



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**A UTILIZAÇÃO INTEGRADA DA REALIDADE AUMENTADA
COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA NA PERSPECTIVA DA
APRENDIZAGEM MÓVEL DE GEOMETRIA ESPACIAL**

SILVIO LUIZ GOMES DE AMORIM

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Coorientador: Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira

Ouro Preto – MG, 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**A UTILIZAÇÃO INTEGRADA DA REALIDADE AUMENTADA
COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA NA PERSPECTIVA DA
APRENDIZAGEM MÓVEL DE GEOMETRIA ESPACIAL**

SILVIO LUIZ GOMES DE AMORIM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis e sob a coorientação do Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira.

Ouro Preto – MG, 2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

A524a Amorim, Silvio Luiz Gomes de.

A utilização integrada da Realidade Aumentada com o Software GeoGebra na perspectiva da aprendizagem móvel de Geometria Espacial. [manuscrito] / Silvio Luiz Gomes de Amorim. - 2023.

134 f.: il.: color., gráf., mapa. + Quadros.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Coorientador: Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira.

Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Educação Matemática. 2. Realidade Aumentada. 3. Software GeoGebra. 4. Aprendizagem Móvel. 5. Geometria Espacial. I. Reis, Frederico da Silva. II. Ferreira, Neuber Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 51:37

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Silvio Luiz Gomes de Amorim

**A utilização integrada da Realidade Aumentada com o Software GeoGebra
na perspectiva da aprendizagem móvel de Geometria Espacial**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Aprovada em 07 de novembro de 2023

Membros da Banca Examinadora

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira - Coorientador (Instituto Federal de Minas Gerais)
Prof. Dr. António Manuel da Conceição Guerreiro - Membro Externo (Universidade do Algarve - Portugal)
Prof. Dr. Eder Marinho Martins - Membro Interno (Universidade Federal de Ouro Preto)

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 15/11/2023



Documento assinado eletronicamente por **Frederico da Silva Reis, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/11/2023, às 15:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0624926** e o código CRC **FE7E1800**.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus...

... pelo empréstimo da vida, sendo o maior e o melhor que nos é concedido, por um breve período de tempo;

... pela saúde, que nos faz estarmos de pé e firmes na busca de nossos ideais;

... pela paz, que nos faz estarmos serenos até mesmo diante das situações mais difíceis;

... pelas alegrias, tristezas, animações e decepções, pois sentimentos opostos são próprios na existência humana, fazendo com que possamos aprender com eles;

... pelas amizades feitas na UFOP durante a realização do curso, que foram essenciais para conhecer diferentes pontos de vista;

... pela realização de concluir essa importante etapa na vida acadêmica.

Também agradeço...

... (*in memorian*) à minha mãe, Odette Gomes de Amorim, por ter me dado a vida e ter sempre me apoiado em meus estudos;

... (*in memorian*) ao meu pai, Albino Antonio de Amorim, pelo suporte para a manutenção da sobrevivência e pelo exemplo de dedicação e fé, até mesmo nos momentos de maior dificuldade;

... às minhas irmãs mais velhas, Vera Cristina de Amorim Gomes e Inêz Valéria Gomes Amorim, por compartilhar momentos felizes na infância e adolescência, defendendo-me e orientando-me no caminho certo a seguir;

... ao meu irmão mais novo, Daniel Jorge Gomes Amorim, pelo companheirismo e por compartilhar a oportunidade de orientá-lo e apoiá-lo em seus projetos de vida;

... ao meu grande e querido orientador, Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, pela orientação, paciência, dedicação e esmero na revisão de meus trabalhos acadêmicos;

... ao prezado coorientador, Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira, pelo apoio e coorientação na revisão de minha dissertação;

... aos alunos que participaram da minha pesquisa de campo, sendo de fundamental importância nas atividades exploratórias que serviram de base para o meu trabalho acadêmico;

... aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFOP, pelos ensinamentos, compartilhamentos de experiências e pelas dicas úteis para o preparo de trabalhos e realização de pesquisas acadêmicas.

... aos companheiros de curso, pelo ambiente de harmonia e compartilhamento de experiências laborais trazidas de seus trabalhos em escolas públicas e particulares.

Por fim, agradeço ainda ...

... aos membros da banca, pela oportunidade concedida a mim para que eu pudesse apresentar e defender meu trabalho acadêmico;

... ao Prof. Dr. António Guerreiro, pela oportunidade de intercâmbio científico na Universidade do Algarve, Portugal, e por todo o compartilhamento de seus saberes e experiências.

Muito obrigado a todos!

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma pesquisa que teve como objetivo geral discutir possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando de forma integrada a Realidade Aumentada (RA) com o *software* GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio. A metodologia foi qualitativa em seus pressupostos e métodos, a partir da realização de uma pesquisa teórico-bibliográfica acerca das principais produções científicas relacionadas ao Ensino de Geometria Espacial, à Aprendizagem Móvel (*Mobile Learning*) e às Tecnologias Digitais na Educação Matemática, especialmente, aquelas que abordavam a utilização integrada da RA com o *software* GeoGebra. Foi realizada uma pesquisa de campo com alunos matriculados no 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto, no 1º semestre de 2023, a partir da elaboração, desenvolvimento e avaliação de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra 3D, relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial que abordaram o estudo de sólidos geométricos, tais como: cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esferas. A descrição e análise das atividades exploratórias revelou que foi possível trabalhar algumas possibilidades que as ferramentas dispõem para a visualização, compreensão e interatividade entre o ambiente virtual e o real, por meio das projeções das figuras construídas e visualizadas em tela, utilizando de forma integrada a RA com o GeoGebra 3D, baixados e instalados nos dispositivos móveis dos alunos. As conclusões de nossa pesquisa apontam que as principais contribuições de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio foram: a visualização na criação e desenvolvimento de ideias, conceitos e propriedades dos sólidos geométricos; a potencialização da aprendizagem móvel por meio da utilização de recursos tecnológicos e dos dispositivos móveis; e a construção de um novo olhar, por parte dos alunos participantes, para as possibilidades de utilização de Tecnologias Digitais na aprendizagem de Matemática. Por fim, trazemos em destaque que a utilização de ferramentas tecnológicas para a abordagem de conteúdos de Geometria Espacial no Ensino Médio despertou o interesse e fomentou uma nova dinâmica de trabalho para os alunos, explorando as possibilidades oferecidas e que podem ser utilizadas no ambiente escolar e fora dele, por meio da aprendizagem móvel relacionada aos conteúdos escolares utilizando-se a RA e o GeoGebra 3D.

Palavras-chave: Educação Matemática. Realidade Aumentada. *Software* GeoGebra. Aprendizagem Móvel. Geometria Espacial.

ABSTRACT

This dissertation presents research whose general objective is to discuss possible contributions of exploratory activities using in an integrated way Augmented Reality (AR) with the GeoGebra software for learning Spatial Geometry in High School. The methodology was qualitative in its assumptions and methods, based on theoretical-bibliographical research on the main scientific productions related to the Teaching of Spatial Geometry, Mobile Learning and Digital Technologies in Mathematics Education, especially those that addressed the integrated use of AR with the GeoGebra software. A field survey was carried out with students enrolled in the 2nd year of High School at the Federal Institute of Minas Gerais – Campus Ouro Preto, in the 1st semester of 2023, based on the elaboration, development and evaluation of exploratory activities using in an integrated way AR with the GeoGebra 3D software, related to Space Geometry contents that addressed the study of geometric solids, such as: cubes, parallelepipeds, pyramids, cylinders, cones and spheres. The description and analysis of the exploratory activities revealed that it was possible to work on some possibilities that the tools have for visualization, understanding and interactivity between the virtual and the real environment, through the projections of the figures built and visualized on screen, using AR with GeoGebra 3D, downloaded and installed on the students' mobile devices. The conclusions of our research indicate that the main contributions of exploratory activities using AR with the GeoGebra software for learning Spatial Geometry in High School were: visualization in the creation and development of ideas, concepts and properties of geometric solids; enhancing mobile learning through the use of technological resources and mobile devices; and the construction of a new perspective, on the part of the participating students, towards the possibilities of using Digital Technologies in learning Mathematics. Finally, we highlight that the use of technological tools to approach Spatial Geometry content in High School has aroused interest and fostered a new work dynamic for students, exploring the possibilities offered and that can be used in the school environment and outside it, through mobile learning related to school content using AR and 3D GeoGebra.

Keywords: Mathematics Education. Augmented Reality. GeoGebra Software. Mobile Learning. Spatial Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição geográfica das 6 dissertações via busca no CTD-CAPES....	32
Figura 2 – Distribuição geográfica dos 6 trabalhos via busca no <i>Google Acadêmico</i>	33
Figura 3 – Prédio do IFMG – Campus Ouro Preto no qual se localiza a sala de aula	46
Figura 4 – Montagem de um cubo utilizando as ferramentas do GeoGebra 3D.....	56
Figura 5 – Remoção de eixos e planos, com destaque para a diagonal do cubo.....	56
Figura 6 – Questão 1 da AE1.....	57
Figura 7 – Resolução do aluno A12.....	57
Figura 8 – Resolução da questão 1 da AE2.....	59
Figura 9 – Questão 2 da AE2.....	60
Figura 10 – Resolução dos alunos A16 e A18.....	62
Figura 11 – Questão 3 da AE2.....	63
Figura 12 – Resolução dos alunos A06 e A19.....	64
Figura 13 – Questão 4 da AE2.....	65
Figura 14 – Resolução dos alunos A17 e A23.....	65
Figura 15 – Questão 3 da AE3.....	67
Figura 16 – Resolução dos alunos A08, A13 e A14.....	67
Figura 17 – Questão 4 da AE3.....	68
Figura 18 – Resolução dos alunos A16 e A18.....	68
Figura 19 – Questão 1 da AE4.....	70
Figura 20 – Resolução dos alunos A03, A15 e A20.....	70
Figura 21 – Questão 2 da AE4.....	71
Figura 22 – Resolução dos alunos A16 e A18.....	71
Figura 23 – Questão 3 da AE4.....	72
Figura 24 – Resolução dos alunos A03, A15 e A20.....	73
Figura 25 – Questão 4 da AE4.....	73
Figura 26 – Resolução dos alunos A11 e A24.....	74
Figura 27 – Questão 1 da AE5.....	75
Figura 28 – Resolução dos alunos A05 e A10.....	75
Figura 29 – Questão 2 da AE5.....	76
Figura 30 – Resolução dos alunos A05 e A10.....	76
Figura 31 – Questão 3 da AE5.....	77
Figura 32 – Resolução dos alunos A04 e A06.....	77
Figura 33 – Questão 4 da AE5.....	78
Figura 34 – Resolução dos alunos A02 e A21.....	78

Figura 35 – Questão 1 da AE6.....	80
Figura 36 – Resolução dos alunos A11 e A24.....	81
Figura 37 – Questão 2 da AE6.....	83
Figura 38 – Resolução dos alunos A08, A13 e A14.....	84
Figura 39 – Questão 3 da AE6.....	85
Figura 40 – Resolução dos alunos A06 e A19.....	86
Figura 41 – Gráfico de Respostas à Questão 1.....	89
Figura 42 – Gráfico de Respostas à Questão 2.....	90
Figura 43 – Gráfico de Respostas à Questão 3.....	91

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Teses e Dissertações encontradas no CTD-CAPES ou <i>Google</i> Acadêmico.....	33
Quadro 2 – Cronograma de realização das Atividades Exploratórias.....	47

LISTA DE SIGLAS

AE – Atividade Exploratória
AR – *Augmented Reality*
BOEING – Fábrica e modelo de avião de grande porte
BNCC – Base Nacional Comum Curricular
CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP – Comitê de Ética em Pesquisa
CEUB – Centro de Ensino Unificado de Brasília
CFS – Curso de Formação de Sargentos
DF – Distrito Federal
EEAR – Escola de Especialistas de Aeronáutica
EMA726 – Disciplina eletiva de Tecnologias Digitais na Educação Matemática
ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
FAFI-BH – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte
GeoGebra – *Software* de Matemática Dinâmica
Google – Sítio onde são feitas buscas na *internet*
Google Forms – Formulários de pesquisa acadêmica *on-line*
IES – Instituição de Ensino Superior
IFES – Instituto Federal do Espírito Santo
Internet – Rede Mundial de Computadores ligados a provedores
Km – Quilômetros
Link – Elo estabelecido na *internet* para acesso a páginas ou conteúdos
MG – Estado de Minas Gerais
Mobile Learning – Aprendizagem Móvel
MT – Estado do Mato Grosso
M/D – Mestrado/Doutorado
On-Line – Expressão em inglês que designa conexão ativa
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
Pokémon Go – Jogo virtual interativo
Pokémons – Figuras caçadas no jogo Pokémon Go
PPGEDMAT – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Prof. Dr. – Professor Doutor
PUCRS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
QF – Questionário Final
QI – Questionário Inicial
RA – Realidade Aumentada
RJ – Estado do Rio de Janeiro
RV – Realidade Virtual
Smartphone – Telefone Celular que agrega vários dispositivos tecnológicos
SP – Estado de São Paulo
TALE – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TD – Tecnologias Digitais
UEPG – Universidade Estadual de Ponta Grossa
UFG – Universidade Federal de Goiás

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UMINHO – Universidade do Minho (Portugal)
UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura
UniBH – Centro Universitário de Belo Horizonte
UNICEUB – Centro Universitário de Brasília
UNICSUL – Universidade Cruzeiro do Sul
UNIFEI – Universidade Federal de Itajubá
UNIRIO – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
WhatsApp – Aplicativo de troca de mensagens e fotos (mídia social)
3D – Realidade em 3 dimensões

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Uma tríade nos caminhos da pesquisa.....	16
1.1. Um breve histórico de nossa trajetória acadêmica.....	16
1.2. Uma introdução à discussão.....	20
1.3. Caminhando para a construção de um referencial teórico-bibliográfico.....	22
1.3.1. Realidade Aumentada.....	22
1.3.2. O <i>Software</i> GeoGebra.....	23
1.3.3. A Aprendizagem Móvel (<i>Mobile Learning</i>).....	24
1.4. Justificando a relevância da pesquisa.....	25
1.5. Delineamento da Pesquisa.....	28
1.5.1. Questão de Investigação.....	28
1.5.2. Objetivo Geral.....	29
1.5.3. Objetivos Específicos.....	29
1.6. Metodologia de Pesquisa.....	29
1.7. Estrutura da Dissertação.....	30
Capítulo 2 – Alguns entrelaçamentos teóricos da pesquisa.....	31
2.1. Um breve mapeamento de pesquisas em Língua Portuguesa.....	31
2.2. Um detalhamento dos trabalhos mapeados.....	34
2.3. Uma concepção de visualização.....	38
Capítulo 3 – A construção metodológica da pesquisa.....	40
3.1. A escolha pela abordagem qualitativa de pesquisa.....	40
3.2. Retomando a questão de investigação e os objetivos de pesquisa.....	43
3.3. A pesquisa de campo em seu contexto.....	45
3.4. Uma concepção de Atividade Exploratória.....	48
3.5. Os instrumentos de coleta e produção de dados.....	50
Capítulo 4 – A descrição e a análise dos dados da pesquisa.....	52
4.1. Descrevendo os encontros.....	52
4.1.1. 1.º encontro (dia 16/01/2023) – Apresentação da Pesquisa.....	53
4.1.2. 2.º encontro (dia 23/01/2023- AE1) Cubos e Paralelepípedos.....	55
4.1.3. 3.º encontro (dia 30/01/2023 – AE2) Pirâmides.....	58
4.1.4. 4.º encontro (dia 08/02/2023) – AE3) Revisão de Cubos, Paralelepípedos e Pirâmides.....	66
4.1.5. 5.º encontro (dia 15/02/2023) – AE4) Cilindros.....	69
4.1.6. 6.º encontro (dia 01/03/2023) – AE5) Cones.....	74
4.1.7. 7.º encontro (dia 08/03/2023) – AE6) Esferas.....	79
4.1.8. 8.º encontro (dia 15/03/2023) – Conclusão da Pesquisa.....	87
4.2. Analisando os Questionários Inicial e Final.....	87
4.2.1. Analisando o Questionário Inicial.....	88
4.2.2. Analisando o Questionário Final.....	91
4.3. Elaborando algumas categorias de análise.....	96
4.3.1. A visualização na criação e desenvolvimento de ideias, conceitos e propriedades dos sólidos geométricos.....	97

4.3.2. A potencialização da aprendizagem móvel por meio da utilização de recursos tecnológicos e dos dispositivos móveis.....	99
4.3.3. Um novo olhar para as possibilidades de utilização de Tecnologias Digitais na aprendizagem de Matemática.....	100
Considerações Finais.....	103
Referências.....	110
Anexo 1 – Matriz Curricular de Matemática para o Curso Técnico Integrado de Administração.....	116
Apêndice 1 – Apresentação da Pesquisa – 1.º encontro (16/01/2023).....	117
Apêndice 2 – TCLE para pais ou responsáveis legais pelos alunos menores de idade.....	123
Apêndice 3 – TCLE para alunos maiores de idade.....	126
Apêndice 4 – TALE para alunos menores de idade.....	129
Apêndice 5 – Questionário Inicial.....	132
Apêndice 6 – Questionário Final.....	134

Capítulo 1

UMA TRÍADE NOS CAMINHOS DA PESQUISA

Estamos entrando na era do que se costuma chamar a “sociedade do conhecimento”. A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e, muitas vezes, morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologia.

Ubiratan D’Ambrosio

Neste capítulo, apresentamos uma breve histórico de nossa trajetória acadêmica, seguido por uma introdução ao tema da pesquisa, devidamente justificado. Concluímos delineando os principais elementos metodológicos da pesquisa.

1.1. Um breve histórico de nossa trajetória acadêmica

Sendo¹ um estudante mais velho a entrar num mestrado, venho de um tempo no qual não havia “tecnologias digitais disponíveis”, especialmente, dentro da sala de aula. Também não havia, naquele tempo, *internet*, *smartphone* e outras ferramentas tecnológicas como as que existem atualmente.

Meus primeiros passos dentro da escola foram dados em minha cidade natal, Nilópolis, no estado do Rio de Janeiro, ingressando na Escola Municipal Professor José Bonifácio, na 1ª série do antigo 1.º grau (correspondente ao atual Ensino fundamental, porém estruturado em apenas 8 anos), aos 7 anos de idade, no ano de 1974. Como a escola fechou ainda naquele ano, os alunos tiveram que ser transferidos para outra escola. Fui, então, remanejado para o Complexo Escolar Doutor Nilo Peçanha, na mesma cidade, concluindo a 4.ª série do 1.º grau nessa escola, em 1977. Da 5.ª à 8.ª séries, entre os anos de 1978 a 1981, estudei no Colégio Estadual Aydano de Almeida, ainda em Nilópolis – RJ. Também foi nesse estabelecimento de ensino que cursei o antigo 2.º grau (correspondente ao atual Ensino Médio), entre os anos de 1982 a 1984. Não senti grandes dificuldades nessa fase da minha formação básica, já que tinha apoio integral de meus pais e irmãs mais velhas, para os estudos e tarefas do tipo “para casa”.

¹ Somente aqui, neste breve histórico, utilizaremos o tempo verbal na primeira pessoa do singular, para contarmos um pouco da nossa trajetória acadêmica que, em seu bojo, carrega algumas de nossas vivências e expectativas.

Desde a mais tenra idade, eu já sonhava em entrar algum dia numa universidade, pois ouvia falar de como os estudos poderiam ser importantes na vida para mudar a realidade caótica da população de baixa renda que, no caso, era a realidade de meus humildes pais, sendo meu pai semianalfabeto e minha mãe tendo pouca instrução também, vivendo uma vida com muitas dificuldades financeiras, pois meu pai era motorista e minha mãe era dona de casa.

A Educação Básica que tive, nas escolas pelas quais passei, foi baseada no “ensino tradicional”, sem qualquer referência às atuais modernas tecnologias. Com isso, era preciso fazer pesquisas em bibliotecas e estudar conteúdos acadêmicos quase que apenas nos livros didáticos. Quando necessário, copiávamos trechos de livros didáticos à mão. Também os professores de todas as disciplinas que faziam parte da formação escolar utilizavam livros didáticos para o ensino dos diversos conteúdos. A utilização de livros didáticos, então, foi uma metodologia que começou nos tempos antigos e ainda perdura nos tempos atuais. Cabe destacar, então, Botelho e Assis (2021) ao afirmarem que a utilização de um livro didático por parte de um professor pode indicar algumas de suas concepções.

Devido ao fato de ter que trabalhar muito cedo, meu sonho de entrar numa universidade foi adiado, pois não havia como me dedicar integralmente aos estudos sem, antes, conseguir um emprego que servisse de “suporte financeiro” para minha vida acadêmica. Dessa forma, cheguei a trabalhar como atendente em uma farmácia e em um bar, ainda durante a fase do antigo 2.º grau. Porém, era necessário conseguir algo mais estável, que pudesse me dar maior tranquilidade para os estudos. Um dos caminhos existentes à época era o ingresso na carreira militar, pois nela o salário era melhor, bem como as condições de trabalho. Pus-me, assim, a dedicar-me aos estudos para prestar concurso para o ingresso na carreira militar. Após várias tentativas, consegui entrar no Curso de Formação de Sargentos (CFS) da Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAr), na cidade de Guaratinguetá – SP, no ano de 1985. O período de formação nessa escola era de praticamente 2 anos. Foi uma rotina intensa de treinamentos militares, formação militar e básica, pois no currículo da escola havia uma equivalência ao antigo 2.º grau com formação técnica, onde estudávamos conteúdos de Matemática, Física, Português (Gramática, Interpretação de Textos e Redação), entre outros.

Após me formar nessa escola, no final do ano de 1986, fui designado a trabalhar, já como militar (3.º Sargento), em Brasília – DF. Foi lá que iniciei minha vida acadêmica na universidade, no ano de 1987, cursando Ciências com Habilitação em Matemática e

Física, no antigo Centro de Ensino Unificado de Brasília (CEUB, atual UniCEUB). Apesar de ter passado para o ingresso em 1987, tive de trancar a matrícula no 2.º semestre desse ano, pois fui transferido para trabalhar no Mato Grosso – MT. Fiquei nesse estado até o final de 1987. Ao regressar para Brasília, em 1988, retomei meus estudos no CEUB. Estudei lá até o final de 1989 quando, devido ao falecimento de minha mãe, tive que me mudar para minha cidade natal, Nilópolis – RJ, para dar apoio aos meus familiares.

Tentei transferência para uma universidade que tivesse um curso próximo ao que já fazia. Contudo, como trabalhava durante o dia só sobrava o período noturno para realizar meus estudos universitários. Foi quando entrei na antiga Faculdade Celso Lisboa (atual Centro Universitário Celso Lisboa), no bairro do Engenho Novo, na cidade do Rio de Janeiro – RJ, no início de 1990. Como a estrutura curricular era um pouco diferente do CEUB, tive que, praticamente, recomeçar o curso de Ciências com Habilitação em Matemática e Física. Concluí, então, minha graduação no início de 1994.

No entanto, logo após concluir aquela que seria minha 1ª graduação, fui transferido para trabalhar em Confins – MG. Logo que cheguei a Minas Gerais, casei-me e passei a morar na capital Belo Horizonte, ainda em 1994. Em 1995, fiz um curso de Especialização em Educação Matemática, no Centro Universitário de Belo Horizonte (UniBH). Ao longo do curso, tive grandes professores como Reginaldo Naves de Souza Lima, Eliane Scheid Gazire e Jussara de Loiola Araújo, entre outros acadêmicos de larga formação e experiência acadêmica. Durante o curso de especialização, discutimos textos que abordaram a área de Educação Matemática, com destaque para a pesquisa e tópicos de História da Matemática. Foi um curso muito produtivo pois, apesar de eu não lecionar em escolas, a turma era composta de professores de Matemática que atuavam em escolas públicas e particulares de Belo Horizonte e região metropolitana.

A troca de experiências com os colegas professores me fez sentir a necessidade de interagir mais com alunos de escolas públicas e particulares. Então, aproveitando os tempos de folga do trabalho, dediquei-me a dar aulas particulares de Matemática, tendo exercido a docência como professor particular de Matemática e Física, para alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Foi um aprendizado muito grande, pois ao mediar conhecimentos e tirar dúvidas dos alunos, ocorria um processo de minha formação continuada na prática educativa e, como destaca Günzel (2019), é por meio de uma continuada reflexão e análise dos conhecimentos teóricos e práticos que se terá a integração de um professor crítico e reflexivo sobre a sua forma de mediar conhecimentos

e, para isso, o professor deve refletir sobre os tópicos abordados que media e como media, com o intuito de corrigir algum método ou prática em sua atividade como docente.

O trabalho com aulas particulares de Matemática foi exercido durante os anos seguintes, de 1995 a 2009, nos momentos de folga do trabalho, mas eu sentia a necessidade de realizar uma outra graduação na área da Educação, para que pudesse aperfeiçoar minha prática como mediador pedagógico durante as aulas particulares.

Em 2010, fui aprovado para o curso de Licenciatura em Pedagogia na modalidade de Educação a Distância da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Durante o curso, também tive contato com colegas professores que trabalhavam em escolas públicas e particulares de Minas Gerais. O curso teve algumas interrupções durante alguns períodos de greve de professores, tendo assim se prolongado um pouco mais. Muitas disciplinas que tivemos durante o curso estavam ligadas ao ensino, à aprendizagem e à formação do professor, utilizando diferentes métodos, técnicas e tecnologias. Esse último tópico despertou muito o meu interesse em me familiarizar com as tecnologias educacionais que estavam surgindo e sendo implementadas no ambiente escolar.

Terminei minha graduação em Pedagogia em 2015 e, desde então, passei a cursar disciplinas isoladas de mestrado em universidades públicas de Minas Gerais, tanto na área da Educação quanto de outras áreas do conhecimento como Administração, Educação Tecnológica, Filosofia e Física. Sentia que já era a hora de tentar entrar em um Mestrado como um aluno regular e prosseguir nos estudos de forma mais aprofundada, com o foco na pesquisa e na área tecnológica.

Ao cursar a disciplina eletiva EMA 726 – Tecnologias Digitais na Educação Matemática do Mestrado em Educação Matemática da UFOP, eu e uma colega da disciplina tivemos interesse em apresentar aos colegas um seminário que abordasse a utilização de Tecnologias Digitais relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Após pesquisas feitas em periódicos e artigos científicos, descobrimos uma oportunidade abordando a utilização conjugada da Realidade Aumentada com *softwares* de Matemática Dinâmica como o GeoGebra, no ensino de Geometria Espacial, especialmente, no contexto do Ensino Médio. Pensando nesses tópicos, fizemos uma apresentação de um experimento de ensino, no qual exploramos as possibilidades de se trabalhar com a junção de tecnologias para favorecer o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Geometria Espacial, em qualquer dos níveis de ensino: fundamental, médio e superior.

Após uma discussão na qual os outros professores que cursavam a disciplina puderam relatar sua experiência docente e um pouco de suas percepções sobre a apresentação que realizamos, e após a aplicação de um breve questionário avaliativo, concluímos que é necessário lançar mão de novos produtos e tecnologias que permitam aos alunos a aprendizagem de Geometria Espacial em ambientes que potencializem as 3 dimensões, o que pode ser feito utilizando uma tríade composta por: 1) *Software* de Matemática Dinâmica GeoGebra; 2) Aplicativo de Realidade Aumentada; 3) Dispositivo tecnológico portátil (*smartphone*).

Destarte, na visão dos professores que responderam ao questionário de avaliação do experimento de ensino, a junção desses 3 elementos pode contribuir para a aprendizagem móvel, uma tendência que se coloca como forma de facilitação e potencialização para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, especialmente, geométricos espaciais.

De certa forma, tal experiência apontou para a possibilidade de uma pesquisa acadêmica mais aprofundada. Assim, após a apresentação do seminário, decidi por tentar meu ingresso no Mestrado em Educação Matemática da UFOP, apresentando um anteprojeto de pesquisa entrelaçando os elementos da referida tríade que, após a minha aprovação para início do mestrado em 2022, acabou por se constituir o *startup* para a presente dissertação.

1.2. Uma introdução à discussão

A evolução tecnológica surgida ainda no século XX e continuamente aperfeiçoada no século XXI, conquistou espaços em todo o mundo, influenciando a vida em sociedade e produzindo efeitos profundos na forma de pensar, interagir, produzir, compartilhar e disseminar informações das mais variadas, indo das conversas diárias nas rotinas das pessoas até os trabalhos científicos elaborados no meio acadêmico.

No cenário educacional, Tecnologias Digitais foram surgindo e sendo modificadas até chegarmos à utilização de *softwares* dinâmicos e produtos tecnológicos para o ensino e para a aprendizagem de Matemática, tais como a Realidade Aumentada e o *software* GeoGebra. Juntando-se a isso, a própria forma de interação entre alunos e professores sofreu grandes mudanças, passando o aluno a ocupar o centro das atenções no aspecto do desenvolvimento individual, coletivo e social.

Particularmente, tal cenário também tem se verificado no contexto dos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial, parte da Geometria que está inserida numa estruturação curricular que abrange tanto o Ensino Fundamental, por meio de uma introdução de seus conceitos básicos, como o Ensino Médio, por meio de uma exploração de suas principais propriedades.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p. 273), a Geometria “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”.

