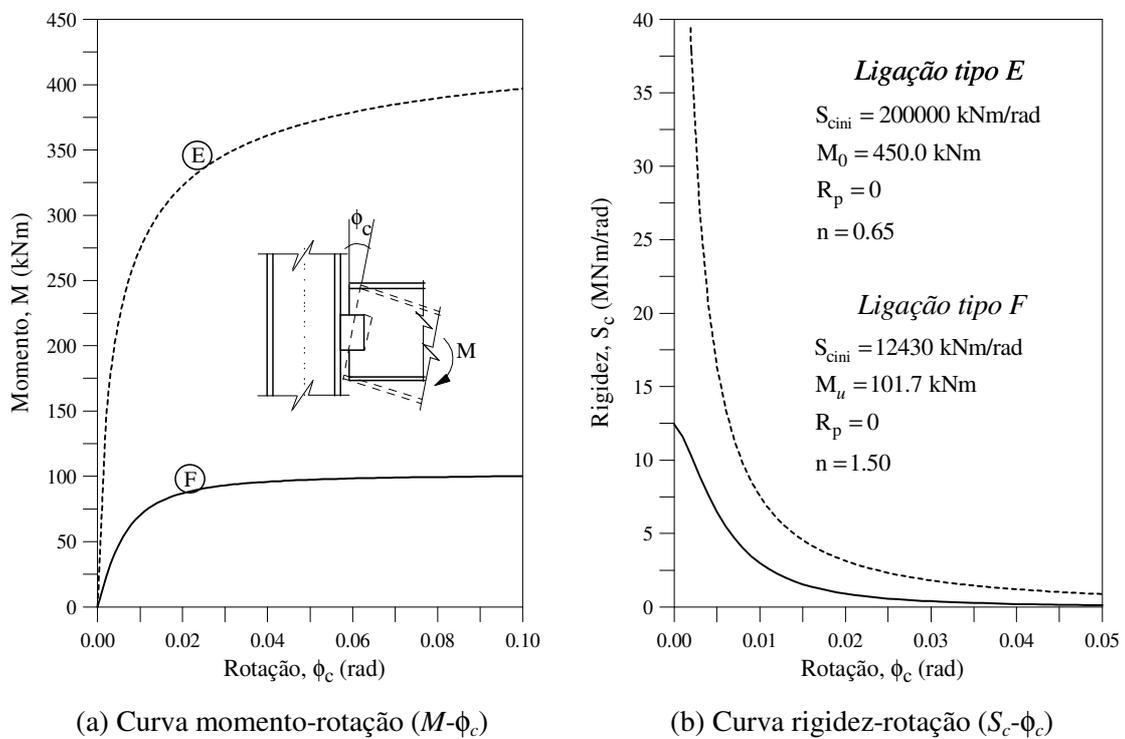


**Figura 8.11** Pórtico de sete andares: geometria

Adicionalmente, dois modelos foram considerados para representar o comportamento das ligações *E* e *F*: linear e não linear. Para o modelo linear, como se sabe, a rigidez da ligação,  $S_c$ , é considerada permanecer constante ao longo de todo o processo de

carregamento. Nesse caso, a rigidez inicial da ligação é usada. Já o comportamento não linear será representado pelo modelo de quatro parâmetros proposto por Richard-Abbott (1975). A rigidez inicial, o momento último da ligação,  $M_u$ , (igual ao momento de referência,  $M_0$ ), a rigidez devido ao encruamento da ligação e o fator de forma, necessários para definir a função matemática nesse modelo, são indicados na Figura 8.12b. Detalhes desse modelo podem ser encontrados, como já mencionado no início deste capítulo, no Apêndice B.

Assim como na Seção 8.2, as análises estática e dinâmica serão realizadas para esse sistema estrutural. Nesses estudos, as vigas e as colunas foram discretizadas com quatro e dois elementos finitos, respectivamente.



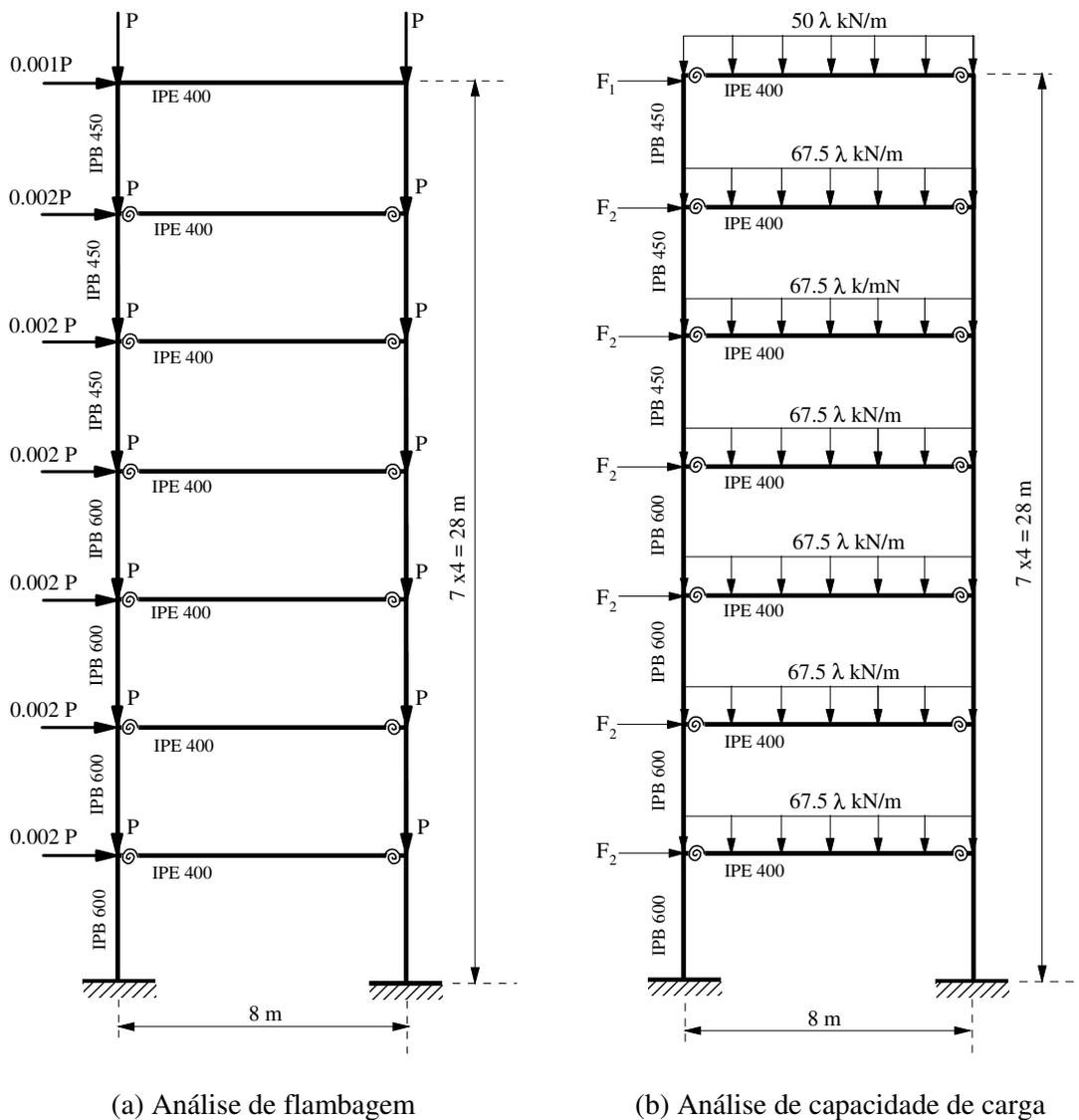
**Figura 8.12** Comportamento das ligações semi-rígidas tipos *E* e *F*

### 8.3.1 Análise Estática Não Linear

Esse pórtico foi analisado inicialmente por Sekulovic e Nefovska (2004) para validar suas formulações não lineares desenvolvidas para análises estáticas considerando os efeitos da semi-rigidez das ligações e da inelasticidade do material. Duas análises foram conduzidas por esses pesquisadores: flambagem e capacidade de carga. Como o objetivo com esse exemplo é ainda validar as formulações não lineares implementadas no sistema

computacional, esses dois estudos serão conduzidos e os resultados obtidos por Sekulovic e Nefovska (2004) usados para comparação.

O carregamento na análise de flambagem, mostrado na Figura 8.13a, que consiste de cargas concentradas de intensidade  $P$  nas extremidades das vigas e cargas horizontais desestabilizadoras,  $0.001P$  e  $0.002P$ , no topo das colunas em cada um dos pavimentos são usadas para acentuar os efeitos de segunda ordem,  $P-\Delta$  e  $P-\delta$ . Na outra análise, cargas uniformemente distribuídas com intensidades  $50\lambda$  kN/m e  $67.5\lambda$  kN/m, nas quais  $\lambda$  é um parâmetro de carga, são aplicadas nas vigas. Nas colunas atuam forças horizontais concentradas,  $F_1 = 12\lambda$  kN e  $F_2 = 24\lambda$  kN, como ilustrado na Figura 8.13b.



**Figura 8.13** Pórtico de sete andares: carregamento adotado nas análises estáticas

Nas análises elásticas, as formulações SOF-2 e SRF-1 foram usadas para considerar, respectivamente, os efeitos da não linearidade geométrica e das ligações semi-rígidas. Já nas análises inelásticas, as formulações PHF-2 e AAF-2 são adotadas. A primeira delas é adotada quando todas as ligações são rígidas e a segunda, quando ligações semi-rígidas são consideradas para interligar os membros. A formulação SOF-2 simplificada simula os efeitos de segunda ordem nessas formulações.

O método de Newton-Raphson modificado e a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga com iteração a carga constante foram usados nas análises de flambagem e de capacidade de carga. Para o incremento do parâmetro de carga usa-se o valor 0.1 e adota-se uma tolerância  $\zeta = 10^{-4}$  no processo iterativo de solução.

### 1. *Análise de Flambagem*

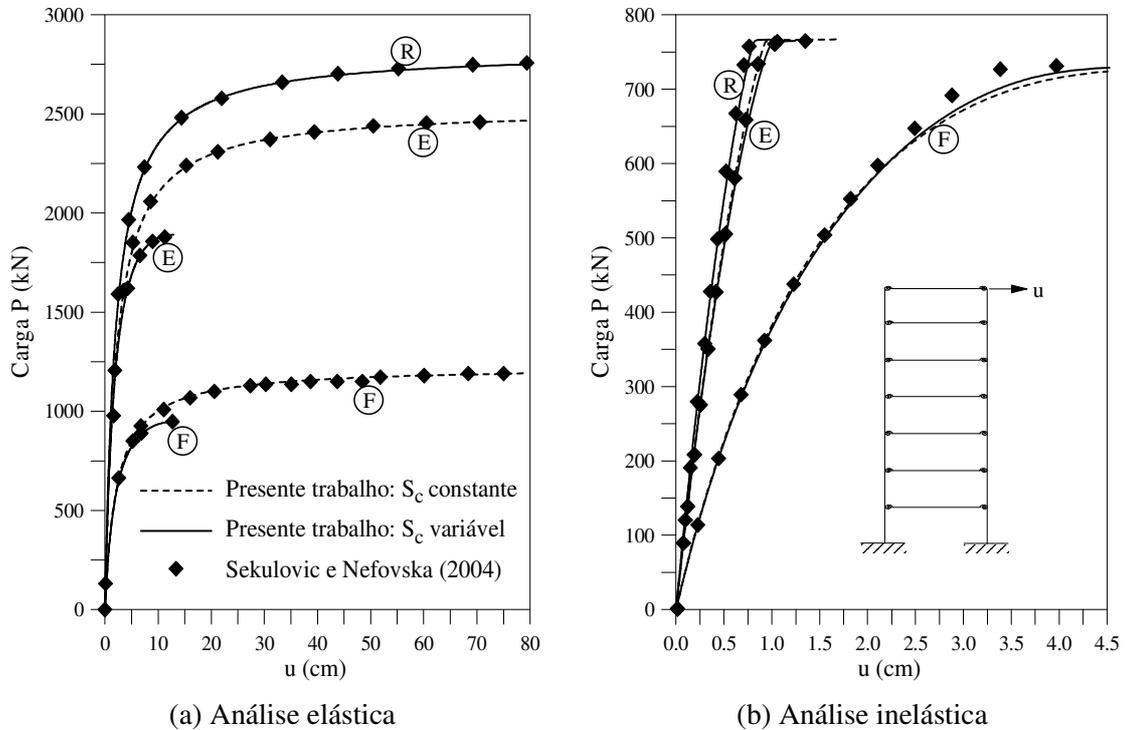
O módulo de elasticidade e a tensão residual considerados nas análises foram, respectivamente, 210 GPa e 203 MPa. As tensões residuais nos membros estruturais são estabelecidas através das prescrições do ECCS (1983) mostradas na Figura 4.26 do Capítulo 4.

Os resultados das análises de flambagem elástica e inelástica com as hipóteses de ligações rígidas e semi-rígidas são apresentados, respectivamente, nas Figuras 8.14a e 8.14b, nas quais a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura,  $u$ , com o carregamento,  $P$ , são exibidos. As Tabelas 8.3 e 8.4 resumem as cargas limites obtidas através desses estudos. Os resultados são comparados aos de Sekulovic e Nefovska (2004) que estão também mostrados nessas figuras e tabelas. Pode-se observar que existe uma boa concordância entre as respostas encontradas neste trabalho e aquelas obtidas por Sekulovic e Nefovska (2004) independente do tipo de análise.

Através da Figura 8.14a, observa-se que comportamento estrutural nas análises elásticas é dependente do tipo de ligação adotado. Além disso, o comportamento momento-rotação da ligação semi-rígida, linear ou não linear, exerce também papel importante nesse tipo de análise. Como já previsto, verifica-se através da Tabela 8.3 que a carga limite do pórtico com ligações rígidas é superior às demais. Já para a ligação tipo  $F$ , que é a mais flexível, a carga limite é inferior. Verifica-se, também, que a adoção de ligações semi-rígidas com comportamento momento-rotação não lineares ( $S_c$  variável) contribui para a redução da carga limite do pórtico.

Com relação às análises inelásticas, cujas respostas são ilustradas na Figura 8.14b, verifica-se, inicialmente, que o comportamento linear ou não linear da ligação não altera a

carga limite do pórtico. Isso pode ser comprovado através da Tabela 8.4. Dessa forma, torna-se aparente, então, a influência do efeito da plastificação dos membros estruturais, especialmente das colunas localizadas no primeiro andar, como exibido na Figura 8.15.



**Figura 8.14** Trajetórias de equilíbrio do pórtico para a análise de flambagem

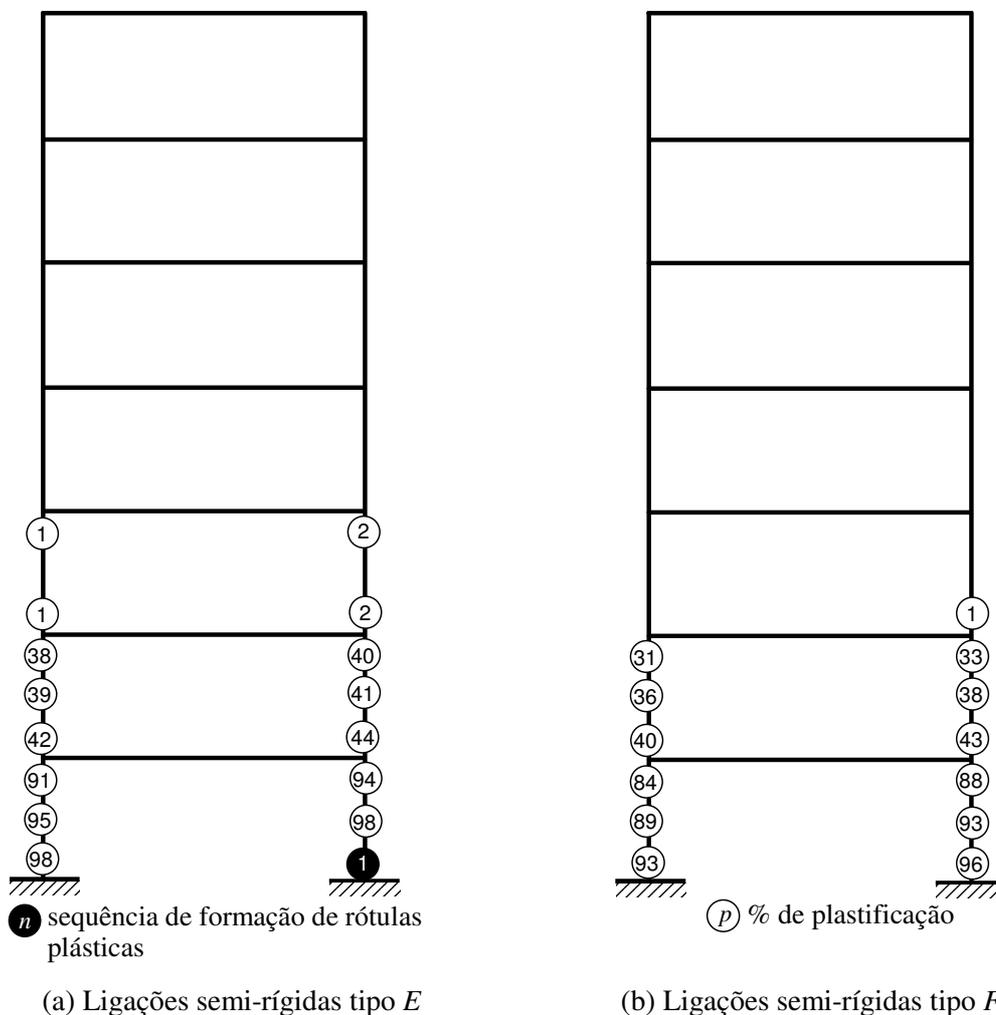
**Tabela 8.3** Carga limite, em kN, obtida na análise elástica

Ligação	Modelo de ligação linear		Modelo de ligação não linear	
	Presente trabalho	Sekulovic e Nefovska (2004)	Presente trabalho	Sekulovic e Nefovska (2004)
Rígida	2819	2794	-	-
E	2516	2515	1890	1883
F	1205	1210	951	948

**Tabela 8.4** Carga limite, em kN, obtida na análise inelástica

Ligação	Modelo de ligação linear		Modelo de ligação não linear	
	Presente trabalho	Sekulovic e Nefovska (2004)	Presente trabalho	Sekulovic e Nefovska (2004)
Rígida	766	753	-	-
E	766	753	766	753
F	729	718	731	717

Nas Figuras 8.15a e 8.15b, ilustram-se a distribuição da plastificação nos membros estruturais do pórtico de sete andares com ligações semi-rígidas tipos *E* e *F*, respectivamente. Esses resultados são obtidos quando a resistência limite da seção é atingida e o comportamento momento-rotação não linear foi usado na análise. O índice de escoamento, em porcentagem, é indicado no interior do círculo sem preenchimento. Independente do tipo de ligação, apenas as seções transversais das colunas dos três primeiros andares foram influenciadas pela plastificação do material. Com a ligação mais rígida, tipo *E*, uma rótula plástica se formou na base da coluna da direita. De forma geral, verifica-se que o comportamento plástico da estrutura é similar para os dois tipos ligações. A maioria das seções transversais permaneceu em regime elástico.



**Figura 8.15** Plastificação nos membros estruturais do pórtico de sete andares

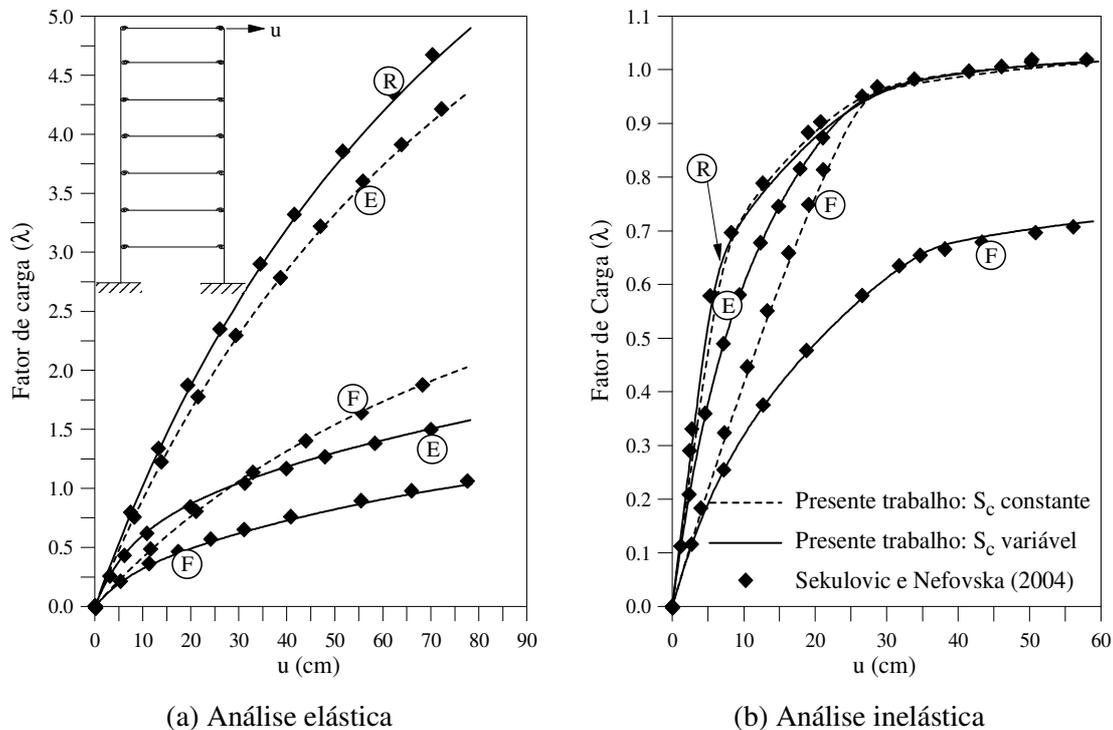
Através da Figura 8.14b, nota-se que as trajetórias de equilíbrio do pórtico com ligações viga-coluna rígidas e semi-rígidas tipo *E* (modelo linear e não linear) são

semelhantes, e os valores obtidos para a carga limite apresentados na Tabela 8.4 são iguais. Pode-se observar ainda que a ligação mais flexível, tipo *F* (modelo linear e não linear), embora influencie no comportamento pré-crítico do pórtico, não contribui significativamente para reduzir o valor da carga quando comparado com as outras ligações mais rígidas. Por fim, cabe ressaltar que o colapso estrutural foi associado com a instabilidade inelástica das colunas, percebido com o aumento acentuado do deslocamento no topo da estrutura.