Já o conteúdo de Geometria Espacial está presente na BNCC, porém de maneira ainda muito tímida, por exemplo, no Ensino Fundamental, de acordo com o parecer emitido por Nacarato (2018):

A Geometria Espacial é contemplada apenas no 8.º ano, no A151 (representação em perspectiva). Figuras espaciais são abordadas apenas no eixo Grandezas e Medidas, numa perspectiva reducionista com ênfase apenas na métrica, desconsiderando as características das figuras e os conceitos envolvidos. (NACARATO, 2018, p. 9)

Estando os conceitos principais da Geometria Espacial relacionados a informações e visualizações de sólidos e elementos geométricos, observando-se suas especificidades e propriedades, é necessário desenvolver tecnologias, produtos e metodologias que proporcionem aos alunos uma maior compreensão das formas espaciais em 3 dimensões, projetando-as em ambientes reais, tanto na sala de aula quanto fora dela. Entretanto, essas formas de se ver e de se compreender as estruturas das figuras geométricas ficam prejudicadas quando se dispõem apenas de auxílios visuais como quadros e livros didáticos, pois resulta que as figuras acabam por ficar desenhadas apenas em 2 dimensões, como destacam Oliveira, Silva e Bissaco (2021):

[...] a aprendizagem de cálculo de volumes sólidos gera dificuldade porque os estudantes nem sempre conseguem mentalizar o tridimensional a partir do bidimensional, ou seja, converter mentalmente imagens bidimensionais em tridimensionais. (OLIVEIRA; SILVA; BISSACO, 2021, p. 2)

Apesar da exemplificação ter sido feita para o caso do cálculo de volumes de sólidos, entendemos que a questão levantada pelos pesquisadores pode ser estendida para a aprendizagem de conteúdos geométricos espaciais, de forma geral.

1.3. Caminhando para a construção de um referencial teórico-bibliográfico

Na perspectiva de iniciarmos a construção de nosso referencial teórico-bibliográfico, apresentamos, inicialmente, algumas noções sobre os principais elementos que serão abordados na pesquisa ora delineada.

1.3.1. Realidade Aumentada

A Realidade Aumentada (RA) surgiu como uma evolução da Realidade Virtual (RV). Nesta, era necessária a utilização de um dispositivo de acoplamento ao usuário (óculos de realidade virtual) para que ele entrasse no ambiente virtual e interagisse com figuras e eventos que estava vendo diante de seus olhos, fazendo-o se sentir dentro de um mundo paralelo, virtual. Já a RA não necessita de um dispositivo acoplado ao corpo do usuário, podendo ser utilizada por meio de dispositivos móveis portáteis, como *smartphones* e *tablets* para permitir ao usuário acessar o ambiente virtual e trazer a imagem virtual para o ambiente físico ou real.

O termo “Realidade Aumentada” foi criado por volta de 1992, pelo investigador Tom Caudell, da companhia aérea Boeing. Uma primeira experiência na utilização da RA se deu por meio de um jogo interativo denominado *Pokémon Go*, lançado em 2016. Nesse jogo, os jogadores saíam pelas ruas e outros ambientes “caçando” personagens virtuais que apareciam nas telas e eram denominados *Pokémons*. Também numa época posterior a esse jogo, os óculos 3D eram utilizados em salas de projeções (cinemas) onde a plateia poderia assistir aos filmes, tendo a impressão de que os personagens e eventos “saltavam” da tela.

De acordo com Macedo e Buriol (2016, p. 3), a forma de interação mais usual em RA é aquela na qual o usuário transita livremente ao redor de um objeto, observando-o sob variados ângulos e pontos de vista. De acordo com Lopes, Vidotto, Pozzebon e Ferenhof (2019):

Neste sentido, a RA enquanto elemento complementar do mundo real é uma forma de adicionar elementos virtuais que contribuirão para a aprendizagem e compreensão de elementos da realidade, podendo trazer benefícios às mais diversas áreas do conhecimento, dentre elas, a educação, por sua amplitude de possibilidades de aplicação. (LOPES; VIDOTTO; POZZEBON; FERENHOF, 2019, p. 5)

Ainda de acordo com Lopes, Vidotto, Pozzebon e Ferenhof (2019), na aplicação da utilização da RA no contexto educacional:

Diversos estudos comprovam que sua utilização traz contribuições para a percepção e motivação dos usuários em diversas atividades no contexto educacional, auxiliando na aprendizagem em diversas áreas do conhecimento. [...] O alto nível de interatividade proporcionado pela Realidade Aumentada acarreta aprimoramento do aprendizado, além de permitir mais engajamento dos estudantes, principalmente quando envolvidos na criação de seus próprios projetos utilizando RA. (LOPES; VIDOTTO; POZZEBON; FERENHOF, 2019, p. 5)

Atualmente, uma das utilizações da RA no contexto educacional, especialmente, na Educação Matemática, pode ser atrelada ao ensino de Geometria Espacial. Com a utilização do *smartphone*, pode-se “baixar” gratuitamente o aplicativo de RA, juntamente com o *software* de Matemática Dinâmica GeoGebra, para estudar e explorar conteúdos de Geometria Espacial, podendo-se projetar imagens no ambiente real da sala de aula ou em outro local que o estudante preferir, para estudar as propriedades e especificidades de sólidos geométricos em 3D.

1.3.2. O *Software* GeoGebra

De acordo com Idem (2017), o GeoGebra é um *software* gratuito de Matemática Dinâmica que pode ser utilizado em qualquer nível de ensino, combinando diversas áreas da Matemática, não somente Geometria e Álgebra, mas também Aritmética e Estatística. Ele foi criado pelo matemático suíço Markus Hohenwarter, em 2001, sendo concebido durante a sua Tese de Doutorado na Universidade de Salzburgo, Áustria. Ainda segundo o Instituto GeoGebra de São Paulo, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, atualmente, o GeoGebra está sendo utilizado em cerca de 190 países e foi traduzido para aproximadamente 55 idiomas, tendo recebido vários prêmios na área de Educação, ao redor do mundo.

A crescente importância do GeoGebra nas pesquisas relacionadas à utilização de Tecnologias Digitais na Educação Matemática é destacada por Sousa (2018), da seguinte forma:

O uso das tecnologias da educação no ensino da Matemática é de grande relevância para efetivamente contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, com o objetivo principal de minimizar as dificuldades oriundas da modalidade de ensino tradicional. Diante de vários *softwares* utilizados para melhorar o aprendizado dos alunos, destaca-se o GeoGebra, como uma ferramenta computacional muito importante e utilizada em várias áreas do conhecimento. (SOUSA, 2018, p. 35)

Ainda de acordo com Sousa (2018), o surgimento do GeoGebra impactou os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, uma vez que:

A educação sofreu uma revolução com o surgimento do GeoGebra na forma de ensinar e trabalhar os conteúdos da Matemática, pois agora os alunos apresentam um recurso que permite a criação de gráficos e cálculos algébricos de maneira dinâmica e interativa, incentivando aos alunos o interesse pela Matemática. (SOUSA, 2018, p. 36)

As possibilidades de utilização do GeoGebra trazem para os alunos uma série de vantagens, principalmente, na visualização, compreensão e entendimento de conteúdos matemáticos. Particularmente, em sua versão 3D, é possível trabalhar com sólidos geométricos e, aliando-o à tecnologia da RA, pode-se projetar figuras em ambientes reais, contribuindo assim, para a compreensão de definições, teoremas, postulados, além de favorecer a interatividade com os objetos virtuais projetados no ambiente real, podendo-se observar as suas especificidades e particularidades e visualizar, por exemplo, os elementos de um cubo tais como faces, arestas, diagonais, entre outros.

1.3.3. A Aprendizagem Móvel (*Mobile Learning*)

A aprendizagem móvel, tradução dos termos *Mobile Learning*, é uma modalidade que permite ao estudante estudar conteúdos escolares, de todas as matérias, fora do ambiente da sala de aula, por meio da utilização de dispositivos móveis, como *smartphones* e *tablets*.

A respeito da aprendizagem móvel, a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO, 2017) ressalta que:

A aprendizagem móvel apresenta atributos exclusivos, se comparada à aprendizagem tecnológica convencional: ela é pessoal, portátil, colaborativa, interativa, contextual e situada; ela enfatiza a "aprendizagem instantânea", uma vez que a instrução pode ocorrer em qualquer lugar e a qualquer momento. Além disso, ela pode servir de apoio às aprendizagens formal e informal, tendo assim um enorme potencial para transformar o modo de se oferecer educação e treinamento. (UNESCO, 2017, p. 1)

Por sua vez, Moura (2010) apresenta uma definição de aprendizagem móvel que pode ajudar a entender essa nova forma de aprendizagem e sua relação com as tecnologias. Para a pesquisadora, a aprendizagem móvel é um:

[...] processo de aprendizagem que ocorre apoiado pelo uso de dispositivos móveis, tendo como característica fundamental a portabilidade dos dispositivos e a mobilidade dos sujeitos, que podem estar fisicamente e geograficamente distantes uns dos outros ou em espaços físicos formais de educação, como na sala de aula. (MOURA, 2010, p. 3)

Já para Cleophas, Cavalcanti, Souza e Leão (2015), a aprendizagem móvel pode ser tratada como um paradigma educativo, pois:

O que se sabe é que o *m-learning* (*mobile learning*) é considerado um paradigma educativo e está envolto em uma série de possibilidades de aplicações que estão emergindo perante as mudanças necessárias ao processo evolutivo da melhoria da qualidade da educação. (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOUZA; LEÃO, 2015, p. 189)

Após essa breve apresentação de alguns elementos centrais na construção teórica-bibliográfica de nossa pesquisa, buscaremos justificar sua relevância.

1.4. Justificando a relevância da pesquisa

O ensino de Geometria pode proporcionar aos alunos trabalhar com elementos teóricos que podem ser visualizados ou transpostos para o ambiente real, por meio da observação de formas e especificidades que existem nos elementos da natureza. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997):

Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc. (BRASIL, 1997, p. 82-83)

Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p. 39), “A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente”.

Nessa perspectiva, outro atrativo para os alunos certamente pode se configurar a partir da utilização de Tecnologias Digitais no ensino de Matemática, especialmente, quando trabalhadas no ambiente escolar, visando despertar o interesse dos alunos pela Geometria, em situações propostas pelos professores, nas quais ocorram desafios, descobertas e interações. Uma das formas de conduzir esse processo é utilizar o *software* GeoGebra, pois de acordo com Souza (2017):

Os recursos digitais podem ser uma ferramenta para melhorar o amadurecimento cognitivo, desenvolvendo habilidades para resolver problemas inicialmente inalcançáveis e ampliando habilidades físicas e mentais. [...] Os avanços tecnológicos vêm proporcionando ao professor, equipamentos e recursos metodológicos dos mais diferentes tipos, que favorecem a aprendizagem e despertam, no aluno, o interesse e o gosto pela matemática. Uma dessas ferramentas são os recursos visuais disponibilizados em *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, por exemplo. (SOUZA, 2017, p. 13)

Por sua vez, Ricaldi (2012), referindo-se particularmente à Geometria Espacial, destaca que:

Nas séries finais do Ensino Médio, os alunos, durante o ano letivo, têm a oportunidade de realizar trabalhos relacionados à geometria espacial com a utilização de sólidos, o que promove a melhoria do aprendizado, motivado pela visualização. (RICALDI, 2012, p. 13)

Com relação à utilização de Tecnologias Digitais no ensino de Geometria Espacial, Menegais, Ferreira, Fagundes e Penha (2022) esclarecem que a utilização de Tecnologias Digitais pode favorecer a aprendizagem de Geometria Espacial. Afirmam que:

[...] a utilização das tecnologias digitais no campo educacional, proporciona aos estudantes atividades mais ativas e envolventes. O uso de *softwares* de geometria dinâmica propõe uma aprendizagem envolvente e participativa, além de desenvolver o pensamento geométrico dos estudantes. (MENEGAIS; FERREIRA; FAGUNDES; PENHA, 2022, p. 3)

Assim, visando essa visualização de conteúdos de Geometria Espacial e dentro do contexto da utilização de recursos digitais no ambiente escolar, visando despertar o interesse dos alunos pela Geometria, outro componente tecnológico que pode se somar ao GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial é a RA, pois para Macedo, Silva e Buriol (2016):

Ao “misturar” o mundo virtual com o real é possível criar formas de interação com objetos que só estão limitados à nossa imaginação. A possibilidade de visualizar, explorar livremente vários pontos de vista e interagir com objetos virtuais tridimensionais pode sugerir inúmeros benefícios potenciais para o ensino de sólidos geométricos. O uso dessas tecnologias oferece aos alunos a possibilidade de explorar tópicos da disciplina de Matemática de forma mais intensa, desenvolvendo sua intuição e sua consciência de conteúdos. (MACEDO; SILVA; BURIOL, 2016, p. 2-3, grifos dos autores)

Junta-se a tal possibilidade de utilização conjunta da RA com o GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial, a perspectiva da aprendizagem móvel, que tem como objetivo “propiciar a acessibilidade a informações e conhecimentos a qualquer hora e lugar, utilizando aparelhos eletrônicos, digitais, portáteis, com acesso à *internet* e aspectos multimídias, como os *smartphones*” (FREITAS, DUARTE FILHO, 2018, p. 53).

Assim, a junção de tais elementos e perspectivas podem trazer à tona o que defende D’Ambrosio (2014) em relação às Tecnologias Digitais na Educação Matemática:

Estamos entrando na era do que se costuma chamar a “sociedade do conhecimento”. A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. (D’AMBROSIO, 2014, p. 74)

Da mesma forma, a importância da presente pesquisa se justifica no que afirma Valente (2007):

A presença das tecnologias digitais em nossa cultura contemporânea cria novas possibilidades de expressão e comunicação. Elas estão cada vez mais fazendo parte do nosso cotidiano e, do mesmo modo que a tecnologia da escrita, elas também devem ser adquiridas. Além disso, as tecnologias digitais estão introduzindo novos modos de comunicação como, por exemplo, a criação e uso de imagens, de som, de animação e a combinação dessas modalidades. (VALENTE, 2007, p. 12)

Por fim, cabe ressaltar que a Educação Matemática tem um caráter de propor novos caminhos e formas de se ensinar e aprender Matemática, o que ressalta a contribuição pedagógica da presente pesquisa, com a possibilidade de utilização conjugada da tríade GeoGebra, RA e *smartphone*, na perspectiva da aprendizagem móvel. Ainda deve ser esclarecido, aqui, que o *software* GeoGebra possui 2 versões, a 2D e a 3D, que são comumente utilizadas em computadores portáteis, como os *notebooks* ou *tablets*. Assim, a utilização integrada da RA com o *software* GeoGebra na versão 3D em *smartphones* amplia a possibilidade de utilização em diferentes ambientes, coadunando com os princípios básicos da aprendizagem móvel.

1.5. Delineamento da Pesquisa

1.5.1 Questão de Investigação

A partir da problematização construída até aqui, podemos estabelecer a seguinte questão passível de investigação que também se constituiu em mola propulsora de nossa pesquisa:

Quais são as possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando de forma integrada a RA com o GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio?

Essa investigação, por envolver os focos teóricos das Tecnologias Digitais na Educação Matemática e do Ensino de Geometria Espacial, foi desenvolvida na Linha de Pesquisa 2 – Processos de Ensino e de Aprendizagem de Matemática do Mestrado em Educação Matemática da UFOP.

1.5.2. Objetivo Geral

- Discutir possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio.

1.5.3. Objetivos Específicos

- Investigar os principais estudos / pesquisas recentes relacionadas ao ensino de Geometria Espacial, à aprendizagem móvel (*Mobile Learning*) e às Tecnologias Digitais na Educação Matemática;
- Elaborar atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial;
- Apresentar as principais contribuições de tais atividades exploratórias na perspectiva da aprendizagem móvel, a partir de sua experimentação por alunos do Ensino Médio.

1.6. Metodologia de Pesquisa

A metodologia contemplou a realização de uma pesquisa teórico-bibliográfica analisando livros, artigos publicados em congressos e em revistas da área de Educação Matemática, teses e dissertações do banco de dados da CAPES, relacionados ao Ensino de Geometria Espacial, à aprendizagem móvel (*Mobile Learning*) e às Tecnologias Digitais na Educação Matemática, especialmente, aquelas sobre a utilização integrada da RA com o *software* GeoGebra.

A metodologia também contemplou a realização de uma pesquisa de campo a partir da elaboração, desenvolvimento e avaliação de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial, com alunos do 2.º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto, realizada no 1.º semestre de 2023, de acordo com as seguintes tarefas:

- Elaboração das atividades exploratórias abordando diversos conteúdos de Geometria Espacial, com a utilização da RA com o *software* GeoGebra;

- Desenvolvimento das atividades exploratórias com alunos do 2.º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto;

- Avaliação das atividades exploratórias pelos alunos com os quais elas foram desenvolvidas, por meio de um questionário de avaliação preenchido de forma *online*.

A metodologia utilizada foi qualitativa em seus pressupostos e instrumentos, sendo utilizado o seguinte método de análise dos dados:

- Após a elaboração, desenvolvimento e avaliação das atividades exploratórias, passamos para a categorização por similaridades dos dados obtidos, que consistiu na eleição de categorias de análise, com base no levantamento das principais contribuições para a aprendizagem que os alunos participantes manifestaram na realização das atividades exploratórias, tomando como base suas respostas a um questionário de avaliação.

1.7. Estrutura da Dissertação

Após o presente Capítulo 1 no qual apresentamos e buscamos justificar nossa pesquisa, passamos ao Capítulo 2, no qual aprofundamos teoricamente nas relações entre os principais elementos abordados na pesquisa, à luz de alguns referenciais bibliográficos das Tecnologias Digitais no ensino de Geometria Espacial.

A seguir, no Capítulo 3, detalhamos nossa pesquisa metodologicamente, retomando a questão de investigação e os objetivos delineados, apresentando todo o contexto metodológico da investigação.

Já no Capítulo 4, inicialmente, fazemos a descrição do desenvolvimento das atividades exploratórias e a análise dos dados obtidos.

Finalmente, trazemos as Considerações Finais, quando intentamos obter um conjunto de respostas consistentes à questão de investigação da presente pesquisa.

Capítulo 2

ALGUNS ENTRELAÇAMENTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

A revisão de literatura é sempre recomendada para o levantamento da produção científica disponível e para a (re)construção de redes de pensamentos e conceitos, que articulam saberes de diversas fontes na tentativa de trilhar caminhos na direção daquilo que se deseja conhecer.

Suzana Inez Segura-Muñoz

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão da literatura relacionando pesquisas correlatas aos focos de nossa pesquisa, seguida do detalhamento de algumas dessas pesquisas e da concepção de visualização que iremos assumir, à guisa de ampliação de nosso referencial teórico-bibliográfico.

2.1. Um breve mapeamento de pesquisas em Língua Portuguesa

Buscando realizar uma sucinta revisão de trabalhos publicados cujos temas tivessem aproximações com nossos focos de pesquisa, realizamos levantamentos do tipo mapeamento junto às seguintes bases de dados: Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CTD – CAPES) e Google Acadêmico. Cabe ressaltar que, segundo Fiorentini *et al* (2016, p. 18), o mapeamento de pesquisas se refere à identificação, à localização e à descrição das pesquisas que são realizadas num determinado tempo, espaço e campo de conhecimento, preocupando-se mais com os aspectos descritivos de um campo de estudo do que com seus resultados.

Os mapeamentos tiveram o fito de conhecer o que tem sido pesquisado / produzido, mais recentemente, sobre a utilização conjunta da Realidade Aumentada com o *software* GeoGebra ou na perspectiva da Aprendizagem Móvel, não necessariamente relacionando-se ao ensino de Geometria Espacial.

No Catálogo de Teses e Dissertações (CTD) da CAPES foram encontrados 6 trabalhos, sendo todos Dissertações de Mestrado. Já na base de dados do Google Acadêmico foram encontrados 7 trabalhos, sendo 3 Teses de Doutorado e 4 Dissertações de Mestrado.

Com relação às 6 dissertações resultantes da busca no CTD – CAPES, temos que: 4 foram defendidas no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG – PR), da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), da Universidade Federal de Goiás (UFG) e da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB Redenção – CE); 1 (uma) foi defendida no Mestrado de Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES); e 1 (uma) foi defendida no Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

A distribuição geográfica das universidades das 6 dissertações defendidas no Brasil é apresentada na Figura 1, a seguir.

Figura 1: Distribuição geográfica das 6 dissertações via busca no CTD – CAPES



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador

Com relação aos 7 trabalhos resultantes da busca no Google Acadêmico, temos que: 1 (uma) tese defendida no Doutorado em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS); 1 (uma) tese defendida no Doutorado em Ciências da Educação na especialidade de Tecnologia Educativa da Universidade do Minho (UMINHO – Portugal); 1 (uma) tese defendida no Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL – SP); 1 (uma) dissertação defendida no Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS); 1 (uma) dissertação defendida no Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade

Federal de Goiás (UFG); 1 (uma) dissertação defendida no Mestrado em Ensino de Ciências da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI – MG); e 1 (uma) dissertação defendida no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS).

A distribuição geográfica das universidades das 2 teses e 4 dissertações defendidas no Brasil é apresentada na Figura 2, a seguir.

Figura 2: Distribuição geográfica dos 6 trabalhos via busca no *Google Acadêmico*



Fonte: Elaborado pelo Pesquisador

A seguir, concluímos com um quadro demonstrativo que apresenta cada um dos 13 trabalhos encontrados (3 teses e 10 dissertações), destacando: tese (T) ou dissertação (D), autor(a), orientador(a), título, ano de defesa e Instituição de Ensino Superior (IES), apresentando as teses e as dissertações, ordenadas pelo ano de defesa.

Quadro 1: Teses e Dissertações encontradas no CTD – CAPES ou *Google Acadêmico*

T/D	Autor(a)	Orientador(a)	Título	Ano	IES
T	Adelina Maria Carreiro Moura	Prof. Dra. Ana Amélia Amorim Carvalho	Apropriação do telemóvel como ferramenta de mediação em <i>Mobile Learning</i> : estudos de caso em contexto educativo	2010	UMINHO
T	Larissa Weyh Monzon Hedler	Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso	Desenvolvimento do pensamento geométrico espacial: GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante	2020	UFRGS
T	Neuber Silva Ferreira	Prof. Dr. Carlos Fernando de Araújo Júnior	Modelagem Matemática e Aprendizagem Móvel como estratégia pedagógica para o ensino de Matemática no Ensino Médio	2020	UNICSUL

D	Paulo Sérgio de Oliveira	Prof. Dr. Cláudio Kirner	Procedimentos pedagógicos para o processo ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Médio: intervenção pela Realidade Aumentada	2016	UNIFEI
D	Helber dos Santos Ferreira	Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa	O uso de <i>software</i> e seu impacto no tipo de resolução de exercícios de Geometria	2018	UFG
D	Bruno Resende	Prof ^a . Dra. Thaísa Jacintho Müller.	A aprendizagem da Geometria Espacial potencializada por meio de um aplicativo de Realidade Aumentada na perspectiva do <i>Mobile Learning</i>	2019	PUCRS
D	Roberto Carlos Delmas da Silva	Prof. Dr. Carlos Alberto Vasconcelos	Realidade Aumentada como interface para a aprendizagem de Poliedros do tipo Prismas	2019	UFS
D	Ivanete Lopes Gonzaga	Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Junior	Um estudo de caso de aplicação do GeoGebra em uma escola da rede particular com foco em Geometria Espacial	2019	UFG
D	Paula Etiele Sarmiento Schuster	Prof. Dr. Maurício Rosa	Uma professora em cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada: como se dá a constituição do conhecimento matemático?	2020	UFRGS
D	Rodrigo Malan Loureiro Lima	Prof. Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães	O uso da Realidade Aumentada no ensino de Prismas: um referencial didático para professores do Ensino Médio	2021	UNILAB
D	Odailson Gonçalves de Oliveira	Prof ^a . Dra. Fabiane de Oliveira	O uso do GeoGebra 3D com Realidade Aumentada no ensino de Geometria Espacial	2021	UEPG
D	Fernando Nascimento Martins	Prof. Dr. Fábio Xavier Penna	Uma proposta de abordagem da planificação de Poliedros no Ensino Básico utilizando o recurso de Realidade Aumentada do GeoGebra	2021	UNIRIO
D	Thiago César de Pádua Rosa	Prof. Dr. Rony Cláudio de Oliveira Freitas	Do lápis e papel à Realidade Aumentada: uma proposta de ensino de visualização geométrica	2022	IFES

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador

2.2. Um detalhamento dos trabalhos mapeados

Como forma de ampliar o referenciamento teórico-bibliográfico de nossa pesquisa, já iniciado no capítulo anterior, detalharemos os trabalhos mapeados apresentados no Quadro 1, buscando destacar seus objetivos gerais e algumas de suas conclusões que, entendemos, podem ser realçadas / contrastadas com a análise e a categorização de nossos dados.

A tese de Moura, defendida em 2010, objetivou compreender os desafios e oportunidades da integração de dispositivos móveis como o telemóvel (como é chamado o celular ou *smartphone* em Portugal) nos processos de ensino e de aprendizagem. Em

suas conclusões finais, a autora enfatizou que é necessária uma abordagem holística² para englobar diferentes temas da aprendizagem móvel (*Mobile Learning*) e desenvolver novos tipos de atividades de aprendizagem com tecnologias móveis.

A tese de Hedler, defendida em 2020, investigou as possibilidades do impacto das Tecnologias Digitais, sobretudo da utilização do *software* GeoGebra bem como a utilização da impressão 3D, sobre o pensamento geométrico espacial de estudantes do Ensino Médio. A autora apontou para as potencialidades do uso das Tecnologias Digitais como recursos visuais voltadas à manipulação e interação no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial.

A tese de Ferreira, defendida em 2020, investigou as contribuições de uma proposta de ensino utilizando a Modelagem Matemática e a aprendizagem móvel (*Mobile Learning*) na perspectiva da Educação Matemática, além das Tecnologias Digitais móveis, utilizando dispositivos como os *smartphones* na concepção da aprendizagem móvel, como uma estratégia para o ensino de Matemática no Ensino Médio. O autor concluiu que os resultados de sua pesquisa mostraram que as atividades de Modelagem Matemática e o uso dos dispositivos móveis na proposta de ensino contribuíram para os processos de ensino de Matemática no Ensino Médio e para a aprendizagem móvel dos estudantes.

A dissertação de Oliveira, defendida em 2016, buscou realizar um estudo comparativo da aprendizagem de Matemática considerando a postura do aluno em relação ao ambiente tecnológico, sendo que o tema de sua pesquisa abordou a utilização da RA como ferramenta de intervenção nos processos de ensino e de aprendizagem no Ensino Médio. O autor revelou, nos resultados de sua pesquisa, que há pertinência dessa prática pedagógica diferenciada permitindo sua parceria entre tecnologia e Matemática, desvencilhando a aprendizagem do espaço da sala de aula e sinalizando, também, quanto à importância e à emergência de investimentos na formação tecnológica docente, fundamental para que os resultados possam ser favoráveis aos entes envolvidos no processo educacional.

A dissertação de Ferreira, defendida em 2018, propôs a construção de modelos geométricos tridimensionais utilizando o *software* GeoGebra, tomando como base exercícios cuidadosamente selecionados para demonstrar a diferença no grau de

² Esta abordagem pode ser entendida como uma nova forma de ligação do ser humano com o mundo, feita de maneira geral, num aprendizado conjunto, cercado por conhecimentos e convivência mútua.

dificuldade entre uma solução dedutiva abstrata e uma solução geométrica visual. O autor apontou, ao final de sua pesquisa, que a RA tem papel importante como tecnologia facilitadora dos processos de ensino e aprendizagem, tanto para permitir o uso de exercícios de nível superior no nível médio, quanto para facilitar a visualização da resolução para alunos com dificuldades de abstração, considerando que, a partir do desenvolvimento dos *softwares* de RA, pode-se inferir, também, que há uma tendência positiva para uma maior aplicabilidade dessa tecnologia no futuro.

A dissertação de Resende, defendida em 2019, tentou entender como a aprendizagem móvel (*Mobile Learning*) se apresenta no processo de estudos de sólidos de revolução e poliedros na interação com *smartphones*, referentemente à indagação e à exploração do *Mobile Learning* de modo a participar da produção do conhecimento matemático por meio de dispositivos móveis (*smartphones* e *tablets*) como uma alternativa efetiva de aprendizagem de Geometria Espacial com um aplicativo de RA. O autor concluiu que as atividades com tecnologia podem, inicialmente, ser um desafio para os professores e estudantes, mas têm a capacidade de contribuir no processo de construção de conhecimentos matemáticos.

A dissertação de Silva, defendida em 2019, objetivou compreender como se dá a utilização da RA na aprendizagem de poliedros do tipo prismas. Os resultados de sua pesquisa revelaram que ainda são poucos os estudos que tratam da RA como recurso para a aprendizagem de conteúdos de Matemática e, além disso, também revelaram que: um grande percentual de alunos do 2.º ano do Ensino Médio nunca tinha estudado conceitos elementares de Geometria Espacial; atividades experimentais despertam um maior interesse nos alunos para o estudo da Geometria; e uma parte considerável dos alunos apontou ser relevante a utilização do aplicativo de RA para a aprendizagem de prismas, bem como o uso das Tecnologias Digitais em outras disciplinas do currículo escolar.