## 2. Análise de capacidade de carga

As seguintes propriedades foram consideradas em todos os membros estruturais do pórtico de sete andares na análise de sua capacidade de carga: módulo de elasticidade  $E = 205 \text{ GPa}$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 235 \text{ MPa}$ . Já as tensões residuais foram consideradas como na análise anterior, seguindo as recomendações do ECCS (1983).

As trajetórias de equilíbrio do pórtico obtidas com as análises elástica e inelástica são exibidas, respectivamente, nas Figuras 8.16a e 8.16b. Representam-se nessas figuras a variação do deslocamento horizontal no topo do pórtico,  $u$ , com o fator de carga,  $\lambda$ . As ligações entre as vigas e as colunas são assumidas perfeitamente rígidas e, também, semi-rígidas com comportamento linear e não linear.



**Figura 8.16** Trajetórias de equilíbrio obtidas na análise de capacidade de carga

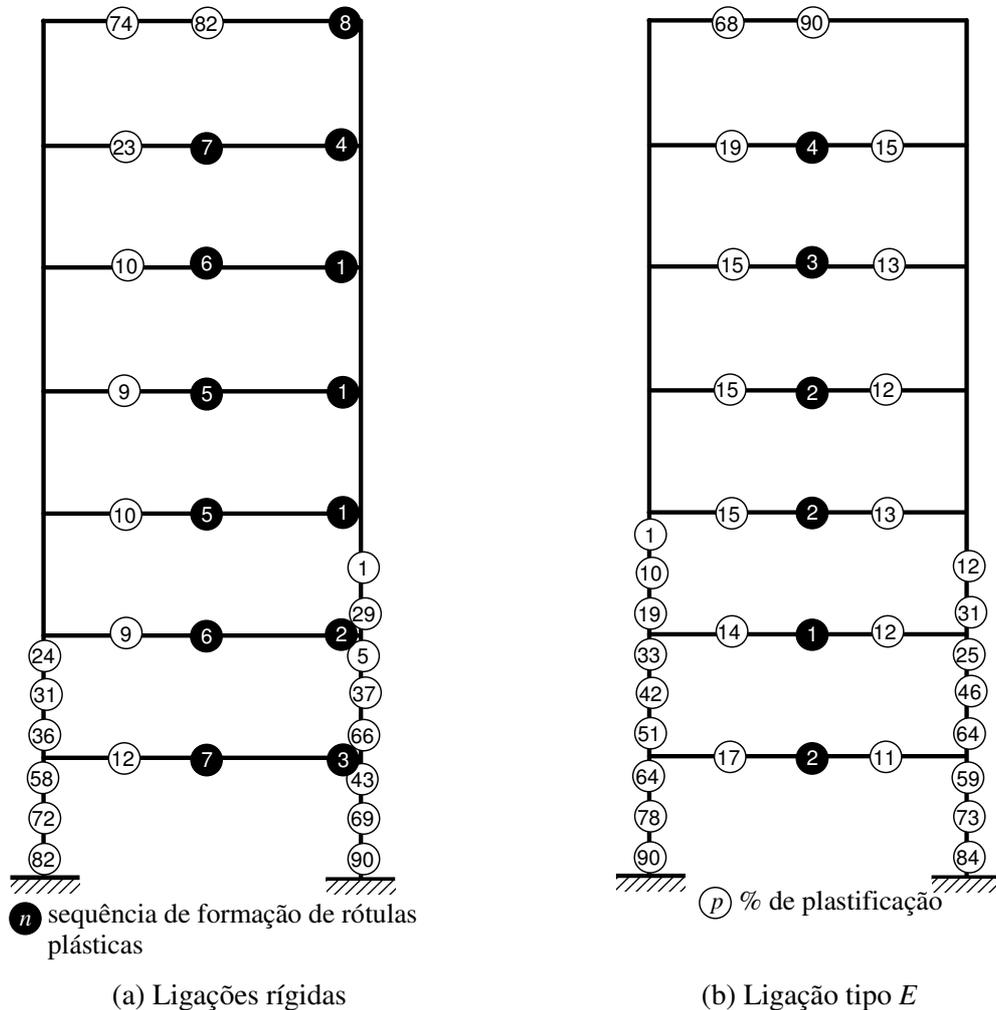
Na Tabela 8.5, o fator de carga limite, obtido em cada uma dessas análises, é indicado. As respostas encontradas por Sekulovic e Nefovska (2004) estão representadas para comparação na Figura 8.16. Mais uma vez, observa-se uma boa concordância entre os resultados aqui obtidos e os da literatura independente do tipo da análise. O fator de carga limite,  $\lambda_{lim}$ , obtido com a análise elástica é maior que o correspondente à análise inelástica. A diferença é menor quando ligações mais flexíveis, tipo *F*, são usadas. É importante destacar que o fator de carga limite aumenta à medida que há uma redução na flexibilidade da ligação. No pórtico com ligações rígidas, destaca-se apenas a influência da capacidade de momento plástico da viga e da coluna no comportamento do elemento estrutural. Já para o pórtico com ligação semi-rígida tipo *F*, com comportamento momento-rotação não linear, é notado que a flexibilidade da ligação exerce grande influência no comportamento global do sistema estrutural, visto que o momento último da ligação,  $M_u = 101.7$  kNm, é bastante inferior ao momento de plastificação das vigas,  $M_p = 307.14$  kNm.

**Tabela 8.5** Fator de carga limite,  $\lambda_{lim}$ , obtido na análise de capacidade de carga

<b>Ligação</b>	<b>Análise elástica</b>	<b>Análise inelástica</b>
<i>Rígida</i>	11.46	1.04
<i>E</i> (Modelo linear)	10.26	1.04
<i>E</i> (Modelo não linear)	2.75	1.04
<i>F</i> (Modelo linear)	8.33	1.04
<i>F</i> (Modelo não linear)	1.60	0.77

Para o pórtico com ligações rígidas e semi-rígidas tipo *E*, o desenvolvimento da plasticidade nas vigas e colunas durante a análise é ilustrado na Figura 8.17. Quando se consideram as ligações rígidas, Figura 8.17a, treze rótulas plásticas são desenvolvidas. A ordem de formação dessas rótulas é indicada no interior do círculo totalmente preenchido. As treze seções transversais se plastificam completamente para  $\lambda = 0.79, 0.85, 0.87, 0.88, 1.00, 1.01, 1.02$  e  $1.04$ . Outras vinte e duas seções transversais que sofreram degradação da rigidez são indicadas através de um círculo sem preenchimento. O grau de plastificação dessas seções, em porcentagem, é indicado no interior desse círculo. Na Figura 8.17b, verifica-se que, durante o histórico de carregamento na estrutura com ligações semi-rígidas tipo *E*, se formam seis rótulas plásticas nas seções transversais centrais das vigas. Os fatores de carga nos quais elas se desenvolveram são:  $0.7, 0.71, 0.72$  e  $0.74$ . Observa-se, nos dois casos, que o escoamento das seções transversais nas colunas dos dois primeiros

pavimentos ocorreu de forma bastante similar. Isso também é percebido nas seções localizadas no centro das vigas com a presença de rótulas plásticas.



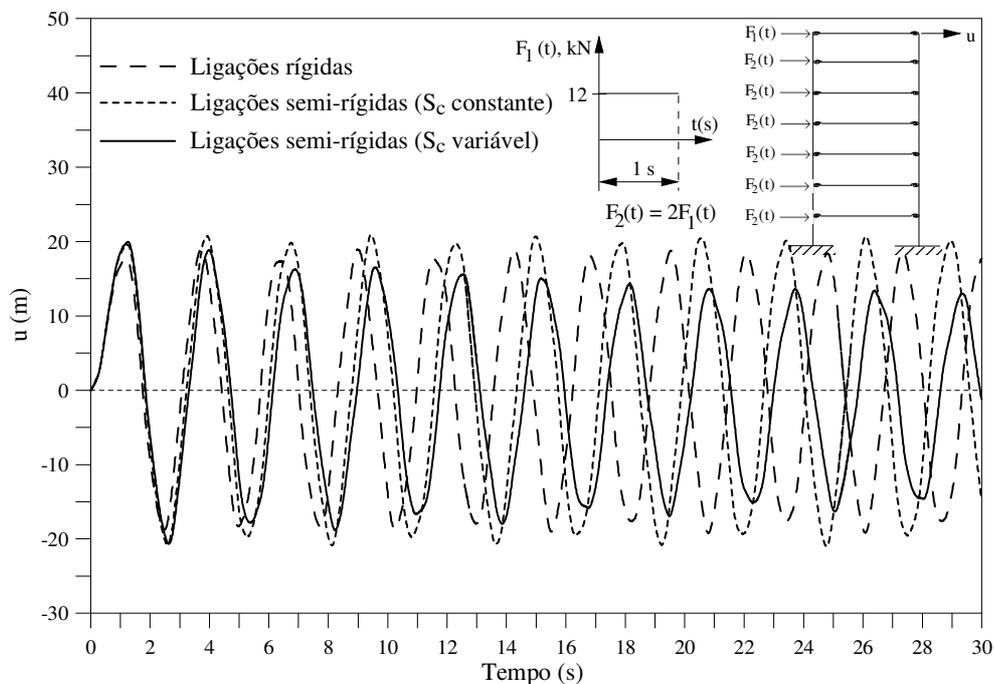
**Figura 8.17** Plastificação nos membros estruturais do pórtico

### 8.3.2 Análise Dinâmica Não Linear

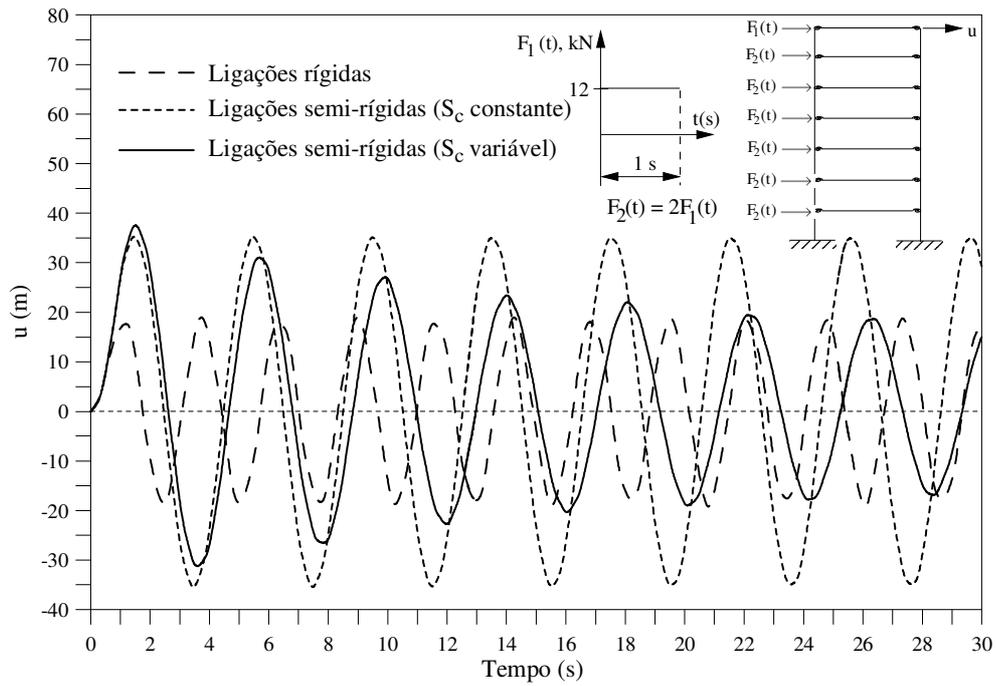
Finalizando a análise para o pórtico de sete andares, realiza-se nesta seção a sua análise transiente. O carregamento considerado nessa análise é similar ao ilustrado na Figura 8.13b. Cargas gravitacionais uniformemente distribuídas com intensidades 50 kN/m e 67.5 kN/m são aplicadas, respectivamente, no topo da estrutura e nas demais vigas. Essas cargas são transformadas em cargas nodais equivalentes e consideradas como massas concentradas para serem incluídas diretamente na matriz de massa global do sistema estrutural. Para avaliar a resposta dinâmica dessa estrutura, aplicaram-se pulsos,  $F_1(t) = 12 \text{ kN}$  e  $F_2(t) = 24 \text{ kN}$ , com duração de 1 s no topo das colunas como mostra a Figura 8.13b. A massa volumétrica foi considerada igual a  $7800 \text{ N s}^2/\text{m}^4$  em todos os

membros estruturais. No processo de integração numérica das equações de movimento, utilizaram-se incrementos de tempo,  $\Delta t$ , constantes e iguais a  $10^{-3}$  s. Uma tolerância de  $10^{-5}$  foi considerada no critério convergência do processo iterativo mostrado no Capítulo 6. Para simular os efeitos da não linearidade geométrica, a formulação SOF-2 linearizada foi escolhida. Para os elementos finitos modelados com molas nas extremidades, as matrizes de rigidez foram definidas através da formulação SRF-1.

As Figuras 8.18 e 8.19 ilustram os históricos de deslocamento no topo do pórtico de sete andares com ligações semi-rígidas tipos *E* e *F*, respectivamente. O tempo total de análise é 30 s. Nas duas figuras, as respostas assumindo todas as ligações rígidas são também mostradas. Para a estrutura com ligações semi-rígidas com comportamento não linear ( $S_c$  variável), observa-se a diminuição gradual nas amplitudes do deslocamento  $u$ . Nos outros dois casos, ou seja, quando as ligações são consideradas rígidas ou com comportamento linear ( $S_c$  constante), as amplitudes se mantêm constantes, o que mostra claramente que o amortecimento nas respostas dinâmicas é conseguido apenas com as ligações semi-rígidas que apresentam comportamento momento-rotação não linear. Pode-se observar para as ligações rígidas que as amplitudes dos deslocamentos são menores, pois, nesse caso, a rigidez estrutural é maior. Além disso, o período de vibração é maior quando se adotam ligações mais flexíveis, ou seja, tipo *F*.

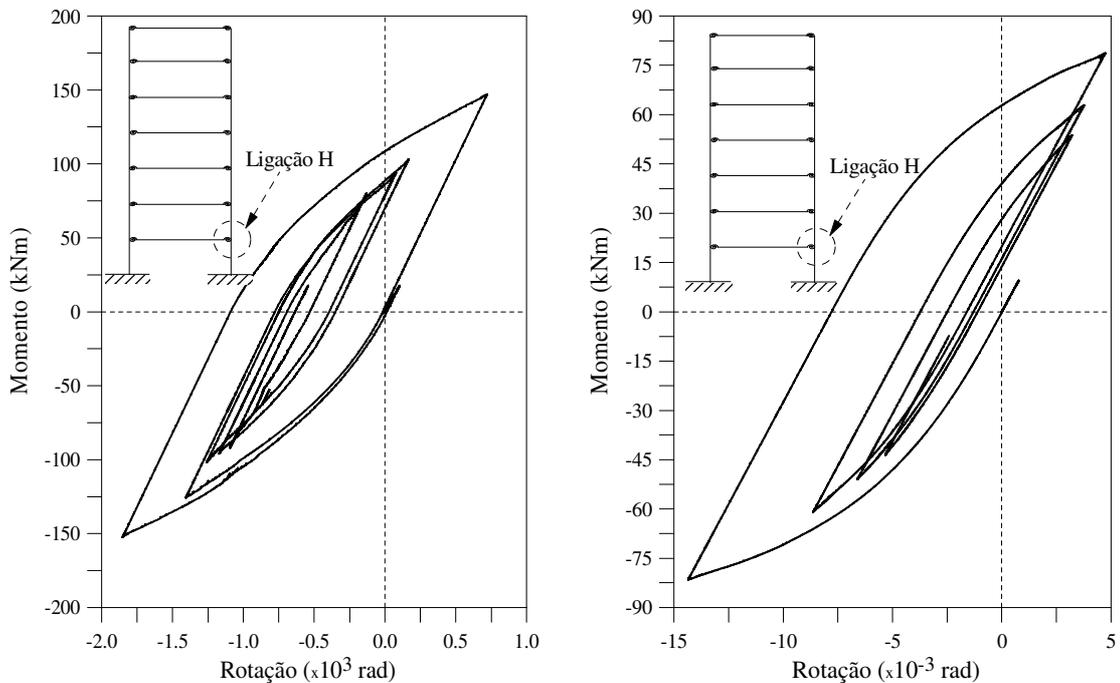


**Figura 8.18** Resposta transiente para o pórtico com ligações semi-rígidas tipo *E*



**Figura 8.19** Resposta transiente para o pórtico com ligações semi-rígidas tipo *F*

Na Figura 8.20 são exibidas as respostas momento-rotação para a ligação *H* localizada na coluna direita do primeiro andar. Na Figura 8.20a considera-se a ligação como do tipo *E*, e, na Figura 8.20b, essa ligação é do tipo *F*. Apenas os ciclos nos primeiros 15s de análise são exibidos.



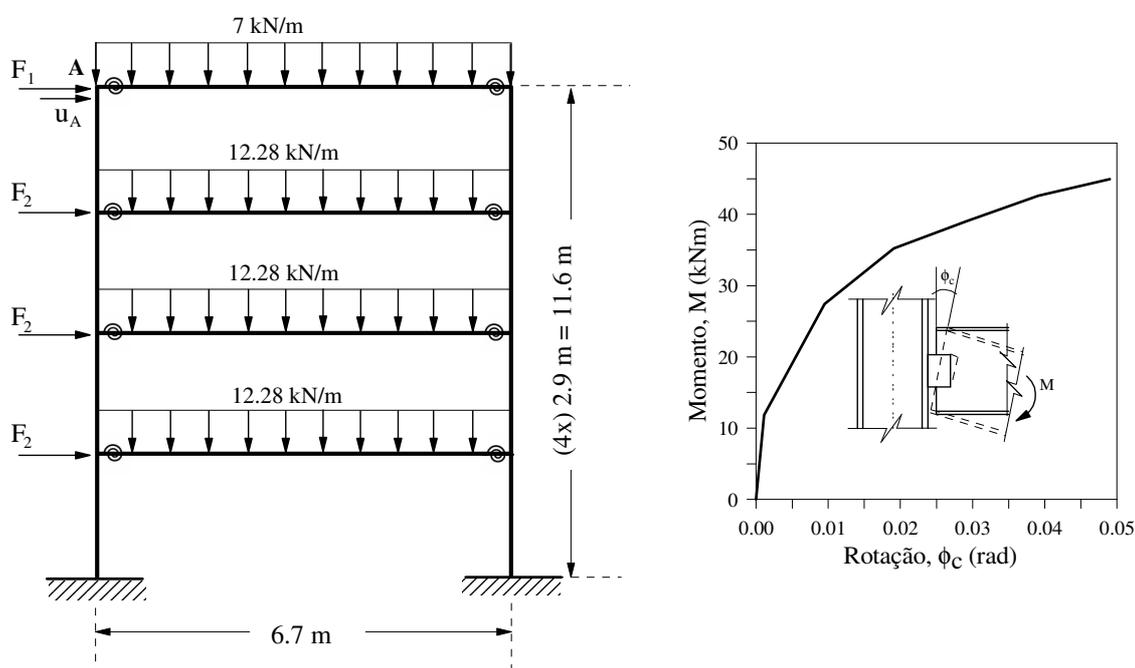
(a) Ligação com comportamento tipo *E*

(b) Ligação com comportamento tipo *F*

**Figura 8.20** Comportamento histerético da ligação

## 8.4 Pórtico de Quatro Andares

Finalizando esse capítulo, tem-se um pórtico de quatro pavimentos ilustrado na Figura 8.21. Trata-se de um modelo estrutural baseado no projeto arquitetônico de edifícios residenciais populares padrões da Usiminas (Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais S/A). A resposta dinâmica dessa estrutura foi analisada por da Silva *et al.* (2008) e Castro (2006) usando o programa comercial Ansys (Ansys, 2003) e, sendo assim, maiores detalhes referentes a essa estrutura podem ser encontrados nesses trabalhos. As propriedades geométricas desse sistema estrutural são ilustradas na Figura 8.21.



**Figura 8.21** Pórtico analisado: geometria, carregamento e comportamento das ligações

O perfil utilizado nas vigas, I10"x37.1 kg/m, tem as seguintes propriedades: área  $A = 48.1 \text{ cm}^2$ , inércia  $I = 5140 \text{ cm}^4$ , módulo elástico  $W = 708.6 \text{ cm}^3$  e módulo plástico  $Z = 708.6 \text{ cm}^3$ . As colunas são constituídas por perfis CVS 300x56.5 com área, inércia, módulo elástico e plástico iguais a  $72.0 \text{ cm}^2$ ,  $11730 \text{ cm}^4$ ,  $78.2 \text{ cm}^3$  e  $870.0 \text{ cm}^3$ , respectivamente. É importante informar que o módulo plástico para um perfil tipo I, como esses considerados nesse exemplo, pode ser calculado usando-se a seguinte equação: (Wong, 2009):

$$Z = Bt_f(D - t_f) + t_w \left( \frac{D}{2} - t_f \right)^2 \quad (8.1)$$

sendo  $D$  a altura,  $B$  a largura da mesa,  $t_w$  a espessura da alma e  $t_f$  a espessura da mesa do perfil. Já o módulo plástico é calculado usando o fator de forma definido na Seção 4.5 do Capítulo 4.

Ligações semi-rígidas são usadas para interligar vigas e colunas. O comportamento momento-rotação da ligação adotada, que possui rigidez inicial igual a 10830 kNm/rad, é exibido na Figura 8.21. Informação referente ao momento último da ligação não foi fornecida por da Silva *et al.* (2008). O modelo multilinear será usado para representar esse comportamento (Apêndice B, Seção B.3.4). O módulo de elasticidade e a tensão de escoamento em todos os membros são 205 GPa e 235 MPa, respectivamente.