A dissertação de Gonzaga, defendida em 2019, avaliou a influência do *software* GeoGebra na compreensão da Geometria Espacial e as consequências do uso dessa ferramenta nos processos de ensino e de aprendizagem. A autora destacou que os resultados de sua pesquisa evidenciaram que o uso do *software* GeoGebra, por meio da construção e análise das propriedades dos sólidos, possibilitou aos alunos compreenderem, a partir de sua planificação e movimentação, formas mais simples para solucionar a maioria das questões, sem a necessidade de decorar fórmulas específicas, deixando-os bastante satisfeitos e motivados a assumirem-se como protagonistas de sua aprendizagem.

A dissertação de Schuster, defendida em 2020, investigou como se dá a constituição do conhecimento matemático vinculando às Tecnologias Digitais, em específico, às de RA, já que se configuram por um ambiente próprio, possibilitando a composição entre o mundano e o virtual. Como resultado de sua investigação, a autora evidenciou que a pesquisa contribuiu, no campo da Educação Matemática, para que se pudesse pensar no trabalho com Tecnologias Digitais em diferentes contextos educacionais.

A dissertação de Lima, defendida em 2021, apresentou um referencial didático para o ensino de Geometria no Ensino Médio, por meio da utilização da RA como recurso do *software* GeoGebra, inicialmente, considerando que a utilização de tecnologias no ensino de Matemática pode contribuir para promover uma postura mais ativa dos alunos e uma melhor aprendizagem. Os resultados de sua pesquisa apontaram: para a necessidade de se recriar espaços na escola para incorporar as transformações sociais que decorrem do uso das tecnologias e, desse modo, a tecnologia não é apenas objeto de estudo, mas instrumento que serve para a compreensão e transformação do mundo; para a importância de se proporcionar experiências e processos que garantam aprendizagens necessárias para que os jovens tenham uma formação crítica, criativa, autônoma e responsável; e para a importância do ensino de Matemática estar articulado com esse compromisso, promovendo aulas que despertem nos jovens o interesse pela disciplina e, sobretudo, que desenvolva neles as habilidades necessárias para lidar com situações e resolver problemas do cotidiano.

A dissertação de Oliveira, defendida em 2021, investigou as contribuições do uso do aplicativo de Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA para o estudo de sólidos geométricos. O autor observou, nos resultados de sua pesquisa, que o uso da tecnologia no ensino tem grande potencial para tornar as atividades educativas mais interessantes e significativas para os alunos, bem como promover a autonomia deles durante a aprendizagem, pois o uso do aplicativo de Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA, no ensino de Geometria Espacial, pode trazer diversas contribuições, a começar pela possibilidade de auxiliar os alunos na visualização de sólidos geométricos tridimensionais, facilitando-lhes a percepção de inúmeras características que poderiam passar despercebidas em uma representação bidimensional.

A dissertação de Martins, defendida em 2021, apresentou propostas de atividades utilizando o *software* Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA, para suprir as dificuldades dos alunos na resolução de problemas relacionados à visualização de

poliedros e suas planificações. O autor concluiu que o uso de uma sala de aula interativa surge como uma nova forma de repensar a significância do ensino, pois tal uso poderá contribuir para aflorar vários aspectos pedagógicos como autoestima, criatividade, inclusão, questionamentos e argumentação, possibilitando a compreensão de conteúdos programáticos indispensáveis à formação de cidadãos.

A dissertação de Rosa, defendida em 2022, analisou as contribuições de uma proposta de ensino de visualização geométrica pautada na investigação matemática, utilizando 3 diferentes recursos: lápis e papel; material manipulável e Realidade Aumentada com uso de *smartphones*. O autor enfatizou que a abordagem da visualização geométrica tem sido prejudicada pelo uso de um único recurso, o livro didático, que apresenta os sólidos geométricos por meio de imagens em um plano bidimensional, dificultando a compreensão dos alunos e concluiu que faz-se necessário, portanto, investigar como os alunos se comportam diante de questões que envolvem visualização geométrica com o uso de diferentes recursos: representação tradicional com lápis e papel, material concreto e aplicativos de visualização 3D, por exemplo.

2.3. Uma concepção de visualização

No capítulo anterior, Ricaldi (2012) e Macedo, Silva e Buriol (2016) destacaram a importância da visualização proporcionada pela utilização das Tecnologias Digitais no ensino de Geometria Espacial.

No presente capítulo, tal importância também foi ressaltada e apontada nas conclusões de diversos trabalhos (teses e dissertações) mapeados, como delineamos no item anterior.

Logo, entendemos que, até mesmo para a realização da análise de nossos dados, é fundamental explicitarmos uma concepção de visualização, para que esta não ganhe apenas o *status* de “termo abstrato” ou de “lugar comum” em nossa pesquisa.

Destarte, observando que a visualização tem sido focada em diversas pesquisas em Educação Matemática, especialmente, aquelas que apresentam discussões sobre a utilização de Tecnologias Digitais na sala de aula de Matemática, nos variados níveis de ensino, para os propósitos deste trabalho, ressaltamos que estamos entendendo visualização como concebida por Arcavi (2003):

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (ARCAVI, 2003, p. 217)

Sobre essa definição, Martins, Reis e Ferreira (2023) afirmam que existe uma abrangência dos aspectos ligados à visualização e, ao mesmo tempo, podemos constatar a importância de que ela seja considerada e investigada nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Particularmente, em nossa pesquisa, ao considerarmos a utilização de ferramentas tecnológicas, no caso, a RA com o *software* GeoGebra, acreditamos que tal referência teórica para a visualização é fundamental na perspectiva de se destacar sua importância ao se “pensar sobre e desenvolver ideias”, especialmente, na perspectiva da aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio e associando a visualização à formação de imagens mentais significativas (PACHECO, 2023).

Por fim, coadunando com Martins Júnior e Reis (2020), nossa pesquisa busca valorizar os elementos da visualização proporcionada pelo uso da RA com o *software* GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem, especialmente, no contexto de Geometria Espacial no Ensino Médio, de tal forma a contribuir para a criação e exploração de ideias que, certamente, “podem se tornar aliadas para a compreensão de conteúdos matemáticos”.

Dessa forma, concluímos alguns entrelaçamentos teóricos possíveis de nossa pesquisa e, no próximo capítulo, buscaremos detalhá-la e contextualizá-la metodologicamente.

Capítulo 3

A CONSTRUÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA

O homem não age diretamente sobre as coisas. Sempre há um intermediário, um instrumento entre ele e seus atos. Isso também acontece quando faz ciência, quando investiga cientificamente. Ora, não é possível fazer trabalho científico sem conhecer os instrumentos. E estes constituem-se de uma série de termos, conceitos que devem ser claramente distinguidos, de conhecimentos a respeito de atividades cognoscitivas que entram na constituição da ciência, de processos metodológicos que devem ser seguidos, a fim de chegar-se a resultados de cunho científico e, finalmente, é preciso imbuir-se de espírito científico.

Francisco Tarciso Leite

Neste capítulo, apresentamos a construção metodológica de nossa pesquisa, ou seja, “o conjunto de passos que são seguidos para confirmar os conhecimentos dentro de uma ciência” (BENÍTEZ, 2020), inicialmente, justificando nossa escolha pela abordagem qualitativa, retomando a questão de investigação e os objetivos propostos. Apresentamos, a seguir, o *locus* da pesquisa e os instrumentos que foram utilizados para subsidiar a busca das informações e dos dados, bem como o cronograma das atividades realizadas. Concluimos apresentando a definição e o uso dos meios de coleta e construção dos dados.

3.1. A escolha pela abordagem qualitativa de pesquisa

Para tentar dar resposta à nossa questão de investigação, escolhemos fazer uma pesquisa com uma abordagem qualitativa, uma vez que consideramos o contato com os participantes da pesquisa como fundamental, seja num ambiente físico ou num ambiente virtual, para a compreensão das relações envolvidas em nossa pesquisa, uma vez que, segundo Suassuna (2008):

Numa abordagem qualitativa, o pesquisador coloca interrogações que vão sendo discutidas durante o próprio curso da investigação. Ele formula e reformula hipóteses, tentando compreender as mediações e correlações entre os múltiplos objetos de reflexão e análise. (SUASSUNA, 2008, p. 349)

Também sobre a pesquisa qualitativa, Soares (2019) destaca outra característica que nos motivou em nossa escolha, principalmente, pela necessidade de um entendimento com base na indução e interpretação:

De fato, a pesquisa qualitativa se expressa mais pelo desenvolvimento de conceitos a partir de fatos, ideias ou opiniões, e do entendimento indutivo e interpretativo que se atribui aos dados descobertos, associados ao problema de pesquisa. (SOARES, 2019, p. 169)

Especificamente em relação à área da Educação, a pesquisa qualitativa traz algumas características próprias a serem observadas pelo pesquisador quando faz a opção por esse tipo de abordagem. De acordo com Rodrigues, Oliveira e Santos (2021), a pesquisa qualitativa na área da Educação pode ou deve apresentar as seguintes características:

- 1) Ocorre num cenário natural, o pesquisador está *in loco* e altamente envolvido nas experiências reais dos pesquisados;
- 2) Usa de métodos múltiplos e interativos para a coleta de dados, envolvendo a participação ativa dos pesquisados com a pesquisa;
- 3) Emergente e flexível, as questões da pesquisa podem ser (re)organizadas mediante a interpretação da realidade;
- 4) Interpretativa, há a interação dos dados por parte do pesquisador que está inserido no momento sociopolítico e histórico;
- 5) Fenômenos sociais devem ser analisados holisticamente;
- 6) Descritiva, com apoio fenomenológico se além a descrever fenômenos e significados;
- 7) Os resultados são apresentados em descrições, narrativas, rejeitando toda expressão quantitativa, numérica e de medida. (RODRIGUES; OLIVEIRA; SANTOS, 2021, p. 158)

Tendo em conta as características elencadas acima, pode ocorrer uma extrapolação de dados coletados, sendo necessário ter um foco e direcionamento para que eles estejam alinhados à pesquisa feita *in loco* e a ela sirvam de suporte. Analisando, então, tais características, podemos notar os seguintes alinhamentos com nossa pesquisa:

- 1) Estivemos presentes no ambiente natural da pesquisa, a sala de aula da instituição pesquisada, com envolvimento pleno na observação das tarefas feitas pelos alunos participantes da pesquisa;
- 2) A utilização de variados métodos se deu por meio de um diálogo interativo com os alunos participantes, durante a orientação das tarefas feitas, na divisão da turma em

pequenos grupos, no esclarecimento de dúvidas acerca da interpretação dos exercícios propostos, nos questionamentos sobre a forma com a qual tentaram resolver ou resolveram as questões relativas aos temas abordados, culminando com a efetiva participação de todos no processo da pesquisa;

3) Durante o curso da pesquisa, o Pesquisador e os alunos participantes interagem de diversas formas, o que fez com que a questão de investigação, especialmente, nos aspectos da aprendizagem, fosse constantemente “repensada” sob outros vieses;

4) A interpretação por parte do Pesquisador ocorreu de maneira a propiciar uma observação ampla sobre como cada aluno participante estava interagindo com os demais e como interpretava as questões propostas e os conteúdos, sendo que, também foram levadas em conta as diferenças individuais de cada um dos alunos participantes, de forma a tornar o ambiente da pesquisa o mais confortável e agradável para eles, com o que se sentiam mais confiantes em interpretar e buscar soluções às questões apresentadas;

5) Intentamos compreender os fenômenos sociais envolvidos na pesquisa valorizando a totalidade das situações e contextos, estando todos os fatores conectados, primando pela abrangência das situações no contexto social, onde os alunos participantes, o Pesquisador, o Professor e a instituição buscaram estar em um tipo de funcionamento harmônico e dinâmico;

6) Buscamos não somente descrever como também compreender os fenômenos envolvidos em nossa pesquisa, de tal forma que os seus significados apontaram para uma compreensão de sua essência;

7) Os resultados obtidos tiveram como parâmetros para análise as descrições e narrativas dos alunos participantes da pesquisa, onde cada ponto de vista, opinião, gestos e comportamentos foram observados e analisados, registrando-os para a posterior produção de dados e análise do fenômeno.

A seguir, retomaremos alguns dos principais componentes metodológicos de nossa pesquisa, tais como a questão de investigação e os objetivos propostos.

3.2. Retomando a questão de investigação e os objetivos de pesquisa

Menezes, Duarte, Carvalho e Souza (2019) trazem um interessante ponto de vista a respeito de um problema de pesquisa. Segundo os autores:

O problema de pesquisa deve, ao mesmo tempo, possibilitar um caminho viável e adequar-se ao rigor teórico e metodológico necessário para alcançar um resultado final satisfatório e, principalmente, com valor científico. (MENEZES; DUARTE; CARVALHO; SOUZA, 2019, p. 15)

Ainda com relação ao problema de pesquisa, Menezes, Duarte, Carvalho e Souza (2019) afirmam que:

[...] um problema de pesquisa deve ter como suporte um questionamento, cujo valor científico será avaliado a partir do que se pretende observar ou descobrir por meio dele. Assim, a sequência tema-problema delimita o que se deseja investigar. (MENEZES; DUARTE; CARVALHO; SOUZA, 2019, p. 16)

Depreende-se, então, das citações dos autores acima que um problema de pesquisa deve ter um foco inicial na questão a ser investigada. A partir dela, delimitam-se alguns caminhos viáveis a serem percorridos pelo pesquisador para conseguir alcançar seus objetivos e chegar a uma conclusão satisfatória acerca da questão formulada. Contudo, é fundamental que o pesquisador observe o rigor do método científico, pois é este que irá validar os pressupostos teóricos atrelados à sua investigação e à sua conclusão final.

Costa (2012) delimita alguns pressupostos básicos que devem ser observados na formulação de uma pergunta-problema ou questão de investigação. Segundo o autor, antes de formular uma questão de investigação, o pesquisador deve responder se ela está em sintonia com a realidade atual, se é de cunho relevante, se está clara e se auxilia na delimitação do objeto a ser pesquisado, isto é, no recorte temporal, do fenômeno ou fato observado que se pretende aprofundar, pesquisar, descobrir, responder e tirar conclusões acerca da veracidade ou não dos fatos e dos elementos observados. O autor ainda alerta para o fato de que o pesquisador deve solucionar a problemática envolvida em sua pesquisa de forma favorável, observando todos os aspectos possíveis dentro do rigor científico. Caso isso não ocorra, a pesquisa feita poderá não ser bem-sucedida.

Sendo assim, baseando-nos na problematização apresentada no escopo do Capítulo 1, propusemos a seguinte questão de investigação, como foco balizador de nossa pesquisa:

Quais são as possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando de forma integrada a RA com o GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio?

Os objetivos propostos para responder à questão de investigação buscam traçar um caminho seguro e firme, dentro da metodologia adotada para a pesquisa, com o intuito de verificar a sustentabilidade da proposta. Para Gonçalves (2019, p. 19), “a definição dos objetivos determina o que o pesquisador quer atingir com a realização do trabalho de pesquisa, pois objetivo é sinônimo de meta, fim”.

Nessa perspectiva, traçamos como objetivo geral de nossa pesquisa, discutir possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio.

A partir desse objetivo geral e, quase que sob a forma de tarefas de pesquisa, especificamente, objetivamos:

- Investigar os principais estudos / pesquisas recentes relacionadas ao ensino de Geometria Espacial, à aprendizagem móvel (Mobile Learning) e às Tecnologias Digitais na Educação Matemática;
- Elaborar atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial;
- Apresentar as principais contribuições de tais atividades exploratórias na perspectiva da aprendizagem móvel, a partir de sua experimentação por alunos do Ensino Médio.

Nas Considerações Finais, ainda mais uma vez, retomaremos tanto a questão de investigação, na expectativa de a termos respondido, como os objetivos de pesquisa, na expectativa de os termos contemplado, na medida em que nossos dados foram descritos e analisados.

3.3. A pesquisa de campo em seu contexto

A pesquisa de campo é uma etapa necessária dentro do contexto científico, pois é por meio dela que o pesquisador tem contato com o *locus* de sua pesquisa, com os participantes dessa pesquisa e, principalmente, com as especificidades e meandros que são inerentes ao ambiente de interações interpessoais, subjetivas e desencadeadoras das emoções, como argumenta Spink (2003):

Quando fazemos o que nós chamamos de pesquisa de campo, nós não estamos "indo" ao campo. Já estamos no campo, porque já estamos no tema. O que nós buscamos é nos localizar psicossocialmente e territorialmente mais perto das partes e lugares mais densos das múltiplas interseções e interfaces críticas do campo-tema, onde as práticas discursivas se confrontem e, ao se confrontar, se tornam mais reconhecíveis. (SPINK, 2003, p. 36, grifo do autor)

Em outra visão sobre a importância da pesquisa de campo, Fiorentini e Lorenzato (2006) afirmam que:

A denominação “pesquisa naturalista ou de campo” é normalmente utilizada pelos antropólogos e sociólogos para significar que os dados do estudo são coletados diretamente “no campo”, em contraste com aqueles realizados em bibliotecas / museus ou em laboratórios / ambientes especiais que controlam determinadas variáveis do fenômeno em estudo. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 106).

Podemos, então, conceber que nossa pesquisa de campo aconteceu tendo como *locus* da investigação, o Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto, a partir da elaboração, desenvolvimento e avaliação de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial, com alunos do 2.º ano do Ensino Médio do Curso Técnico Integrado (Curso Técnico e Ensino Médio, concomitantemente) de Administração.

O Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) – *Campus* Ouro Preto está situado nessa histórica cidade do interior do estado de Minas Gerais. O IFMG – *Campus* Ouro Preto oferece cursos no modelo integrado (Curso Técnico e Ensino Médio, concomitantemente), no modelo subsequente (apenas Curso Técnico para quem já possui o Ensino Médio) e também cursos de nível superior (licenciaturas e tecnológicos). Para ingressar em um dos cursos do IFMG – *Campus* Ouro Preto, por se tratar de uma instituição pública federal, é necessária a aprovação em um rigoroso e concorrido exame

de seleção com base em conteúdos do Ensino Fundamental, o que torna a instituição uma das mais prestigiadas na região dos Inconfidentes, na qual está localizada, e também por possuir outros *campi* em todo o estado de Minas.

O Professor da referida turma é professor efetivo do IFMG – Campus Ouro Preto desde 2010 e sua formação acadêmica inclui a Licenciatura em Matemática, o Mestrado e o Doutorado em Educação Matemática, porquanto também atua como Docente Colaborador no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFOP e, como também já mencionamos, é o coorientador deste trabalho.

Os encontros com os 24 alunos (sendo 20 alunas e 4 alunos) da turma e o Professor foram feitos de forma presencial, tendo o Pesquisador acompanhado as aulas de Matemática do Professor entre os meses de janeiro a março de 2023, nos quais desenvolvemos as atividades exploratórias, na sala de aula da turma. A Figura 3 apresenta o prédio do IFMG – *Campus* Ouro Preto onde a sala de aula se localiza.

Figura 3: Prédio do IFMG – *Campus* Ouro Preto no qual se localiza a sala de aula



Fonte: Acervo do Pesquisador

Inicialmente, foi acertado com o Professor e com a Direção do IFMG – *Campus* Ouro Preto que as atividades exploratórias seriam desenvolvidas de acordo com o conteúdo previsto na Matriz Curricular para a disciplina Matemática que segue, na íntegra, nos anexos.

Assim, os conteúdos de Geometria Espacial abordaram sólidos geométricos e suas propriedades, sendo trabalhados: Cubo, Paralelepípedo, Cilindro, Pirâmide, Cone e Esfera.

Foram realizados 8 encontros presenciais, entre os meses de janeiro a março de 2023. Esses encontros aconteceram às 2^{as} feiras, no mês de janeiro, no horário de 10h às 11h40min, e às 4^{as} feiras, nos meses de fevereiro e março, no horário de 07h às 08h40min, ou seja, sempre em 2 aulas de 50 minutos cada.

Apresentamos, a seguir, um cronograma sucinto contendo as datas dos encontros, os conteúdos trabalhados em cada uma das 6 atividades exploratórias realizadas, que serão identificadas por AE1 até AE6, bem como os focos de cada Atividade Exploratória (AE).

Quadro 2: Cronograma de realização das Atividades Exploratórias

Encontro	Data	Atividade Exploratória	Focos
1	16/01/2023	Apresentação da Pesquisa	---
2	23/01/2023	AE1) Cubos e Paralelepípedos	Visualização dos elementos constitutivos; Construção no GeoGebra 3D; Cálculo da diagonal e áreas; Cálculo do volume; Planificação; Projeção em RA
3	30/01/2023	AE2) Pirâmides	Exercício de identificação dos elementos constitutivos; Cálculo do volume; Construção no GeoGebra 3D; Projeção em RA
4	08/02/2023	AE3) Revisão sobre Cubos, Paralelepípedos e Pirâmides	Cálculo do volume; Cálculo da vazão; Conversão entre unidades de medida; Cálculo do apótema da base e da pirâmide; Construção no GeoGebra 3D; Projeção em RA
5	15/02/2023	AE4) Cilindros	Cálculo de áreas e volume; Sobreposição de figuras; Equivalência entre figuras
6	01/03/2023	AE5) Cones	Construção utilizando o GeoGebra 3D; Projeção em RA; Cálculo do volume em função do

			raio; Sobreposição de figuras com inversão de sentido
7	08/03/2023	AE6) Esferas	Cálculo do volume; Equivalência entre sólidos; Visualização removendo eixos e sólido principal; Construção utilizando o GeoGebra 3D; Projeção em RA; Cálculo de secção por um plano
8	15/03/2023	Conclusão da Pesquisa	---

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador

Cabe ressaltar, ainda, que em todas as atividades exploratórias foram utilizadas as ferramentas da RA e da Calculadora Gráfica do GeoGebra 3D, sendo também considerada a perspectiva de uma aprendizagem móvel, por meio da utilização dos dispositivos móveis (*smartphones*), da troca de mensagens na rede social da turma (*WhatsApp*) e no *e-mail* institucional do Pesquisador, e pela realização de encontros remotos (plataforma *Google Meet*), como detalharemos no próximo capítulo.

3.4. Uma concepção de Atividade Exploratória

Julgamos importante apresentar, ainda como elemento fundamental de nossa construção metodológica, a concepção de atividade exploratória na qual nos baseamos para elaborarmos, desenvolvermos e avaliarmos nossas 6 atividades exploratórias.

Inicialmente, trazemos algumas de Reis *et al* (2008) que, numa perspectiva de utilização de Tecnologias Digitais na Educação Matemática e baseando-se nas ideias de João Pedro da Ponte, apresentam seu entendimento do que seria investigar e como implementar atividades investigativas:

Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. [...] No entanto, para se desenvolver uma atividade investigativa, o professor deve perpassar por um processo de interação / pesquisa sobre o assunto pelo qual irá delinear sua atividade investigativa. (REIS *et al*, 2008, p. 2)

Reis *et al* (2008, p. 2) ainda defendem que, na sala de aula de Matemática: “uma atividade investigativa deve conter uma sequência que conduza os estudantes à

exploração de conceitos, à formulação de conjecturas a partir de suas observações, à discussão e, finalmente, à generalização das soluções encontradas”.

Nesse mesmo contexto, Pimentel e Paula (2007) defendem a importância de um professor pensar em uma atividade que proporcione aos estudantes “legítimas experiências matemáticas”, dentro de um ambiente para se “fazer Matemática”, caracterizado pelas possibilidades de se experimentar, interpretar, visualizar, inferir, conjecturar, abstrair, generalizar e, por fim, demonstrar.

Pimentel e Paula (2007, p. 2) buscaram elaborar uma atividade que proporcionasse aos alunos a experimentação de “um caminho parecido ao do matemático profissional, onde o conhecimento é construído a partir de investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento desse trabalho” sendo, inicialmente, mais dirigida e estruturada e, a seguir, mais livre e aberta, possibilitando ao aluno mais autonomia no processo de construção e apropriação do conhecimento e, dessa forma, concluíram que:

As explorações propostas, livres ou guiadas, levavam os alunos a tecerem intuições, inferências e conjecturas que ao serem sistematizadas produziam novas inferências e conjecturas em outro nível de elaboração, que necessitavam de novas sistematizações mais sofisticadas que, por sua vez, levavam a novas inferências..., num processo recorrente. Uma multiplicidade de situações, criações e aprendizagem emergiram desse processo. (PIMENTEL; PAULA, 2007, p. 2)

Apoiando-se na ideia de Pimentel e Paula (2007), ainda no contexto de uma atividade de investigação matemática, Martins Júnior (2015), em seu trabalho sobre as contribuições da realização de atividades exploratórias no ensino de Cálculo I, apresenta tais atividades como sendo um:

Conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem. (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59)

A partir das pesquisas aqui mencionadas, baseamo-nos na definição de atividade exploratória de Martins Junior (2015) para a elaboração, o desenvolvimento e a avaliação de nossas atividades exploratórias.

Como será melhor detalhado no próximo capítulo, para a composição das atividades exploratórias não nos preocupamos em elaborar questões “inovadoras ou complexas” em termos de formulação e resolução, mas sim questões que podem ser consideradas “tradicionais” em termos de formulação, porém, como suas resoluções demandam, na grande maioria dos casos, a utilização integrada da RA com o *software* GeoGebra, entendemos que a exploração “livre ou guiada” de tais recursos tecnológicos possibilitou “dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem”.

Os roteiros sucintos das atividades exploratórias seguem, na íntegra, nos apêndices e a descrição detalhada de seu desenvolvimento será feita no próximo capítulo.

3.5. Os instrumentos de coleta e produção de dados

Alves-Mazzotti e Gewandznajder (1998, p. 163) afirmam que as pesquisas qualitativas utilizam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta e produção de dados e “considera-se como documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação”.

Assim, dentro dessa perspectiva e no contexto de nossa pesquisa, optamos pela coleta e produção de dados por meio de diversos registros escritos das atividades exploratórias, sejam ao longo dos encontros ou por meio de *WhatsApp* e de *e-mail*, e das gravações em áudio dos encontros presenciais, com a devida autorização dos alunos participantes, que foram transcritas em forma de diário de campo que, além das transcrições, contemplou também nossas observações e interpretações como Pesquisador, pois, como destaca Cruz Neto (2001, p. 63), no diário de campo pode-se colocar as percepções, questionamentos e informações que não são obtidas por meio da utilização de outras técnicas e instrumentos de coleta e produção de dados.

Também antes do desenvolvimento das atividades exploratórias e para a sua avaliação pelos alunos participantes, optamos pela elaboração e aplicação de 2 questionários, pois, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), o questionário é um tradicional instrumento de coleta de informações que podem ser agrupadas em categorias, possibilitando sua análise e suas grandes vantagens residem nos fatos de que ele pode ser

aplicado em diversas fases da pesquisa, a um grande número de pessoas sem a necessidade de contato direto com elas, já que podemos usar o *e-mail*, aplicativos ou as redes sociais para aplicá-lo.

Gil (2008) também destaca a importância de um questionário conter perguntas que realmente colaboram com a pesquisa e possibilitam aos respondentes falarem claramente sobre o assunto investigado.

Assim, em nossa pesquisa, o Questionário Inicial, composto por questões fechadas, foi aplicado aos alunos participantes buscando identificar a importância que eles conferiam ao uso das Tecnologias Digitais para a aprendizagem de Matemática, seus conhecimentos sobre a RA e o *software* GeoGebra, além de mapear eventuais experiências de utilização de *softwares* em sua prática discente, ao longo de seu percurso escolar.

Por sua vez, o Questionário Final, composto por questões abertas, foi aplicado aos alunos participantes buscando oportunizar uma avaliação da sua participação, das suas maiores dificuldades no desenvolvimento das atividades exploratórias, das contribuições das atividades exploratórias para a sua aprendizagem de Geometria Espacial, além de tentar mapear um eventual desejo de experimentar a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos.

Os questionários foram criados no *Google Forms*, tendo os *links* disponibilizados para os alunos participantes pelo *WhatsApp*, e seguem, na íntegra, nos apêndices.

No próximo capítulo, descreveremos os encontros nos quais as atividades exploratórias foram desenvolvidas e analisaremos os dados de nossa pesquisa.

Capítulo 4

A DESCRIÇÃO E A ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Cabe ao pesquisador compreender e interpretar aquele amontoado de dados e informações, relacionando-os ao problema e aos objetivos da pesquisa. Só assim será permitido tirar conclusões e fazer sugestões e recomendações que servirão na solução de problemas e de base na tomada de futuras decisões.

Francisco Tarciso Leite

Neste capítulo, faremos uma descrição mais aprofundada dos encontros e das atividades exploratórias desenvolvidas, culminando com a análise do conjunto de dados que emergiram dos diversos instrumentos de coleta e produção de dados.

Deixamos claro que os alunos participantes de nossa pesquisa serão identificados simplesmente por Ax, onde “A” se refere aluno, sendo que não faremos distinção de gênero, e “x” corresponde a uma numeração aleatória que elaboramos. O professor de Matemática em cuja turma realizamos a pesquisa é o coorientador de nossa pesquisa e será identificado simplesmente como Professor. Nossa identificação será simplesmente como Pesquisador.

4.1. Descrevendo os encontros

Buscaremos, agora, descrever os momentos de cada um dos 8 encontros que julgamos serem fundamentais para uma visão holística das situações e discussões que aconteceram e que, em alguma medida, impactaram nossa pesquisa.

É importante salientar que, na organização da instituição onde foi realizada nossa pesquisa de campo (IFMG – *Campus* Ouro Preto), o Professor faz parte da Coordenação da Área de Matemática (CODAMAT) que, juntamente com seus pares, precisam cumprir o programa de curso definido pela CODAMAT. Sendo assim, o planejamento dos encontros foi pensado de forma a se adequar ao tempo e aos conteúdos previstos para o período dos encontros (período matinal).

Optamos, então, em utilizar as atividades exploratórias não para introduzir os conceitos e as principais definições da Geometria Espacial, pois isso aconteceu por abordagens idealizadas e implementadas pelo Professor e, sim para trabalhar e explorar

esses conceitos e definições a partir da visualização, da manipulação e do dinamismo proporcionado pelo que denotaremos por RA / GeoGebra 3D (utilização integrada da RA com o *software* GeoGebra), e sendo potencializado pelo uso dos *smartphones* numa perspectiva de aprendizagem móvel. Portanto, a abordagem inicial do Professor não será descrita de forma detalhada, uma vez que não é o foco de nossa descrição.

4.1.1. 1.º encontro (dia 16/01/2023) – Apresentação da Pesquisa

Este encontro marcou o contato inicial do Pesquisador com o Professor e os alunos, além da possibilidade de melhor conhecer a instituição e o local da pesquisa.

Havia uma expectativa inicial para esse encontro inicial, devido ao fato de que o período pós-pandêmico ainda se encontrava recente e os cuidados com a higienização (uso de álcool em gel) e com o uso de máscaras de proteção nos ambientes internos da instituição (corredores e salas de aula) ainda vigoravam. Devido ao fato do Pesquisador não conhecer a instituição detalhadamente, os alunos previamente e estes não conhecerem pessoalmente o Pesquisador, criou-se um ambiente de curiosidade e ansiedade para a primeira interação entre os atores desse cenário educacional. Bottentuit Junior (2020) pondera que esse ambiente de expectativas é propício à interação, lembrando que:

A interação é uma estratégia fundamental na sala de aula, pois promove situações de troca de experiências e conhecimentos. Ela poderá ser realizada através de uma metodologia específica ou com a utilização de artefatos tecnológicos, como *softwares*, sites, dispositivos móveis e aplicativos conectados à Internet. (BOTTENTUIT JUNIOR, 2020, p.1)

Ao chegar à instituição, dirigimo-nos à sala de aula da turma, cumprimentamos os alunos e fomos imediatamente apresentados à turma pelo Professor. Após a apresentação, seguiu-se uma breve explicação feita pelo Professor sobre o que é uma pesquisa de mestrado, como seria a dinâmica de trabalho e como os alunos participariam da pesquisa. É importante salientar que o Professor já havia informado anteriormente a turma que seria realizada uma pesquisa em sala de aula, a partir de intervenções do Pesquisador e do desenvolvimento de atividades exploratórias, após as exposições iniciais pelo Professor dos conteúdos a serem trabalhados.

Neste encontro, conforme já explicado anteriormente, o Professor realizou uma abordagem inicial em que debateu com os alunos os conhecimentos prévios que eles tinham em relação a poliedros, conceito introdutório no planejamento de Geometria

Espacial, enfatizando as definições de aresta, vértice, faces e sua nomenclatura, exemplificando com imagens projetadas em slides e solicitando aos alunos que pesquisassem outras imagens na *internet*.

Sentamo-nos numa cadeira próxima à mesa do Professor e acompanhamos essa abordagem inicial. Após terminar a exposição do Professor, fizemos uma apresentação inicial para os alunos que segue, na íntegra, nos apêndices.

Esclarecemos que nossa pesquisa abordaria os conteúdos de Geometria Espacial apresentados pelo Professor por meio de atividades exploratórias com a utilização de forma integrada da chamada Realidade Aumentada (RA) com um *software* educacional chamado GeoGebra, sempre na perspectiva do que chamamos de aprendizagem móvel e que, ao longo dos trabalhos, explicaríamos detalhadamente cada um dos “elementos” da pesquisa.

A seguir, destacamos que utilizaríamos dispositivos móveis, como os *smartphones* nos quais deveriam ser “baixados” os aplicativos de RA e de Calculadora Gráfica GeoGebra 3D. Pedimos que os alunos verificassem se os seus aparelhos *smartphones* conseguiriam operar o aplicativo de RA, pois ele não estaria disponível para todos os modelos de aparelhos *smartphones*. Nesse momento, o Professor sugeriu que aqueles que não pudessem “baixar” o aplicativo de RA em seus *smartphones*, fizessem as atividades exploratórias em duplas ou trios com outros alunos cujos aparelhos *smartphones* pudessem suportar a tecnologia de RA.

Após os tópicos iniciais da nossa apresentação, informamos os alunos sobre a necessidade da assinatura dos termos de autorização para a participação na pesquisa e que tal participação era de natureza totalmente voluntária, ou seja, a participação na pesquisa não era obrigatória, entretanto, para aqueles que quisessem participar, seria necessária a assinatura nos seguintes termos: Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) para os alunos menores de idade e Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para os pais ou responsáveis legais pelos alunos menores de idade e também para os alunos maiores de idade. Destacamos, ainda, que os termos foram elaborados e assinados digitalmente pelo orientador da pesquisa e seguem, na íntegra, nos apêndices.

Na sequência, informamos aos alunos participantes que, no início da pesquisa, eles deveriam responder ao Questionário Inicial e, ao final da pesquisa, eles deveriam responder ao Questionário Final, ambos por meio do *Google Forms*.

Também deixamos claro aos alunos participantes que estaríamos à disposição deles para esclarecer dúvidas sobre as atividades exploratórias, por meio do grupo de

Whatsapp da turma, bem como pelo *e-mail* institucional dos pesquisadores e, ainda, caso fosse necessário, por meio de encontros virtuais realizados pela plataforma *Google Meet*. Esses meios de contatos fora do ambiente da sala de aula e em horários diversos serviram para estimular a aprendizagem móvel dos participantes da pesquisa, pois são uma forma dinâmica de proporcionar a eles mais liberdade de escolha de tempo e de espaço, fora do ambiente escolar.

Então, disponibilizamos o *link* do Questionário Inicial para os participantes da pesquisa, por meio do grupo de *WhatsApp* da turma, até então o principal canal de comunicação do Professor com os alunos da turma, criado no início do ano letivo de 2023. Por fim, deixamos claro que, mesmo participando da pesquisa em sala de aula, o preenchimento (parcial ou total) dos questionários continuaria sendo totalmente voluntário.

4.1.2. 2.º encontro (dia 23/01/2023) – AE1) Cubos e Paralelepípedos

Neste encontro, o Professor abordou as definições, elementos e propriedades dos prismas, com foco no cubo e no paralelepípedo (retângulo).

Inicialmente, o Professor apresentou a imagem da obra arquitetônica “O Portal da Europa”³ em Madri, Espanha. Utilizando a obra e partindo das observações dos estudantes, ele iniciou uma abordagem visando obter as características fundamentais de um prisma e, conseqüentemente, trabalhar as definições, elementos e propriedades dos prismas porém, com foco no cubo e no paralelepípedo (reto e oblíquo).

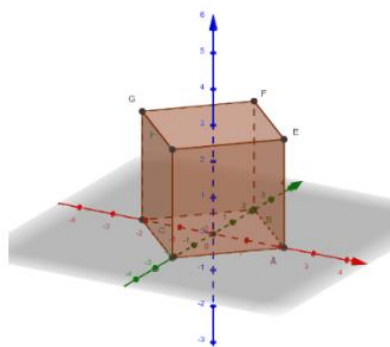
Um fato interessante a se destacar é que, diferentemente da ordem em que geralmente os livros didáticos apresentam tais conteúdos, o Professor trabalhou primeiramente o cubo e, na seqüência, o paralelepípedo. Isso aconteceu para que pudéssemos, neste dia, propor uma atividade exploratória para trabalhar o conceito de diagonal desses prismas. Havíamos combinado essa “inversão” com o Professor, pois entendemos que, especialmente, no cálculo da diagonal do cubo, a visualização dos elementos e a utilização do Teorema de Pitágoras é mais acessível para os alunos do que

³ Disponível em: <https://www.istockphoto.com/br/foto/portal-da-europa-dupla-inclina%C3%A7%C3%A3o-de-edif%C3%ADcios-de-escri%C3%B3rios-em-madrid-espanha-gm1092228872-293040258>

no caso da diagonal do paralelepípedo e, portanto, essa sequência adotada iria mais ao encontro dos propósitos das nossas atividades exploratórias.

Assim, a 1.^a Atividade Exploratória (AE1) foi dividida em duas partes. Na primeira parte, foi apresentado o conceito de “cubo” de acordo com a literatura (NERY; TROTTA, 1984, p. 279-280). Como precisávamos trabalhar o conceito de diagonal do cubo, foi necessário auxiliar os alunos neste primeiro contato que tiveram com RA / GeoGebra 3D. Primeiramente, seguindo as orientações do Pesquisador, foi solicitado aos alunos que utilizassem seus *smartphones* para construir a imagem de um cubo, como mostra a Figura 4, a seguir. É importante salientar que alguns alunos tiveram dificuldades iniciais com as ferramentas disponíveis no GeoGebra 3D, sendo necessário dar-lhes algumas orientações e instruções preliminares.

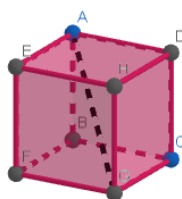
Figura 4: Montagem de um cubo utilizando as ferramentas do GeoGebra 3D



Fonte: Acervo do Pesquisador

Para trabalhar a visualização da diagonal do cubo, solicitamos aos alunos que desabilitassem os eixos e o plano, como mostra a Figura 5, a seguir. A partir da ferramenta “distância entre dois pontos” do GeoGebra 3D, também solicitamos que eles calculassem a medida da diagonal. Com isso, utilizando os conhecimentos em relação ao Teorema de Pitágoras, eles puderam generalizar a forma de cálculo dessa diagonal.

Figura 5: Remoção de eixos e planos com destaque para a diagonal do cubo



Fonte: Acervo do Pesquisador

O mesmo procedimento foi realizado para a visualização e cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo.

Ainda na AE1, solicitamos aos alunos que resolvessem questões “tradicionais”, como a questão apresentada na Figura 6, a seguir, retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de 2010. Entretanto, solicitamos a eles fizessem os cálculos utilizando “somente papel e lápis”.

Figura 6: Questão 1 da AE1

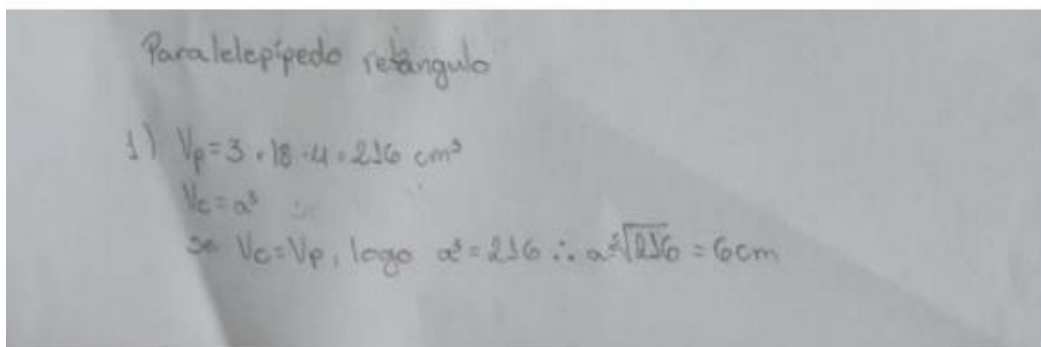
1) (ENEM-2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

a) 5 cm;
 b) 6 cm;
 c) 12 cm;
 d) 24 cm;
 e) 25 cm.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Observamos que os participantes da pesquisa não tiveram grandes dificuldades na resolução da questão, o que mostra que a manipulação, juntamente com uma melhor visualização, complementou a abordagem do Professor, contribuindo para o entendimento do conceito e para a resolução da situação-problema. Para ilustrar, apresentamos a elegante resolução de um dos alunos na Figura 7, a seguir.

Figura 7: Resolução do aluno A12



Fonte: Acervo do Pesquisador

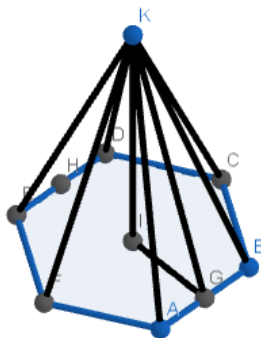
É importante ressaltar que, neste encontro, em alguns momentos, ocorreram dificuldades na execução da atividade proposta, curiosamente não em relação à RA e sim em relação ao GeoGebra 3D. Também foi observado que, apesar das atividades não requererem “obrigatoriamente” a utilização dos *smartphones* para a resolução das questões, observamos que muitos dos alunos, por conta própria, utilizaram seus aparelhos para a manipulação e observação das imagens geradas pela RA / GeoGebra 3D, especialmente, para um melhor entendimento dos conceitos dos prismas relacionados aos elementos faces, arestas e vértices e, especificamente, para o cálculo de diagonais, áreas e volumes do cubo e do paralelepípedo, o que podemos caracterizar como uma “exploração livre e não guiada” dos recursos da RA / GeoGebra 3D.

4.1.3. 3.º encontro (dia 30/01/2023) – AE2) Pirâmides

Neste encontro, após a abordagem dos principais conceitos feita pelo Professor, com relação aos elementos e propriedades das pirâmides, os alunos foram convidados a desenvolver a 2.ª Atividade Exploratória (AE2), na qual constavam 4 questões elaboradas pelo Pesquisador, sendo que as duas primeiras apresentavam situações-problema e as duas últimas incentivavam a observação da visualização das pirâmides, de modo a contribuir para a construção do conceito de apótema e o cálculo do volume, desafiando os alunos à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D.

Apresentamos na Figura 8, a seguir, a Questão 1 da AE2, na qual buscamos identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da identificação dos elementos constitutivos da pirâmide, por meio de uma correlação da imagem com as definições dos elementos.

Figura 8: Questão 1 da AE2



1) Observando-se a pirâmide de base hexagonal da figura acima, correlacione os elementos da coluna da esquerda com a da direita e marque a sequência correta.

- (1) Aresta da base () segmento de reta que sai do vértice e é perpendicular à base da pirâmide.
 (2) Altura () é o ponto na parte superior da pirâmide.
 (3) Vértice () é o polígono que está na parte de baixo da pirâmide.
 (4) Base () é a altura do triângulo que forma a face lateral da pirâmide.
 (5) Apótema da pirâmide () segmento de reta que forma o lado do polígono que compõe a base.

() 1 – 2 – 3 – 4 – 5

() 3 – 5 – 1 – 2 – 4

() 2 – 3 – 4 – 5 – 1

() 4 – 1 – 3 – 5 – 2

() 5 – 4 – 3 – 2 – 1

Fonte: Acervo do Pesquisador

O aluno A16, que fazia dupla com o aluno A18, apresentou a seguinte indagação com relação a essa questão:

O apótema aqui é o apótema do lado ou o de baixo, professor? (A16 – AE2)

A indagação do aluno reflete uma das grandes dificuldades no ensino de pirâmides que é a compreensão e visualização do apótema da pirâmide, pelo fato de que o apótema de polígonos regulares já é também um dos focos de dificuldade de aprendizagem dos alunos.

Na Questão 2, apresentada na Figura 9, a seguir, o objetivo foi, por meio do cálculo do volume, levar os alunos a identificar as proporções relativas às duas pirâmides, de forma que pudessem perceber e verificar como se correlacionavam tais proporções.

Figura 9: Questão 2 da AE2

2) O Egito é um país conhecido mundialmente pelas suas pirâmides, as quais remontam a tempos muito longínquos. A maior de suas pirâmides, e considerada a mais importante, é chamada de Pirâmide de Quéops (também é conhecida como a Grande Pirâmide de Gizé). Ela é uma pirâmide de base quadrada e que possui aproximadamente 120 metros de altura e 230 metros de cada lado de sua base quadrada. Já a menor das pirâmides é chamada de Pirâmide de Miquerinos. Esta tem aproximadamente 60 metros de altura e uma base quadrada de 100 metros de lado.

Pirâmide de Quéops



Fonte: <https://www.acasinhadamatematica.pt/?p=5043>

Pirâmide de Miquerinos



Fonte: <https://br.memphistours.com/Egito/Guia-de-Viagem/Piramides-do-Egito/wiki/A-piramide-de-Miquerinos>

Considerando-se, agora, a fórmula do Volume da Pirâmide como sendo:

$$V = \frac{A_b \times h}{3}$$

onde: V = volume da pirâmide;

A_b = área da base da pirâmide;

h = altura da pirâmide.

Calculando-se o volume das pirâmides de Quéops e de Miquerinos, quantas vezes, aproximadamente, a pirâmide menor cabe dentro da maior? Considere, para a resposta, apenas o número inteiro, sem arredondamentos.

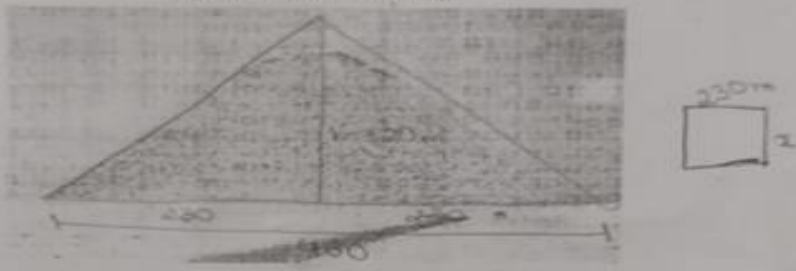
Fonte: Acervo do Pesquisador

Provavelmente por se tratarem de pirâmides de bases quadradas e também por apresentarmos a fórmula do volume da pirâmide (recém trabalhada pelo Professor), os alunos não apresentaram grandes dificuldades na resolução da questão e, para ilustrar, apresentamos na Figura 10, a seguir, com a resolução feita pelos alunos A16 e A18.

Figura 10: Resolução dos alunos A16 e A18


pirâmides é chamada de Pirâmide de *Miquerinos*. Esta tem aproximadamente 60 metros de altura e uma base quadrada de 100 metros de lado.

Figura 2 - Pirâmide de Quéops



Fonte: <https://www.acasinhadamatematica.pt/?p=5943>

Figura 3 - Pirâmide de Miquerinos



Fonte: <https://br.memphistours.com/Egito/Guia-de-Viagem/Pirâmides-do-Egito/wiki/A-Pirâmide-de-Miquerinos>

Considerando-se, agora, a fórmula do Volume da Pirâmide como sendo:

$$V_M = \frac{20.000 \cdot 60}{3}$$

$$V_M = 200.000 \text{ m}^3$$

$$V = \frac{A_b \times h}{3}$$

$$V_Q = \frac{52.900 \cdot 140}{3}$$

$$V_Q = 2.336.000 \text{ m}^3$$

onde: V = volume da pirâmide;
 A_b = área da base da pirâmide; e
 h = altura da pirâmide.

Calculando-se o volume das pirâmides de Quéops e de Miquerinos, quantas vezes, aproximadamente, a pirâmide menor cabe dentro da maior? Considere, para a resposta, apenas o número inteiro, sem arredondamentos.

Resposta: 30 vezes

Fonte: Acervo do Pesquisador

Para auxiliar na observação dos elementos constitutivos da pirâmide, do cálculo do volume e, também, para determinar os apótemas da base e da pirâmide, elaboramos duas questões nas quais os alunos teriam de construir e visualizar tais elementos por meio da RA / GeoGebra 3D.

Apresentamos na Figura 11, a seguir, a Questão 3 da AE2, que foi a primeira a desafiar os alunos à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D. Nesta questão, partindo da construção de uma pirâmide de base quadrada e altura determinada no eixo vertical, os alunos foram orientados a determinar o volume da pirâmide e a justificar seus cálculos a partir das informações visualizadas na projeção.

Figura 11: Questão 3 da AE2

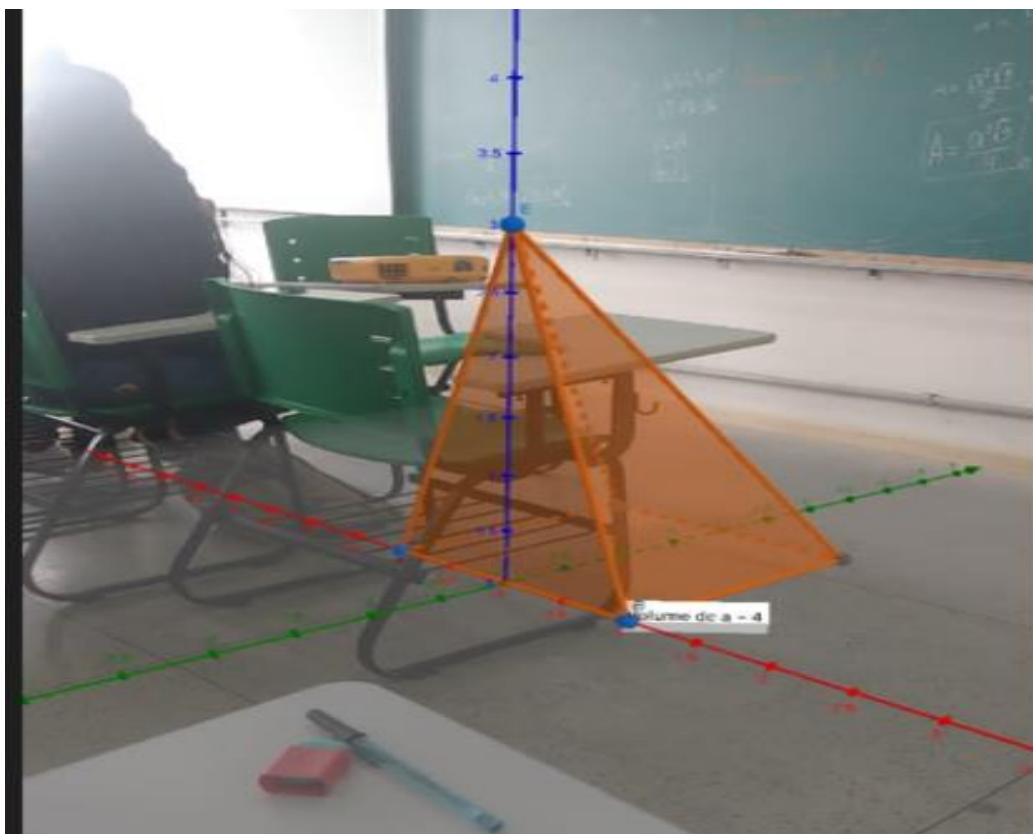
3) Construa, com auxílio da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D e da Realidade Aumentada (RA), uma pirâmide de base **quadrangular**, posicionando um dos lados da base nos pontos -1 (menos um) e 1 (um), no eixo vermelho do plano da base. Selecione o ponto 3 no eixo vertical como sendo o vértice da pirâmide. A seguir, calcule o seu volume, faça uma projeção em RA, exporte a imagem (grave no smartphone) e compartilhe no grupo de Whatsapp da turma, identificando o seu número de participante.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Após os cálculos, os alunos foram orientados a verificar se o resultado estava de acordo com o valor fornecido pela ferramenta de cálculo de volume do GeoGebra 3D. É importante destacara que a comparação entre os valores fornecidos pela ferramenta de cálculo de volume do GeoGebra 3D e os valores obtidos diretamente pela aplicação de fórmulas pelos alunos serviu como subsídio para a confrontação e a confirmação de que, independentemente do meio utilizado, deve-se chegar aos mesmos resultados para tais valores.

Os alunos A06 e A19 resolveram a questão a partir da pirâmide visualizada na Figura 12, a seguir:

Figura 12: Resolução dos alunos A06 e A19



Fonte: Acervo do Pesquisador

Considerando-se os dados fornecidos, eles rapidamente deduziram que o lado da base da pirâmide era 2, sua altura era 3 e, como se tratava de uma pirâmide de base quadrada, não tiveram dificuldades para calcular seu volume, mesmo considerando que não se trata de uma pirâmide regular reta (aquela em que a projeção ortogonal do seu vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base).

Para a visualização e compreensão do apótema da base, que consideramos ser o apótema de maior dificuldade de visualização pois a base da pirâmide pode ser qualquer polígono regular, foi formulada uma questão para a visualização do apótema de uma pirâmide de base pentagonal. Assim, apresentamos na Figura 13, a seguir, a Questão 4 da AE2, na qual os alunos também foram desafiados à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D.

Figura 13: Questão 4 da AE2

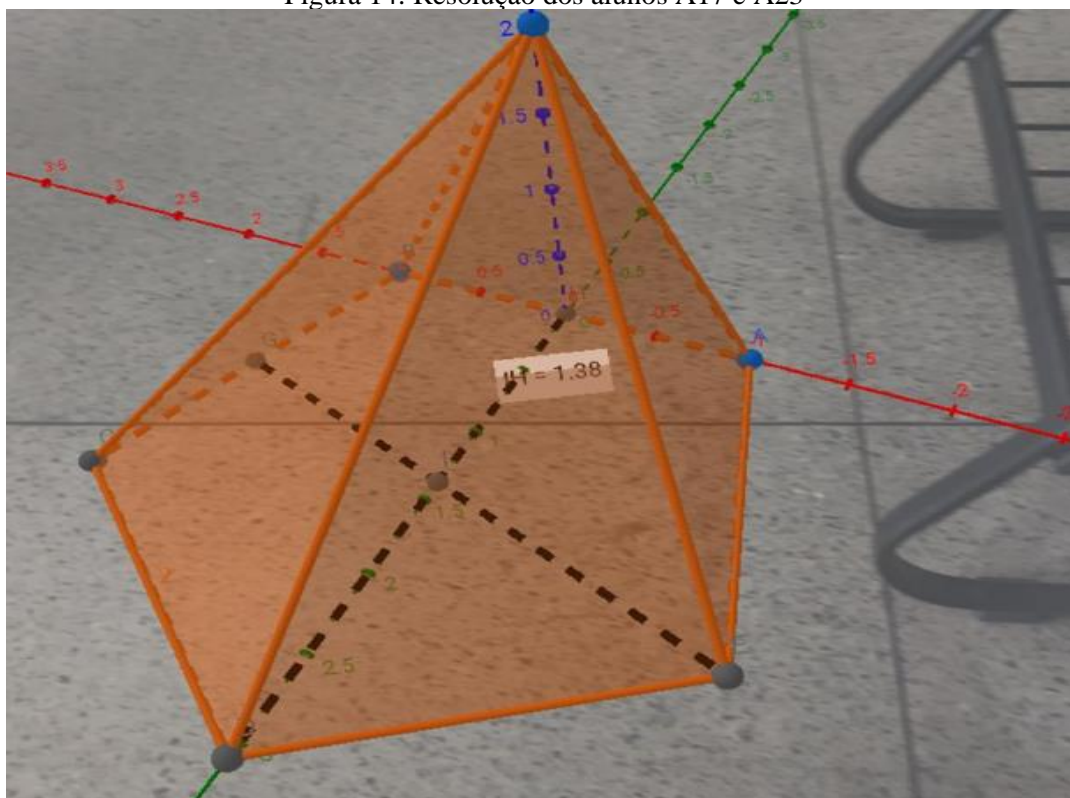
4) Usando a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D e a Realidade Aumentada (RA), construa uma pirâmide tendo como base um **pentágono regular** posicionando um dos lados da base nos pontos -1 (menos um) e 1 (um), no eixo vermelho do plano da base. Selecione o ponto 2 no eixo vertical como sendo o vértice da pirâmide. A seguir, construa um segmento de reta que passe pelo ponto médio das coordenadas do lado da base, identifique o apótema da base e sua medida. Faça uma projeção em RA, exporte a imagem (grave no smartphone) e compartilhe no grupo de whatsapp da turma, identificando o seu número de participante.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A17 e A23, seguindo nossas orientações, resolveram a questão da seguinte forma: construíram a pirâmide de base pentagonal, utilizando as ferramentas do GeoGebra 3D, traçando nessa base dois segmentos que partiam de vértices e atingiam o ponto médio do lado oposto a esses vértices. Esses segmentos acabavam por se cruzar e delimitavam o centro da base da pirâmide. Com isso, para chegarem ao apótema da base, bastava que traçassem um outro segmento que saía do centro da base da pirâmide e atingia o ponto médio do lado oposto ao vértice desse centro.

A Figura 14, a seguir, mostra a resolução feita pelos alunos A17 e A23.

Figura 14: Resolução dos alunos A17 e A23



Fonte: Acervo do Pesquisador

Como já esperávamos, os alunos apresentaram bastante dificuldade no entendimento de “qual apótema” deveriam calcular, especialmente, dificuldades relacionadas à definição de apótema da base e a clássica “confusão” com o apótema da pirâmide. Nesse momento, mais uma vez, reforçamos as definições de apótemas da base e da pirâmide e ressaltamos que, mesmo com a obtenção da medida do apótema da base por meio da RA / GeoGebra 3D, esse cálculo “à mão” seria bem difícil, pois trata-se de um pentágono regular. Aproveitamos, então, para sugerir que eles pesquisassem sobre a existência de uma “eventual fórmula” para o apótema de um pentágono regular.