Apresentam-se nas duas próximas seções as análises realizadas com o pórtico de quatro andares. Para esses estudos, a estrutura foi discretizada usando um elemento finito em cada uma das colunas e dois, nas vigas.

#### 8.4.1 Análise Estática Não Linear

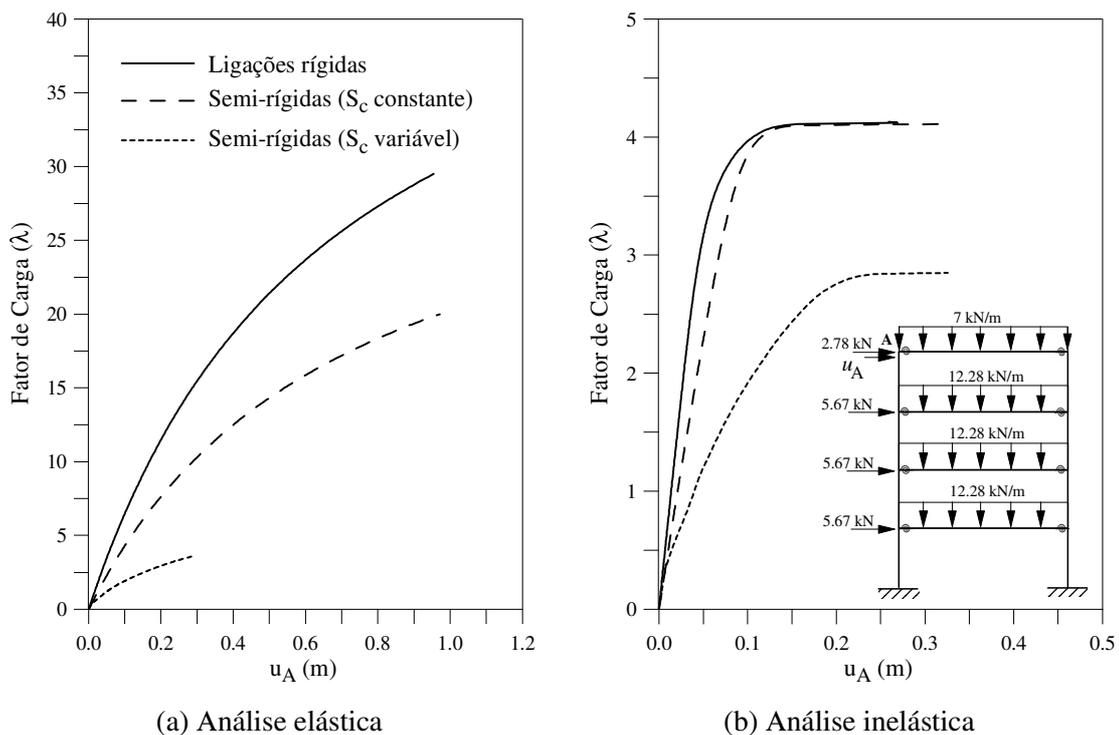
O carregamento aplicado na estrutura para estabelecer a análise estática é mostrado na Figura 8.21 apresentada anteriormente. Nas vigas, têm-se cargas uniformemente distribuídas que são incrementadas pelo parâmetro de carga  $\lambda$  durante a análise. Já no topo das colunas encontram-se cargas horizontais concentradas,  $F_1 = 2.78\lambda$  kN e  $F_2 = 5.67\lambda$  kN.

Na análise elástica, os efeitos de segunda ordem e a flexibilidade das ligações são considerados através das formulações SOF-1 e SRF-2, respectivamente. O estudo do comportamento inelástico da estrutura é conduzido através das formulações PHF-1, quando todos os membros são rigidamente interligados, e AAF-1, caso se considerem ligações semi-rígidas. Os efeitos da inelasticidade do aço são capturados através do parâmetro escalar  $\psi$ , definido através de uma função matemática baseada nas superfícies de resistência plástica fornecidas pelo AISC (2003). Nessas formulações, simulam-se os efeitos de segunda ordem com o uso das funções de estabilidade (Apêndice A).

Na metodologia de solução incremental-iterativa (Figura 3.3 do Capítulo 3) usa-se o método de Newton-Raphson padrão e a estratégia de incremento direto de carga com iteração a carga constante. O incremento do parâmetro de carga foi considerado igual a  $10^{-2}$  e adotou-se uma tolerância de  $10^{-4}$  na convergência do processo iterativo.

As Figuras 8.22a e 8.22b apresentam as trajetórias de equilíbrio obtidas, respectivamente, nas análises elástica e inelástica. O deslocamento horizontal,  $u_A$ , no topo da coluna situada à esquerda (Figura 8.21) foi monitorado durante o acréscimo do

parâmetro de carga  $\lambda$  e sua variação é ilustrada nessas figuras. A Tabela 8.6 resume os fatores de carga limite que definiram o colapso dessa estrutura. Como vem sendo observado nos exemplos apresentados, as cargas limites encontradas na análise inelástica são inferiores aos da análise elástica. Nota-se que o modelo de ligação, linear ou não linear, influencia a resposta estrutural. A degradação da rigidez da ligação faz com que a carga máxima suportada pela estrutura seja inferior àquela obtida considerando as hipóteses de ligações rígidas ou semi-rígidas com curva momento-rotação linear ( $S_c$  constante). Observando a resposta inelástica para o pórtico com ligações semi-rígidas com rigidez variável, conclui-se que o seu comportamento é governado pelo acoplamento dos efeitos de segunda ordem, flexibilidade da ligação e inelasticidade do aço. Quando todas as ligações são rígidas, a plastificação dos membros estruturais é responsável pela redução do fator de carga limite.



**Figura 8.22** Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de quatro andares

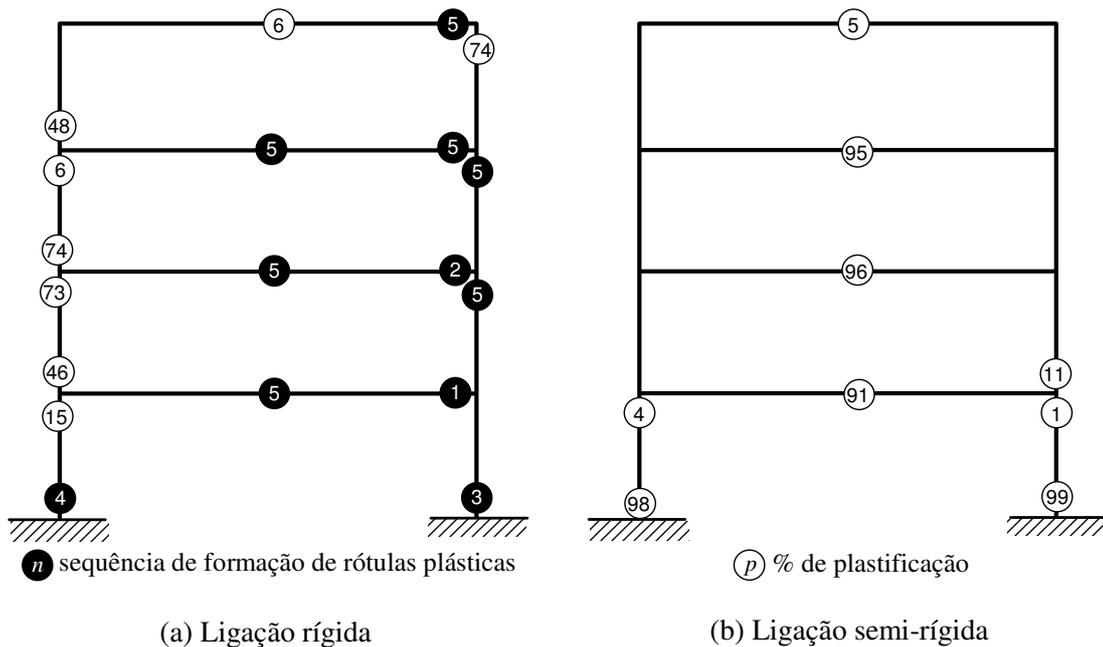
A Figura 8.23 ilustra a distribuição da plasticidade quando ocorre o colapso estrutural. Na Figura 8.23a, para o pórtico com ligações rígidas a resistência limite de onze seções transversais foi atingida e rótulas plásticas se formaram nas posições indicadas através de um círculo totalmente preenchido. A ordem em que essas rótulas se desenvolveram é indicada nesse círculo. As seções se plastificam quando  $\lambda = 4.06, 4.07,$

4.08, 4.12 e 4.20. Outras oito seções se encontram em regime elasto-plástico com grau de plastificação, em porcentagem, mostrado no interior do círculo sem preenchimento.

**Tabela 8.6** Fator de carga limite,  $\lambda_{lim}$

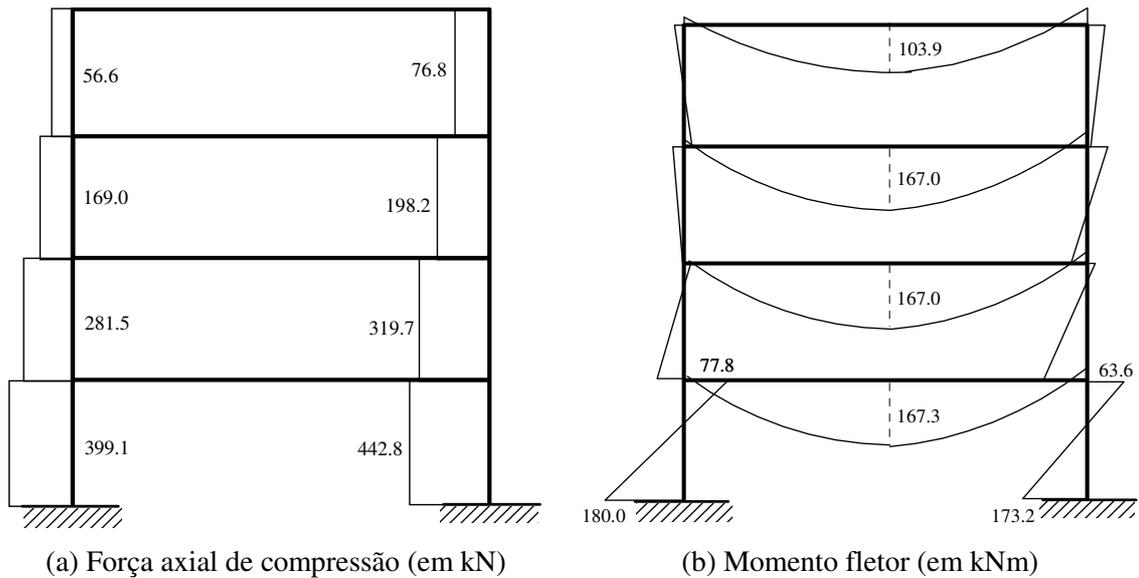
Ligação	Análise elástica	Análise inelástica
Rígida	54.3	4.21
Ligação semi-rígida ( $S_c$ linear)	26.4	4.20
Ligação semi-rígida ( $S_c$ não linear)	3.62	2.85

Para o pórtico com ligações semi-rígidas com comportamento não linear, Figura 8.23b, nenhuma seção transversal se plastifica completamente. Nesse caso, como já observado anteriormente, a resposta estrutural é pouco influenciada pelos efeitos da inelasticidade do material. O grau de plastificação de nove seções que se encontram em regime elasto-plástico é mostrado.



**Figura 8.23** Grau de plastificação dos membros estruturais

Os esforços axiais nas colunas e os momentos no centro das vigas e nas colunas do primeiro pavimento, obtidos quando a carga limite foi atingida, estão indicados na Figura 8.24. Os diagramas se referem à análise inelástica realizada com o pórtico de quatro andares considerando as suas ligações viga-coluna semi-rígidas e com comportamento momento-rotação não linear.



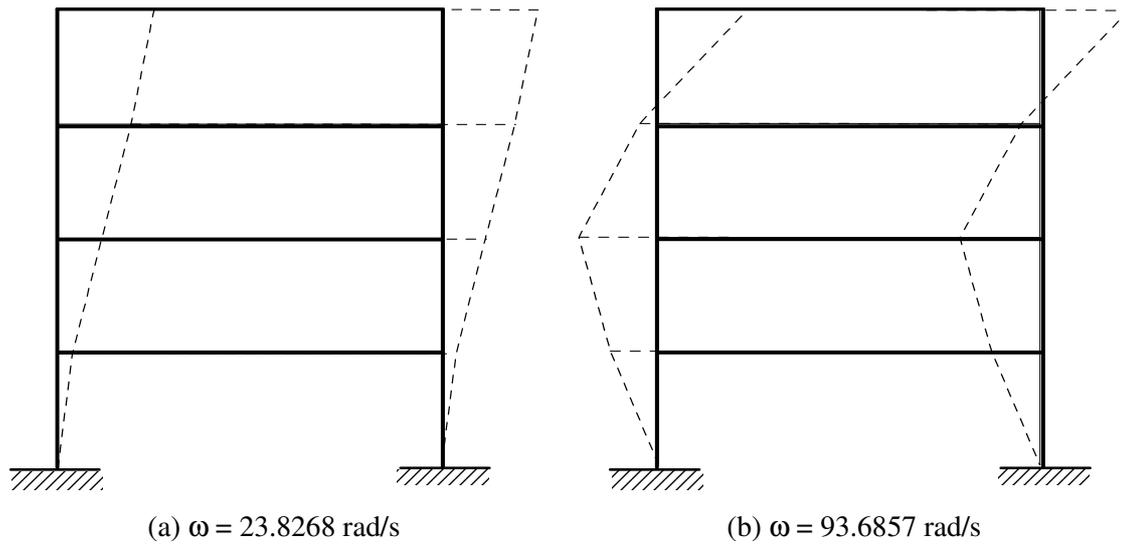
**Figura 8.24** Esforços solicitantes nos membros estruturais

### 8.4.2 Análise Dinâmica Não Linear

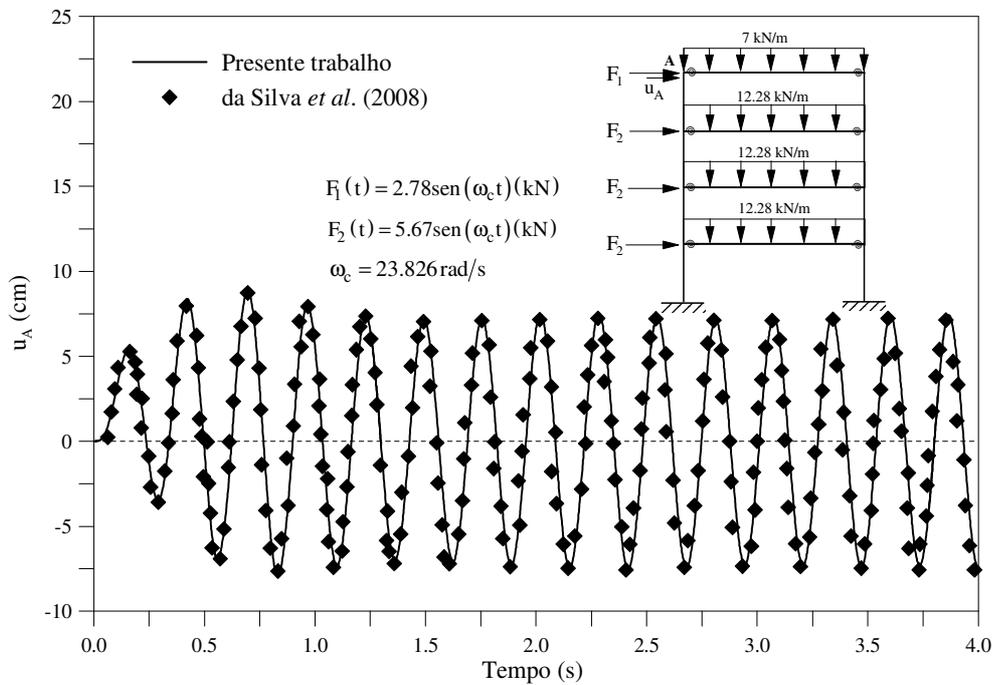
Finalizado este capítulo, realiza-se a análise transiente submetendo o pórtico de quatro andares a carregamentos harmônicos,  $F_1 = 2.78 \sin \omega_c(t)$  e  $F_2 = 5.67 \sin \omega_c(t)$ , aplicados no topo das colunas como exemplificado na Figura 8.21. As cargas uniformemente distribuídas nas vigas, de intensidades 7 kN/m e 28 kN/m, são modeladas como cargas nodais equivalentes e aplicadas estaticamente à estrutura. Nessa análise transiente, as formulações SOF-1 e SRF-2 simulam os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade da ligação, respectivamente. Incrementos constantes de tempo,  $\Delta t = 10^{-3}$  s, foram usados. Para convergência do processo iterativo de solução considerou-se uma tolerância igual  $10^{-5}$ .

Apenas a influência das ligações semi-rígidas será considerada na análise dinâmica. Sendo assim, a Figura 7.5 exhibe os dois primeiros modos de vibração para a estrutura e as frequências naturais de vibração,  $\omega$ , referentes a esses modos estão também indicadas.

Considerando a frequência da força de excitação,  $\omega_c$ , igual à menor frequência natural da estrutura, 23.8268 rad/s, a resposta dinâmica do pórtico de quatro andares foi obtida e é ilustrada na Figura 8.26. Mostra-se o histórico do deslocamento horizontal no topo da coluna esquerda,  $u_A$ , durante 4 s. Pode ser verificado um comportamento já observado no capítulo anterior. Inicialmente, tem-se o deslocamento oscilando com amplitudes máximas e mínimas variáveis, caracterizando o regime transiente e, após 1.5 s, aproximadamente, entra em regime permanente com o movimento se mantendo constante.



**Figura 8.25** Primeiro e segundo modos de vibração da estrutura

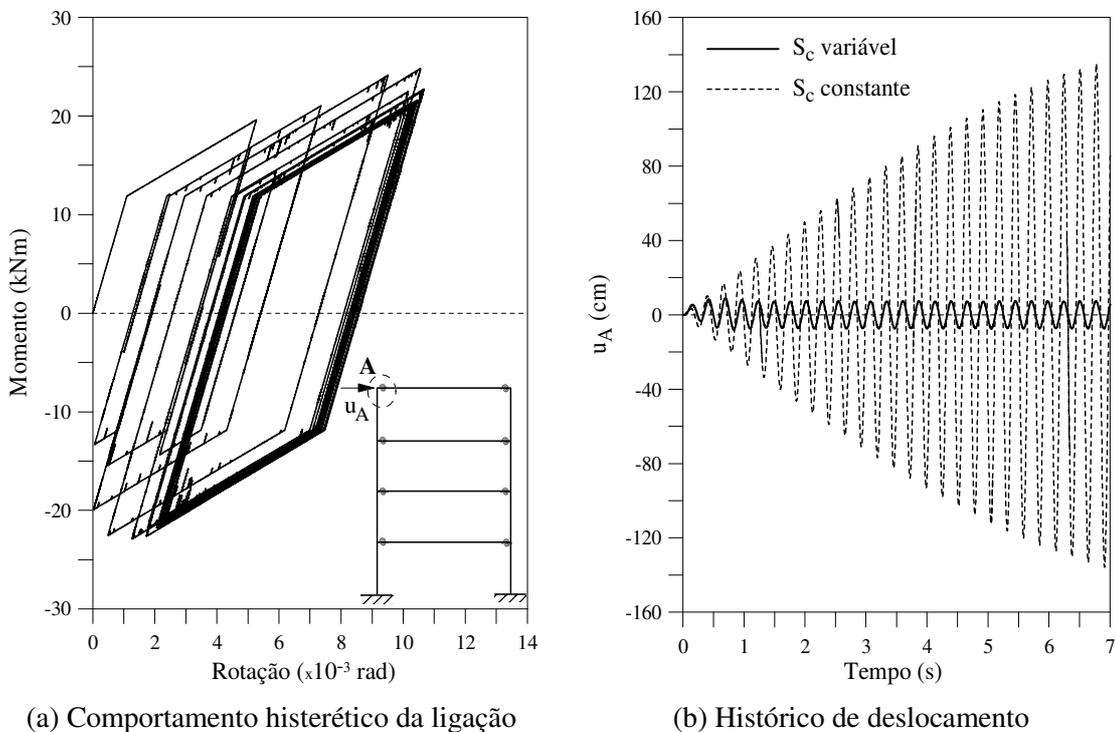


**Figura 8.26** Histórico de deslocamentos para o pórtico de quatro andares

Durante esse período de resposta constante, a energia gerada pelas forças externas e a energia dissipada pela estrutura através das ligações semi-rígidas são aproximadamente iguais. Sendo assim, durante o regime permanente, os ciclos histeréticos de carregamento e descarregamento coincidem. Isso pode ser comprovado na Figura 8.27a que apresenta as curvas momento-rotação para uma das ligações viga-coluna. A ligação escolhida situa-se no topo da estrutura e está indicada nessa figura. Comparam-se as respostas obtidas neste trabalho com os resultados numéricos encontrados por da Silva *et al.* (2008) usando um

incremento de tempo constante e igual a  $10^{-5}$  s. Cabe ressaltar que da Silva *et al.* (2008) apresentaram a resposta temporal em função de um fator de amplificação definido como o quociente entre os deslocamentos obtidos nas análises dinâmica e estática, sendo o deslocamento horizontal do ponto A encontrado na análise estática igual a 4.27 cm (Castro, 2006).

Na Figura 8.27b, onde são comparadas as respostas assumindo o comportamento linear e não linear das ligações, nota-se a grande redução na resposta em decorrência da dissipação de energia que é resultante da deformação da ligação semi-rígida com comportamento não linear. Por fim, verifica-se mais uma vez com esse exemplo que o fenômeno da ressonância, presente no caso linear, não ocorre.



**Figura 8.27** Resposta transiente para o pórtico de quatro andares

# Capítulo 9

## Considerações Finais

### 9.1 Introdução

Neste trabalho, um programa para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), baseado no Método dos Elementos Finitos, foi apresentado. Com o CS-ASA, tornou-se possível a realização de uma análise mais completa e realística do comportamento de uma estrutura com a simulação dos principais efeitos não lineares que o alteram. As considerações sobre as fontes de não linearidades presentes nas estruturas metálicas foram feitas ao longo deste trabalho. O primeiro desses efeitos se refere à não linearidade geométrica, que se torna significativa nos membros sujeitos a esforços axiais de compressão e contribui para a diminuição da rigidez estrutural aumentando a deformação do sistema. Por outro lado, uma das suposições básicas da análise estrutural convencional é que as ligações são perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. Contudo, estudos comprovaram que as ligações não têm esses comportamentos e tais hipóteses podem conduzir a previsões irreais sobre a resposta e a resistência de um sistema estrutural. Sendo assim, os efeitos da flexibilidade da ligação devem ser incluídos na análise e, para isso, a ligação semi-rígida foi modelada através de um elemento de mola, cuja deformação rotacional é decorrente apenas do momento fletor que nela atua. Para representar matematicamente o comportamento momento-rotação e rigidez-rotação da ligação foram implementados cinco modelos matemáticos bastante usados na literatura: linear, exponencial, exponencial modificado, de potências e multilinear. Por fim, tem-se o efeito decorrente da inelasticidade do aço que é tratado através do método da rótula plástica

refinado. Essa abordagem permite capturar a transição do escoamento inicial da seção até a sua plastificação total. Adicionalmente, os efeitos das imperfeições iniciais geométricas e do material (tensões residuais) foram também considerados. Uma vez que se consideram esses efeitos, elimina-se a necessidade de processar a análise estrutural e o projeto em fases distintas (Chen e Toma, 1994; Chen e Kim, 1997).

Na avaliação do comportamento dinâmico de um sistema estrutural, apenas os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade da ligação foram considerados.

Para a simulação de cada um dos efeitos não lineares, têm-se como opções no CS-ASA mais de uma formulação de elementos finitos. Isso é bastante importante, pois a possibilidade de escolha entre diferentes formulações permite superar as dificuldades inerentes a uma análise numérica.

Nas duas próximas seções algumas conclusões referentes ao trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros, com o objetivo de tornar possível a realização de outras análises com o sistema computacional CS-ASA proposto serão estabelecidas.

## **9.2 Conclusões**

Os resultados das análises não lineares realizadas em vários sistemas estruturais, apresentando diferentes geometrias e condições de carregamento, foram comparados com as soluções numéricas, analíticas ou experimentais disponíveis na literatura. A boa concordância entre todas as respostas permite afirmar que as formulações não lineares foram implementadas corretamente e as metodologias de solução adotadas são eficientes, e podem ser usadas para avaliar o comportamento estático e dinâmico de estruturas metálicas reticuladas planas. A seguir, outras conclusões e alguns comentários serão estabelecidos separadamente referentes à resposta estática e dinâmica observada nas análises com os sistemas estruturais estudados nos Capítulos 5, 7 e 8.

### **9.2.1 Análise Estática Não Linear**

Nos Capítulos 5 e 8 deste trabalho, usando as formulações e a metodologia de solução abordadas nos Capítulos 3 e 4, foram efetuadas análises não lineares da estabilidade elástica e inelástica de sistemas estruturais com ligações rígidas e semi-rígidas quando submetidos a carregamentos estáticos. Sendo assim, algumas observações correspondentes às respostas encontradas permitem que se estabeleçam algumas conclusões. Para a solução do problema estático não linear, várias técnicas numéricas para controle automático do

incremento do parâmetro de carga e de iteração foram implementadas no sistema computacional. A escolha por uma das estratégias depende do objetivo da análise. Algumas delas são capazes de traçar de forma completa trajetórias de equilíbrio estrutural fortemente não lineares com a presença de pontos limites de carga e deslocamento e de bifurcação. Estruturas esbeltas que apresentam curvas carga-deslocamento (ou rotação) com esse comportamento não linear foram apresentadas na Seção 5.2 e entre elas, destacam-se duas: o pórtico de Lee e o arco circular. Nesses casos, a estratégia do comprimento de arco e a técnica do deslocamento generalizado são indicadas. Essa última, por não necessitar da resolução de uma equação quadrática, cujas raízes podem ser imaginárias, torna-se, nessas situações, mais eficiente que a técnica do comprimento de arco cilíndrico ou esférico onde tal problema pode acontecer. Quando a trajetória de equilíbrio apresenta apenas pontos limites de carga, a técnica do controle de uma componente de deslocamento, por exemplo, pode ser eficiente. Já em análises cujo objetivo seja apenas determinar a carga limite de estabilidade da estrutura, qualquer uma das estratégias pode ser utilizada.

Três formulações que consideram os efeitos da não linearidade geométrica foram desenvolvidas. Duas delas, SOF-1 e SOF-2, são baseadas na teoria de Euler-Bernoulli e definidas em referencial Lagrangiano atualizado. A terceira, SOF-3, é desenvolvida em referencial Lagrangiano total e segue a teoria de Timoshenko, o que permite a análise de estruturas espessas. Os resultados obtidos, ao serem comparados àqueles encontrados na literatura, comprovaram a eficiência de cada uma dessas formulações. A discretização do sistema estrutural, evidentemente, teve influência na resposta. Entretanto, com uma modelagem adequada e um mesmo número de elementos finitos, as trajetórias de equilíbrio obtidas com as três formulações foram comparadas e se mostraram bastante semelhantes.

A influência das ligações semi-rígidas na capacidade de carga e estabilidade das estruturas metálicas foi também verificada nos Capítulos 5 e 8. Três formulações, definidas em referencial Lagrangiano atualizado, foram desenvolvidas e implementadas para considerar a semi-rigidez das ligações: SRF-1, SRF-2 e SRF-3. Apenas SRF-3 é capaz de considerar a excentricidade da ligação, representada pelo comprimento não nulo do elemento de mola. As demais consideram esse elemento com comprimento nulo. Tais formulações, juntamente com aquelas que simulam os efeitos de segunda ordem e usam esse mesmo referencial, foram selecionadas nas análises elásticas. Os resultados encontrados nos problemas da Seção 5.3 e do Capítulo 7 indicaram que a carga limite é menor para as ligações mais flexíveis e, adicionalmente, o tipo de apoio, engastado ou

rotulado, desempenha um papel importante no comportamento estrutural. Como foi observado para o pórtico de dois andares, o apoio rígido eleva bastante o valor da carga crítica. Isto é, para um mesmo nível de carga, os deslocamentos na estrutura são menores quando se usam ligações mais rígidas. O aumento da flexibilidade acentua o efeito  $P-\Delta$ . A função usada para representar a curva momento-rotação da ligação, linear ou não linear, também teve grande influência na resposta estrutural. Com uma aproximação mais real do comportamento estrutural, adotando um modelo não linear, a degradação da rigidez da ligação faz com que a carga máxima suportada pela estrutura seja inferior àquela obtida assumindo as ligações como rígidas ou semi-rígidas com comportamento linear, na qual a rigidez permanece constante durante a análise. Apenas um dos modelos matemáticos (ver Apêndice B) implementados para simular o comportamento momento-rotação das ligações semi-rígidas não foi aplicado ou testado neste trabalho, pois não se encontrou na literatura uma ligação na qual os parâmetros necessários para representá-lo fossem fornecidos. Trata-se do modelo exponencial modificado, que se refere a um aprimoramento do exponencial. Todos os outros modelos se mostraram capazes de simular o comportamento da ligação e atualizar a sua rigidez durante o processo de análise.

Foram apresentadas ainda duas formulações que tratam o problema da inelasticidade do aço através da abordagem refinada da rótula plástica. Com esse método, como já destacado, o processo de plastificação da seção é acompanhado do início de escoamento até sua plastificação total. As duas metodologias estudadas, PHF-1 e PHF-2, adotam diferentes critérios para definir a plastificação da seção transversal. As respostas das análises inelásticas de estruturas com hipóteses de ligações perfeitamente rígidas, ao serem comparadas com soluções numéricas obtidas por outros pesquisadores através dos métodos da rótula plástica e zona plástica, permitem concluir que as duas formulações propostas podem ser usadas para estudar o comportamento inelástico e determinar a carga crítica de estruturas metálicas planas. Vale mencionar que existem duas diferentes opções, SOF-1 ou SOF-2, para se considerar os efeitos de segunda ordem na formulação PHF-2. As funções de estabilidade têm essa responsabilidade na formulação PHF-1. Observou-se que o colapso em estruturas com ligações rígidas foi associado em alguns casos com a plasticidade dos membros e em outros, com a instabilidade inelástica das colunas.

Nas formulações de elementos finitos, a consideração conjunta dos efeitos da não linearidade geométrica da estrutura e física do aço e das ligações semi-rígidas proporciona, como se sabe, uma análise estrutural mais verdadeira. Para isso, duas formulações desenvolvidas a partir daquelas citadas no parágrafo anterior, AAF-1 e AAF-2, foram

implementadas. A análise avançada realizada na Seção 5.5 e no Capítulo 8 mostrou que o comportamento inelástico pré-crítico do sistema estrutural em estudo, independente do tipo de ligação escolhido, é bastante influenciado pelo modelo de ligação adotado, linear ou não linear. Assim como na análise elástica, os fatores de carga limite na análise inelástica foram maiores quando se adotou o modelo linear para representar o comportamento das ligações. Entretanto, quando a capacidade de momento da ligação era superior ao momento de plastificação das seções transversais, a inelasticidade dos membros governou o comportamento estrutural. Para as estruturas com ligações mais flexíveis, cujos momentos últimos eram menores que os momentos plásticos das seções das vigas, foi possível observar que a flexibilidade da ligação dominou predominantemente o comportamento global do sistema estrutural. Em outros casos, o acoplamento dos três efeitos não lineares considerados na análise: segunda ordem, inelasticidade do aço e flexibilidade da ligação teve influência na definição da carga última de colapso.

### **9.2.2 Análise Dinâmica Não Linear**

As observações e conclusões nesta seção referem-se às análises realizadas nos Capítulos 7 e 8. As mesmas formulações mencionadas anteriormente para simular os efeitos da não linearidade geométrica e a flexibilidade da ligação foram usadas nessas análises. O procedimento incremental e iterativo que combina o método implícito clássico de Newmark com a técnica de Newton-Raphson foram adotados na solução do problema transiente não linear.

Inicialmente foram realizadas análises de vibração livre da estrutura. Nessas análises, apresentadas na Seção 6.2, foi verificada a influência da rigidez da ligação e do pré-carregamento estático nas frequências naturais de vibração do sistema. A análise das frequências é fundamental no estudo da estabilidade de sistemas estruturais com trajetórias de equilíbrio não lineares. Pelo critério dinâmico de estabilidade, se uma configuração de equilíbrio apresenta pelo menos uma das frequências com valor imaginário, ela é instável. Havendo uma frequência nula, o equilíbrio é indiferente ou crítico. Caso contrário, ela é considerada estável.

A relação não linear entre a frequência de vibração livre e a amplitude da resposta foi determinada em dois dos problemas analisados na Seção 6.2, o pórtico em L e o arco abatido, para estabelecer uma indicação sobre o tipo, *hardening* (endurecimento) ou *softening* (enfraquecimento), e grau de não linearidade do sistema estrutural com ligações

rígidas e semi-rígidas. Apenas o comportamento momento-rotação linear foi considerado nesses estudos. Incrementos de tempo relativamente pequenos e um leve amortecimento viscoso, proporcional à massa e à rigidez, foram considerados na obtenção dos resultados.

Nas análises transientes de estruturas com ligações semi-rígidas, observou-se a redução gradual nas amplitudes dos deslocamentos quando se considerou o comportamento histerético da ligação. Esse amortecimento natural é decorrente da dissipação de energia resultante da deformação da ligação semi-rígida. Para as estruturas submetidas a carregamentos de curta duração, quando as ligações são consideradas rígidas ou com comportamento momento-rotação linear, as amplitudes se mantiveram constantes após um determinado período, caracterizando o regime permanente. Além disso, o período de vibração foi maior quando se adotaram ligações mais flexíveis. Submetendo a estrutura a excitações harmônicas, verificou-se que, embora os deslocamentos obtidos considerando o comportamento histerético das ligações tenham sido amplificados ou amortecidos dependendo da frequência de vibração dessas forças, o efeito de ressonância não ocorreu.

Sendo assim, conclui-se que o comportamento dinâmico de estruturas com ligações semi-rígidas pode ser bastante favorecido pelo aumento do período de vibração e pelo amortecimento. Cabe ressaltar que, nas análises transientes de estruturas com ligações semi-rígidas nenhum amortecimento viscoso foi considerado no sentido de evidenciar o amortecimento natural nas respostas ao se considerar o comportamento cíclico das ligações.

### **9.3 Sugestões para Futuras Pesquisas**

Algumas sugestões para trabalhos futuros serão destacadas nesta seção. Em algumas delas, citam-se também as referências que podem ser consultadas.

- Pré e pós-processador gráficos para o programa CS-ASA;
- Análise avançada usando a norma brasileira NBR 8800 (Landesmann e Batista, 2005);
- Análise transiente inelástica

A estabilidade inelástica de pórticos planos metálicos com ligações rígidas ou semi-rígidas, sob carregamento estático, tem sido extensivamente estudada nas últimas décadas. Porém, problemas envolvendo a excitação dinâmica dessas estruturas têm recebido atenção limitada nas pesquisas. Para complementar este trabalho, sugere-se então implementar rotinas no sistema computacional para tornar possível esse tipo de

análise. Alguns trabalhos relacionados podem ser citados: Chan e Chui (2000), Lazanha (2003); Sekulovic e Nefovska (2008), Au e Yan (2008), Mata *et al.* (2008);

- Análise inelástica baseada no método da rótula plástica de estruturas em situação de incêndio (Iu e Chan, 2004);
- Análise de estruturas mistas aço-concreto baseada no conceito da rótula plástica refinada (Salazar e Haldar, 1999; Iu *et al.*, 2009);
- Análise de estruturas constituídas por perfis tubulares (Liew e Tang, 2000; Iu *et al.*, 2009);
- Análise inelástica considerando os efeitos do encruamento do aço, o que proporciona um aumento da rigidez estrutural;
- Consideração da interação entre força cortante e momento fletor  
Nas construções em aço, as colunas são muitas vezes submetidas a efeitos significativos provocados pelo momento fletor e força axial, enquanto as vigas, aos efeitos da combinação entre o momento fletor e o esforço cortante. Outra proposta de trabalho é então realizar a análise inelástica das estruturas considerando também a interação entre momento fletor e o esforço cortante (Xu *et al.*, 2005; Liu, 2008);
- Outros modelos e algoritmos para simular o comportamento histerético da ligação (Chan e Chui, 2000);
- Algoritmos não lineares para integração numérica  
A utilização de outras estratégias de integração temporal permitirá a obtenção de várias ferramentas essenciais ao estudo transiente e de vibrações não lineares. Sugere-se então expandir o sistema computacional e implementar outros algoritmos, como por exemplo, as técnicas de dissipação numérica controlada  $\alpha$ H-Newmark (Hilber e Hughes, 1978),  $\alpha$ B-Newmark (Wood *et al.*, 1980),  $\alpha$ -Generalizado (Chung e Lee, 1996; Chung e Hulbert, 1993, 1996; Martins, 2004) e HHT (Hilber *et al.*, 1977; Martins, 2004);
- Estratégias eficientes para se obter a relação não linear da frequência do carregamento versus amplitude da resposta estrutural em regime permanente (curva de ressonância) ultrapassando os pontos limites com os fenômenos *snap-through* e *snap-back* existentes na trajetória (Leung e Fung, 1990; Lewandowski, 1992, 1997a, 1997b; Ferreira e Serpa, 2005);
- Análises de treliças e pórticos espaciais;

- Análise de colapso progressivo.

# Referências Bibliográficas

- Abdalla, K.M., e Chen, W.F., 1995. Expanded database of semi-rigid steel connections. *Computers & Structures*, vol. 56(4), pp. 553-564.
- Abolmaali, A., Kukreti, A.R., e Razavi, H., 2003. Hysteresis behavior of semi-rigid double web angle steel connections. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 1057-1082.
- Ackroyd, M.H., e Gerstle, K.H., 1982. Behavior of type 2 steel frames. *Journal of the Structural Engineering*, vol. 108, pp. 1541-1556.
- Ackroyd, M.H., e Gerstle, K.H., 1983. Strength of flexibly connected steel frames. *Engineering Structures*, vol. 5, pp. 31-37.
- AISC, 1986. *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. 1st edn., American Institute of Steel Construction, AISC, Chicago, IL.
- AISC, 1989. *Manual of Steel Construction - Allowable Stress Design*. Chicago.
- AISC, 1994. *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction, AISC, 2nd edn., Chicago, IL.
- AISC-LRFD, 2003. *Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction, AISC, 1st edn., Chicago, IL.
- Al-Bermani, F.G.A., e Kitipornchai, S., 1992. Elastoplastic nonlinear analysis of flexibly jointed space frames. *Journal of Structural Engineering*, vol. 118(1), pp. 108-127.
- Al-Bermani, F.G.A., Li, B., Zhu, K., e Kitipornchai, S., 1994. Cyclic and seismic response of flexibly jointed frames. *Engineering Structures*, vol. 16(4), pp. 249-255.

- Alvarenga, A.R., 2005. *Aspectos Importantes na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Alvarenga, A.R., e Silveira, R.A.M., 2009. Second-order plastic zone analysis of steel frame - Part I: Numerical formulation and examples of validation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 6, pp. 131-152.
- Alves, R.V., 1993a. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total*. 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Alves, R.V., 1993b. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado*. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Ang, K.M., e Morris, G.A., 1984. Analysis of three-dimensional frames with flexible beam-column connections. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 11, pp. 245-254.
- Ansys, 2003. *Swanson Analysis Systems Inc.*, P.O. Box 65. Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, version 10, Basic analysis procedures, 2nd edn.
- Arbabi, F., 1982. Drift of flexibly connected frames. *Computers & Structures*., vol. 15(2), pp. 102-108.
- AS 4100, 1990. *Steel Structures, Standards Australia*. Sydney, Austrália.
- Assaid, L.M.B., 2001. *Método Plástico Aplicado às Estruturas Aporticadas de Aço*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, RJ, Brasil.
- Au, F.T.K., e Yan, Z.H., 2008. Dynamic analysis of frames with material and geometric nonlinearities based on the semirigid technique. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 8(3), pp. 415-438.
- Awkar, J.C., e Lui, E.M., 1999. Seismic analysis and response of multistory semirigid frames. *Engineering Structures*, vol. 21, pp. 425-441.
- Azizinamini, A., Bradburn, J.H., e Radziminski, J., 1987. Initial stiffness of semi-rigid steel beam-to-column joints. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 8, pp. 71-90.

- Azizinamini, A., Bradburn, J.H., e Radziminski, J.B., 1985. *Static and Cyclic Behavior of Semi-rigid Steel Beam-Column Connections*. Technical Report, Dept. of Civil Engineering, University of South Carolina, Columbia, SC.
- Barbosa, G.D., 2006. *Influência da Flexibilidade das Ligações no Projeto de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Barsan, G.M., e Chiorean, C.G., 1999. Computer program for large deflection elastoplastic analysis of semi-rigid steel frameworks. *Computers & Structures*, vol. 72(6), pp. 669-711.
- Bathe, K.J., 1996. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice-Hall.
- Bathe, K.J., e Bolourchi, S., 1979. Large displacement analysis of three dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 961-986.
- Batho, C., e Lash, S.D., 1936. *Further Investigations on Beam and Stanchion Connections Encased in Concrete, Together with Lab. Investigation on Full Scale Steel Frame*. Final Report, Steel Structures Research Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London.
- Batoz, J.L., e Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262-1267.
- Bayo, E., Cabrero, J.M., Gil, B., 2006. An effective component-based method to model semi-rigid connections for the global analysis of steel and composite structures. *Engineering Structures*, vol. 28, pp. 97-108.
- Bazant, Z., e Cedolin, L., 1991. *Stability of Structures*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.
- Belytschko, T., e Hsieh, B.J., 1973. Nonlinear transient analysis of shells and solids of revolution by convected elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 255-271.

- Benounna, M.M.K., e White, R.G., 1984. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes of a clamped-clamped uniform beam. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 96(3), pp. 309-331.
- Bergan, P.G., e Mollestad, E., 1985. An automatic time-stepping algorithm for dynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 49, pp. 299-318.
- Bergan, P.G., 1980. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers & Structures*, vol. 12, pp. 497-509.
- Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., e Soreide, T., 1978. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 1677-1696.
- Bergan, P.G., Mollestad, E., 1985. An automatic time-stepping algorithm for dynamic problems. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, vol. 49, pp. 299-318.
- Brebbia, C.A., e Ferrante, A.J., 1986. *Computational Methods for the Solution of Engineering Problem*. John Wiley and Sons Ltd.
- BS5950, 1990. *Structural Use of Steelwork in Buildings. Part 1*. British Standards Institution, London, England.
- Cabrero, J.M., e Bayo, E., 2005. Development of practical design methods for steel structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 27, pp. 1125-1137.
- Calado, L., 2003. Non-linear cyclic model of top and seat with web angle for steel beam-to-column connections. *Engineering Structures*, vol. 25, pp. 1189–1197.
- Campos Júnior, R.A., 1990. *Análise do Comportamento de Estruturas Reticuladas de Aço com Ligações Semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Carneiro, D.S., 2000. *Análise Plástica Aplicada a Estruturas Aporticadas em Aço*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Castro, R.A., 2006. *Modelagem Computacional de Ligações Semi-rígidas e sua Influência no Comportamento Dinâmico de Pórticos de Aço*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/FEN/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Chajes, A., e Churchill, J.E., 1987. Nonlinear frame analysis by finite element methods. *Journal of Structural Engineering*, vol. 113(6-Jun), pp. 1221-1235.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L., 1994. Vibration and modal analysis of steel frames with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 16(1), pp. 25-31.
- Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- Chan, S.L., e Chui., P.P.T., 1997. A generalized design-based elasto-plastic analysis of steel frames by sections assemblage concept. *Journal of Engineering Structures*, vol. 19(8), pp. 628-636.
- Chan, S.L., e Ho, G.W.M., 1994. Nonlinear vibration analysis of steel frames with semirigid connections. *Journal of Structural Engineering*, vol. 120(4), pp. 1075-1087.
- Chan, S.L., e Zhou, Z.H., 2004. Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. II: Three hinges along member. *Journal of Structural Engineering*, vol. 130(4), pp. 545-553.
- Chapman, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- Chapman, S.J., 2007. *Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 3rd edn.
- Chen, W.F., 2000. *Practical Analysis for Semi-rigid Frame Design*. Singapore: World Scientific.
- Chen, W.F., e Lui, E.M., 1991. *Stability Design of Steel Frames*. CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- Chen, H., e Blandford, G.E., 1993. Work-increment-control method for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 909-930.