Por fim, discutimos a impossibilidade de calcularmos o apótema da pirâmide, pois apesar de possuir como base um polígono regular, a pirâmide construída não era reta, uma vez que a projeção ortogonal do seu vértice sobre o plano da base não coincidia com o centro da base, e sim com o ponto médio de um dos lados da base, fato que os próprios alunos constataram por meio da RA / GeoGebra 3D, que possibilita girar a pirâmide construída para visualizá-la sob qualquer ângulo e em qualquer posição.



4.1.4. 4.º encontro (dia 08/02/2023) – AE3) – Revisão de Cubos, Paralelepípedos Retângulos e Pirâmides

Neste encontro, após uma breve revisão pelo Professor de cubos, paralelepípedos e pirâmides, os alunos foram convidados a desenvolver a 3ª Atividade Exploratória (AE3), que apresentava questões adaptadas de exames externos, que não descreveremos aqui, e questões elaboradas pelo Pesquisador que os instigavam à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D, como descrevemos, na sequência.

Apresentamos na Figura 15, a seguir, a Questão 3 da AE3. Nesta questão, os alunos foram convidados a revisitar, utilizando a RA / GeoGebra 3D, a visualização e os elementos para o cálculo da diagonal do cubo.

Figura 15: Questão 3 da AE3

Questão 3

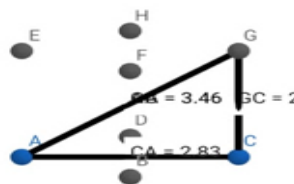
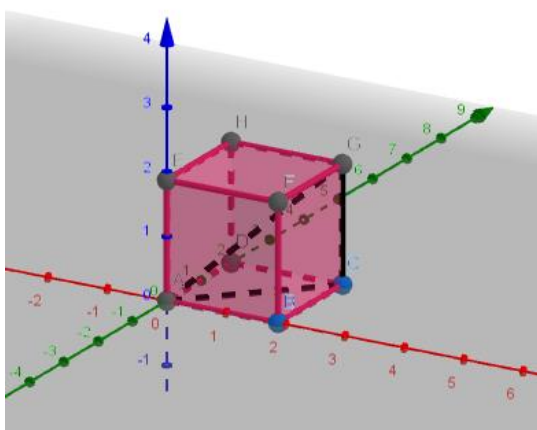
Abra a calculadora GeoGebra 3D (), selecione a opção Cubo. Construa um cubo com lados medindo 2 (duas unidades). Trace a diagonal do cubo, a diagonal da face da base do cubo e a altura do cubo. Visualize o triângulo formado pela união da diagonal desses três segmentos. Vá na ferramenta engrenagem  e desabilite os eixos e o plano. Em seguida, vá na ferramenta Álgebra e desabilite o cubo, deixando só o triângulo. Meça os valores de cada segmento. Faça um print e compartilhe no grupo de whatsapp. Você diria que o triângulo formado é retângulo ou não? Justifique a sua resposta.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Nesta questão, foi pedido aos alunos para realizarem a construção de um cubo por meio da RA / GeoGebra 3D para que, ao final, ao serem desabilitados os eixos, o plano e o próprio cubo, restasse somente o triângulo resultante da operação. É uma forma de mostrar aos alunos uma das possibilidades da construção por meio da RA / GeoGebra 3D, que é visualizar o interior da construção. Também foi questionado, no final da questão, se o triângulo resultante seria retângulo ou não, devendo os alunos justificarem a resposta.

Os alunos A08, A13 e A14, por exemplo, utilizaram o fato de que, para ser retângulo, o triângulo deveria satisfazer ao Teorema de Pitágoras, como mostra a Figura 16, a seguir.

Figura 16: Resolução dos alunos A08, A13 e A14





Fonte: Acervo do Pesquisador

Nessa questão, os alunos também foram convidados a revisitar, utilizando a RA / GeoGebra 3D, a visualização e os elementos para o cálculo do apótema da base do cubo. Apresentamos na Figura 17, a seguir, a Questão 4 da AE3.

Figura 17: Questão 4 da AE3

Questão 4

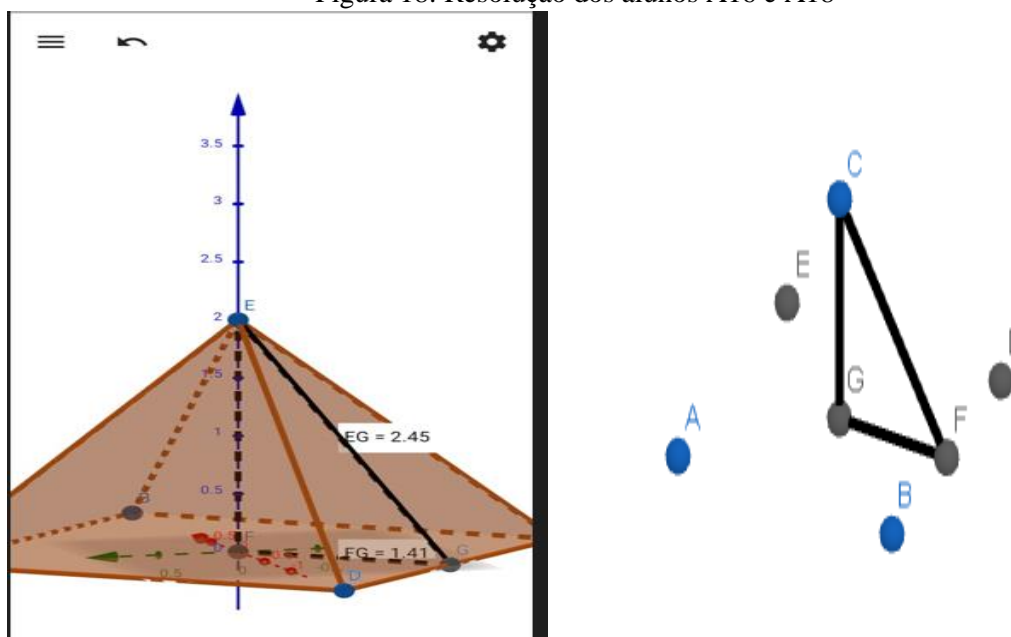
Abra a calculadora GeoGebra 3D (), selecione a opção pirâmide. A seguir, selecione as coordenadas -2 (menos 2, no eixo verde) e 2 (mais 2, no eixo vermelho). Atribua o valor 2 (mais 2, no eixo azul) para a altura. Calcule o apótema da pirâmide e o apótema da base. Vá na ferramenta engrenagem  e desabilite os eixos e o plano. Faça um print do resultado e compartilhe no grupo de whatsapp. Considerando os valores obtidos, o que representa o apótema da pirâmide no triângulo formado pelo apótema da base, pela altura e pelo próprio apótema da pirâmide?

Fonte: Acervo do Pesquisador

Essa questão envolveu a construção de uma pirâmide utilizando-se a RA / GeoGebra 3D sendo que, ao final, deveria-se desabilitar os eixos, o plano e a própria pirâmide, restando somente o triângulo. Foi questionado aos alunos sobre o que representava o apótema da pirâmide resultante da desabilitação dos eixos, do plano e da própria pirâmide.

A resolução da questão pelos alunos A16 e A18 mostra a etapa anterior, antes da desabilitação dos eixos, do plano e da própria pirâmide. Eles puderam visualizar o resultado e responderam corretamente que o apótema da pirâmide representava a hipotenusa do triângulo retângulo formado, como mostra a Figura 18, a seguir.

Figura 18: Resolução dos alunos A16 e A18



Fonte: Acervo do Pesquisador

Assim, tal questão nos possibilitou um último “reforço” na consolidação dos conceitos de apótema da pirâmide e apótema da base, discussão bastante profícua e necessária, como mostraram as descrições feitas, especialmente, nos 3.º e 4.º encontros.

4.1.5. 5.º encontro (dia 15/02/2023) – AE4) Cilindros

Este encontro foi diferenciado de todos os demais pois, devido a um problema particular, não pudemos estar presentes no local, mas acompanhamos a resolução das questões, em tempo real, pelo grupo de *WhatsApp* da turma. Com isso, os alunos foram estimulados a “praticar” a aprendizagem móvel, dada a possibilidade de resolução das questões num ambiente fora da sala de aula e do horário do encontro.

Após a abordagem pelo Professor dos principais conceitos, elementos e propriedades dos cilindros, os alunos foram convidados a desenvolver a 4ª Atividade Exploratória (AE4), em que todas as questões os estimulavam à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D, enviada aos alunos por meio do grupo de *WhatsApp* da turma.

Inicialmente, o Professor informou aos alunos que, mesmo “ausente fisicamente”, como havia justificado, o Pesquisador estaria disponível remotamente para esclarecer dúvidas e dar suporte pedagógico à aprendizagem móvel no grupo de *WhatsApp* da turma e que eles deveriam enviar as resoluções das questões pela mesma mídia social ou, se preferissem, para o *e-mail* institucional do Pesquisador.

Apresentamos na Figura 19, a seguir, a Questão 1 da AE4. Nesta questão, objetivamos desenvolver nos alunos a observação presente na relação existente entre os elementos que compõem o cilindro (raio, altura, área da base e volume).

Figura 19: Questão 1 da AE4

Atividades Exploratórias – 15/02/2023 (prazo de envio das respostas: até 22/02/2023)

Números de chamada:



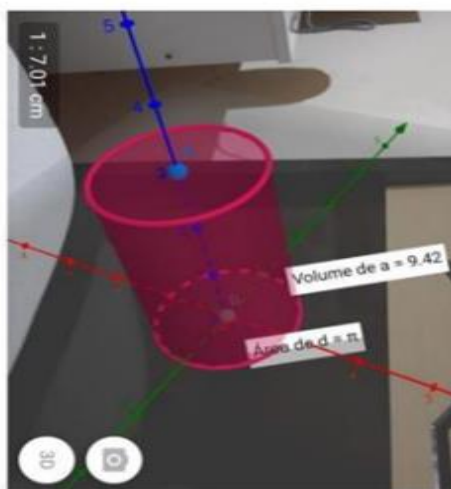
01) A partir da Calculadora gráfica do GeoGebra 3D, faça um cilindro regular com os seguintes parâmetros: raio = 1 (uma) unidade e altura = 3 (três) unidades. Em seguida, calcule a área da base e o volume do cilindro. Com os resultados obtidos, a que conclusão vocês chegam? Ou seja, qual é a relação entre os resultados obtidos entre a área da base e o volume do cilindro com os parâmetros fornecidos? **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A03, A15 e A20, por exemplo, não tiveram dificuldade na resolução da questão e procuraram justificar detalhadamente algumas de suas conclusões, como mostra a Figura 20, a seguir.

Figura 20: Resolução dos alunos A03, A15 e A20

A relação é que o volume do cilindro é calculado a partir do valor da área da base, onde o volume é área da base x altura. Já para calcular a área da base utilizamos a mesma fórmula da área do círculo, já que o cilindro possui base circular. Por isso, a área da base é $\pi \times r^2$.



Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 21, a seguir, a Questão 2 da AE4. Para esta questão, estimulamos os alunos a observarem a relação existente entre o raio da base do cilindro e sua altura quando alteramos o valor dos parâmetros e as “consequências” ao valor do volume desse cilindro. Assim, eles puderam observar que havia uma relação de interdependência na qual se relacionavam tais elementos.

Figura 21: Questão 2 da AE4

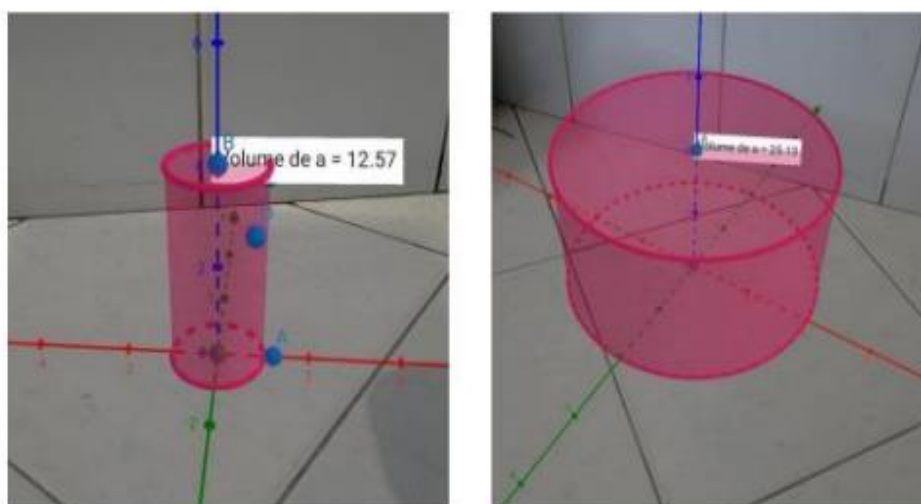
02) Considere um cilindro de raio da base com medida igual a 1 (uma) unidade e altura igual a 4 (quatro) unidades. O que acontece com o volume desse cilindro se dobrarmos o raio de sua base e dividirmos a sua altura por 2 (dois)? A que conclusão vocês chegam com essas mudanças nos parâmetros? **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A16 e A18, por exemplo, apresentaram os cilindros construídos na resolução da questão como forma de justificar sua conclusão, como mostra a Figura 20, a seguir.

Figura 22: Resolução dos alunos A16 e A18

RESPOSTA:



É possível perceber, que o volume do segundo cilindro será o dobro do primeiro.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 23, a seguir, a Questão 3 da AE4. Para esta questão, incentivamos os alunos a construírem dois cilindros, onde o menor estava inserido no maior. Por meio dessa inserção, solicitamos que calculassem o valor da diferença de volume entre os dois cilindros. Nessa perspectiva, eles puderam trabalhar com sólidos geométricos interpostos, sendo necessário que debatessem mais entre os componentes dos grupos formados sobre como elaborar essa forma de construção.

Figura 23: Questão 3 da AE4

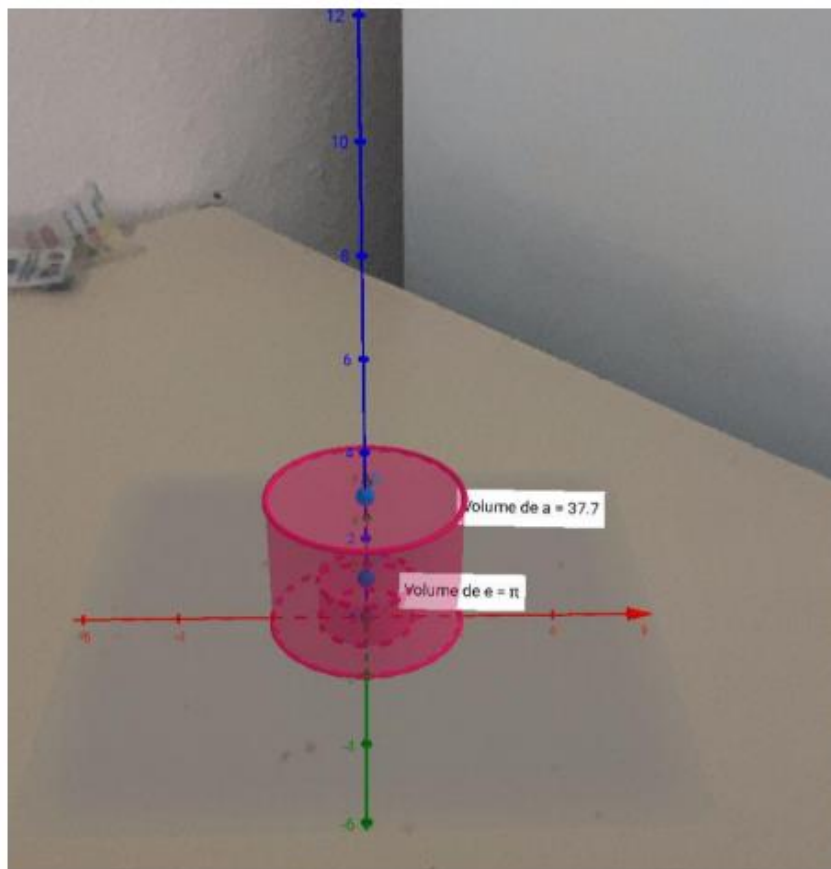
03) A partir da Calculadora Gráfica do GeoGebra 3D, faça um cilindro regular com os seguintes parâmetros: raio = 2 (duas) unidades e altura = 3 (três) unidades. A seguir, faça um outro cilindro, dentro do primeiro cilindro feito, com os seguintes parâmetros: raio = 1 (uma) unidade e altura = 1 (uma) unidade. Considere o valor de π (letra grega "pi") como sendo " π " mesmo. A partir dos resultados obtidos, qual é o volume resultante da diferença dos volumes do cilindro maior e do volume do cilindro menor? **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A03, A15 e A20, durante o encontro, tiveram algumas dúvidas na resolução da questão, que nos foram enviadas pelo grupo de *WhatsApp* da turma. Após esclarecermos suas dúvidas, em tempo real, eles conseguiram construir um cilindro inscrito em outro cilindro, como mostra a Figura 24, a seguir.

Figura 24: Resolução dos alunos A03, A15 e A20

Volume: $37,7 - 3,14 = 34,56$



Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 25, a seguir, a Questão 4 da AE4. Nessa questão, objetivamos trabalhar com a construção de um cilindro oblíquo. Nessa perspectiva, por não ser possível a construção direta utilizando o menu de ferramentas presentes no GeoGebra 3D, tivemos de elaborar artifícios para que os alunos pudessem construir o sólido geométrico e resolver a questão.

Figura 25: Questão 4 da AE4

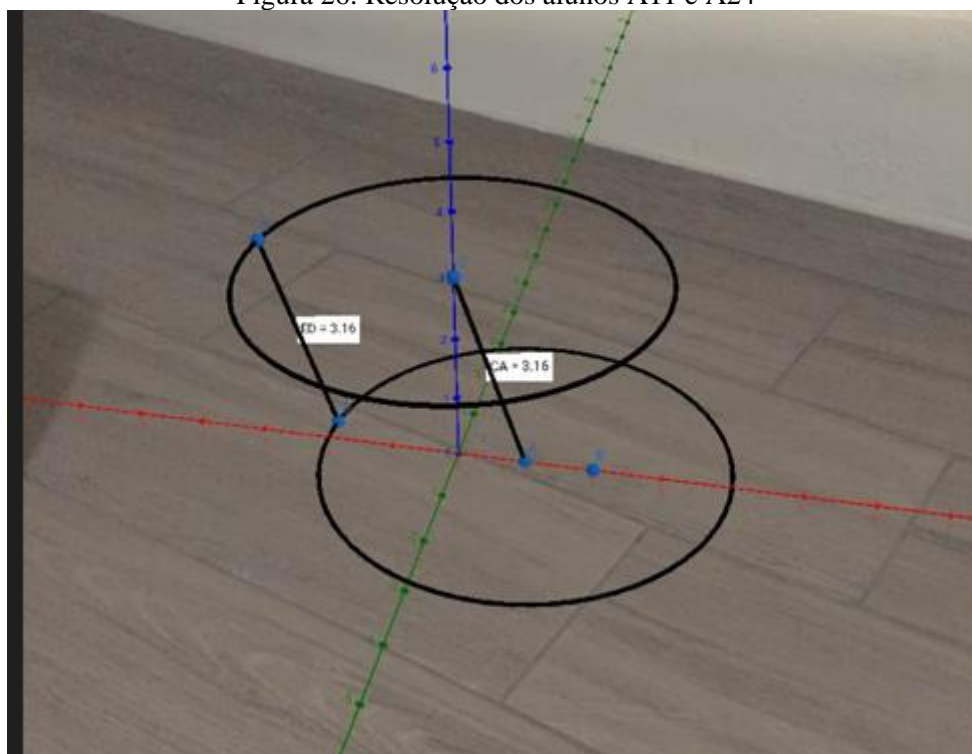
04) Construa um cilindro oblíquo, considerando as informações contidas no anexo 2, com os seguintes parâmetros: raio do cilindro sobreposto ao plano e do cilindro sobreposto ao eixo vertical com o valor de 3 (três) unidades. **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Na resolução dessa questão, alguns alunos tiveram dúvidas, pois no menu de construção por meio da RA / GeoGebra 3D, não há como construir um cilindro oblíquo, sendo necessária a utilização de um artifício para tal construção e, por isso, enviamos aos alunos um apêndice (no enunciado da questão, denominado anexo 2). Ainda assim, alguns alunos apresentaram dificuldades na construção do cilindro oblíquo, o que nos levou a uma intensa troca de mensagens, em tempo real, pelo grupo de *WhatsApp* da turma.

. Os alunos A11 e A24, após terem suas dúvidas esclarecidas, conseguiram resolver a questão, como mostra a Figura 26, a seguir.

Figura 26: Resolução dos alunos A11 e A24



Fonte: Acervo do Pesquisador

É importante ressaltar que, nesse encontro, a utilização do grupo de *WhatsApp* da turma foi fundamental para a resolução das questões da AE4, potencializando os recursos gerados por meio da RA / GeoGebra 3D e valorizando a “mobilidade” da aprendizagem por parte dos alunos.

4.1.6. 6.º encontro (dia 01/03/2023) – AE5) Cones

Neste encontro, após a abordagem pelo Professor dos principais conceitos, elementos e propriedades dos cones, os alunos foram convidados a desenvolver a 5ª

Atividade Exploratória (AE5), em que todas as questões os desafiavam à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D. Apresentamos na Figura 27, a seguir, a Questão 1 da AE5.

Figura 27: Questão 1 da AE5

Atividades Exploratórias – 01/03/2023

Números de chamada:

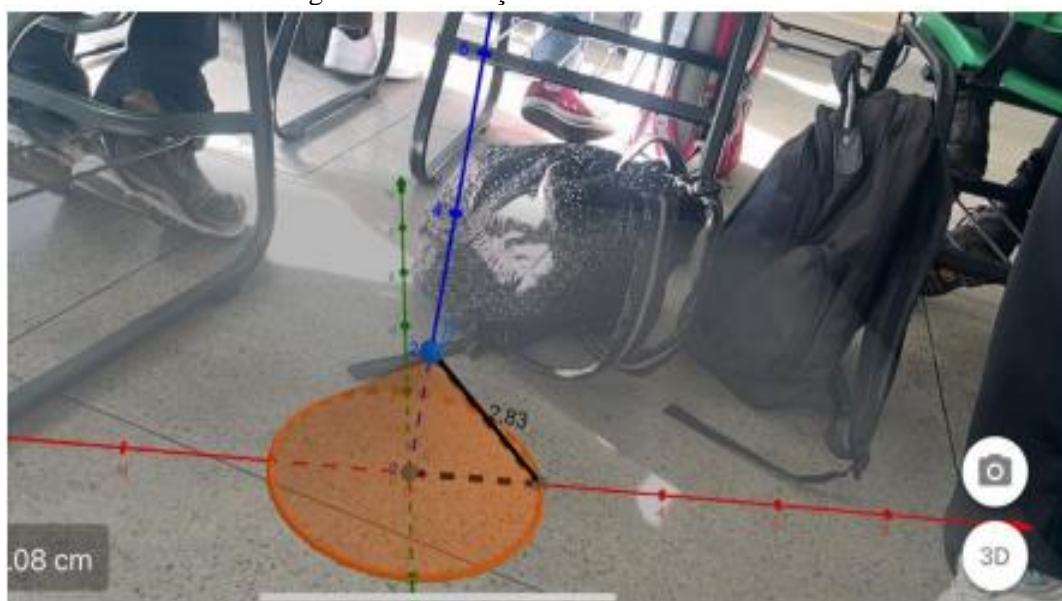


01) Construa um Cone utilizando a Calculadora Gráfica do GeoGebra 3D, atribuindo ao topo a medida 2 (dois), bem como ao raio a mesma medida 2 (dois). Em seguida, marque o ponto de intersecção que sai do centro do cone e tem a medida do raio. Após isso, construa um segmento que une esse ponto ao topo. Calcule a sua medida. Por fim, o que você deduz sobre esse valor? O que ele representa? **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A05 e A10, a partir dos recursos de movimentação da RA / GeoGebra 3D, visualizaram o triângulo retângulo formado pelo raio da base, altura e geratriz do cone que, dessa forma, perceberam que o topo era o vértice do cone e que deveriam calcular a medida da geratriz, como mostra a Figura 28, a seguir.

Figura 28: Resolução dos alunos A05 e A10



Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 29, a seguir, a Questão 2 da AE5. Nesta questão, os alunos foram levados a pensar sobre a relação existente entre o volume, o raio de um cone e o que aconteceria caso esses parâmetros variassem.

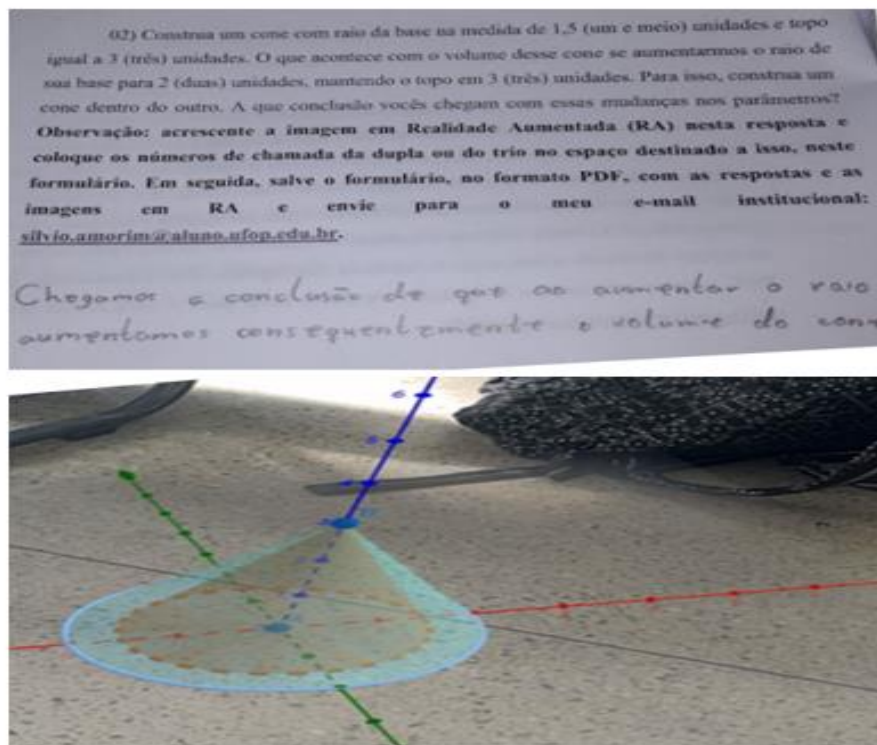
Figura 29: Questão 2 da AE5

02) Construa um cone com raio da base na medida de 1,5 (um e meio) unidades e topo igual a 3 (três) unidades. O que acontece com o volume desse cone se aumentarmos o raio de sua base para 2 (duas) unidades, mantendo o topo em 3 (três) unidades. Para isso, construa um cone dentro do outro. A que conclusão vocês chegam com essas mudanças nos parâmetros?
Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A05 e A10 resolveram a questão e apresentaram sua conclusão, como mostra a Figura 30, a seguir.

Figura 30: Resolução dos alunos A05 e A10



Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 31, a seguir, a Questão 3 da AE5. Para essa questão, trabalhamos a perspectiva de se construir um cone equilátero, destacando-se a sua reta geratriz, a sua relação com o raio da base e o que este representava.

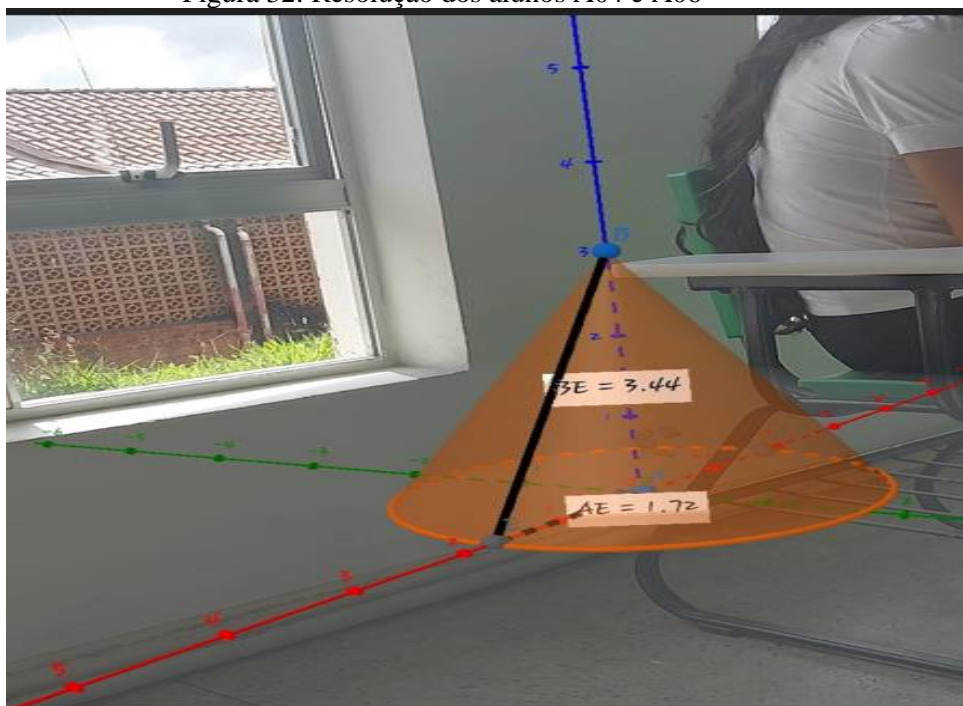
Figura 31: Questão 3 da AE5

03) A partir da Calculadora Gráfica do GeoGebra 3D, faça um cone com os seguintes parâmetros: raio = $\sqrt{3}$ (raiz quadrada de 3) unidades e altura = 3 (três) unidades. A seguir, marque o ponto de intersecção do segmento que sai do centro do cone e atinge sua extremidade, sendo no valor do raio. Construa um segmento que representa essa medida e outro segmento que vai desse ponto ao topo. Calcule os valores desses segmentos. A que conclusão vocês chegam com os valores desses parâmetros? **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A04 e A06 resolveram a questão e justificaram sua conclusão de que o raio da base do cone tinha a metade do valor da hipotenusa a partir da visualização por meio da RA / GeoGebra 3D, como mostra a Figura 32, a seguir.

Figura 32: Resolução dos alunos A04 e A06



Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 33, a seguir, a Questão 4 da AE5. Para essa questão, trouxemos a possibilidade dos alunos construírem e trabalharem com cones invertidos e sobrepostos. Trabalhamos também com a diferença entre os volumes desses dois cones e o que essa diferença representava.

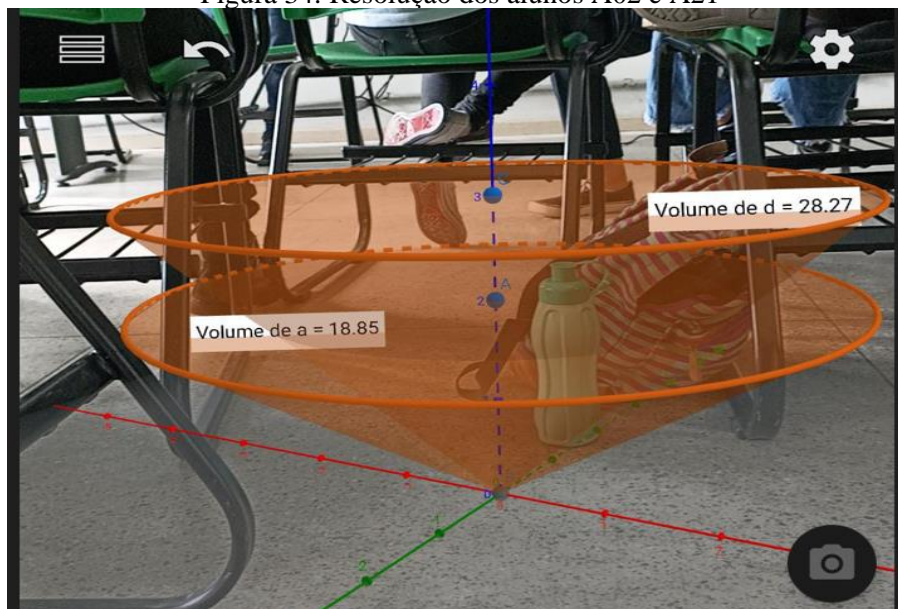
Figura 33: Questão 4 da AE5

04) Construa um cone invertido com raio igual a 3 (três) unidades e altura igual a 3 (três) unidades. Em seguida, construa outro cone invertido, dentro do cone maior, mas agora com altura igual a 2 (duas) unidades e raio de igual valor ao do cone maior, ou seja, 3 (três) unidades. Feito isso, calcule os volumes de cada cone. Após isso, calcule a diferença entre o volume dos dois cones. A que conclusão vocês chegam sobre esse valor que representa a diferença dos volumes dos dois cones? **Observação: acrescente a imagem em Realidade Aumentada (RA) nesta resposta e coloque os números de chamada da dupla ou do trio no espaço destinado a isso, neste formulário. Em seguida, salve o formulário, no formato PDF, com as respostas e as imagens em RA e envie para o meu e-mail institucional: silvio.amorim@aluno.ufop.edu.br.**

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A02 e A21 resolveram a questão e concluíram que a diferença entre o volume dos dois cones invertidos era igual à metade do volume do cone menor, como mostra a Figura 34, a seguir.

Figura 34: Resolução dos alunos A02 e A21



Fonte: Acervo do Pesquisador

Ao final, exploramos, ainda, o fato de que a geratriz desempenha no cone o papel do apótema na pirâmide, ambos sendo a hipotenusa de um triângulo retângulo formado por elementos centrais, tanto na pirâmide como no cone.

4.1.7. 7.º encontro (dia 08/03/2023) – AE6 Esferas

Neste encontro, após a abordagem pelo Professor dos principais conceitos, elementos e propriedades das esferas, os alunos foram convidados a desenvolver a 6ª Atividade Exploratória (AE6), em que todas as questões os desafiavam à resolução por meio da RA / GeoGebra 3D.

Apresentamos na Figura 35, a seguir, a Questão 1 da AE6. Para essa questão, trouxemos objetos que são familiares nos esportes, como as bolas de futebol e de voleibol. Nessa perspectiva, elaboramos a questão em função de se trabalhar o volume dessas bolas e o que representava a diferença entre eles.

Figura 35: Questão 1 da AE6

Atividades Exploratórias – 08/03/2023

Números de chamada:



01) A maioria das pessoas já ouviu falar que o Brasil é o país do futebol. E sempre que vemos uma fotografia de uma bola de futebol podemos pensar que ela tem um formato de uma esfera.

Figura 1 – Uma bola de futebol



Fonte: https://br.freepik.com/vetores-gratis/imagem-preta-branca-realistica-da-bola-de-futebol_2875610.htm

Do mesmo jeito, se pensarmos numa bola de voleibol ela também parecerá ter um formato de uma esfera.

Figura 2 – Uma bola de voleibol



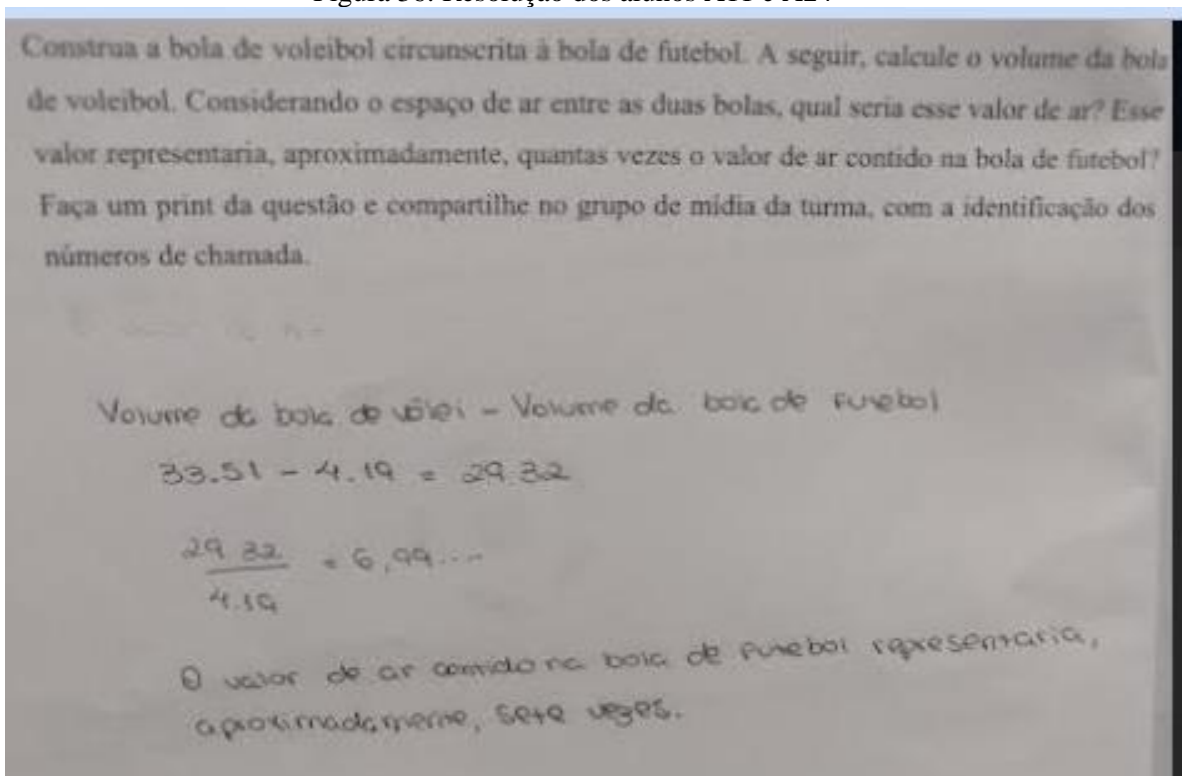
Fonte: https://br.freepik.com/vetores-premium/ilustracao-vetorial-bola-de-volei-de-couro-equipamento-esportivo-adesivo-de-desenho-animado_17378470.htm

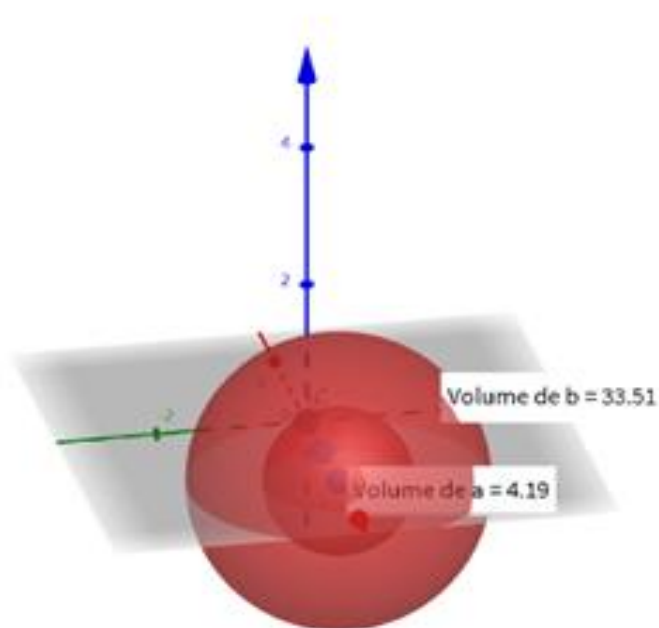
Utilizando-se a Calculadora Gráfica do GeoGebra 3D no smartphone, construa duas esferas, como se fossem uma bola de futebol e uma bola de voleibol. Considere, para efeitos de construção e de redução de escala, que a bola de futebol é menor que a bola de voleibol. Dito isso, atribua os seguintes valores de centros e raios: bola de futebol – centro 2 (dois) e raio 1 (um); bola de voleibol – centro 2 (dois) e raio 2 (dois). Calcule o volume de ar da bola de futebol. Construa a bola de voleibol circunscrita à bola de futebol. A seguir, calcule o volume de ar da bola de voleibol. Considerando o espaço de ar entre as duas bolas, qual seria esse volume de ar? Esse volume representaria, aproximadamente, quantas vezes o volume de ar contido na bola de futebol? Faça um print da questão e compartilhe no grupo de mídia da turma, com a identificação dos números de chamada.

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A11 e A24 resolveram a questão e apresentaram sua conclusão, como mostra a Figura 36, a seguir.

Figura 36: Resolução dos alunos A11 e A24





Fonte: Acervo do Pesquisador

Interessante destacar que não houve questionamentos em relação à consideração feita no enunciado da questão de que a bola de futebol era menor do que a bola de voleibol, talvez, pela possibilidade de se imaginar que se tratava de uma bola de futebol de salão, por exemplo.

Apresentamos na Figura 37, a seguir, a Questão 2 da AE6. Para essa questão, trouxemos também elementos presentes no cotidiano dos alunos, como a Terra e a Lua. Em seguida, trabalhamos a relação entre seus raios, seus volumes e o qual era a relação de representação entre eles.

Figura 37: Questão 2 da AE6

02) A Terra e a Lua estão ligadas gravitacionalmente. Entende-se que a Lua é um satélite natural da Terra, por estar presa a ela, executando um movimento orbital. Construa duas esferas, representando a Terra e a Lua, utilizando a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D. Atribua os seguintes valores de referência para o centro e raio: Terra: centro na origem dos eixos e raio igual a 1 (um). Lua: centro no ponto 4 (quatro) do eixo vertical e raio igual a 0,25 (um quarto do raio da Terra). A seguir, calcule o volume da Terra e da Lua. Tendo calculado esses valores, quantas vezes, aproximadamente, a Lua caberia dentro da Terra? Para essa resposta, considere somente o valor inteiro (antes da vírgula). Remova os eixos e o plano deixando somente a Terra e a Lua. Faça um print da questão e compartilhe no grupo de mídia da turma, com a identificação dos números de chamada.

Figura 3 – Terra e Lua



Fonte: <https://br.depositphotos.com/stock-photos/terra-lua.html>

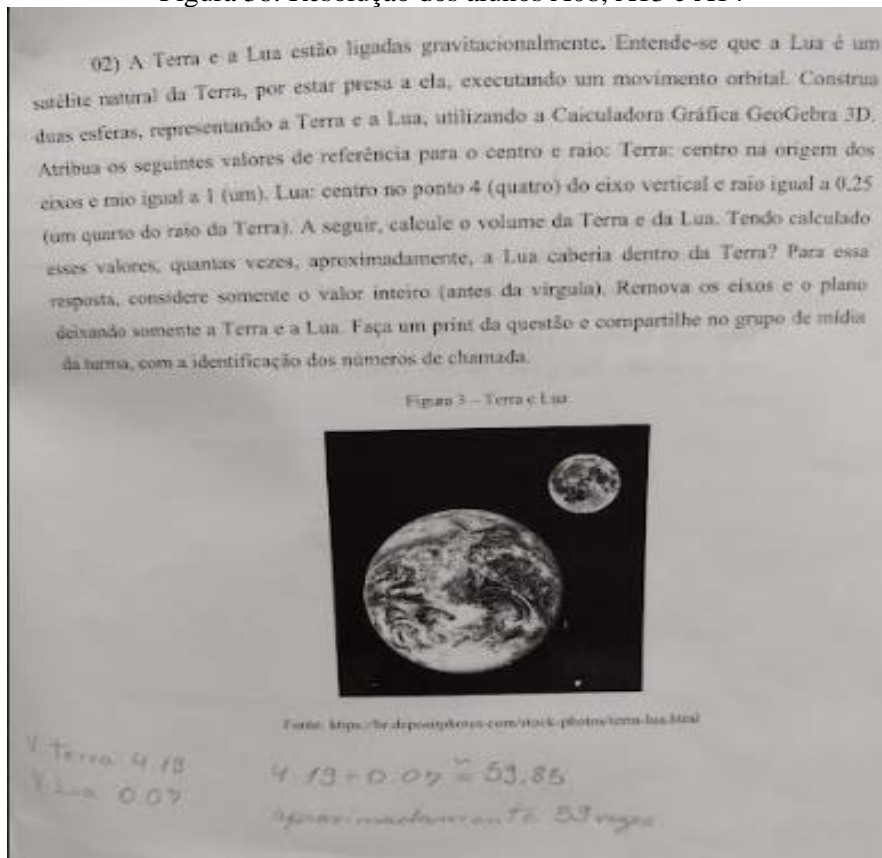
Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A08, A13 e A14 resolveram a questão utilizando os recursos proporcionados por meio da RA / GeoGebra 3D e chegaram à conclusão de que a Lua caberia dentro da Terra aproximadamente, 59 vezes, como mostra a Figura 38, a seguir.


Figura 38: Resolução dos alunos A08, A13 e A14

02) A Terra e a Lua estão ligadas gravitacionalmente. Entende-se que a Lua é um satélite natural da Terra, por estar presa a ela, executando um movimento orbital. Construa duas esferas, representando a Terra e a Lua, utilizando a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D. Atribua os seguintes valores de referência para o centro e raio: Terra: centro na origem dos eixos e raio igual a 1 (un). Lua: centro no ponto 4 (quatro) do eixo vertical e raio igual a 0,25 (um quarto do raio da Terra). A seguir, calcule o volume da Terra e da Lua. Tendo calculado esses valores, quantas vezes, aproximadamente, a Lua caberia dentro da Terra? Para essa resposta, considere somente o valor inteiro (antes da vírgula). Remova os eixos e o plano deixando somente a Terra e a Lua. Faça um print da questão e compartilhe no grupo de mídia da turma, com a identificação dos números de chamada.

Figura 3 – Terra e Lua.



Fonte: <https://br.depositphotos.com/stock-photos/terra-lua.html>

 Volume de b = 0.07

 Volume de a = 4.19

Fonte: Acervo do Pesquisador

Apresentamos na Figura 39, a seguir, a Questão 3 da AE6. Nesta questão trabalhamos com os alunos a secção da esfera feita por meio de planos paralelos, além da relação entre a distância desses planos, o raio da esfera e o raio de secção.

Alguns alunos apresentaram dificuldades na construção da figura, provavelmente, por ser necessária a implementação de alguns passos utilizando as ferramentas disponíveis no GeoGebra 3D para efetuar tal construção. Para auxiliar a diminuir as

dificuldades, solicitamos que eles observassem a “dica” disponibilizada na questão que poderia facilitar seu entendimento e interpretação.

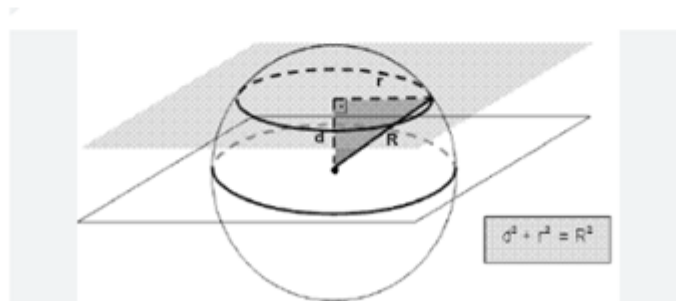
Assim, com o debate feito entre alunos e Pesquisador, pôde-se efetuar a construção e exploração da relação entre a distância dos planos de corte, o raio da esfera e o raio de secção.

Figura 39: Questão 3 da AE6

03) Como temos em Nery e Trotta (1984, p.292) uma **secção** é um círculo determinado de um plano que corta uma esfera. A relação entre a distância do plano de corte até o centro da esfera e o raio da secção é dada por: $R^2 = d^2 + r^2$. Sendo assim, construa uma secção de um plano sobre uma esfera. No final, calcule os valores dos segmentos que representam: o raio da esfera (R), a distância (d) do plano de corte até o centro da esfera e o raio (r) que é o raio da secção. Feito isso, compare com a fórmula dada e veja se os valores são “aproximadamente” iguais. Faça um print da questão e compartilhe no grupo de mídia da turma, com a identificação dos números de chamada.

***Dica:** para facilitar a construção, trace, primeiramente, três pontos: um no encontro dos eixos, outro no valor 1 (um) do eixo vertical e outro no valor 2 (dois) também no eixo vertical.

Figura 5 – Secção de um plano sobre uma esfera



Fonte: <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/esferas-geometria-espacial/>

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os alunos A06 e A19 não tiveram muitas dificuldades na construção solicitada e resolveram a questão utilizando os recursos proporcionados por meio da RA / GeoGebra 3D, como mostra a Figura 39, a seguir. Esses alunos utilizaram a relação entre os planos de corte das esferas, a distância entre eles, bem como a distância entre seus centros para calcular os valores e inferir conclusões a respeito da questão proposta. Também fizeram a projeção em RA para verificar o resultado em 3D, dentro da perspectiva da construção

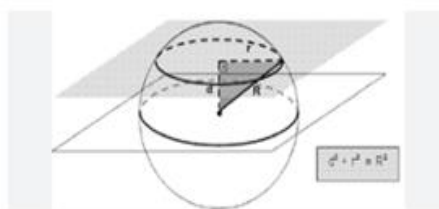
de sólidos geométricos através da utilização das ferramentas disponíveis no GeoGebra 3D.

Figura 40: Resolução dos alunos A06 e A19

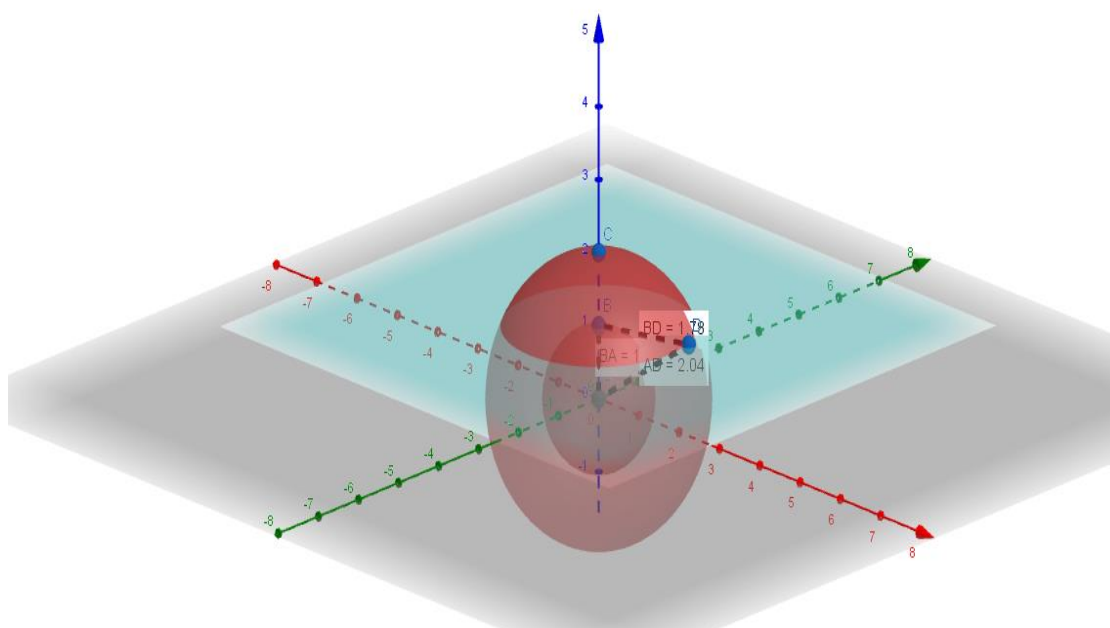
03) Como temos em Nery e Trotta (1984, p.292) uma **seção** é um círculo determinado de um plano que corta uma esfera. A relação entre a distância do plano de corte até o centro da esfera e o raio da seção é dada por: $R^2 = d^2 + r^2$. Sendo assim, construa uma seção de um plano sobre uma esfera. No final, calcule os valores dos segmentos que representam: o raio da esfera (R), a distância (d) do plano de corte até o centro da esfera e o raio (r) que é o raio da seção. Feito isso, compare com a fórmula dada e veja se os valores são "aproximadamente" iguais. Faça um print da questão e compartilhe no grupo de mídia da turma, com a identificação dos números de chamada.

***Dica:** para facilitar a construção, trace, primeiramente, três pontos: um no encontro dos eixos, outro no valor 1 (um) do eixo vertical e outro no valor 2 (dois) também no eixo vertical.

Figura 5 – Seção de um plano sobre uma esfera



Fonte: <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/esferas-geometria-espacial/>



Fonte: Acervo do Pesquisador

Ao final deste encontro, observamos que, com o desenvolvimento das atividades exploratórias, os alunos foram, gradativamente, apresentando uma maior familiaridade com os recursos da RA / GeoGebra 3D e, por consequência, uma menor dificuldade na resolução das questões apresentadas.

4.1.8. 8.º encontro (dia 15/03/2023) – Conclusão da Pesquisa

Este último encontro marcou nossa despedida dos alunos e teve como objetivo discutir suas impressões sobre a abordagem dos conteúdos de Geometria Espacial trabalhados e as atividades exploratórias desenvolvidas por meio da RA / GeoGebra 3D. Com a concordância dos alunos, fizemos gravações de áudio e algumas transcrições serão apresentadas na análise dos dados.

Na sequência, informamos aos alunos que, com o final da pesquisa, eles deveriam responder ao Questionário Final, por meio do *Google Forms*. Então, disponibilizamos o *link* do Questionário Final para os alunos no grupo de *WhatsApp* da turma. Por fim, deixamos claro que, mais uma vez, o preenchimento (parcial ou total) desse questionário continuaria sendo totalmente voluntário.

4.2. Analisando os Questionários Inicial e Final

Lembramos que os questionários de nossa pesquisa foram criados no *Google Forms*, tendo os *links* disponibilizados para os alunos participantes pelo *WhatsApp*, e seguem, na íntegra, nos apêndices.

No caso do Questionário Inicial, apresentaremos todas as questões (elaboradas no modelo fechado), seguidas de gráficos estatísticos, gerados diretamente no *Google Forms* a partir das respostas dos alunos participantes, e de breves análises sintéticas, a partir de inferências que julgamos pertinentes, buscando contrastar nossas inferências com as ideias de pesquisadores previamente apresentadas em nosso referencial teórico-bibliográfico.

Já no caso do Questionário Final, apresentaremos todas as questões (elaboradas no modelo aberto), seguidas das principais respostas dos alunos participantes que julgamos representar o conjunto das respostas, e de breves análises sintéticas, a partir de inferências que julgamos pertinentes, também buscando o contraste acima destacado.

4.2.1. Analisando o Questionário Inicial

Lembramos que o Questionário Inicial foi composto por questões fechadas e foi aplicado aos 24 alunos participantes, após o 1.º encontro.

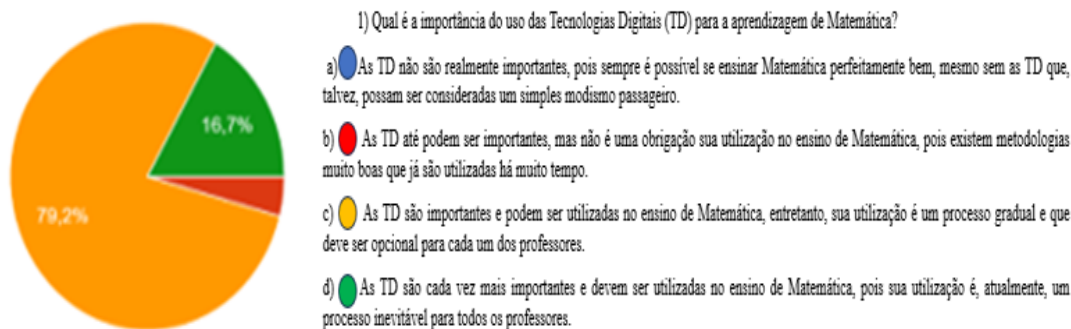
A Questão 1 buscou identificar a importância que eles conferiam ao uso das Tecnologias Digitais para a aprendizagem de Matemática:

1) Qual é a importância do uso das Tecnologias Digitais (TD) para a aprendizagem de Matemática?

- a) () As TD não são realmente importantes, pois sempre é possível se ensinar Matemática perfeitamente bem, mesmo sem as TD que, talvez, possam ser consideradas um simples modismo passageiro.
- b) () As TD até podem ser importantes, mas não é uma obrigação sua utilização no ensino de Matemática, pois existem metodologias muito boas que já são utilizadas há muito tempo.
- c) () As TD são importantes e podem ser utilizadas no ensino de Matemática, entretanto, sua utilização é um processo gradual e que deve ser opcional para cada um dos professores.
- d) () As TD são cada vez mais importantes e devem ser utilizadas no ensino de Matemática, pois sua utilização é, atualmente, um processo inevitável para todos os professores.

A distribuição de respostas à Questão 1 encontra-se no gráfico a seguir, lembrando que se trata de uma questão na qual permitiu-se uma única resposta.

Figura 41: Gráfico de Respostas à Questão 1



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que praticamente todos os alunos participantes consideram que as Tecnologias Digitais são importantes e podem ser utilizadas no ensino de Matemática, sendo que a maioria entende tal utilização como um processo gradual e opcional para cada um dos professores. Isso nos remete à visão de D’Ambrosio (2014) da essencialidade da ampla utilização das tecnologias na Educação para que a escola estimule a geração e difusão de um conhecimento integrado aos valores e expectativas da “sociedade do conhecimento”.

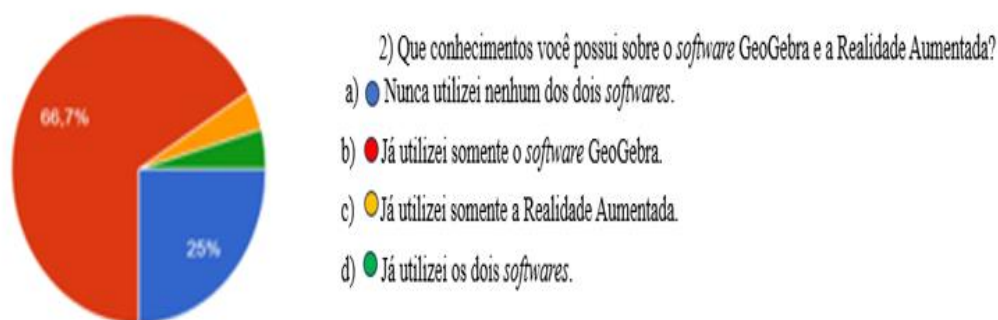
Já a Questão 2 buscou identificar os conhecimentos dos alunos participantes sobre a RA e o *software* GeoGebra:

2) Que conhecimentos você possui sobre o *software* GeoGebra e a Realidade Aumentada?