- Chen, W.F., Duan, L., e Zhou, S.P., 1990. Second-order inelastic analysis of braced portal frames – Evaluation of design formulae in LRFD and GBJ specification. *Journal of Singapore Structural Steel Society*, vol. 1(1), pp. 5-15.
- Chen, W.F., e Kim, S-E., 1997. *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*. CRC Press, Inc., Flórida, USA.
- Chen, W.F., e Sohal, I., 1995. *Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag, New York.
- Chen, W.F., e Toma, S., 1994. *Advanced Analysis of Steel Frames*, CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- Chen, W.F., e Zhou, S.P., 1987. Inelastic analysis of steel braced frames with flexible joints. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 25(3), pp. 631-649.
- Chen, W.F., Goto, Y., e Liew, J.Y.R., 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Wiley & Sons Inc., USA.
- Chopra, A.K., 1995. *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Chui, P.P.T., e Chan, S.L., 1996. Transient response of moment-resistant steel frames with flexible and hysteretic joints frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 39(3), pp. 221-243.
- Chui, P.P.T., e Chan, S.L., 1997. Vibration and deflection characteristics of semi-rigid jointed frames. *Engineering Structures*, vol. 19(12), pp. 1001-1010.
- Chung, J., e Hulbert, G.M., 1993. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pp. 371-375.
- Chung, J., Hulbert, G.M., 1996. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, vol. 137(2), pp. 175-188.
- Chung, J., e Lee, J.M., 1996. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37(23), pp. 3961-3976.

- Cichon, C., 1984. Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frames. *Computers & Structures*, vol. 19, pp. 737-745.
- Clarke, M.J., e Hancock, M.J., 1990. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 1365-1391.
- Clough, R.W., e Penzien, J., 1993. *Dynamics of Structures*. 2nd edn, Mc-Graw-Hill, New York.
- Colson, A., 1991. Theoretical modeling of semirigid connections behavior. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 19, pp. 213-224.
- Colson, A., e Louveau, J.M., 1983. Connections incidence on the inelastic behavior of steel structural. *Engineering Structures*, vol. 16(1), pp. 25-31.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Coulter, B.A., e Miller, R.E., 1988. Numerical analysis of a generalized plane elastica with non-linear material behavior. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 617-630.
- Crisfield, M.A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 52-62.
- Crisfield, M.A., 1990. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 81, pp. 131-150.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 1, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Crisfield, M.A., e Shi, J., 1994. A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 1897-1913.
- Da Silva, J.G.S., de Lima, L.R.O., Vellasco, P.C.G.S., de Andrade, S.A.L., e Castro, R.A., 2008. Nonlinear dynamic analysis of steel portal frames with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 2566–2579.

- Dokanish, M.A., e Subbaraj, K., 1989. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I. Explicit methods. *Computers & Structures*, vol. 32(6), pp. 1371-1386.
- ECCS, 1983. *Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints*. Pub. n.º. 33, European Convention for Constructional Steelwork.
- Engesser, F., 1889. Ueber die knickfestgkeit gerader stäbe, *Zeitschrift für Architekture and Ingenieurwesen*, vol. 35, 445 p.
- Eurocode 3, 1990. *Design of Steel Structures*, vol. 1, Eurocode edited draft.
- Eurocode 3, 1992. *Design of Steel Structures. Part I: General rules and rules for buildings*. Comite European de Normalisation (CEN) Brussels, Belgium.
- Ferreira, J.V., e Serpa, A.L., 2005. Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, pp. 133-149.
- Frye, M.J., e Morris, G.A., 1975. Analysis of flexibly connected steel frames. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 2(3), pp. 280-291.
- Galambos, T.V., 1998. *Guide to Stability Design Criteria for metal structures*. Structural Stability Research Council, 4th edn., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Galvão, A.S., Gonçalves, P.B., e Silveira, R.A.M., 2005. Post-buckling behavior and imperfection sensitivity of L-frames. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 5, pp. 19-38.
- Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Galvão, A.S., 2001. *Análise Linear de Estruturas Reticuladas Planas e Espaciais*. Trabalho da disciplina Estudo Orientado do Programa de Pós-Graduação da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Galvão, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.

- Gavassoni Neto, E., 2007. *Modelos Discretizados de Dimensão Reduzida para Análise Dinâmica Não-Linear de Vigas e Pórticos Planos*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Gaylord, E.H., e Gaylord, C.N., 1972. *Design of Steel Structures*. 2nd edn., New York, McGraw-Hill.
- Gerstle, K.H., 1988. Effect of connections on frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 10, pp. 241-267.
- Gierlinski, J.T., e Graves Smith, T.R., 1985. A variable load iteration procedure for thin-walled structures. *Computers & Structures*, vol. 21, pp. 1085-1094.
- Gonçalves, P.B., 1994. Axisymmetric vibrations of imperfect shallow spherical caps under pressure loading. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 174(2), pp. 249-260.
- Goto, Y., e Chen, W., 1987. Second-order elastic analysis for frame design. *Journal of Structural Engineering*, vol. 113(7), pp. 1500-1519.
- Gummadi, L.N.B., e Palazotto, A.N., 1997. Nonlinear finite element analysis of beams and arches using parallel processors. *Computers & Structures*, vol.63 (3), pp. 413-428.
- Gummadi, L.N.B., e Palazotto, A.N., 1998. Large strain analysis of beams and arches undergoing large rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 33(4), pp. 615-645.
- Hibbit, H.D., e Karlsson, B.I., 1979. Analysis of pipe whip. *ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, San Francisco, CA.
- Hilber, H.M., e Hughes, T.J.R., 1978. Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 6, pp. 99-117.
- Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., e Taylor, R.L., 1977. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 5, pp. 283-292.
- Houbolt, J.C., 1950. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of Aeronautic Science*, vol. 17, pp. 540-550.

- Hsiao, K.M., Horng, H.J., e Chen, Y.R., 1987. A co-rotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Computers & Structures*, vol. 27(6), pp. 769-781.
- Hsiao, K.M., Hou, F.Y., e Spiliopoulos, K.V., 1988. Large displacement analysis of elasto-plastic frames. *Computers & Structures*, vol. 28, pp. 627-633.
- Hulbert, G.M., e Chung, J., 1996. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 137, pp. 175-188.
- Hulbert, G.M., e Jang, I., 1995. Automatic time step control algorithms for structural dynamics. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, vol. 126, pp 155-178.
- Iu, C.K., Bradford, M.A., e Chen, W.F., 2009. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, vol. 31, pp. 799-813.
- Iu, C.K., e Chan, S.L., 2004. A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 60, pp. 1495-1524.
- Jacob, B.P., 1990. *Estratégias Computacionais Para Análise Não-Linear Dinâmica de Estruturas Complacentes para Águas Profundas*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Jiang, J.M., Chen, H., e Liew, J.Y.R., 2002. Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 193-212.
- Johnson, N.D., e Walpole, W.R., 1981. *Bolted End-plate Beam-to-column Connections Under Earthquake Type Loading*. Research Report 81-7, Dept. of Civil Engineering, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- Jones, S.W., Kirby, P.A., e Nethercot, D.A., 1980. Effect of semi-rigid connections on steel column strength. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 1, pp. 38-46.
- Jones, S.W., Kirby, P.A., e Nethercot, D.A., 1983. The analysis of frames with semi-rigid connections – a state-of-the-art report. *Journal Construction Steel Research*, vol. 3(2), pp. 2-13.

- Kahn, P.B., e Zarmi, Y., 2004. Weakly nonlinear oscillations: A perturbative approach. *American Journal of Physics*, vol. 72(4), pp. 538-552.
- Kassimali, A., 1983. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *Journal of Structural Engineering*, vol. 109(8), pp. 1869–1886.
- Kawashima, S., e Fujimoto, T., 1984. Vibration analysis of frames with semi-rigid connections. *Computers & Structures*, vol. 19, pp. 85-92.
- Khudata, A.E., e Geschwindner, L.F., 1997. Nonlinear dynamic analysis of steel frames by modal superposition. *Journal of Structural Engineering*, vol. 123(11), pp. 1519-1527.
- Kim, S.E., e Chen, W.F., 1988. Sensitivity study on number of elements in refined plastic-hinge analysis. *Computers & Structures*, vol. 66(5), pp. 665-73.
- Kim, S-E., Lee, J-S., Choi, S-H., e Kim, C-S., 2003. Practical second-order inelastic analysis for steel frames subjected to distributes load. *Engineering Structures*, vol. 26, pp. 51–61.
- King, W.S., 1994. The limit loads of steel semi-rigid frames analyzed with different methods. *Computers & Structures*, vol. 51(5), pp. 475-487.
- Kishi, N., Chen, W.F., Goto, Y., e Matsuoka, K.G., 1993. Design aid of semi-rigid connections for frame analysis. *Engineering Journal*, vol. 30(3), pp. 90-107.
- Kishi, N., e Chen, W.F., 1986a. *Data Base of Steel Beam-to-column Connections*. Structural Engineering Report No. CE-STR-93-15, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.
- Kishi, N., e Chen, W.F., 1986b. *Steel Connection Data Bank Program*. Structural Engineering Report No. CE-STR-86-18, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.
- Kishi, N., e Chen, W.F., 1987a. *Moment-rotation Relation of Top and Seat Angle Connections*. Structural Engineering Report No. CE-STR-87-4, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.
- Kishi, N., e Chen, W.F., 1987b. *Moment-rotation Relation of Semi-rigid Connections*. Structural Engineering Report No. CE-STR-87-29, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

- Kishi, N., Komuro, M., e Chen, W.F., 2004. Four-parameter power model for M- $\theta$  curves of end-plate connections. In: *ECCS/AISC workshop connections in steel structures V: Innovative steel connections*.
- Koiter, W.T., 1970. *On the Stability of Elastic Equilibrium* (translation from dutch), Technical Report AFFDL-TR-70-25, Airforce Flight Dynamics Lab.
- Korol, R.M., Ghobarah, A., e Osman, A., 1990. Extended end-plate connections under cyclic loading: behavior and design. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 16, pp. 253-280.
- Krishnamurthy, N., Huang, H.T., Jeffrey, P.K., e Avery, L.K., 1979. Analytical M- $\phi$  curves for end-plate connections. *Journal of the Structural Division*, vol. 105(ST1), pp. 133-145.
- Kruger, T.S., van Rensburg, B.W.J., e du Plessis, G.M., 1995. Nonlinear analysis of structural steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 34, pp. 285-306.
- Kuhl, D., e Crisfield, M.A., 1999. Energy-conserving and decaying algorithm in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, vol. 45, pp. 569-599.
- Landesmann, A, e Batista, E.M., 2005. Advanced analysis of steel framed buildings using the Brazilian standard and Eurocode-3. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 61, pp. 1051-1074.
- Landesmann, A., 1999. *Análise e Implementação de Modelo Plástico para Estruturas Metálicas Aporticadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Landesmann, A., 2003. *Modelo Não-linear Inelástico para Análise de Estruturas Metálicas Aporticadas em Condições de Incêndio*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lazanha, E.C., 2003. *Análise Dinâmica Elasto-plástica de Estruturas Metálicas Sob Excitação Aleatória do Vento*. Dissertação de Mestrado, EP-USP, SP, Brasil.
- Lee, J.D., 1988. Finite element procedures for large strain elastic-plastic theories. *Computers & Structures*, vol. 28(3), pp. 395-406.

- Lee, S., Manuel, F.S., e Rossow, E.C., 1968. Large deflections and stability of elastic frames. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM2, 521-547.
- Leung, A.Y.T., e Fung, T.C., 1990. Geometrically non-linear vibration of spinning structures by finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 139(1), pp. 43-62.
- Lewandowski, R., 1992. Non-linear, steady-state vibration of structures by harmonic balance/finite element method. *Computers & Structures*, vol. 44 (1/2), pp. 287–296.
- Lewandowski, R., 1997a. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures – Parte 1: Theoretical background. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34(5), pp. 1925-1947.
- Lewandowski, R., 1997b. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures – Parte 2: Numerical strategies and examples. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34(5), pp. 1949-1964.
- Li, T.Q., Choo, B.S., e Nethercot, D.A., 1995. Connection element method for the analysis of semi-rigid frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 32, pp. 143-171.
- Li, Y., e Lui, E.M., 1995. A simplified plastic zone method for frame analysis, *Microcomputers and Civil Engineering*, vol. 10, pp. 51-62.
- Liew, J.Y.R., 1992. *Advanced Analysis for Frame Design*. Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, IN.
- Liew, J.Y.R., Chen, W.F., e Chen, H., 2000. Advanced inelastic analysis of frame structures. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 55, pp. 245-265.
- Liew, J.Y.R., e Tang, L.K., 2000. Advanced plastic hinge analysis for the design of tubular space frames. *Engineering Structures*, vol. 22, pp. 769-783.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F., 1993a. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3196-3216.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F., 1993b. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3217-3237.

- Liu, Y., Xu, L., e Grierson, D.E., 2008. Compound-element modeling accounting for semi-rigid connections and member plasticity. *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 1292–1307.
- Liu, Y., 2007. *Progressive-Failure Analysis of Steel Building Structures under Abnormal Load*. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- Lui, E.M, 1999. *Structural Steel Design*. In *Structural Engineering Handbook*, Ed. W.F. Chen, CRC Press LLC.
- Lui, E.M, e Lopes, A., 1997. Dynamic analysis and response of semirigid frames. *Engineering Structures*, vol. 19(8), pp. 644-654.
- Lui, E.M., 1985. *Effect of Connection Flexibility and Panel Zone Deformation on the Behavior of Plane Steel Frames*. Ph.D. Thesis, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, USA.
- Lui, E.M., e Chen, W.F., 1986. Analysis and behavior of flexible-jointed frames. *Engineering Structures*, vol. 8(2), pp. 107-118.
- Lui, E.M., e Chen, W.F., 1987. Effect of joint flexibility on the behavior of steel frames. *Computers & Structures*, vol. 26(5), pp. 719-732.
- Lui, E.M., e Chen, W.F., 1988. Behavior of braced and unbraced semi-rigid frame. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 24(9), pp. 893-913.
- Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Machado, S.P., e Cortínez, V.H., 2007. Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations. *Engineering Structures*, vol. 29, pp. 372-382.
- Martins, C.J., 2004. *Condições Iniciais em Propagação de Ondas Elásticas através do Método dos Elementos Finitos nos Domínios do Tempo e da Frequência*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Martins, G.V., 1999. *Síntese Plástica e Análise Modal de Pórticos Metálicos Submetidos a Cargas não Proporcionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Mata, P., Oller, S., e Barbat, A.H., 2008. Dynamic analysis of beam structures considering geometric and constitutive nonlinearity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol. 197, pp. 857–878.
- Meek, J.L., e Tan, H.S., 1984. Geometrically nonlinear analysis of space by an incremental iterative technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol. 47, pp. 261-282.
- Megson, T.H.G., 2005. *Structural and Stress Analysis*. 2nd edn, Elsevier.
- Metcalf, M., Reid, J., e Cohen, M., 2004. *Fortran 95/2003 Explained*. Oxford University Press, USA, 3rd edn.
- Modak, S., e Sotelino, E.D., 2002. The generalized method for structural dynamics applications. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 565–575.
- Mondkar, D.P., Powell, G.H., 1977. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 499-520.
- Nandakumar, K., e Chatterjee, A., 2005. Resonance, parameter estimation, and modal interactions in a strongly nonlinear benchtop oscillator. *Nonlinear Dynamics*, vol. 40, pp. 149-167.
- NBR 8800, 1986, *Projeto e Execução de Estruturas em Aço de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.
- NBR 8800, 2008. *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.
- Nethercot, D.A., Li, T.Q., e Ahmad, B., 1998. Unified classification system for beam-to-column connections. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 45(1), pp. 39-65.
- Newmark, N.M., 1959. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 85, pp. 67-94.

- Orbison, J.G., 1982. *Nonlinear Static Analysis of Three-Dimensional Steel Frames*. Report No. 82-6, Ithaca, NY: Department of Structural Engineering, Cornell University.
- Ostrander, J.R., 1970. *An Experimental Investigation of End-Plate Connections*. Master's Thesis, Univ. of Saskatchewan, Saskatoon, SK, Canadá.
- Owen, D.R.J., e Hinton, E., 1980. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Swansea, Pineridge Press Limited.
- Pacoste, C., 1998. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 156(1), pp. 75-110.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1995. Element behavior in post-critical plane frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 125, pp 319-343.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 163-197.
- Park, K.C., e Underwood, P.G., 1980. A variable-step central difference method for structural dynamics analysis – Part 1. Theoretical aspects, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, vol. 22, pp. 241-258.
- Park, M.S., e Lee, B.C., 1996. Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of Von-Mises-type hardening material. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39(3), pp. 383-408.
- Pinheiro, L., 2003. *Análises Não-lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-rígidos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Poston, T., e Stewart, I., 1978. *Catastrophe Theory and Its Applications*. Pitman, London.
- Powell, G., e Simons, J., 1981. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 1455-1467.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, A.A., e Vetterling, W.T., 1992. *Numerical Recipes—The Art of Scientific Computing (FORTRAN Version)*. Cambridge University Press.

- Ramberg, W., e Osgood, W.R., 1943. *Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters*. Technical Report N°. 902, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, DC.
- Ramm, E., 1981. *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.
- Ramm, E., 1982. The Riks/Wempner Approach — An extension of displacement control method in non-linear analysis. *Non-linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86.
- Ribeiro, L.F.L., 1998. *Estudo do Comportamento das Ligações Parafusadas Viga-coluna com Chapa de Topo: Análise Teórico-experimental*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Richard, R.M., e Abbott, B.J., 1975. Versatile elastic-plastic stress-strain formula. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 101(4), pp. 511-515.
- Richard, R.M., Kriegh, J.D., e David, E.H., 1982. Design of single plate framing connections with A307 bolts. *Engineering Journal*, vol. 19(4), pp. 209-213.
- Riks, E., 1972. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, pp. 1060-1066.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529-551.
- Rocha, G., 2000. *Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rocha, P.A.S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rodrigues, P.F.N., 2000. *Ferramentas Numéricas para a Análise Não-linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Salazar, A.R., e Haldar, A., 1999. Nonlinear seismic response of steel structures with semi-rigid and composite connections. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 51, pp. 37–59.
- Santos, M.N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não-linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Schweizerhof, K.H., e Wriggers, P., 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 269-279.
- SCI, 1987. *Steelwork Design Guide to BS5950*. Part. 1, Section Properties and Member Capacities, 2nd edn, vol. 1, The Steel Construction Institute, 1985.
- Sekulovic, M., e Nefovska, M., 2004. Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 31(2), pp. 101-134.
- Sekulovic, M., e Nefovska, M., 2008. Contribution to transient analysis of inelastic steel frames with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 976–989.
- Sekulovic, M., e Salatic, R., 2001. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. *Computers & Structures*, vol. 79(11), pp. 1097-1107.
- Sekulovic, M., Salatic, R., e Nefovska, M., 2002. Dynamic analysis of steel flexible connections. *Computers & Structures*, vol. 80(11), pp. 935-955.
- Shi, G., e Atluri, S.N., 1989. Static and dynamic analysis of space frames with nonlinear flexible connections. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 2635-2650.
- Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M., Neves, F.A., e Ferreira, W.G., 2009. Análise inelástica de estruturas metálicas: Aplicação de uma formulação generalizada. *Anais do 30º CILAMCE*, Armação de Búzios, Brasil, vol. 1, pp. 1–15.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.

- Simitses, G.J., 1983. Effect of static preloading on the dynamic stability of structures. *American Institute of Aeronautic and Astronautics Journal*, vol. 21(8), pp.1174-1180.
- Simitses, G.J., 1990. *Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures*. Springer-Verlag, New York
- Simo, J.C., e Vu-Quoc, L., 1986. A three-dimensional finite strain rod model: Part 2: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, pp. 79-116.
- Simões, L.M.C., 1996. Optimization of frames with semi-rigid connections. *Computers & Structures*, vol. 60(4), pp. 531-539.
- Sivakumaran, K.S., 1988. Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connections. *Engineering Structures*, vol. 10, pp. 239-248.
- Soares Filho, M., 2002. *Análise Dinâmica de Pórticos Elasto-plásticos com Conexões Semi-rígidas utilizando Programação Matemática*. Projeto de Tese de Doutorado em Estruturas, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Sophianopoulos, D.S., 2003. The effect of joint flexibility on the free elastic vibration characteristics of steel plane frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 995–1008.
- Southwell, R.V., 1941. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, England.
- Stelmack, T.W., Marley, M.J., e Gerstle, K.H., 1986. Analysis and tests of flexibly connected steel frames. *Journal of Structural Engineering*, vol. 112(7), pp. 1573-1588.
- Suarez, L.E., Singh, M.P., e Matheu, E.E., 1996. Seismic response of structural frameworks with flexible connections. *Computers & Structures*, vol. 58(1), pp. 27-41.
- Subbaraj, K., e Dokanish, M.A., 1989. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – II. Implicit methods. *Computer & Structures*, vol. 32(6), pp. 1387-1401.
- Surovek-Maleck, A., White, D.W., e Leon, R.T., 2004. Direct analysis for design of partially restrained steel framing system. *Journal of Structural Engineering*, vol. 131(9), pp. 1376-1389.

- Thom, R., 1975. *Structural Stability and Morphogenesis*. (Transl. from the French by D. H. Fowler), Benjamin, Reading, UK,
- Thompson, J.M.T., e Hunt, G.W., 1973. *A general Theory of Elastic Stability*. John Wiley & Sons, Inc..
- Toma, S., e Chen, W.F., 1994. Calibration frames for second-order inelastic analysis in Japan. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 28, pp.51-77.
- Torkamani, M.A.M., e Sonmez, M., 2001. Inelastic large deflection modeling of beam-columns. *Journal of Structural Engineering*, vol. 127(8), pp. 876-886.
- Torkamani, M.A.M., Sonmez, M., e Cao, J., 1997. Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method. *Journal of Structural Engineering*, vol 12(9), pp. 1225-1235.
- Tsai, K.C., e Popov, E.P., 1990. Cyclic behavior of end-plate moment connections. *Journal of Structural Engineering*, vol. 116(11), pp. 2917-2930.
- Vellasco, P.C.G.S., 1987. *Estudo da Não-linearidade do Material em Micro-idealização de Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Vieira, F.C.P., 1997. *Análise de Estruturas Metálicas Espaciais Apertadas com Diferentes Funções de Plastificação*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Viera, L.C.L.M, 2004. *Estudo de Algoritmos de Integração Elemento por Elemento para Análise Dinâmica Não-linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, Brasil.
- Vogel, U., 1985. *Calibrating Frames*. *Stahlbau*, vol. 54 (october), pp. 295-311.
- Wempner, G.A., 1969. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 5, pp. 117-153.
- Wempner, G.A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pp. 1581-1599.
- Wen, R.K., e Rahimzadeh, 1983. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. *Journal of the Structural Division*, vol. 109(8-Aug), pp. 1952-1971.

- White, D.W., 1988. *Analysis of Monotonic and Cyclic Stability of Steel Frame Subassemblages*. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY.
- White, D.W., Liew, J.Y.R., e Chen, W.F., 1993. Toward advanced analysis in LRFD. In *Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames—An Assessment of The State-Of-The-Art*, Structural Stability Research Council, Lehigh University, Bethlehem, PA, pp. 95-173.
- Williams, F.W., 1964. An approach to the nonlinear behavior of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 17(4), pp. 451-469.
- Wilson, E.L., Farhoomand, I., e Bathe, K.J., 1973. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 1, pp. 241-252.
- Wilson, L.E., 2002. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*. Computers & Structures, Inc., 3rd edn., Berkeley, California, USA.
- Wong, M.B., 2009. *Plastic Analysis and Design of Steel Structures*. Elsevier.
- Wong, M.B., e Tin-Loi, F., 1990. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. *Computers & Structures*, vol. 34, n. 4, pp. 641-646.
- Wood, W.L., Bossak, M., e Zienkiewicz, O.C., 1980. An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pp. 1562-1566.
- Wright, E.W., e Gaylord, E.H., 1968. Analysis of unbraced multistory steel rigid frames. *Journal of the Structural Division*, vol. 94, pp. 1143-1163.
- Wu, F.H., e Chen, W.F., 1990. A design model for semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 12(12), pp. 88-97.
- Wu, T.X., e Thompson, D.J., 1999. The effects of local preload on the foundation stiffness and vertical vibration of railway track. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 219(5), pp. 881-904.

- Xu, L., 2001. Second-order analysis for semirigid steel frame design, *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 28, pp. 59-76.
- Xu, L., Liu, Y., e Grierson, D.E., 2004. Nonlinear analysis of steel frameworks through direct modification of member stiffness properties. *Advances in Engineering Software*, vol. 36, pp. 312–324.
- Xu, M.T., e Cheng, D.L, 1994. A new approach to solving a type of vibration problem. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 177(4), pp. 565–571.
- Xu, Y.L., e Zhang, W.S., 2001. Modal analysis and seismic response of steel frames with connection dampers. *Engineering Structures*, vol. 23, pp. 385–396.
- Yang, T.Y., e Saigal, S., 1984. A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 851-867.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Yang, Y.B., e Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 28(12), pp. 2110-2116.
- Yee, Y.L., e Melchers, R.E., 1986. Moment-rotation curves for bolted connections. *Journal of Structural Engineering*, vol. 112, pp. 615-635.
- Yoo, H., e Choi, D-H., 2008. New method of inelastic buckling analysis for steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 64, pp. 1152-1164.
- Youssef-Agha, W., e Aktan, H.M., 1989. Seismic response of low-rise steel frames, *Journal of the Structural Division*, vol. 115(3), pp. 594-607.
- Zeinoddini, M., Harding, J.E., e Parke, G.A.R., 1999. Dynamic behaviour of axially pre-loaded tubular steel members of offshore structures subjected to impact damage. *Ocean Engineering*, vol. 26(10), pp. 963-978.

- Zhou, Z.H., e Chan, S.L., 2004. Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. I: One hinge along member. *Journal of Structural Engineering*, vol. 130(4), pp. 538-544.
- Zhu, K., Al-Bermani, F.G.A., Kitipornchai, S., e Li, B., 1995. Dynamic response of flexibly jointed frames. *Engineering Structures*, vol. 17(8), pp. 575-580.
- Ziemian, R.D., 1990. *Advanced Methods of Inelastic Analysis in the Limit States Design of Steel Structures*. Ph.D. dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY.
- Ziemian, R.D., 1993. Verification and benchmarking problems: Examples of frames studies used to verify advanced methods of inelastic analysis. In White, D.W. & Chen, W.F., eds, *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames: An assessment of the state of art*. Structural Stability Research Council (SSRC), section 3.
- Zienkiewicz, O.C., e Morgan, K., 1983. *Finite Elements and Approximations*. John Wiley & Sons.
- Zienkiewicz, O.C., e Taylor, R.L., 1991. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company (UK), vol. 2.
- Zienkiewicz, O.C., Wood, W.L., e Hine, N.W., 1984. A unified set of single step algorithms Part 1: General formulation and applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1529-1552.

# Apêndice A

## Matrizes de Rigidez e Funções de Estabilidade

### A.1 Introdução

Neste apêndice são apresentadas, inicialmente, as matrizes de rigidez obtidas com as formulações para análise de segunda ordem, desenvolvidas em referencial Lagrangiano atualizado. Em seguida, uma formulação para elementos de viga-coluna que utiliza funções de estabilidade para simular os efeitos da não linearidade geométrica é estudada. É importante informar que essas formulações são usadas no desenvolvimento das formulações para análise inelástica.

### A.2 Matriz de Rigidez

Nesta seção, as expressões para os elementos das matrizes de rigidez obtidas com as formulações SOF-1 e SOF-2 serão apresentadas. Essas duas formulações foram desenvolvidas em referencial Lagrangiano atualizado e consideram os efeitos da não linearidade geométrica na análise de estruturas reticuladas planas.

#### A.2.1 Formulação SOF-1

Para a formulação SOF-1, foi mostrado, que a matriz de rigidez do elemento de viga-coluna no sistema local de coordenadas é definida através da Equação (4.78). Nesta seção são apresentados os coeficientes das matrizes  $\mathbf{K}_l$ ,  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  usadas nessa equação. A matriz  $\mathbf{K}_l$  é a matriz de rigidez linear elástica convencional,  $\mathbf{K}_\sigma$  é a matriz de rigidez

geométrica,  $\mathbf{K}_l$  é a matriz cujos elementos são funções lineares dos deslocamentos nodais, e  $\mathbf{K}_2$  é função quadrática desses deslocamentos. Essas três últimas matrizes estabelecem a mudança na rigidez resultante dos efeitos de segunda ordem.

- *Matriz  $\mathbf{K}_l$*

As componentes da matriz de rigidez linear elástica  $\mathbf{K}_e$  são obtidas através da Equação (4.75a) usando (4.70b) e (4.62). Com essas considerações, encontra-se:

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} k_{l(1,1)} & 0 & 0 & k_{l(1,4)} & 0 & 0 \\ & k_{l(2,2)} & k_{l(2,3)} & 0 & k_{l(2,5)} & k_{l(2,6)} \\ & & k_{l(3,3)} & 0 & k_{l(3,5)} & k_{l(3,6)} \\ & & & k_{l(4,4)} & 0 & 0 \\ & \textit{Simétrica} & & & k_{l(5,5)} & k_{l(5,6)} \\ & & & & & k_{l(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

sendo:

$$k_{l(1,1)} = k_{l(4,4)} = -k_{l(1,4)} = EA/L$$

$$k_{l(2,2)} = k_{l(5,5)} = -k_{l(2,5)} = 12EI/L^3$$

$$k_{l(2,3)} = k_{l(2,6)} = -k_{l(3,5)} = -k_{l(5,6)} = 6EI/L^2$$

$$k_{l(3,3)} = k_{l(6,6)} = 4EI/L$$

$$k_{l(3,6)} = 2EI/L$$

- *Matriz  $\mathbf{K}_\sigma$*

Os elementos da matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_\sigma$ , são obtidos resolvendo a Equação (4.75b). Antes, é necessário, que se substitua (4.64) e (4.65) em (4.70c) considerando, porém, as expressões (4.72a-b) usadas para aproximar os deslocamentos nodais. Procedendo dessa forma, chega-se a:

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} k_{\sigma(1,1)} & k_{\sigma(1,2)} & k_{\sigma(1,3)} & k_{\sigma(1,4)} & k_{\sigma(1,5)} & k_{\sigma(1,6)} \\ & k_{\sigma(2,2)} & k_{\sigma(2,3)} & k_{\sigma(2,4)} & k_{\sigma(2,5)} & k_{\sigma(2,6)} \\ & & k_{\sigma(3,3)} & k_{\sigma(3,4)} & k_{\sigma(3,5)} & k_{\sigma(3,6)} \\ & & & k_{\sigma(4,4)} & k_{\sigma(4,5)} & k_{\sigma(4,6)} \\ & \textit{Simétrica} & & & k_{\sigma(5,5)} & k_{\sigma(5,6)} \\ & & & & & k_{\sigma(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

sendo os termos  $k_{\sigma}$  dados por:

$$k_{\sigma(1,1)} = k_{\sigma(4,4)} = -k_{\sigma(1,4)} = P/L$$

$$k_{\sigma(1,2)} = -k_{\sigma(1,5)} = -k_{\sigma(2,4)} = k_{\sigma(4,5)} = -(M_i + M_j)/L^2$$

$$k_{\sigma(1,3)} = -k_{\sigma(3,4)} = -M_i/L$$

$$k_{\sigma(1,6)} = -k_{\sigma(4,6)} = -M_j/L$$

$$k_{\sigma(2,2)} = -k_{\sigma(2,5)} = k_{\sigma(5,5)} = \frac{6P}{5L} + \frac{12PI}{AL^3}$$

$$k_{\sigma(2,3)} = k_{\sigma(2,6)} = -k_{\sigma(3,5)} = -k_{\sigma(5,6)} = \frac{P}{10} + \frac{6PI}{AL^2}$$

$$k_{\sigma(3,3)} = k_{\sigma(6,6)} = \frac{2PL}{15} + \frac{4PI}{AL}$$

$$k_{\sigma(3,6)} = -\frac{PL}{30} + \frac{2PI}{AL}$$

- **Matriz  $\mathbf{K}_1$**

Usando as Equações (4.72a-b) adotadas para interpolar os deslocamentos nodais nas expressões (4.62) e (4.64), e substituindo a equação resultante em (4.70d) é possível, usando (4.75c), obter as componentes de rigidez com não linearidade de primeira ordem  $\mathbf{K}_1$ . Essa matriz é definida como:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{1(1,1)} & k_{1(1,2)} & k_{1(1,3)} & k_{1(1,4)} & k_{1(1,5)} & k_{1(1,6)} \\ & k_{1(2,2)} & k_{1(2,3)} & k_{1(2,4)} & k_{1(2,5)} & k_{1(2,6)} \\ & & k_{1(3,3)} & k_{1(3,4)} & k_{1(3,5)} & k_{1(3,6)} \\ & & & k_{1(4,4)} & k_{1(4,5)} & k_{1(4,6)} \\ & \text{Simétrica} & & & k_{1(5,5)} & k_{1(5,6)} \\ & & & & & k_{1(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

na qual:

$$k_{1(1,1)} = k_{1(4,4)} = -k_{1(1,4)} = \frac{3EA}{L^2}(\Delta u_j - \Delta u_i)$$

$$\begin{aligned}
k_{1(1,2)} &= -k_{1(1,5)} = -k_{1(2,4)} = k_{1(4,5)} = \frac{EA}{10L} (12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) + \\
&\quad + \frac{18EI}{L^3} (2\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) \\
k_{1(1,3)} &= -k_{1(3,4)} = \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_i + \Delta\theta_j) + \frac{6EI}{L^2} (3\Delta\theta_0 - 2\Delta\theta_i - \Delta\theta_j) \\
k_{1(1,6)} &= -k_{1(4,6)} = \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_i - 4\Delta\theta_j) + \frac{6EI}{L^2} (3\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - 2\Delta\theta_j) \\
k_{1(2,2)} &= -k_{1(2,5)} = k_{1(5,5)} = \frac{6EA}{5L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{36EI}{L^4} (\Delta u_j - \Delta u_i) \\
k_{1(2,3)} &= k_{1(2,6)} = -k_{1(3,5)} = -k_{1(5,6)} = \frac{EA}{10L} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{18EI}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i) \\
k_{1(3,3)} &= k_{1(6,6)} = \frac{2EA}{15} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{12EI}{L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i) \\
k_{1(3,6)} &= -\frac{EA}{30} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{6EI}{L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i)
\end{aligned}$$

sendo  $\Delta\theta_0 = (\Delta v_j - \Delta v_i) / L$ .

- **Matriz  $\mathbf{K}_2$**

De forma análoga, resolvendo (4.75d) usando as relações (4.70e), (4.64) e (4.72a-b) determinam-se as componentes da matriz de rigidez com não linearidade de segunda ordem  $\mathbf{K}_2$ . Essa matriz é escrita como:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{2(1,1)} & k_{2(1,2)} & k_{2(1,3)} & k_{2(1,4)} & k_{2(1,5)} & k_{2(1,6)} \\ & k_{2(2,2)} & k_{2(2,3)} & k_{2(2,4)} & k_{2(2,5)} & k_{2(2,6)} \\ & & k_{2(3,3)} & k_{2(3,4)} & k_{2(3,5)} & k_{2(3,6)} \\ & & & k_{2(4,4)} & k_{2(4,5)} & k_{2(4,6)} \\ & \text{Simétrica} & & & k_{2(5,5)} & k_{2(5,6)} \\ & & & & & k_{2(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde:

$$\begin{aligned}
k_{2(1,1)} &= k_{2(4,4)} = -k_{2(1,4)} = \frac{3EA}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EA}{15L} (18\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_i^2 - \Delta\theta_i\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{12EI}{L^3} (3\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_j + \Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_i\Delta\theta_j + \Delta\theta_j^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(1,2)} &= -k_{2(1,5)} = -k_{2(2,4)} = k_{2(4,5)} = \frac{EA}{5L^2}(\Delta u_i - \Delta u_j)(12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) + \\
&\quad + \frac{36EI}{L^4}(\Delta u_j - \Delta u_i)(2\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) \\
k_{2(1,3)} &= -k_{2(3,4)} = (\Delta u_j - \Delta u_i) \left[ \frac{EA}{15L}(3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_i + \Delta\theta_j) + \frac{12EI}{L^3}(3\Delta\theta_0 - 2\Delta\theta_i - \Delta\theta_j) \right] \\
k_{2(1,6)} &= -k_{2(4,6)} = (\Delta u_j - \Delta u_i) \left[ \frac{EA}{15L}(3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_i - 4\Delta\theta_j) + \frac{12EI}{L^3}(3\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - 2\Delta\theta_j) \right] \\
k_{2(2,2)} &= -k_{2(2,5)} = k_{2(5,5)} = \frac{6EA}{5L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{36EI}{L^5}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EA}{50L}(216\Delta\theta_0^2 - 36\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 36\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 9\Delta\theta_i^2 - 2\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 9\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{4EI}{5L^3}(108\Delta\theta_0^2 - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 11\Delta\theta_i^2 + 11\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 11\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{72EI}{5L^5}(54\Delta\theta_0^2 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 16\Delta\theta_i^2 + 22\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 16\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(2,3)} &= -k_{2(3,5)} = \frac{EA}{10L^2}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{18EI}{L^4}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EA}{150}(54\Delta\theta_0^2 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_i + 6\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 6\Delta\theta_i^2 + 2\Delta\theta_i\Delta\theta_j + \Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{2EI}{5L^2}(63\Delta\theta_0^2 - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 22\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 9\Delta\theta_i^2 + 6\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 3\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{36EI}{5L^4}(54\Delta\theta_0^2 - 64\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 21\Delta\theta_i^2 + 22\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 11\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(2,6)} &= -k_{2(5,6)} = \frac{EA}{10L^2}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{18EI}{L^4}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EA}{150}(54\Delta\theta_0^2 + 6\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_j + \Delta\theta_i^2 + 2\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 6\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{2EI}{5L^2}(63\Delta\theta_0^2 - 22\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 3\Delta\theta_i^2 + 6\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 9\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{36EI}{5L^4}(54\Delta\theta_0^2 - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 64\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 11\Delta\theta_i^2 + 22\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 21\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(3,3)} &= \frac{2EA}{15L}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{12EI}{L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EAL}{150}(27\Delta\theta_0^2 - 12\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 2\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 8\Delta\theta_i^2 - 4\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 3\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{4EI}{5L}(11\Delta\theta_0^2 - 9\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 4\Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_i\Delta\theta_j + \Delta\theta_j^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{24E\iota}{5L^3} (48\Delta\theta_0^2 - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 33\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 22\Delta\theta_i^2 + 19\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 7\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(3,6)} = & - \frac{EA}{30L} (\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{6EI}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i)^2 - \\
& - \frac{EAL}{150} (3\Delta\theta_0^2 + 2\Delta\theta_0\Delta\theta_i + 2\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_i^2 - 6\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_j^2) + \\
& + \frac{2EI}{5L} (11\Delta\theta_0^2 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_j + \Delta\theta_i^2 + 4\Delta\theta_i\Delta\theta_j + \Delta\theta_j^2) + \\
& + \frac{12E\iota}{5L^3} (66\Delta\theta_0^2 - 66\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 66\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 19\Delta\theta_i^2 + 28\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 19\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(6,6)} = & \frac{2EA}{15L} (\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{12EI}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
& + \frac{EAL}{150} (27\Delta\theta_0^2 - 2\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 12\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 3\Delta\theta_i^2 - 4\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 8\Delta\theta_j^2) + \\
& + \frac{4EI}{5L} (11\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 9\Delta\theta_0\Delta\theta_j + \Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_i\Delta\theta_j + 4\Delta\theta_j^2) + \\
& + \frac{24E\iota}{5L^3} (48\Delta\theta_0^2 - 33\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 7\Delta\theta_i^2 + 19\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 22\Delta\theta_j^2)
\end{aligned}$$

sendo  $\Delta\theta_0 = (\Delta v_j - \Delta v_i) / L$  e  $\iota = \int_A y^4 dA$  é o momento de 4ª ordem da seção transversal.

Para uma seção retangular, tem-se  $\iota = bh^5/80$ . Essa grandeza não tem significado físico.

## A.2.2 Formulação SOF-2

Nesta seção serão apresentadas as componentes das matrizes de rigidez  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  usadas na definição da matriz de rigidez tangente e, evidentemente, do vetor de forças internas na formulação SOF-2. As componentes da matriz de rigidez linear elástica  $\mathbf{K}_l$  foram definidas através da Equação (A.1). Seguindo a sugestão de Yang e Kuo (1994), as matrizes  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são adotadas no cálculo do vetor de forças internas pela formulação SOF-2 de ordem elevada.

- *Matriz  $\mathbf{K}_\sigma$*

A matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_\sigma$  é obtida usando a Equação (4.98b) em (4.75b) usando as expressões (4.72a-b). Essa matriz pode ser definida usando a Equação (A.2), onde, agora, seus elementos são expressos como:

$$k_{\sigma(1,1)} = k_{\sigma(4,4)} = -k_{\sigma(1,4)} = P/L$$

$$k_{\sigma(1,2)} = k_{\sigma(1,5)} = k_{\sigma(2,4)} = k_{\sigma(4,5)} = 0$$

$$k_{\sigma(1,3)} = -k_{\sigma(3,4)} = -M_1/L$$

$$k_{\sigma(1,6)} = -k_{\sigma(4,6)} = -M_2/L$$

$$k_{\sigma(2,2)} = -k_{\sigma(2,5)} = k_{\sigma(5,5)} = \frac{6P}{5L} + \frac{12PI}{AL^3}$$

$$k_{\sigma(2,3)} = k_{\sigma(2,6)} = -k_{\sigma(3,5)} = -k_{\sigma(5,6)} = \frac{P}{10} + \frac{6PI}{AL^2}$$

$$k_{\sigma(3,3)} = k_{\sigma(6,6)} = \frac{2PL}{15} + \frac{4PI}{AL}$$

$$k_{\sigma(3,6)} = -\frac{PL}{30} + \frac{2PI}{AL}$$

Caso se utilize a formulação linearizada, os termos da matriz de rigidez geométrica são escritos como:

$$k_{\sigma(1,1)} = k_{\sigma(4,4)} = -k_{\sigma(1,4)} = P/L$$

$$k_{\sigma(1,2)} = -k_{\sigma(1,5)} = -k_{\sigma(2,4)} = k_{\sigma(4,5)} = (M_i + M_j)/L^2$$

$$k_{\sigma(1,3)} = k_{\sigma(3,4)} = k_{\sigma(1,6)} = k_{\sigma(4,6)} = 0$$

$$k_{\sigma(2,2)} = -k_{\sigma(2,5)} = k_{\sigma(5,5)} = 6P/(5L)$$

$$k_{\sigma(2,3)} = k_{\sigma(2,6)} = -k_{\sigma(3,5)} = -k_{\sigma(5,6)} = P/10$$

$$k_{\sigma(3,3)} = k_{\sigma(6,6)} = 2PL/15$$

$$k_{\sigma(3,6)} = -PL/30$$

- *Matriz  $\mathbf{K}_1$*

A parcela que compõe a matriz de rigidez do elemento de viga coluna,  $\mathbf{K}_1$ , é agora apresentada. Ela é obtida usando a Equação (4.75c) juntamente com as relações (4.100a) e (4.72a-b). A Equação (A.3) a define, considerando para seus coeficientes as seguintes equações:

$$k_{1(1,1)} = k_{1(4,4)} = -k_{1(1,4)} = \frac{3EA}{L^2}(\Delta u_j - \Delta u_i)$$

$$k_{1(1,2)} = -k_{1(1,5)} = -k_{1(2,4)} = k_{1(4,5)} = \frac{EA}{10L}(12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{18EI}{L^3} \left( \frac{4}{3} \Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j \right) \\
k_{1(1,3)} = -k_{1(3,4)} &= \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_i + \Delta\theta_j) + \frac{EI}{L^2} (18\Delta\theta_0 - 16\Delta\theta_i - 8\Delta\theta_j) \\
k_{1(1,6)} = -k_{1(4,6)} &= \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_i - 4\Delta\theta_j) + \frac{EI}{L^2} (18\Delta\theta_0 - 8\Delta\theta_i - 16\Delta\theta_j) \\
k_{1(2,2)} = -k_{1(2,5)} = k_{1(5,5)} &= \frac{6EA}{5L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{24EI}{L^4} (\Delta u_j - \Delta u_i) \\
k_{1(2,3)} = k_{1(2,6)} = -k_{1(3,5)} = -k_{1(5,6)} &= \frac{EA}{10L} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{18EI}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i) \\
k_{1(3,3)} = k_{1(6,6)} &= \frac{2EA}{15} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{16EI}{L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i) \\
k_{1(3,6)} &= -\frac{EA}{30} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{8EI}{L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i)
\end{aligned}$$

com:  $\Delta\theta_0 = (\Delta v_j - \Delta v_i) / L$ .