- a) Nunca utilizei nenhum dos dois *softwares*.
- b) Já utilizei somente o *software* GeoGebra.
- c) Já utilizei somente a Realidade Aumentada.
- d) Já utilizei os dois *softwares*.

A distribuição de respostas à Questão 2 encontra-se no gráfico a seguir, lembrando que se trata de uma questão na qual permitiu-se uma única resposta.

Figura 42: Gráfico de Respostas à Questão 2



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos inferir que, apesar do *software* GeoGebra ser do conhecimento de uma grande parte dos alunos participantes, é considerável a porcentagem daqueles que nunca utilizaram nenhum dos dois *softwares*. Por outro lado, tivemos a grata surpresa em saber que a RA não era totalmente desconhecida por eles, provavelmente, por algum contato prévio a partir de jogos interativos que, como destacam Macedo e Buriol (2016), acabam por se tornar uma das formas mais usuais de interação com a RA.

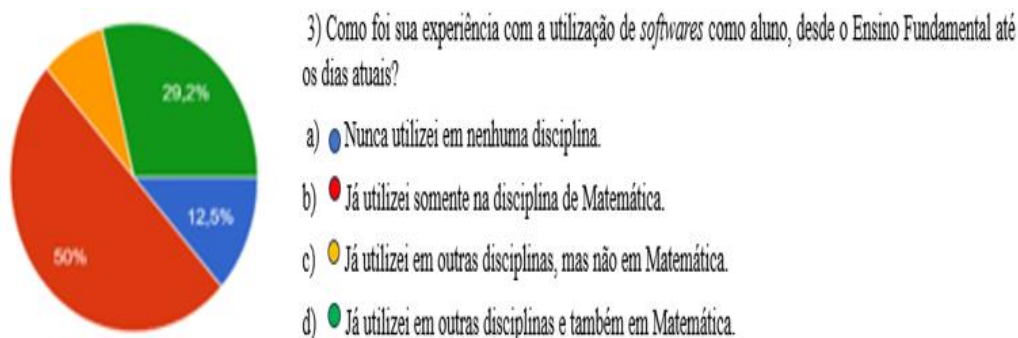
A Questão 3 buscou mapear eventuais experiências de utilização de *softwares* na prática discente dos alunos participantes, ao longo de seu percurso escolar:

3) Como foi sua experiência com a utilização de *softwares* como aluno, desde o Ensino Fundamental até os dias atuais?

- a) Nunca utilizei em nenhuma disciplina.
- b) Já utilizei somente na disciplina de Matemática.
- c) Já utilizei em outras disciplinas, mas não em Matemática.
- d) Já utilizei em outras disciplinas e também em Matemática.

A distribuição de respostas à Questão 3 encontra-se no gráfico a seguir, lembrando que se trata de uma questão na qual permitiu-se uma única resposta.

Figura 43: Gráfico de Respostas à Questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos fazer algumas inferências relevantes a partir das respostas. Por um lado, verificamos que a quase totalidade dos alunos participantes já havia tido a oportunidade de utilizar *softwares* em sua prática discente. Por outro lado, a Matemática aparece como a disciplina em que tal utilização foi mais frequente, o que coaduna com a expectativa de Valente (2007) de que a presença das Tecnologias Digitais em nossa cultura contemporânea cria novas possibilidades de expressão e comunicação, porquanto sua utilização no ensino de Matemática deve se tornar, cada vez mais natural.

4.2.2. Analisando o Questionário Final

Lembramos que o Questionário Final foi composto por questões abertas e aplicado aos 13 alunos participantes, após o 8.º encontro.

Como, de forma geral, as respostas dos alunos participantes foram bem sintéticas, não nos preocuparemos, neste momento, em identificar os respondentes, mas apenas em apresentá-las de forma agrupada, de modo que nos permita tecer algumas considerações em cada uma das questões.

A Questão 1 buscou oportunizar uma avaliação da participação dos alunos participantes e identificar suas maiores dificuldades no desenvolvimento das atividades exploratórias:

1) Como foi a sua participação e quais foram suas maiores dificuldades no desenvolvimento das atividades exploratórias com o *software* GeoGebra e a RA?

A grande maioria dos alunos participantes avaliou de forma bastante positiva sua participação no desenvolvimento das atividades exploratórias, destacando algumas dificuldades momentâneas, posteriormente superadas, especificamente, envolvendo a construção de sólidos geométricos e o manuseio das ferramentas da RA / GeoGebra 3D, como evidenciam as seguintes respostas:

- Eu gostei bastante de trabalhar com o GeoGebra, não tive muitas dificuldades, a não ser com o primeiro contato. Fora isso, com o tempo, acabou se tornando mais fácil a experiência.
- Participei de todas as atividades propostas e, no início, tive dificuldade para mexer no aplicativo. Porém, com o tempo e com ajuda do professor, do pesquisador e da minha dupla, ganhei mais experiência.

Podemos observar que a utilização da RA / GeoGebra 3D no *smartphone* causou um “estranhamento inicial” aos alunos, talvez, pelo fato de nem todos eles terem tido um contato prévio, em suas aulas de Matemática, com ferramentas tecnológicas que exigiam o conhecimento de seus comandos e funções, como no caso da RA / GeoGebra 3D. Entendemos, ainda, que a superação das dificuldades iniciais se deu com a resolução de exercícios, dentro das atividades exploratórias, nas quais os comandos e funções foram mostrados e detalhados, objetivando-se proporcionar conhecimento e compreensão das possibilidades trazidas com a RA / GeoGebra 3D ao se construir os sólidos geométricos e efetuar suas projeções no ambiente real da sala de aula.

Nessa perspectiva, Silva e Faria (2023) destacam que atividades exploratórias utilizando ferramentas tecnológicas visam desenvolver o conhecimento cognitivo dos discentes, sendo trabalhadas ações na construção de soluções a problemas propostos e que envolvem mecanismos de adaptação à representação de figuras geométricas espaciais, especialmente, com o apoio do GeoGebra.

Superadas as dificuldades iniciais com as ferramentas tecnológicas utilizadas nas atividades exploratórias, os alunos participantes passaram a tentar construir sólidos geométricos em cada encontro, utilizando-se para isso dos recursos disponíveis na RA /

GeoGebra 3D. Entretanto, algumas dificuldades específicas parecem ter sido mais recorrentes, mesmo ao longo dos encontros, como mostram as respostas a seguir:

- Eu participei de todas as atividades propostas e tive dificuldades em fazer as formas em escala. Algumas vezes, minhas formas ficavam de cabeça para baixo.
- Eu participei de todas as atividades e a minha maior dificuldade foi montar as figuras geométricas no 3D.

Ressaltamos que Regis e Mello (2023) afirmam que, considerando-se o ambiente educacional, o desenvolvimento do conhecimento requer um processo de adaptação e de mudanças para que os alunos possam entender o que lhes é mostrado e trabalhado, culminando com a retirada de dúvidas sobre aquilo que é visto e proposto em atividades, podendo haver maiores dificuldades no entendimento de alguns conteúdos em relação a outros. Entendemos que isso pode se dar devido ao fato de que há questões que estão relacionadas a uma maior profundidade na interpretação do que se vê, do que se sabe e do que é necessário para a resolução delas, sobretudo em relação aos conteúdos de Geometria Espacial que exploramos.

A Questão 2 buscou identificar as contribuições das atividades exploratórias para a aprendizagem de Geometria Espacial dos alunos participantes:

2) Quais foram as contribuições das atividades exploratórias para sua aprendizagem de Geometria Espacial? Em que conteúdos aconteceram as maiores contribuições?

Como, de certa forma, já esperávamos, praticamente, todos os alunos participantes destacaram a visualização na construção de sólidos geométricos como a principal contribuição das atividades exploratórias, como podemos verificar nas seguintes respostas:

- As atividades exploratórias foram de suma importância para o aprendizado, já que o GeoGebra é uma ferramenta capaz de nos fazer visualizar a questão proposta, facilitando o entendimento.
- Contribuiu para que eu conseguisse visualizar as figuras geométricas, sendo essa uma das maiores dificuldades quando se estuda geometria espacial.

Scalabrin e Mussato (2019) revelam que, ao se trabalhar com o GeoGebra 3D em atividades exploratórias de construção de sólidos geométricos, cria-se um ambiente onde é favorecida a observação sob um ponto de vista diferente daquele que é comumente trabalhado em livros didáticos. Dessa forma, as representações são vistas sob diferentes ângulos, proporcionando significados e movimentos às imagens virtuais construídas nas mentes dos alunos.

Já em relação aos conteúdos nos quais as maiores contribuições aconteceram, a atividade exploratória de pirâmides ganhou grande destaque, como revelam as respostas a seguir:

- As atividades contribuíram muito porque eu tenho maior facilidade em aprender vendo e eu acho que especialmente em geometria é muito importante visualizar as figuras. A maior contribuição da geometria espacial pra mim foi com as pirâmides.
- As contribuições foram que eu consegui visualizar os sólidos geométricos e suas particularidades com mais detalhes. As maiores contribuições foram nas pirâmides.

Entendemos que um dos fatores que podem ter contribuído para o destaque do conteúdo de pirâmides foi as discussões travadas sobre seus elementos a partir das construções demandadas pela atividade exploratória, especialmente, a exploração do conceito de apótema, como descrevemos anteriormente.

Nesse contexto, de acordo com Araújo Filho, Cortez e Ferreira (2019), as pirâmides se diferenciam de outros sólidos geométricos espaciais pelo fato de não mostrarem alguns aspectos dos poliedros, como faces constituídas por retângulos, além das diversas possibilidades para os polígonos que constituem suas bases, diferenciando-as, assim, dos corpos redondos.

A Questão 3 buscou mapear um eventual desejo dos alunos participantes de experimentarem a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos:

3) Você gostaria de experimentar a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos? Quais?

A quase totalidade dos alunos participantes responderam de forma afirmativa a essa questão, sendo que somente um aluno afirmou não saber se, para outros conteúdos matemáticos, a utilização de Tecnologias Digitais seria favorável, como vemos nas seguintes respostas:

- Sim, acredito que as tecnologias digitais vieram para facilitar nossas vidas. Com isso, utilizar essa ferramenta nos conteúdos possíveis seria muito interessante.
- Sim, mas não conheço muitas além do GeoGebra. Mas, em suma, gostaria de experimentar.

Cabe, então, destacar Abar (2017) ao afirmar que, num processo onde inovação e decisão sobre a utilização, ou não, de um novo produto tecnológico requeira a coleta de informações, bem como a análise delas, um indivíduo poderá desenvolver certa motivação para certificar-se a respeito das vantagens e as desvantagens sobre o uso do produto tecnológico. Sendo assim, deverá verificar o nível de complexidade e se a utilização do produto tecnológico atenderá, ou não, as suas necessidades e expectativas.

Em relação à utilização das Tecnologias Digitais para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos, alguns alunos participantes destacaram trigonometria, funções e gráficos, como pontuado nas respostas a seguir:

- Sim, acredito que seria muito bom ter algo assim para ajudar na matéria de trigonometria.
- Acho que as tecnologias proporcionariam uma visão mais gráfica de várias matérias, como a das funções e gráficos. Essas tecnologias facilitariam a interpretação das fórmulas e como cada incógnita influencia nos resultados.

Entendemos que, com o passar do tempo e com a rápida evolução das tecnologias disponíveis para o âmbito escolar, além da possibilidade da utilização conjunta de mais de uma tecnologia, cada vez mais, existem Tecnologias Digitais para a utilização no ensino e na aprendizagem dos diversos conteúdos matemáticos, tornando-se inviável

restringir ou delimitar apenas uma determinada tecnologia que poderá ser utilizada pelos professores quando da sua prática pedagógica mediadora na Educação Matemática.

Nesse sentido, Almeida (2015) revela que na área da Educação, sobretudo na Educação Matemática, o progresso das tecnologias tem suscitado muitas reflexões sobre a engrenagem que envolve o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

4.3. Elaborando algumas categorias de análise

Após a descrição dos encontros realizados e da análise dos questionários aplicados, trataremos de estabelecer algumas categorias de análise, à luz das considerações de Galiazzi e Sousa (2019), para quem:

[...] envolver-se num processo de categorização é encaminhar uma teorização sobre o fenômeno de pesquisa. Essa teorização pode ser conduzida a partir de dois processos diferentes, ainda que eventualmente complementares. Um deles utiliza teorias a priori. O outro trabalha com teorias emergentes (GALIAZZI; SOUSA, 2019, p. 13).

Entendemos que a categorização feita na abordagem qualitativa, dentro da pesquisa em Educação Matemática, busca agregar um conjunto de informações coletadas ao longo da pesquisa, com o intuito de verificar se os passos seguidos pelo pesquisador poderão responder aos objetivos propostos e à questão de pesquisa inseridas no trabalho acadêmico. Dessa forma, optamos por trabalhar com categorias que emergiram ao longo de nossa pesquisa.

Também nos baseamos em Fiorentini e Lorenzato (2006) que definem a categorização como sendo:

[...] um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns. Nesse processo, existem alguns princípios que devem ser observados pelo pesquisador. O primeiro deles é que o conjunto das categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias. Por exemplo, podemos categorizar os “porquês” matemáticos dos alunos segundo o campo conceitual da matemática: porquês aritméticos; algébricos; geométricos etc. Outro princípio: é altamente desejável que essas categorias sejam disjuntas, isto é, mutuamente exclusivas, de modo que cada elemento esteja relacionado com apenas uma categoria. Por fim, as categorias estabelecidas devem abranger todas as informações obtidas (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 134).

Considerando que, em nossa pesquisa, objetivamos discutir possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio, entendemos que as informações a serem categorizadas são provenientes do nosso planejamento, desenvolvimento e avaliação dos encontros, feitos durante a pesquisa de campo, dos nossos registros em diário de campo, das gravações de áudio para o registro do desenvolvimento das atividades exploratórias, das dúvidas e questões dos alunos durante a realização das atividades exploratórias que envolveram a utilização da RA / GeoGebra 3D e, por fim, das respostas dadas pelos alunos participantes aos nossos questionários.

Assim, em busca de um contraste de nossos dados de pesquisa com diversos referenciais teórico-bibliográficos, estabelecemos as categorias centrais de análise descritas a seguir.

4.3.1. A visualização na criação e desenvolvimento de ideias, conceitos e propriedades dos sólidos geométricos

Uma grande contribuição das atividades exploratórias utilizando a RA / GeoGebra 3D para a aprendizagem de Geometria Espacial, certamente, foi a possibilidade de visualização, explicitada na análise do Questionário Final e, novamente aqui, destacada por meio de mais algumas respostas de alunos participantes:

- As atividades exploratórias contribuíram para a visualização das figuras, auxiliando, por exemplo, na identificação de arestas e vértices.
- Com as atividades exploratórias, eu pude compreender melhor aquilo que víamos em teoria, além de poder aplicar com a RA, o que foi bem mais divertido.

Notamos que os alunos participantes, ao manusearem a RA / GeoGebra 3D para a construção dos sólidos geométricos, desenvolveram habilidades de criação (ARCAVI, 2003) e exploração de conceitos e propriedades desses sólidos geométricos, especialmente, os elementos essenciais em sua definição.

Também conseguimos perceber, notadamente, que as atividades exploratórias levaram os alunos participantes, em diversos momentos ao longo dos encontros, à atitude de “pensar sobre e desenvolver ideias”, especialmente, na aprendizagem de pirâmides, sendo que a visualização proporcionada pela RA / GeoGebra 3D contribuiu diretamente

para a formação de imagens mentais significativas (PACHECO, 2023) em relação ao conceito de apótema da pirâmide e sua diferenciação em relação ao apótema da base.

Ainda nessa perspectiva, Mendes (2020), exemplificando com a utilização do GeoGebra, ressalta a possibilidade de visualização advinda da utilização de Tecnologias Digitais, tida como um fator potencializador da autonomia dos alunos:

Um bom planejamento aliado a uma prática docente com enfoque no uso das tecnologias em sala de aula poderá fazer toda a diferença para os discentes no que tange a visualizar, abstrair e generalizar. A aprendizagem torna-se algo natural e até prazeroso, pois o aluno deixa de ser mero expectador e passa a fazer parte do processo (MENDES, 2020, p. 47).

De fato, entendemos que o planejamento de nossas atividades exploratórias foi essencial para seu desenvolvimento nos encontros, ao longo dos quais os alunos participantes puderam “visualizar, abstrair e generalizar”, especialmente, em relação a certas propriedades características dos diversos sólidos geométricos abordados.

De maneira particular, em relação à utilização das tecnologias, como revelou nossa pesquisa, também como forma de possibilitar a visualização dos alunos, a RA pode ser considerada como essencial para a aprendizagem de Geometria Espacial, como ressalta Rosa (2022) ao afirmar que:

As Tecnologias de Informação e Comunicação, que potencializam as atividades investigativas, contam com a Realidade Aumentada para abordar de forma diferenciada os conteúdos trabalhados em sala de aula. Essa tecnologia permite, em diversas áreas do conhecimento, uma interatividade maior dos alunos com os objetos, de forma dinâmica e motivadora. Em Geometria, isso é fundamental, pois a visualização é essencial para a compreensão dos conceitos (ROSA, 2022, p. 24).

Dessa forma, concluímos essa categoria de análise, coadunando com Martins, Reis e Ferreira (2023) na constatação da rica abrangência dos aspectos ligados ao processo de visualização que revelam a importância de sua consideração / investigação nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

4.3.2. A potencialização da aprendizagem móvel por meio da utilização de recursos tecnológicos e dos dispositivos móveis

Como detalhamos anteriormente, no desenvolvimento de nossas atividades exploratórias, ao longo dos encontros, buscamos explorar a utilização dos recursos tecnológicos da RA / GeoGebra 3D presentes nos dispositivos móveis (*smartphones*) pelos alunos participantes, numa das perspectivas de aprendizagem móvel entendida por Fernandes e Brasileiro (2020) da seguinte forma:

A aprendizagem móvel (*Mobile Learning*) envolve o uso de tecnologias móveis isoladamente ou combinadas com outras tecnologias – viabilizando a aprendizagem ubíqua. A aprendizagem móvel pode ocorrer com o uso dos dispositivos móveis para “acessar recursos educacionais, conectar-se a outras pessoas ou criar conteúdo, dentro ou fora da sala de aula” (FERNANDES; BRASILEIRO, 2020, p. 385-386, grifo dos autores).

Cabe explicar que o termo “aprendizagem ubíqua”, utilizado pelos pesquisadores, refere-se ao acesso sem fio às informações presentes na *internet* ou em qualquer outro sistema que a utilize, podendo ser feita em qualquer lugar e horário, desde que se disponha dos meios tecnológicos necessários para a realização disso.

Também como já descrevemos, em vários momentos entre e durante os encontros, comunicamo-nos com os alunos participantes por meio da troca de *e-mails* e pelo grupo de grupo de *WhatsApp* da turma e, apesar de não termos descrito anteriormente, já que se tratou de uma atividade realizada durante, mas sim entre alguns encontros, realizamos videoconferências para esclarecimento de dúvidas pela plataforma *Google Meet*.

Estes diversos momentos de comunicação entre pesquisador, professor e alunos participantes promoveram trocas de informações, debates de ideias e compartilhamento de conhecimento matemático, pelo que muito contribuíram, em nosso entendimento, para uma potencialização da aprendizagem móvel, especialmente, em suas características “pessoal, portátil, colaborativa, interativa, contextual e situada” (UNESCO, 2017).

Um exemplo pontual, contudo, marcante das características colaborativa e interativa aconteceu no 5º encontro, com a utilização do grupo de *WhatsApp* pelos alunos participantes de forma fundamental para a compreensão e posterior resolução das questões da AE4, explorando os recursos gerados por meio da RA / GeoGebra 3D e, evidenciando “a mobilidade dos sujeitos, que podem estar fisicamente e geograficamente

distantes uns dos outros” mas interagindo no processo de aprendizagem, como destacado por Moura (2010).

Outro destaque interessante é que, durante a resolução das questões integrantes das atividades exploratórias, que demandavam que os alunos participantes realizassem a projeção em RA com o intuito de explorar diversas características e propriedades dos sólidos projetados, solicitamos que, ao final dos trabalhos, eles realizassem os *prints* de suas telas e nos enviassem pelo grupo de *WhatsApp* da turma. Certamente, as discussões proporcionadas pelos *prints* enviados pelos alunos participantes influenciaram em sua avaliação das contribuições das atividades exploratórias para a sua aprendizagem, como explicitamos na análise do Questionário Final e, novamente aqui, destacamos por meio de mais algumas respostas:

- A representação das partes constitutivas de sólidos geométricos onde dada uma relação de transformação, através da remoção de planos e eixos, a figura remanescente obtida enquadrava-se num componente de teorema, como o de Pitágoras.
- O quanto interessante é a forma que o aplicativo e as contas funcionam.

Dessa forma, concluímos essa categoria de análise, coadunando com Cleophas, Cavalcanti, Souza e Leão (2015), ao defenderem a constituição de um novo paradigma educativo a partir e por meio da aprendizagem móvel, numa perspectiva de se travar uma discussão que contribua para mudanças necessárias ao processo de melhoria da qualidade da Educação.

4.3.3. Um novo olhar para as possibilidades de utilização de Tecnologias Digitais na aprendizagem de Matemática

Sob o prisma das possibilidades advindas da utilização de Tecnologias Digitais na aprendizagem de Matemática, emergem considerações feitas pelos alunos participantes quando, no Questionário Final, puderam manifestar suas expectativas / desejos de futuras experimentações de Tecnologias Digitais sendo utilizadas para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos. Novamente aqui, destacamos mais algumas respostas:

- Com certeza. Seriam interessantes tecnologias para ajuda no cálculo dentro de outros conteúdos da matemática, e também em outras matérias escolares que incluem cálculo.
- Bom, a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem requer muita atenção e um certo interesse. Eu gostei de participar das atividades, mas não sei se para outros conteúdos matemáticos seria legal.

Se, por um lado, tais respostas parecem apontar para uma visão de que a utilização de tecnologias deve ser priorizada em disciplinas “que incluem cálculo” ou conteúdos geométricos, por outro lado, tal visão parece conjugar com o fato de que, no Questionário Inicial, a maioria dos alunos participantes revelou sua crença de que a utilização de Tecnologias Digitais no ensino de Matemática deve ocorrer de forma gradual e opcional para cada um dos professores.

Cabe destacar ainda que, apesar de quase todos os alunos já terem tido a oportunidade de utilizar *softwares* em sua prática discente, antes da participação em nossa pesquisa, como também revelou o Questionário Inicial e como percebemos ao longo dos encontros, entendemos que a realização das atividades exploratórias, especialmente, pela utilização integrada de Tecnologias Digitais, claramente impulsionou os alunos participantes a uma atitude bem mais (re)ativa do que, tradicionalmente, observamos na sala de aula de Matemática, nos mais variados níveis de ensino.

Nessa direção, durante o desenvolvimento das atividades exploratórias, percebemos alunos motivados e engajados em sua própria aprendizagem, em todo o tempo. Um registro pode ser pontuado quando da “exploração livre e não guiada” dos recursos da RA / GeoGebra 3D na resolução de questões relacionadas a cubos e paralelepípedos. Outro registro advém da manipulação e observação das imagens geradas dos cones, seguida da rica discussão que os interligou às pirâmides, por meio dos elementos geratriz e apótema, visualizados como elementos geométricos planos. Tal relação entre a motivação e a postura dos alunos participantes em relação à sua própria aprendizagem encontra respaldo em Alves, Barbosa e Souza (2023):

Tendo em vista que a motivação dos estudantes é um tópico que tem sido bastante discutido no âmbito educacional, logo, que é capaz de influenciar direta e indiretamente no progresso estudantil. Pois, um aluno motivado manifesta-se ativamente no processo de aprendizagem, pleiteando em tarefas desafiadoras, usando novas estratégias e mostrando satisfação na obtenção dos resultados (ALVES, BARBOSA, SOUZA, 2023, p. 3).

Dessa forma, concluímos essa categoria de análise, coadunando com Menegais, Ferreira, Fagundes e Penha (2022) ao defenderem que a utilização de Tecnologias Digitais pode favorecer a aprendizagem de Geometria Espacial, mas também proporcionar aos estudantes atividades mais ativas e envolventes, o que, certamente, contribui para que eles lancem um novo olhar para as novas possibilidades advindas da utilização de recursos tecnológicos na aprendizagem de Matemática.

Considerações Finais

As tecnologias não devem apoiar o aprendizado tentando instruir os alunos, mas devem ser usadas como ferramentas de construção de conhecimento com as quais os alunos aprendem. Dessa maneira, os alunos funcionam como projetistas, e os computadores funcionam como ferramentas mentais para interpretar e organizar seus conhecimentos pessoais.

David Jonassen, Chad Carr e Hsiu-Ping Yueh

Neste momento de conclusão da presente dissertação, vale a pena relembrar uma premissa que assumimos, a partir de nossas vivências e experiências acadêmicas e na qual continuamos acreditando: a Educação Matemática tem um caráter de propor novos caminhos e formas de se ensinar e aprender Matemática.

A partir dessa premissa, assumimos a hipótese de que nossa pesquisa poderia, em certa medida, desvendar contribuições pedagógicas por meio da possibilidade de utilização conjugada da tríade GeoGebra, RA e *smartphone*, na perspectiva da aprendizagem móvel.

A partir de uma problematização construída, estabelecemos como mola propulsora de nossa pesquisa a seguinte questão passível de investigação:

Quais são as possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando de forma integrada a RA com o GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio?

Noutras palavras, objetivamos de forma geral discutir as possíveis contribuições de atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra para a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio.

Também traçamos alguns objetivos específicos que, a seguir, enumeramos e argumentamos, em que medida, julgamos tê-los atingido / cumprido:

- Investigar os principais estudos / pesquisas recentes relacionadas ao ensino de Geometria Espacial, à aprendizagem móvel (Mobile Learning) e às Tecnologias Digitais na Educação Matemática: A investigação dos estudos / pesquisas foi iniciada no Capítulo 1, quando demos os primeiros passos para a construção de um referencial teórico-bibliográfico, foi continuada no Capítulo 2, com um breve mapeamento e

detalhamento de algumas pesquisas em língua portuguesa, e podemos considerar que foi concluída no Capítulo 4, ao trazermos para a análise mais alguns pesquisadores ainda não citados que, dessa forma, também compuseram o referencial teórico-bibliográfico de nossa pesquisa;

- Elaborar atividades exploratórias utilizando a RA com o *software* GeoGebra relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial: A elaboração das atividades exploratórias teve como fio condutor a viabilização do explorar / conjecturar e, como justificamos no Capítulo 3, para a sua composição não nos preocupamos com a inovação em termos de formulação e resolução das questões, mas sim em caracterizar como explorações livres ou guiadas os processos envolvendo a utilização integrada da RA com o *software* GeoGebra, como buscamos contextualizar ao longo dos encontros descritos no Capítulo 4;

- Apresentar as principais contribuições de tais atividades exploratórias na perspectiva da aprendizagem móvel, a partir de sua experimentação por alunos do Ensino Médio: A apresentação das principais contribuições das atividades exploratórias foi delineada no Capítulo 4, por meio da elaboração de categorias que estabelecemos, não somente a partir da análise de nossos instrumentos de pesquisa utilizados, mas principalmente, pela interpretação do conjunto dos dados que emergiram, demonstrando coerência com nossa opção pela realização de uma pesquisa qualitativa.

Destarte, à guisa de conclusão, ainda julgamos por bem ser necessário traçar alguns contrastes / paralelos e pontuar algumas autocríticas / perspectivas.

Desafios apontados por outras pesquisas e revisitados por nossa pesquisa

O mapeamento de pesquisas em Língua Portuguesa que realizamos nos permite traçar alguns contrastes / paralelos entre as pesquisas mapeadas e a nossa pesquisa.

O pensamento geométrico-espacial de estudantes do Ensino Médio foi destacado, em uma pesquisa mapeada, como uma forma de investigar as possibilidades trazidas pelo impacto da utilização das Tecnologias Digitais, sobretudo àquelas envolvendo o *software* GeoGebra e a impressão 3D.

Realmente, nossa pesquisa mostrou as possibilidades de se utilizar de forma integrada o *software* GeoGebra 3D com a projeção de sólidos geométricos em RA. Essa nova abordagem trouxe para os alunos participantes alguns desafios para desvincularem-se da aprendizagem tradicional, que acontece comumente por meio de “conteúdos engessados” e exercícios a serem resolvidos utilizando-se, geralmente, caderno, lápis e fórmulas prontas. Ao interagirem com tecnologias presentes nos seus *smartphones*, propiciamos aos alunos o manuseio de uma ferramenta à qual já estão habituados (os *smartphones*) mas com uma “nova roupagem”, na qual teriam de descobrir como construir objetos, visualizá-los em 3D e projetarem em RA, com o intuito de perceberem suas partes constitutivas e produzirem suas conclusões de uma forma mais imediata.