- **Matriz  $\mathbf{K}_2$**

Através das Equações (4.72a-b) e (4.75d), em (4.100b), encontra-se os elementos da matriz  $\mathbf{K}_2$ . A Equação (A.4) apresentada anteriormente define essa matriz, onde, agora, os termos são dados por:

$$\begin{aligned}
k_{2(1,1)} = k_{2(4,4)} = -k_{2(1,4)} &= \frac{3EA}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
& + \frac{EA}{15L} \left( 18\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_i^2 - \Delta\theta_i\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_j^2 + \frac{3}{2L} \Delta v_j \right) + \\
& + \frac{EI}{L^3} \left( -18\Delta\theta_0^2 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 10\Delta\theta_i^2 + 10\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 10\Delta\theta_j^2 + \frac{3}{L} \Delta v_j \Delta\theta_j \right) \\
k_{2(1,2)} = -k_{2(1,5)} = -k_{2(2,4)} = k_{2(4,5)} &= \frac{EA}{5L^2} (\Delta u_j - \Delta u_i) (12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) + \\
& + \frac{6EI}{L^4} (\Delta u_j - \Delta u_i) (6\Delta\theta_0 - \Delta\theta_i - \Delta\theta_j) \\
k_{2(1,3)} = -k_{2(3,4)} &= \frac{EA}{15L} (\Delta u_j - \Delta u_i) (3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_i + \Delta\theta_j) + \\
& + \frac{2EI}{L^3} (\Delta u_j - \Delta u_i) (3\Delta\theta_0 - 10\Delta\theta_i - 5\Delta\theta_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(1,6)} &= -k_{2(4,6)} = \frac{EA}{15L}(\Delta u_j - \Delta u_i)(3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_i - 4\Delta\theta_j) + \\
&\quad + \frac{2EI}{L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)(3\Delta\theta_0 - 5\Delta\theta_i - 10\Delta\theta_j) \\
k_{2(2,2)} &= -k_{2(2,5)} = k_{2(5,5)} = \frac{6EA}{5L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 - \frac{18EI}{L^5}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EA}{35L}(216\Delta\theta_0^2 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 9\Delta\theta_i^2 + 9\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{6EI}{35L^3}(108\Delta\theta_0^2 - 45\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 45\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 6\Delta\theta_i^2 + 5\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 6\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(2,3)} &= -k_{2(3,5)} = \frac{EA}{10L^2}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{3EI}{L^4}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EA}{140}(108\Delta\theta_0^2 - 72\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 3\Delta\theta_i^2 + 6\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 3\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{EI}{35L^2}(135\Delta\theta_0^2 - 72\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 30\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 60\Delta\theta_i^2 + 8\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 4\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(2,6)} &= -k_{2(5,6)} = \frac{EA}{10L^2}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{3EI}{L^4}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{3EA}{140}(36\Delta\theta_0^2 - 24\Delta\theta_0\Delta\theta_j + \Delta\theta_i^2 - \Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{EI}{35L^2}(135\Delta\theta_0^2 - 30\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 72\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 4\Delta\theta_i^2 + 8\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 60\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(3,3)} &= \frac{2EA}{15L}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{10EI}{L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EAL}{70}(18\Delta\theta_0^2 + 3\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 12\Delta\theta_i^2 - 3\Delta\theta_i\Delta\theta_j + \Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{2EI}{35L}(18\Delta\theta_0^2 - 60\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 4\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 64\Delta\theta_i^2 + 16\Delta\theta_i\Delta\theta_j + \Delta\theta_j^2) \\
k_{2(3,6)} &= -\frac{EA}{30L}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{5EI}{L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \\
&\quad + \frac{EAL}{140}(-6\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_j - 3\Delta\theta_i^2 + 4\Delta\theta_i\Delta\theta_j - 3\Delta\theta_j^2) + \\
&\quad + \frac{EI}{35L}(15\Delta\theta_0^2 - 8\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 8\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 16\Delta\theta_i^2 + 4\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 16\Delta\theta_j^2) \\
k_{2(6,6)} &= \frac{2EA}{15L}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 + \frac{10EI}{L^3}(\Delta u_j - \Delta u_i)^2 +
\end{aligned}$$

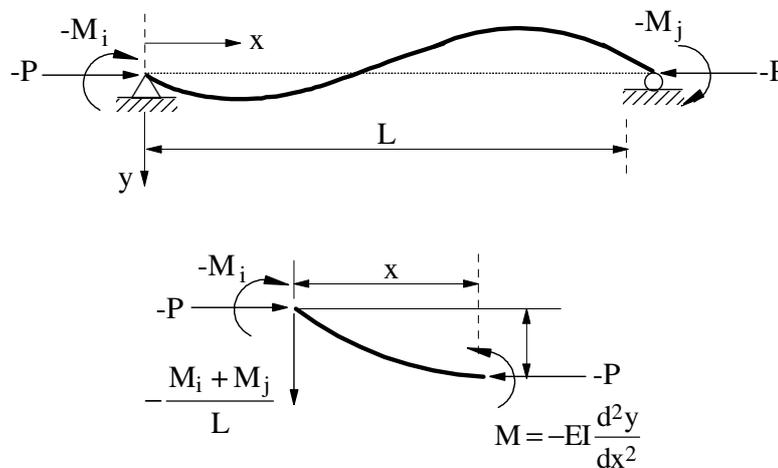
$$\begin{aligned}
& + \frac{EAL}{70} (18\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_i + 3\Delta\theta_0\Delta\theta_j + \Delta\theta_i^2 - 3\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 12\Delta\theta_j^2) + \\
& + \frac{EI}{35L} (36\Delta\theta_0^2 - 8\Delta\theta_0\Delta\theta_i - 120\Delta\theta_0\Delta\theta_j + 2\Delta\theta_i^2 + 32\Delta\theta_i\Delta\theta_j + 128\Delta\theta_j^2)
\end{aligned}$$

com  $\Delta\theta_0 = (\Delta v_j - \Delta v_i) / L$ .

### A.3 Funções de Estabilidade

Neste trabalho, as funções de estabilidade são utilizadas para simular os efeitos da não linearidade geométrica nas formulações desenvolvidas para análise inelástica, mais precisamente, as formulações PHF-1 e AAF-1.

Para a obtenção de tais funções, considere um membro de viga-coluna submetido a momentos fletores  $M_i$  e  $M_j$  em suas extremidades. O elemento é carregado axialmente por uma força  $P$ , como mostra a Figura A.1. As hipóteses consideradas no Capítulo 3 para modelagem do elemento finito são válidas aqui.



**Figura A.1** Elemento de viga-coluna

A equação de equilíbrio desse membro, que pode ser obtida considerando o diagrama de corpo livre de um segmento de viga de comprimento  $x$  (Figura A.1), é:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho^2 y = -\frac{M_i + M_j}{LEI} x + \frac{M_i}{EI} \tag{A.5}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia,  $L$  é o comprimento do elemento indeformado,  $P$  é a força axial e  $\rho = \sqrt{P/(EI)}$ .

A equação diferencial ordinária (A.5) tem como solução geral (Chen e Kim, 1987):

$$y = A \operatorname{sen}(\rho x) + B \cos(\rho x) + \frac{M_i + M_j}{LEI\rho^2} x - \frac{M_i}{EI\rho^2} \quad (\text{A.6})$$

Com o impedimento dos deslocamentos nas extremidades do elemento, tem-se as seguintes condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(L) = 0$ . Com essas informações, calculam-se as constantes  $A$  e  $B$  da equação anterior:

$$A = \frac{1}{EI\rho^2 \operatorname{sen}(\rho L)} [M_i \cos(\rho L) + M_j] \quad (\text{A.7a})$$

$$B = \frac{M_i}{EI\rho^2} \quad (\text{A.7b})$$

Substituindo esses valores em (A.6), chega-se, após algumas transformações, à equação da linha elástica do membro de viga-coluna que é dada por:

$$y = \frac{1}{EI\rho^2} \left\{ M_i \left[ \frac{\cos(\rho L)}{\operatorname{sen}(\rho L)} \operatorname{sen}(\rho x) - \cos(\rho x) - \frac{x}{L} + 1 \right] + M_j \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}(\rho L)} \operatorname{sen}(\rho x) - \frac{x}{L} \right] \right\} \quad (\text{A.8})$$

cuja derivada primeira fornece a sua inclinação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_i}{EI\rho} \left[ \frac{\cos(\rho L)}{\operatorname{sen}(\rho L)} \cos(\rho x) + \operatorname{sen}(\rho x) - \frac{1}{\rho L} \right] + \frac{M_j}{EI\rho} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}(\rho L)} \cos(\rho x) - \frac{1}{\rho L} \right] \quad (\text{A.9})$$

As rotações das extremidades  $i$  e  $j$  do membro de viga-coluna podem ser obtidas impondo-se, respectivamente, as condições  $x = 0$  e  $x = L$  em (A.9):

$$\theta_i = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{-LM_i}{EI} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\rho L) - \rho L \cos(\rho L)}{(\rho L)^2 \operatorname{sen}(\rho L)} \right] - \frac{LM_j}{EI} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\rho L) - \rho L}{(\rho L)^2 \operatorname{sen}(\rho L)} \right] \quad (\text{A.10a})$$

$$\theta_j = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{-LM_i}{EI} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\rho L) - \rho L}{(\rho L)^2 \operatorname{sen}(\rho L)} \right] - \frac{LM_j}{EI} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\rho L) - \rho L \cos(\rho L)}{(\rho L)^2 \operatorname{sen}(\rho L)} \right] \quad (\text{A.10b})$$

Ignorando os efeitos produzidos pelo encurtamento da curvatura, a relação entre força axial e deslocamento pode ser definida como:

$$P = (EA/L) \delta \quad (\text{A.11})$$

onde  $\delta$  representa o deslocamento axial do membro.

As equações (A.10) e (A.11), expressas na forma incremental matricial para uma análise não linear, definem a relação força-deslocamento do elemento no sistema local corrotacional:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ 0 & \Gamma_2 & \Gamma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

onde os termos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  representam as chamadas funções de estabilidade. As equações que as caracterizam são:

$$\Gamma_1 = \begin{cases} \frac{\rho \text{sen}(\rho) - \rho^2 \cos(\rho)}{2 - 2\cos(\rho) - \rho \text{sen}(\rho)}, & \text{para } P < 0 \\ \frac{\rho^2 \cosh(\rho) - \rho \text{senh}(\rho)}{2 - 2\cosh(\rho) + \rho \text{senh}(\rho)}, & \text{para } P > 0 \end{cases} \quad (\text{A.13a})$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} \frac{\rho^2 - \rho \text{sen}(\rho)}{2 - 2\cos(\rho) - \rho \text{sen}(\rho)}, & \text{para } P < 0 \\ \frac{\rho \text{senh}(\rho) - \rho^2}{2 - 2\cosh(\rho) + \rho \text{senh}(\rho)}, & \text{para } P > 0 \end{cases} \quad (\text{A.13b})$$

sendo  $\rho = \pi\sqrt{|\rho_e|}$ , com  $\rho_e = P / (\pi^2 EI / L^2)$ .

Quando a força axial  $P$  for nula, as funções de estabilidade são indeterminadas. Nesse caso, adotam-se as funções propostas por Lui (1985). São elas:

$$\Gamma_1 = 4 + \frac{2\pi^2 \rho_e}{15} - \frac{(0.01\rho_e + 0.543)\rho_e^2}{4 + \rho_e} - \frac{(0.004\rho_e + 0.285)\rho_e^2}{8.183 + \rho_e} \quad (\text{A.14a})$$

$$\Gamma_2 = 2 - \frac{\pi^2 \rho_e}{30} + \frac{(0.01\rho_e + 0.543)\rho_e^2}{4 + \rho_e} - \frac{(0.004\rho_e + 0.285)\rho_e^2}{8.183 + \rho_e} \quad (\text{A.14b})$$

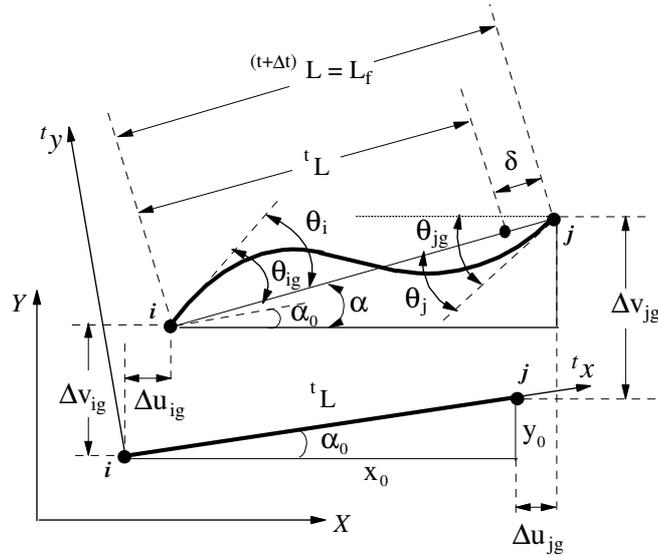
As Equações (A.14a) e (A.14b) são aplicáveis para membros tracionados ou comprimidos e devem ser usadas apenas quando o esforço axial adimensionalizado,  $\rho_e$ , estiver compreendido no intervalo  $-2.0 \leq \rho_e \leq 2.0$ . Observa-se que, quando a força axial é nula,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  valem, respectivamente, 4 e 2.

A Equação (A.12) pode ser escrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (\text{A.15})$$

onde  $\Delta \mathbf{f}_c$  e  $\Delta \mathbf{u}_c$  representam os vetores de forças e deslocamentos nodais no sistema corrotacional e  $\mathbf{K}_c$  é a matriz de rigidez nesse sistema local de coordenadas.

Para o elemento plano de viga-coluna é necessário três graus de liberdade adicionais para que seu campo de deslocamentos seja descrito. A Figura A.2 ilustra os deslocamentos do membro no sistema global de coordenadas, representados pelos subscritos  $g$ .



**Figura A.2** Deslocamentos no sistema global de coordenadas

Através da análise dessa figura, é possível estabelecer uma relação entre os deslocamentos no sistema local corrotacional de coordenadas e aqueles no sistema global, usando as seguintes relações:

$$\theta_i = \theta_0 + \theta_{ig} - \tan^{-1} \frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \quad (\text{A.16a})$$

$$\theta_j = \theta_0 + \theta_{jg} - \tan^{-1} \frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \quad (\text{A.16b})$$

$$\delta = \frac{(L_f^2 - L^2)}{L_f + L} = \frac{(2x_0 + u_{jg} - u_{ig})(u_{jg} - u_{ig}) + (2y_0 + v_{jg} - v_{ig})(v_{jg} - v_{ig})}{L_f + L} \quad (\text{A.16c})$$

sendo  $L_f$  o comprimento do elemento na configuração deformada.

Segundo Cook *et al.* (1989), a expressão (A.16c) usada para relacionar o deslocamento axial,  $\delta$ , aos deslocamentos nodais do elemento no sistema global é mais

precisa que o cálculo realizado considerando apenas  $L_f - L$ . Para o denominador, a aproximação  $2L_f$  pode ser assumida (Belytschko e Hsieh, 1973).

Diferenciando as Equações (A.16) em relação a cada uma das variáveis que representam os deslocamentos nodais no sistema global, é possível chegar às seguintes relações cinemáticas (Chen *et al.*, 1990):

$$\begin{Bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha & L & \text{sen}\alpha & -\text{cos}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha & 0 & \text{sen}\alpha & -\text{cos}\alpha & L \\ -L\text{cos}\alpha & -L\text{sen}\alpha & 0 & L\text{cos}\alpha & L\text{sen}\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{ig} \\ \Delta v_{ig} \\ \Delta\theta_{ig} \\ \Delta u_{jg} \\ \Delta v_{jg} \\ \Delta\theta_{jg} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de inclinação do elemento deformado e pode ser visualizado na Figura A.2. Cabe ressaltar que os subscritos  $i$  e  $j$  referem-se às duas extremidades do membro e  $g$  ao sistema global de coordenadas. A equação anterior pode ser rescrita como:

$$\Delta \mathbf{u}_c = \mathbf{T}_{cg} \Delta \mathbf{u}_g \quad (\text{A.18})$$

De acordo com Chen *et al.* (1996), as forças nos sistemas corrotacional e global, mostradas na Figura A.3, se relacionam de acordo com a seguinte equação:

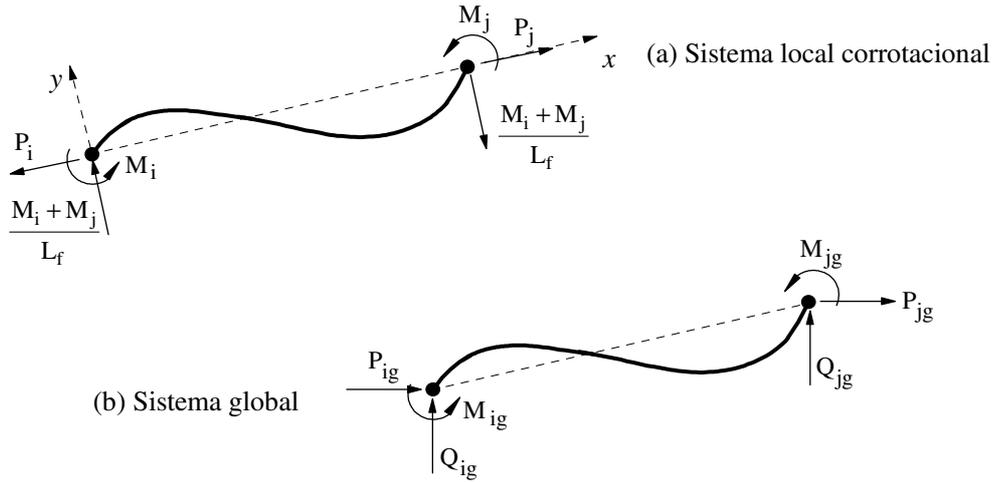
$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{ig} \\ \Delta Q_{ig} \\ \Delta M_{ig} \\ \Delta P_{jg} \\ \Delta Q_{jg} \\ \Delta M_{jg} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & -\text{sen}\alpha & -L\text{cos}\alpha \\ \text{cos}\alpha & \text{cos}\alpha & -L\text{sen}\alpha \\ L & 0 & 0 \\ \text{sen}\alpha & \text{sen}\alpha & L\text{cos}\alpha \\ -\text{cos}\alpha & -\text{cos}\alpha & L\text{sen}\alpha \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

que, simbolicamente, é reescrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_{ig} = \mathbf{T}_{cg}^T \Delta \mathbf{f}_c \quad (\text{A.20})$$

Derivando ambos os lados dessa equação, tem-se:

$$\Delta \mathbf{f}_{ig} = \mathbf{T}_{cg}^T \Delta \mathbf{f}_c + \Delta \mathbf{T}_{cg}^T \mathbf{f}_c \quad (\text{A.21})$$



**Figura A.3** Sistema equivalente de forças

O processo completo de obtenção da relação incremental força-deslocamento pode ser encontrada em Machado (2005). Essa relação é definida como:

$$\Delta \mathbf{f}_{ig} = \left( \mathbf{T}_{cg}^T \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cg} + \mathbf{T}_1 M_i + \mathbf{T}_2 M_j + \mathbf{T}_3 P \right) \Delta \mathbf{u}_g \quad (\text{A.22})$$

ou, de forma simplificada:

$$\Delta \mathbf{f}_{ig} = \mathbf{K}_g \Delta \mathbf{u}_g \quad (\text{A.23})$$

com, as matrizes simétricas  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  e  $\mathbf{T}_3$  dadas por:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -2sc & c^2 - s^2 & 0 & 2sc & -(c^2 - s^2) & 0 \\ & 2sc & 0 & -(c^2 - s^2) & -2sc & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2sc & c^2 - s^2 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 2sc & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24a})$$

$$\mathbf{T}_3 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} s^2 & -sc & 0 & -s^2 & sc & 0 \\ & c^2 & 0 & sc & -c^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & s^2 & -sc & 0 \\ \text{sim.} & & & & c^2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24b})$$

nas quais  $s = \sin \alpha$  e  $c = \cos \alpha$ .

# Apêndice B

## Modelos de Ligações Semi-Rígidas

### B.1 Introdução

Um método comumente usado para determinar a relação momento-rotação de uma ligação é ajustar uma curva a dados experimentais usando expressões simples. Vários modelos analíticos foram desenvolvidos com essa finalidade e podem ser encontrados facilmente na literatura. Essas expressões, ou modelos matemáticos, relacionam o momento e a rotação da ligação através de funções que usam, em geral, parâmetros de ajuste de curva. Entre os modelos, existem o linear e os não lineares. Para o modelo linear (Arbabi, 1982; Kawashima e Fujimoto, 1984; Chan, 1994), apenas um parâmetro é necessário. Esse parâmetro é a rigidez inicial da ligação. O modelo, embora simples, apresenta algumas desvantagens que serão relatadas mais adiante neste apêndice. Como comentado no Capítulo 4, o comportamento de uma ligação é não linear. Portanto, uma melhor aproximação referente ao seu verdadeiro comportamento é obtida com os modelos não lineares, para os quais, ao contrário, mais de um parâmetro é necessário. Alguns deles serão relatados a seguir.

Um dos modelos não lineares é o multilinear, que é constituído, como o próprio nome sugere, por um conjunto de segmentos de reta. Nesse contexto, podem ser citados o modelo bilinear (Sivakumaran, 1988; Youssef-Agha, 1989) e o trilinear (Stelmack *et al.* 1986; Gerstle, 1988). A deficiência desses modelos é a descontinuidade nos pontos de mudança de declividade. Segundo Chen e Toma (1994), o modelo polinomial (Frye e Morris, 1975) é o mais popular entre os diversos modelos não lineares encontrados na literatura. O método consiste em aproximar a curva experimental através de uma função polinomial. Os parâmetros nesse modelo dependem do tipo e das características

geométricas da ligação. Seu inconveniente é que as expressões para definição do parâmetro de padronização foram calibradas em ensaios com perfis estrangeiros. Sendo assim, devem ser utilizadas apenas em perfis similares aos testados. Outro problema encontrado é que alguns valores de momento conduzem a inclinações negativas na curva. Isso implica na existência de uma rigidez negativa para a ligação, o que fisicamente é impossível. Jones *et al.* (1980) propuseram um modelo mais apropriado que os citados anteriormente, conseguindo evitar o problema da rigidez negativa, gerando curvas suaves e contínuas e, portanto, melhorando a representação do comportamento momento-rotação da ligação. Esse modelo, chamado B-spline cúbico, é obtido dividindo a curva experimental em um determinado número de intervalos que são, em seguida, ajustados por um polinômio cúbico. A desvantagem desse modelo é a necessidade de um grande número de dados experimentais para aproximação da curva. Por esse motivo ele raramente é empregado na prática. Entretanto, em geral, é uma referência para outros modelos mais simples (Chan e Chui, 2000).

Vários pesquisadores desenvolveram um modelo no qual a função que o descreve é escrita em termos de potências. Modelos com dois parâmetros foram sugeridos por Batho e Lash (1936) e Krishnamurthy *et al.* (1979). Colson e Louveau (1983), Kishi e Chen (1987) e Kishi *et al.* (1993) propuseram modelos usando três parâmetros, que são: a rigidez inicial da ligação, a sua capacidade de momento e um parâmetro de forma. Richard e Abbott (1975) criaram o modelo com quatro parâmetros. Além dos três parâmetros usados pelos pesquisadores citados anteriormente, a rigidez devido ao encruamento da ligação foi introduzida por eles. Já Ang e Morris (1984) estabeleceram um modelo de potências com quatro parâmetros, a partir do modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg e Osgood, 1943; Shi e Atluri, 1989). Segundo Chan e Chui, existem muitas vantagens na adoção desses modelos para descrever a curva momento-rotação. Uma delas é que um valor positivo para a rigidez da ligação sempre é encontrado, uma vez que a derivada primeira das funções é positiva. As curvas obtidas são suaves e requerem um pequeno número de parâmetros de ajuste. E, por fim, esses modelos promovem um bom ajuste aos dados experimentais.

Além das aproximações relatadas, outros modelos são encontrados. Entre eles, os modelos exponenciais (Lui e Chen, 1986, 1987; Kishi e Chen, 1986; Yee e Melchers, 1986; Wu e Chen, 1990) e o modelo bounding-line (Al-Bermani *et al.*, 1994; Zhu *et al.*, 1995).

Apenas os modelos implementados no sistema computacional apresentado serão detalhados a seguir. Entre esses modelos estão o linear, o exponencial (Lui e Chen, 1986),

o modelo exponencial modificado (Kishi e Chen, 1987), o modelo de potências com quatro parâmetros (Richard-Abbott, 1975) e o multilinear. As justificativas para a escolha desses modelos foram dadas no Capítulo 4.

## B.2 Modelo Linear

Para o modelo linear, apenas um parâmetro definindo a rigidez da ligação é necessário. A expressão para a relação momento-rotação pode, nesse caso, ser escrita como:

$$M = S_{cini} \phi_c \quad (B.1)$$

onde  $S_{cini}$  é o valor da rigidez inicial da ligação, que pode ser expresso em função da rigidez à flexão da viga, e de um coeficiente de rigidez proposto para indicar o grau da flexibilidade da ligação. Esse coeficiente é o fator de rigidez,  $\gamma$ , dos nós do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas. O fator de rigidez varia de 0, para ligações idealmente rotuladas, a 1, para ligações perfeitamente rígidas. Como relatado no Capítulo 4, esse parâmetro fornece uma ideia melhor sobre o comportamento rotacional da ligação. A rigidez inicial da ligação, em função desses parâmetros, usando a Equação (4.117), é definida como:

$$S_{cini} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{3EI}{L} \quad (B.2)$$

na qual  $EI$  e  $L$  são a rigidez à flexão e o comprimento da viga, respectivamente. É importante ressaltar que, numa análise pelo Método dos Elementos Finitos,  $L$  representa o comprimento do elemento finito que possui ligação semi-rígida em suas extremidades.

Usando o modelo linear, considera-se que a rigidez da ligação,  $S_c$ , permanece constante ao longo do processo de análise e tem valor igual à  $S_{cini}$ . Esse é o modelo de ligação mais simples e que é amplamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para ligações semi-rígidas. No entanto, não é muito preciso em casos de grandes deslocamentos. Sua utilização é mais apropriada nas análises linear, de vibração e de bifurcação, onde os deslocamentos são pequenos (Chan e Chui, 2000).

Para esse modelo, o usuário do programa deverá fornecer como dado de entrada o fator  $\gamma$  em cada extremidade do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas. A partir daí, usando (B.2) a rigidez da ligação em cada uma das extremidades é determinada.

## B.3 Modelos Não Lineares

Entre os vários modelos não lineares existentes na literatura, serão discutidos, aqui, apenas quatro deles. Diferentemente do modelo linear, no qual se considera que a rigidez da ligação permanece constante, os não lineares devem ser capazes de fornecer valores atualizados da rigidez da ligação (rigidez tangente) durante o processo de carregamento.

### B.3.1 Modelo Exponencial

O primeiro é o modelo exponencial, proposto por Lui e Chen (1986; 1988), cuja expressão matemática para a curva momento-rotação é dada por:

$$M = M_o + \sum_{m=1}^n C_j \left[ 1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c| \quad (\text{B.3})$$

em que  $M$  é o valor do momento na ligação,  $\phi_c$  é a sua deformação rotacional,  $M_o$  é o momento inicial,  $R_{kf}$  é a rigidez devido ao encruamento da ligação,  $\alpha$  é um fator de escala,  $n$  é o número de termos considerados no ajuste e  $C_m$ , para  $m=1, 2, \dots, n$ , são coeficientes de ajustamento da curva. Todos esses dados deverão ser fornecidos pelo usuário do programa para que a rigidez da ligação durante o processo de análise seja determinada.

A Figura B.1 a seguir apresenta os detalhes construtivos de quatro ligações viga-coluna: ligação com cantoneira de alma simples (A), com cantoneira de topo e assento (B), com chapa de topo (C) e ligação com chapa de topo estendida (D). Os valores dos parâmetros do modelo exponencial para essas ligações detalhadas, baseados em ensaios experimentais (Chen e Lui, 1991), são indicados na Tabela B.1.

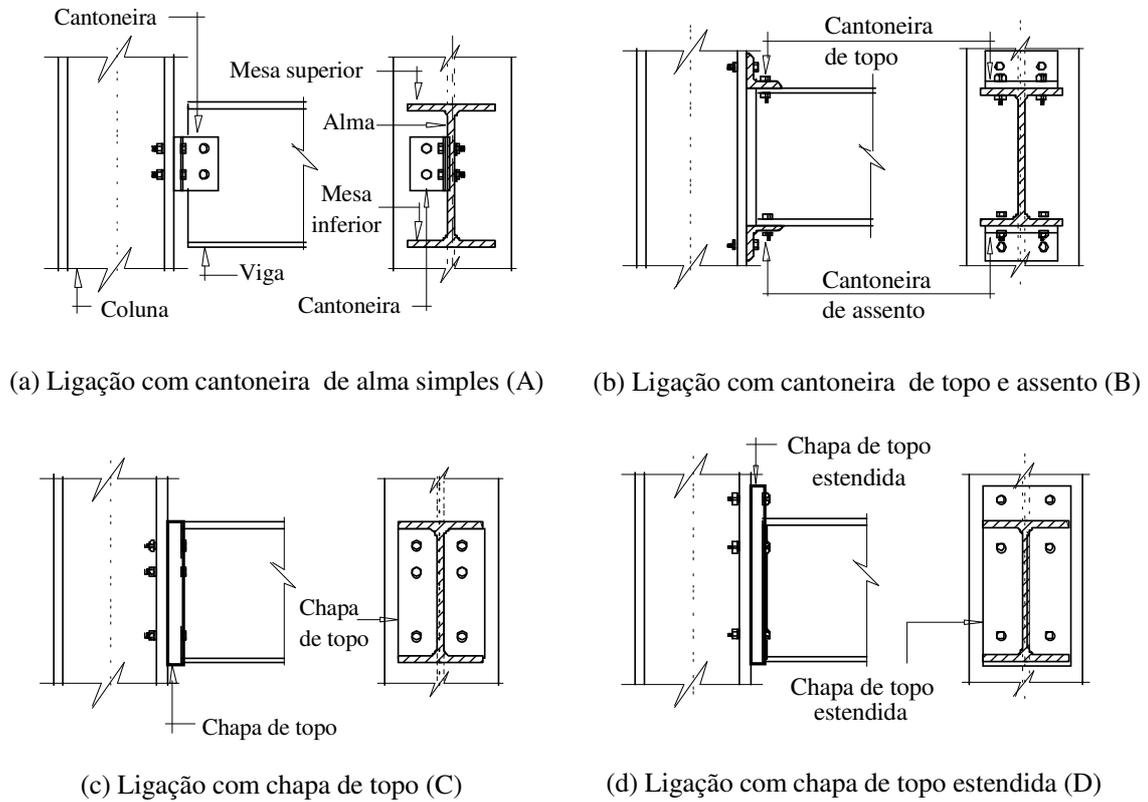
A rigidez tangente pode ser expressa, usando (B.3), como:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{m=1}^n \frac{C_j}{2m\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) + R_{kf} \quad (\text{B.4})$$

As Figuras (B.2a) e (B.2b) ilustram as curvas momento-rotação e rigidez-rotação para as ligações viga-coluna detalhadas na Figura (B.1) obtidas através desse modelo exponencial.

Geralmente, o modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986, 1988) fornece uma boa representação do comportamento não linear da ligação (Chan e Chui, 2000), apesar da necessidade de um grande número de parâmetros de ajuste da curva. Contudo, se

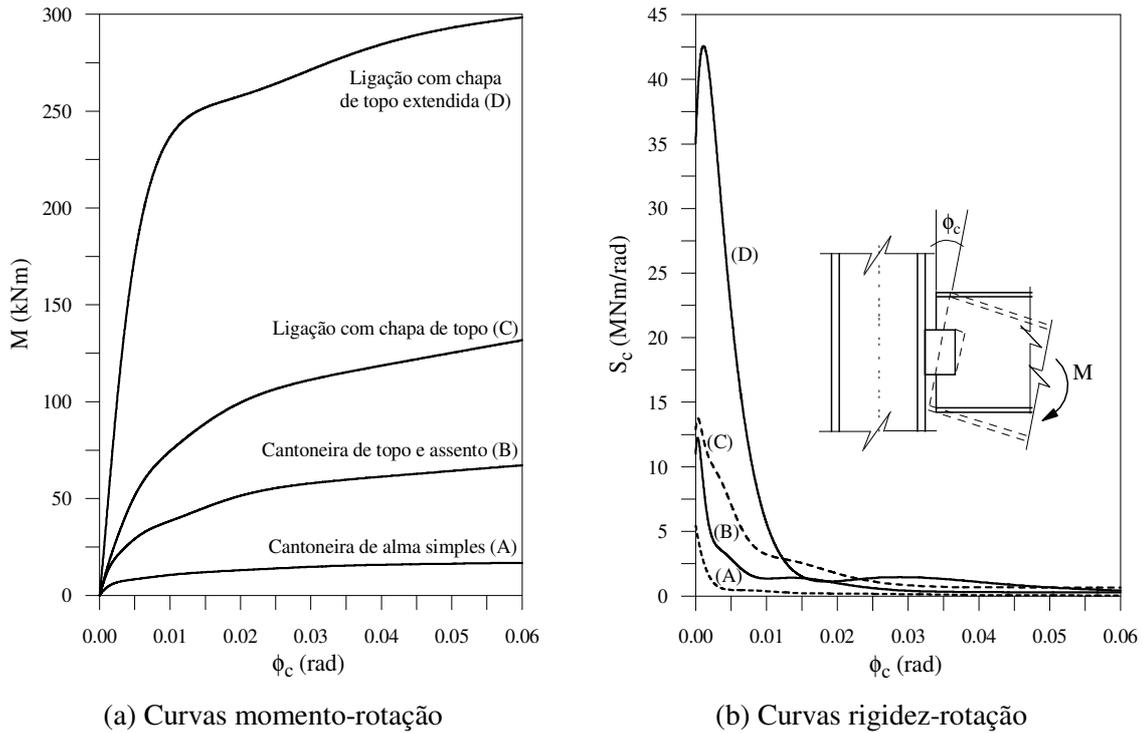
há uma modificação abrupta na declividade da curva momento-rotação, esse modelo não pode representá-lo corretamente. Para contornar esse problema, Kishi e Chen (1986) o modificaram para que pudesse acomodar qualquer alteração acentuada na curva. Eles desenvolveram o modelo exponencial modificado que será descrito a seguir.



**Figura B.1** Detalhes construtivos de ligações viga-coluna

**Tabela B.1** Parâmetros do modelo exponencial para quatro tipos de ligações

Parâmetros	Cantoneira de alma simples (A)	Cantoneira de topo e assento (B)	Chapa de topo (C)	Chapa de topo estendida (D)
$M_o$ (kip.in)	0	0	0	0
$R_{kf}$ (kip/rad)	$0,47104 \times 10^2$	$0,43169 \times 10^2$	$0,96415 \times 10^3$	$0,41193 \times 10^3$
$\alpha$	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
$C_1$	$-0,43300 \times 10^2$	$-0,34515 \times 10^3$	$-0,25038 \times 10^3$	$-0,67824 \times 10^3$
$C_2$	$0,12139 \times 10^4$	$0,52345 \times 10^4$	$0,50736 \times 10^4$	$0,27084 \times 10^4$
$C_3$	$-0,58583 \times 10^4$	$-0,26762 \times 10^5$	$-0,30396 \times 10^5$	$-0,21389 \times 10^5$
$C_4$	$0,12971 \times 10^5$	$0,61920 \times 10^5$	$0,75338 \times 10^5$	$0,78563 \times 10^5$
$C_5$	$-0,13374 \times 10^5$	$-0,65114 \times 10^5$	$-0,82873 \times 10^5$	$-0,99740 \times 10^5$
$C_6$	$0,52224 \times 10^4$	$0,25506 \times 10^5$	$0,33927 \times 10^5$	$0,43042 \times 10^5$
$S_{cini}$ (kip in/rad)	$0,48000 \times 10^5$	$0,95219 \times 10^5$	$0,11000 \times 10^6$	$0,30800 \times 10^6$



**Figura B.2** Comportamento de ligações viga-coluna

### B.3.2 Modelo Exponencial Modificado

Sob condições de carregamento, a nova função proposta é escrita como:

$$M = M_o + \sum_{j=1}^m C_j \left[ 1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^n D_k (|\phi_c| - |\phi_k|) H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (\text{B.5})$$

com rigidez tangente representada por:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + \sum_{k=1}^n D_k H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (\text{B.6})$$

sendo  $M$ ,  $M_o$ ,  $\alpha$  e  $C_j$  os mesmos termos definidos nas Equações (B.3) e (B.4),  $D_k$  um coeficiente de ajustamento para a porção linear da curva,  $\phi_k$  a rotação inicial de uma componente linear, e  $H[\Phi]$  é a função de Heaviside, definida como sendo:

$$H[\Phi] = 1, \text{ para } \Phi \geq 0 \quad (\text{B.7a})$$

$$H[\Phi] = 0, \text{ para } \Phi < 0 \quad (\text{B.7b})$$

### B.3.3 Modelo de Potências com Quatro Parâmetros

Além desses modelos apresentados anteriormente, é utilizado neste trabalho o modelo de representação do comportamento de ligações semi-rígidas proposto por Richard-Abbott (1975), que descreve a relação momento-rotação como:

$$M = \frac{(S_{cini} - R_p) |\phi_c|}{\left[ 1 + \frac{(S_{cini} - R_p) |\phi_c|^n}{M_0} \right]^{1/n}} + R_p |\phi_c| \quad (\text{B.8})$$

com rigidez tangente,

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c| = |\phi_c|} = \frac{(S_{cini} - R_p)}{\left[ 1 + \frac{(S_{cini} - R_p) |\phi_c|^n}{M_0} \right]^{(n+1)/n}} + R_p \quad (\text{B.9})$$

onde  $R_p$  é a rigidez devido ao encruamento da ligação quando  $\phi_c$  tende a infinito,  $n$  é um parâmetro que define a forma da curva e  $M_0$  é um momento de referência. Como na definição da função são necessários apenas quatro parâmetros e o resultado sempre fornece uma rigidez positiva, esse modelo é considerado simples. Por possuir, além disso, boa eficiência computacional, ele vem sendo bastante utilizado para representação do comportamento de ligações semi-rígidas. Dentre os trabalhos nos quais esse modelo é adotado na modelagem da curva momento-rotação podem ser citados, Chen e Lui (1991), Chan e Chui (2000), Liu (2007) e Sekulovic e Nefovska (2008). Recentemente, estudo feito por Kishi *et al.* (2004) mostrou que o modelo é efetivo e preciso para predizer o comportamento de ligações com placa de extremidade. Vale ressaltar que esse modelo pode ser aplicado a qualquer tipo de ligação. Para isso basta que se avaliem, experimentalmente ou mesmo numericamente, os quatro parâmetros necessários para representá-lo.

Com esse modelo, três outros podem ser obtidos. Pode ser observado, através das Equações (B.8) e (B.9), que o modelo de quatro parâmetros se reduz ao modelo linear com  $S_c = S_{cini}$ , quando  $R_p$  se aproxima de  $S_{cini}$ .

O modelo bilinear é obtido quando o fator de forma  $n$  tende a infinito. Nesse caso, tem-se as seguintes condições:

- se  $\phi_c < M_0 / (S_{cini} - R_p)$ , o termo  $[(S_{cini} - R_p)\phi_c / M_0]^Y$  se aproxima de zero e a Equação (B.9) resume-se a  $S_c = S_{cini}$ .
- quando  $\phi_c > M_0 / (S_{cini} - R_p)$ , a relação  $[(S_{cini} - R_p)\phi_c / M_0]^Y$  tende a infinito e  $S_c = R_p$ .

E, finalmente, considerando  $R_p$  igual a zero, ou seja, desprezando o efeito do endurecimento do material, (B.8) transforma-se no modelo de potências de três parâmetros sugerido por Kishi e Chen (1987), definido como:

$$M = \frac{S_{cini} |\phi_c|}{\left[ 1 + \left| \frac{S_{cini} |\phi_c|}{M_0} \right|^n \right]^{1/n}} \quad (\text{B.10})$$

### B.3.4 Modelo Multilinear

Para se utilizar uma curva momento-rotação obtida experimentalmente ou, ainda, para contornar as dificuldades de não se ter um modelo específico para um certo tipo de ligação, considerou-se, neste trabalho, a possibilidade do usuário fornecer alguns pontos da curva momento-rotação da ligação. São definidos, então,  $m$  pares ordenados  $(\phi_c, M)$ , como mostra a Figura B.3 e, através de um processo simples de interpolação linear, obtém-se a rigidez da ligação.

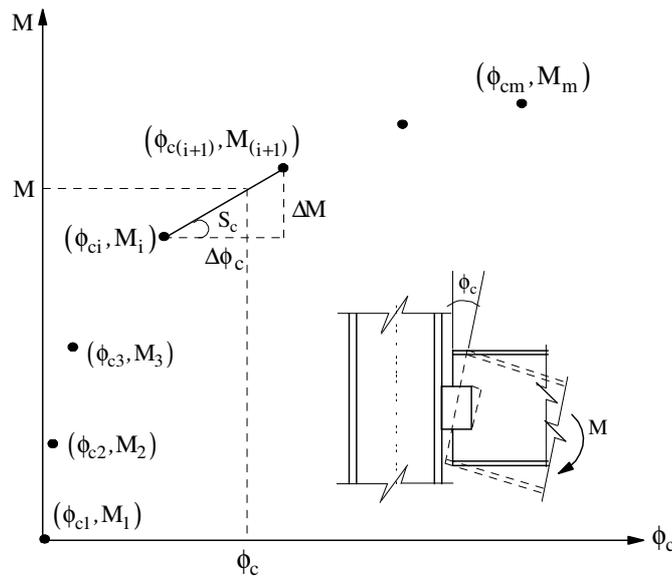


Figura B.3 Modelo Multilinear

Nesse caso, a rigidez da ligação é calculada como:

$$S_c = \frac{\Delta M}{\Delta \phi_c} = \frac{M_{(i+1)} - M_i}{\phi_{c(i+1)} - \phi_{ci}} \quad (\text{B.10})$$

onde  $M_i$  e  $M_{(i+1)}$  são os limites inferior e superior do intervalo no qual o momento  $M$ , que atua na ligação, se encontra. Esse intervalo é estabelecido em função do nível de carregamento aplicado. A Figura B.3 ilustra essa metodologia.