Outra pesquisa mapeada revelou, ainda, que a abordagem da visualização geométrica tem sido prejudicada pelo uso de um único recurso, o livro didático, o qual apresenta imagens bidimensionais, dificultando a compreensão de alunos.

Nossa pesquisa mostrou que a utilização da RA / GeoGebra 3D, instalados nos *smartphones*, oferece uma nova forma dos participantes da pesquisa visualizarem sólidos geométricos, facilitando a compreensão de conteúdos onde se trabalham figuras manipuláveis em 3D.

O uso dos dispositivos móveis também foi abordado por uma pesquisa mapeada como uma proposta de ensino e se verificou que esses meios tecnológicos contribuíram para os processos de aprendizagem de Matemática de estudantes do Ensino Médio, além de proporcionarem a aprendizagem móvel dos conteúdos abordados.

Em nossa pesquisa, pudemos verificar que a utilização de dispositivos móveis pode se constituir em um meio complementar para a percepção visual, o raciocínio abstrato e a verificação da aprendizagem dos alunos participantes no que se refere às construções virtuais em 3D.

A abordagem holística foi citada em uma pesquisa mapeada como uma nova perspectiva para agrupar diferentes caminhos na utilização da aprendizagem móvel e no desenvolvimento de outros tipos de atividades de aprendizagem, a partir de tecnologias móveis.

Nossa pesquisa trouxe a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem móvel, à medida em que desenvolvemos com os alunos participantes algumas atividades exploratórias, durante os encontros presenciais, nas quais foram apresentadas possibilidades de facilitação para a aprendizagem de conteúdos de Geometria Espacial, com a utilização da RA / GeoGebra 3D, que podem ser trabalhados tanto dentro como

fora da sala de aula. Neste último caso, apontamos para a aprendizagem móvel, numa modalidade que permite o desenvolvimento de estudos a qualquer hora e lugar, dentro e fora do ambiente escolar.

Cabe destacar que uma pesquisa mapeada apresentou um estudo comparativo sobre a aprendizagem matemática, considerando a postura do aluno e o ambiente tecnológico, utilizando a RA como ferramenta de intervenção nos processos de ensino e de aprendizagem no Ensino Médio, abordando a utilização de tecnologias na Matemática, procurando mostrar que o espaço da sala de aula não é o único ambiente em que os alunos podem aprender, interagir e onde o professor faz a mediação entre o conhecimento e seus alunos. Nessa pesquisa, também foi abordada a necessidade do investimento na formação dos professores que trabalham com Matemática e tecnologias, pois sem o suporte necessário, as dificuldades poderão estar presentes no cotidiano dos docentes.

Nesse ponto, especificamente, nossa pesquisa mostrou que, com a adequada integração das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, desenvolvem-se meios alternativos para o ensino e a aprendizagem de conteúdos por meio, por exemplo, da aprendizagem móvel e dos meios midiáticos de interação, sendo que os alunos podem ver e rever conteúdos, estudando em local e horário que melhor for conveniente a eles, além da própria troca de informações que pode ser feita a qualquer momento, utilizando-se das tecnologias móveis como as presentes nos *smartphones*, destacando-se o uso da RA / GeoGebra 3D. No que concerne à formação pedagógica digital dos professores, concordamos que são necessários investimentos e infraestrutura adequada nos enlaces de comunicação, para que os professores possam mediar pedagogicamente a proposta curricular de Matemática e interagir com seus alunos de forma a potencializar os saberes matemáticos e tecnológicos.

A utilização de tecnologias no ensino de Matemática também é apontada por uma pesquisa mapeada como fator de contribuição para a promoção de uma postura mais ativa dos alunos e uma melhor aprendizagem.

Nossa pesquisa apontou que, por meio da realização de atividades exploratórias, em duplas ou trios, contribuímos para uma participação mais ativa dos alunos que promoveram debates, trocaram informações e, de fato, participaram de forma mais ativa e autônoma da construção de sua própria aprendizagem.

Especificamente, o papel da RA como uma tecnologia relativamente recente, como apontou uma pesquisa mapeada, revela que ela poderá propiciar ganhos para os processos de ensino e de aprendizagem, em variados níveis, por trazer facilitação na

visualização em 3D, e isso foi apontado como uma forma de agregar e difundir um novo recurso tecnológico que poderá potencializar e dinamizar a forma como os alunos interpretam questões onde são necessárias a visualização num formato interativo, uma vez que a RA traz o ambiente virtual para o real.

Em nossa pesquisa, apontamos a RA como uma evolução da Realidade Virtual, que ainda está presente no mundo atual, porém, numa perspectiva inversa, a RA cria um modelo mais dinâmico e não restringe o usuário a se isolar do ambiente real para imergir num contexto particular do ambiente virtual.

Ainda, outra pesquisa mapeada mostrou que a utilização do GeoGebra, por meio da construção e análise das propriedades dos sólidos, possibilitou aos alunos compreenderem, a partir da sua planificação e movimentação, fórmulas mais simples para solucionar questões.

Nossa pesquisa mostrou que o GeoGebra dispõe de opções que podem trazer a planificação e a movimentação de sólidos geométricos na tela dos *smartphones*, proporcionando aos alunos visualizações instantâneas que, prontamente, contribuem para a resolução de questões simples ou complexas.

Por fim, uma pesquisa mapeada destacou a relevância de se proporcionar uma sala de aula interativa aos alunos, como uma nova forma de se repensar a importância no ensino, o que poderá contribuir para aflorar vários aspectos nos alunos, como autoestima, criatividade, inclusão, questionamentos e argumentações, possibilitando a compreensão de conteúdos.

Em nossa pesquisa, então, evidenciamos que a conjuntura colaborativa dos alunos proporcionou ganhos na relação dialógica entre eles, fazendo com que a manifestação de cada um nas atividades exploratórias fosse considerada essencial para o conjunto da turma.

Dessa forma, entendemos que nossa pesquisa revisitou e ressignificou diversos desafios apontados por outras pesquisas e que continuam lançados a professores / educadores matemáticos.

Olhando para o que fizemos e para o que poderemos fazer em futuras pesquisas

Conscientes de que toda pesquisa científica possui limitações em seu escopo e dificuldades em seu desenvolvimento, consideramos fundamental refletirmos sobre tais limitações e dificuldades em nossa pesquisa.

O mapeamento de pesquisas por meio de bases de dados confiáveis, com a finalidade de conhecer os trabalhos acadêmicos que estão sendo desenvolvidos e defendidos em nível de Mestrado e Doutorado, requer dos pesquisadores acadêmicos um aprofundamento maior na busca pelas bases de dados que acumulam e contemplam as pesquisas acadêmicas que servem de suporte à leitura e à formação de referenciais teóricos.

Tendo nos servido apenas de duas bases de dados acadêmicos em Língua Portuguesa (Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e *Google Acadêmico*) para pesquisas que serviram de complementação para o nosso referencial teórico-bibliográfico, observamos que houve a necessidade de um aprofundamento maior, sobretudo na busca por mais bases nacionais e, até mesmo, internacionais, nas quais podemos conhecer o que acontece nas pesquisas acadêmicas de Educação Matemática num mundo globalizado. Infelizmente, a limitação do tempo influenciou nessa restrição.

Outro ponto a ser considerado é que, no trabalho com as Tecnologias Digitais para a construção de sólidos geométricos que envolviam as ferramentas da RA / GeoGebra 3D, buscou-se trazer questões tradicionais mescladas com questões envolvendo tais ferramentas. Essa adaptação foi necessária para que os participantes da pesquisa pudessem fazer uma migração entre a forma tradicional comumente disposta para a resolução de questões, utilizando lápis, papel, fórmulas e cálculos manuais e a forma que propusemos, utilizando as ferramentas tecnológicas.

Entretanto, talvez durante a elaboração das atividades exploratórias, pudéssemos ter “balanceado” melhor a quantidade de questões com sua qualidade, no sentido de termos pensado em menos questões por atividade exploratória, no que resultaria um tempo maior para a exploração propriamente dita.

Enfim, aprender com os erros pode ser uma lição para a vida, mas quando temos a oportunidade de aprender sobre pesquisas “pesquisando”, poderemos aproveitar melhor o tempo e descobrir meandros que, por vezes, podem passar despercebidos por aqueles que estão mergulhados num projeto e seguem uma rotina de procedimentos.

Outrossim, como as tecnologias estão sempre em evolução para diminuir etapas e, também, o tempo de execução das tarefas, é necessário estar em sintonia com o que acontece nas sociedades mais desenvolvidas. Atualmente, podemos perceber uma transição, ainda que sutil, para o desenvolvimento e emprego das chamadas “*inteligências artificiais*” nas quais são dadas condições tecnológicas para que organismos autômatos (os chamados “*robots*” ou, simplesmente “*bots*”) possam realizar tarefas que, antes, eram

afetas somente aos humanos. Com isso, cria-se um ambiente propício ao aprofundamento e melhoramento das máquinas, estando estas conectadas integralmente às sociedades mundiais e auxiliando os humanos a disporem de mais autonomia para que deixem de realizar tarefas mais repetitivas, passando a focar mais nos desenvolvimentos de novos produtos e novas tecnologias.

Dada a saída de uma era onde os professores, sobretudo os de Matemática, dispunham apenas de quadros, giz e livros didáticos, para uma era onde as tecnologias estão presentes nas salas de aula e fora delas, é necessário que novas pesquisas acadêmicas sejam desenvolvidas, defendidas e publicadas para que o progresso tecnológico possa ser difundido em maior grau e escala para as camadas mais fragilizadas das sociedades.

Assim, conhecer o atual é ter uma base para olhar para o futuro, conhecendo, aprendendo, compreendendo, desenvolvendo e aperfeiçoando os produtos e as tecnologias já disponíveis, gerando conhecimentos acadêmicos e os difundindo nas plataformas disponíveis à Educação Matemática.

No caso presente, a partir de nossa pesquisa acadêmica realizada, percebemos que há a necessidade de pesquisas futuras que tragam mais subsídios e benefícios para a aplicação em nosso contexto escolar e tecnológico, para que possamos debater, utilizar e aprender, juntamente com nossos alunos, as formas de dinamizar os conhecimentos matemáticos e dar suporte àqueles que, por ventura, apresentem mais dificuldades de adaptação à realidade presente nas tecnologias educacionais disponíveis.

Referências

ABAR, C. A. A. P. Tecnologias Digitais e Educação Matemática. CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACION MATEMÁTICA, 7, 2020, Montevideo. **Actas...** Montevideo: Universidad de Los Andes, 2020, p. 33-41.

ALMEIDA, H. R. F. L. Das Tecnologias às Tecnologias Digitais e seu uso na Educação Matemática. **Nuances – Estudos sobre Educação**, v. 26, n. 2, p. 224-240, 2015.

ALVES, E. M.; BARBOSA, L. S. O.; SOUZA, I. C. A Realidade Aumentada como objeto de aprendizagem: uso do aplicativo Sólidos RA como ferramenta de apoio no processo de ensino e aprendizagem. **RECIMA21 – Ciências Exatas e da Terra, Sociais, da Saúde, Humanas e Engenharia/Tecnologia**, v. 4, n. 8, p. 1-9, 2023.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998.

ARAÚJO FILHO, R. M.; CORTEZ, R. D.; FERREIRA, F. D. R. A construção de pirâmides por meio de tecnologias digitais: avaliação dos aspectos do GeoGebra 3D na Geometria Espacial. CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 6, 2019, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: UFPB, 2019, p. 1-12.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.

BENÍTEZ, S. M. H. El método científico y la filosofía como herramientas para generar conocimiento, **Revista Filosofía UIS**, v. 19, n.1, p. 229-245, 2020.

BOTELHO, J. A.; ASSIS, C. **O livro didático na perspectiva de recurso do professor de Matemática**. 2021. Disponível em: <https://scholar.archive.org/work/dxflgdhcmjkhvorydxx6d5dkwu/access/wayback/https://openaccess.blucher.com.br/download-pdf/505/22645>. Acesso: 01 ago. 2023.

BOTTENTUIT JUNIOR, J. B. Aplicativos de interação em sala de aula: análise de três possibilidades pedagógicas com recursos digitais. **Revista Cocar**, v. 14, n. 30, p. 1-16, 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso: 01 ago. 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Matemática**, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso: 01 ago. 2023.

CAMILLO, C. M. **Mapeamento e utilização dos laboratórios de informática educacionais nas escolas do campo da 8ª CRE**. 2019. 114f. Dissertação (Mestrado Profissional em Tecnologias Educacionais em Rede) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

CLEOPHAS, M. G.; CAVALCANTI, E. L. D.; SOUZA, F. N.; LEÃO, M. B. C. M-Learning e suas múltiplas facetas no contexto educacional: uma revisão da literatura. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 4, p. 188-207, 2015.

COSTA, M. A. F.; COSTA, M. F. B. **Projeto de Pesquisa: entenda e faça**. Petrópolis: Vozes, 2012.

CRUZ NETO, O. O trabalho de campo como descoberta e criação. In: MINAYO, M. C. S. (Org.); DESLANDES, S. F.; GOMES, R. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2001, p. 51-66.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2014.

FERNANDES, E. C. S.; BRASILEIRO, T. S. A. **Aprendizagem Móvel: O uso do Smartphone como ferramenta pedagógica como recurso educacional**. Manaus: Revista AMAzônica, v. 24, n. 1, 2020, p. 381-401.

FERREIRA, H. S. **O uso de software e seu impacto no tipo de resolução de exercícios de Geometria**. 2018. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiás.

FERREIRA, N. S. **Modelagem Matemática e Aprendizagem Móvel como estratégia pedagógica para o ensino de Matemática no Ensino Médio**. 2020. 377f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

FIORENTINI, D.; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. S.; CRECCI, V. M.; LIMA, R. C. R.; COSTA, M. C. O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Orgs.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012**. Campinas: UNICAMP, 2016, p. 17-41.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREITAS, P. C.; DUARTE FILHO, N. F. Aprendizagem Móvel: percepções quanto à utilização por docentes da Educação Profissional e Tecnológica. **Revista Educação a Distância e Práticas Educativas Comunicacionais e Interculturais**, v. 18, n. 2, p. 50-63, 2018.

GALIAZZI, M. C.; SOUSA, R. S. A dialética na categorização da análise textual discursiva: o movimento recursivo entre palavra e conceito. São Paulo: **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 7, n. 13, p. 01-22, 2019.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GONÇALVES, J. R. Como fazer um projeto de pesquisa de um artigo de revisão de literatura. **Revista JRG de Estudos Acadêmicos**, v. 2, n. 5, p. 1-28, 2019.

GONZAGA, I. L. **Um estudo de caso de aplicação do GeoGebra em uma escola da rede particular com foco em Geometria Espacial**. 2019. 118f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiás.

GÜNZEL, R. E. Ensinar é Aprender: Desafios e Experiências no Estágio de Docência. Edição Especial: Ciclos Formativos em Ensino de Ciências. **Revista Insignare Scientia**, v. 2, n. 3, p. 222-232, 2019.

HEDLER, L. W. M. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial: GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante**. 2020. 252f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

IDEM, R. C. **Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra: uma experiência envolvendo licenciados em Matemática e professores**. 2017. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LIMA, R. M. L. **O Uso da Realidade Aumentada no Ensino de Prismas: um referencial didático para professores do Ensino Médio**. 2021. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, Ceará.

LOPES, L. M. D.; VIDOTTO, K. N. S.; POZZEBON, E.; FERENHOF, H. A. Inovações Educacionais com o uso da Realidade Aumentada: uma revisão sistemática. **Educação em Revista**, v. 35, e197403, p. 1-33, 2019.

MACEDO, A. C.; SILVA, J. A.; BURIOL, T. M. Usando smartphone e Realidade Aumentada para estudar Geometria Espacial. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 14, n. 2, p. 1-10, 2016.

MAIA, I. F. As tecnologias móveis e os letramentos na cultura da convergência. **Revista GEMInIS**, v. 2, n. 1, p. 171-193, 2011.

MARTINS, E. M.; REIS, F. S.; FERREIRA, G. C. G. The GeoGebra software in the introductory teaching of Dynamic Systems: research with students of Bachelor's Degree in Mathematics. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 12, n. 1, p. 4-28, 2023.

MARTINS, F. N. **Uma proposta de abordagem da planificação de poliedros no Ensino Básico utilizando o recurso de Realidade Aumentada do GeoGebra**. 2021. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MARTINS JUNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**. 2015. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

MARTINS JÚNIOR, J. C.; REIS, F. S. As contribuições da visualização proporcionada pelo GeoGebra à aprendizagem de funções derivadas em Cálculo I. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 10, p. 77184-77196, 2020.

MENDES, C. J. **O uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria**. 2020. 82f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade de Brasília, Brasília.

MENEGAIS, D. A. N. F.; FERREIRA, V. L. D.; FAGUNDES, D. S.; PENHA, J. T. **A utilização das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Geometria Espacial: a percepção dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio**. Porto Alegre: UFRGS, 2022.

MENEZES, A. H. N; DUARTE, F. R.; CARVALHO, L. O. R.; SOUZA, T. E. S. **Metodologia Científica: Teoria e Aplicação na Educação a Distância**. Petrolina: UFVSP, 2019.

MOURA, A. M. C. **Apropriação do Telemóvel como Ferramenta de Mediação em Mobile Learning: Estudos de Caso em Contexto Educativo**. 2010. 630f. Tese (Doutorado em Ciências da Educação – Tecnologia Educativa) – Universidade do Minho, Portugal.

NACARATO, A. M. **Parecer – Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Área de Matemática**. Itatiba: USF, 2018.

OLIVEIRA, F. C.; SILVA, R. R.; BISSACO, M. A. S. O uso de tecnologias digitais no ensino de geometria espacial: uma revisão da literatura. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 15, p. 1-11, 2021.

OLIVEIRA, O. G. **O uso do GeoGebra 3D com Realidade Aumentada no Ensino de Geometria Espacial**. 2021. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, Paraná.

OLIVEIRA, P. S. **Procedimentos Pedagógicos Para O Processo Ensino Aprendizagem De Matemática No Ensino Médio: Intervenção Pela Realidade Aumentada**. 2016. 175f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.

PACHECO, C. B. L. **Tecnologias Digitais em Geometria Espacial no Ensino Médio: experiências e perspectivas no contexto do Ensino Híbrido**. 2023. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

PEREIRA, T. M. F.; SANTOS, C. B.; FROTA, F. J. M.; LIMA, F. J. M. C. A utilização da Realidade Aumentada no ensino de Matemática: o celular como ferramenta metodológica. **BIENAL INTERNACIONAL DO LIVRO DO CEARÁ**, 14, 2022, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: Seminário Docentes, 2022, p. 1-5.

PIMENTEL, R. A.; PAULA, M. J. A dinâmica dos processos de aprendizagem em uma atividade de investigação. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007, p. 1-16.

REGIS, C. A.; MELLO, E. M. O ensino de geometria espacial utilizando o software GeoGebra: uma revisão de literatura. **Peer Review**, v. 5, n. 11, 2023, p. 189-202.

REIS, F. S.; ALVES, D. O.; BRITO, A. B.; CAMARGOS, C. B. R.; ESTEVES, F. R.; MACHADO, R. A. Tecnologias Informacionais e Comunicacionais no ensino de Matemática: a produção de atividades investigativas num curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática. **e-xacta**, v. 1, n. 1, p. 1-8, 2008.

RESENDE, B. **A Aprendizagem da Geometria Espacial Potencializada por meio de um Aplicativo de Realidade Aumentada na Perspectiva do *Mobile Learning***. 2019. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul.

RICALDI, T. C. **Explorando a Geometria Espacial no Ensino Médio com o uso da informática**. 2012. 57f. Monografia (Especialização em Mídias na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

RODRIGUES, T. D. F. F.; OLIVEIRA, G. S.; SANTOS, J. A. As pesquisas qualitativas e quantitativas na Educação. **Revista Prisma**, v. 2, n. 1, p. 154-174, 2021.

ROSA, T. C. P. **Do lápis e papel à Realidade Aumentada: uma proposta de ensino de visualização geométrica**. 2022. 162f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. Produto educacional: geometria espacial com o *software* GeoGebra 3D. **Educitec**, v. 5, n. 10, p. 88-106, 2019.

SCHUSTER, P. E. S. **Uma professora em cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada: como se dá a constituição do conhecimento matemático?** 2020. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SILVA, A. C.; FARIA, R. W. S. C. Atividades investigativas de sólidos de revolução com GeoGebra no *Smartphone*. **Cenas Educacionais**, v. 6, n. 1, p. 1-23, 2023.

SILVA, R. C. D. **Realidade Aumentada como interface para a aprendizagem de poliedros do tipo prismas**. 2019. 126f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, Sergipe.

SOARES, S. J. Pesquisa científica: uma abordagem sobre o método qualitativo. **Revista Ciranda**, v. 1, n. 3, p. 168-180, 2019.

SOUSA, F. D. R. B. **Software GeoGebra no Ensino da Trigonometria: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT**. 2018. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís.

SOUZA, G. M. F. **Uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria Espacial**. 2017. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

SPINK, P. K. Pesquisa de campo em psicologia social: Uma perspectiva pós-construcionista. **Psicologia & Sociedade**, v. 15, n. 2, p. 18-42, 2003.

SUASSUNA, L. Pesquisa qualitativa em Educação e Linguagem: histórico e validação do paradigma indiciário: **Perspectiva**, v. 26, n. 1, p. 341-377, 2008.

UNESCO. **Diretrizes de Políticas para a Aprendizagem Móvel**. 2014. Disponível em <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000227770>.

UNESCO. **TIC na Educação do Brasil: Aprendizagem Móvel**. 2017. Disponível em: <https://pt.unesco.org/fieldoffice/brasil/expertise/ict-education-brazil>.

VALENTE, J. A. As tecnologias digitais e os diferentes letramentos. **Pátio Revista Pedagógica**, v. 11, n. 44, p. 12-15, 2007.

Anexo 1
Matriz Curricular de Matemática do Curso Técnico Integrado de Administração

Disciplinas Obrigatórias			
2ª SÉRIE			
Código	Disciplina	CH¹	Aulas²
OPIADMI.2405	Matemática II	100	120
Abordagem Metodológica: Teórica	Natureza: Obrigatória		
Ementa:			
Progressões Aritméticas e Geométricas, Geometria Plana – Revisão, Geometria Espacial , Análise Combinatória, Noções de Probabilidades e Binômio de Newton.			
Objetivos:			
<ul style="list-style-type: none"> - Aprimorar a interpretação de gráficos e tabelas, os cálculos de áreas, volumes, capacidades e consumo essencial ao bom desempenho do profissional em formação; - Aplicar conhecimentos matemáticos nas atividades cotidianas, nas atividades tecnológicas e na interpretação da ciência; - Desenvolver a capacidade de raciocínio, de resolver problemas, de estabelecer relações e de interpretar dados matemáticos com espírito crítico, com desenvolvimento de autonomia, confiança e criatividade; - Desenvolver a capacidade de interpretar e resolver problemas práticos através de sua tradução para a linguagem matemática. 			
Bibliografia Básica:			
IEZZI, Gelson <i>et al.</i> Matemática, Ciência e Aplicações , v. 2, São Paulo: Saraiva, 2010.			
SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática: Ensino Médio , v. 2. São Paulo: Saraiva, 2010.			
RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia , v. 2, São Paulo: Scipione, 2011.			
Bibliografia Complementar:			
BARRETO, Benigno e outro. Matemática aula por aula . São Paulo: FTD, 2000.			
DANTE, Luiz R. Matemática . São Paulo: Ática, 2005. Volume Único.			
GENTIL, Nelson e outros. Matemática: Novo Ensino Médio . São Paulo, Ática, 2003.			
IEZZI, Gelson et al. Matemática , São Paulo: Atual, 2002. Volume Único.			
MACHADO, Antônio S. Matemática: temas e metas , São Paulo: Atual, 1988.			

¹Carga horária total da disciplina em hora-relógio.

²Número de aulas, conforme a duração do módulo-aula (CH da disciplina *60 min/duração do módulo aula = n° de aulas).

Apêndice 1

Apresentação da Pesquisa – 1.º encontro (16/01/2023)



PROJETO DE PESQUISA: A UTILIZAÇÃO INTEGRADA DA REALIDADE AUMENTADA COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM MÓVEL DE GEOMETRIA ESPACIAL

Realidade Aumentada (RA);

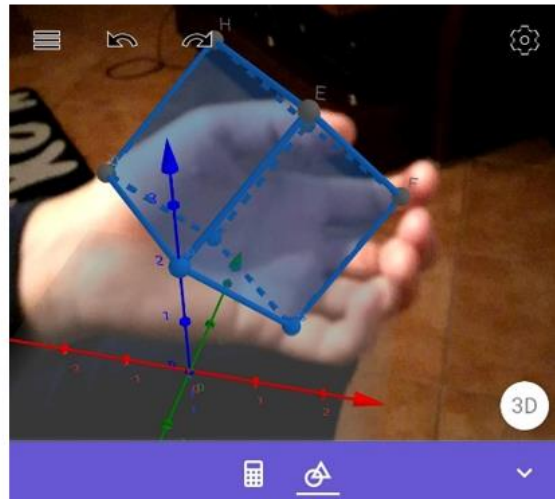
GeoGebra;

Aprendizagem Móvel; e

Geometria Espacial.

REALIDADE AUMENTADA

A RA permite acessar o ambiente virtual, através da utilização de um dispositivo de aprendizagem móvel, como o Smartphone, e trazer a imagem virtual para o ambiente físico, ou real. Para Macedo *et al.* (2016), a forma de interação mais usual em RA é aquela na qual o usuário transita livremente ao redor de um objeto, observando-o sob variados ângulos e pontos de vista.



Ferramentas Básicas

REALIDADE AUMENTADA

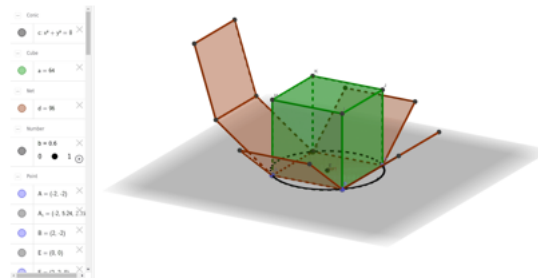
O termo Realidade Aumentada foi criado por volta de 1992, pelo investigador Tom Caudell, da Boeing.

Fonte: <https://ccg.pt/realidade-aumentada-aplicabilidade>.



SOFTWARE DE MATEMÁTICA DINÂMICA GEOGEBRA

De acordo com Idem (2017), o GeoGebra é um *software* gratuito de Matemática Dinâmica que pode ser utilizado em qualquer nível de ensino, combinando diversas áreas da Matemática, não somente Geometria e Álgebra, mas também Aritmética e Estatística.



SOFTWARE DE MATEMÁTICA DINÂMICA GEOGEBRA

Marcus Hohenwarter

Criador do GeoGebra, tendo feito durante a sua tese de doutorado na Universidade de Salzburgo, Áustria.

O GeoGebra está sendo utilizado em cerca de 190 países e foi traduzido para cerca de 55 idiomas, tendo recebido vários prêmios ao redor do mundo.

Fonte: <https://congresogeogebra.org/wp-content/uploads/2019/12/markus.jpeg>



APRENDIZAGEM MÓVEL

A Aprendizagem Móvel, tradução dos termos *Mobile Learning*, é uma modalidade que permite ao estudante estudar conteúdos escolares, de todas as matérias, fora do ambiente da sala de aula, por meio da utilização de dispositivos móveis, como *smartphones* e *tablets*.

A respeito da aprendizagem móvel, a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO, 2017) ressalta que:

- A aprendizagem móvel apresenta atributos exclusivos, se comparada à aprendizagem tecnológica convencional: ela é pessoal, portátil, colaborativa, interativa, contextual e situada; ela enfatiza a "aprendizagem instantânea", uma vez que a instrução pode ocorrer em qualquer lugar e a qualquer momento. Além disso, ela pode servir de apoio às aprendizagens formal e informal, tendo assim um enorme potencial para transformar o modo de se oferecer educação e treinamento. (UNESCO, 2017, p. 1)

Por sua vez, Moura (2010) apresenta uma definição de aprendizagem móvel que pode ajudar a entender essa nova forma de aprendizagem e sua relação com as tecnologias. Para a pesquisadora, a aprendizagem móvel é um:

- [...] processo de aprendizagem que ocorre apoiado pelo uso de dispositivos móveis, tendo como característica fundamental a portabilidade dos dispositivos e a mobilidade dos sujeitos, que podem estar fisicamente e geograficamente distantes uns dos outros ou em espaços físicos formais de educação, como na sala de aula. (MOURA, 2010, p. 3)

Alguns exemplos:



DISPOSITIVOS DE PRENDIZAGEM MÓVEL

GEOMETRIA ESPACIAL

Para Gouveia (2023) a Geometria Espacial

A **Geometria Espacial** corresponde a área da matemática que se encarrega de estudar as figuras no espaço, ou seja, aquelas que possuem mais de duas dimensões.

De modo geral, a Geometria Espacial pode ser definida como o estudo da **geometria no espaço**.

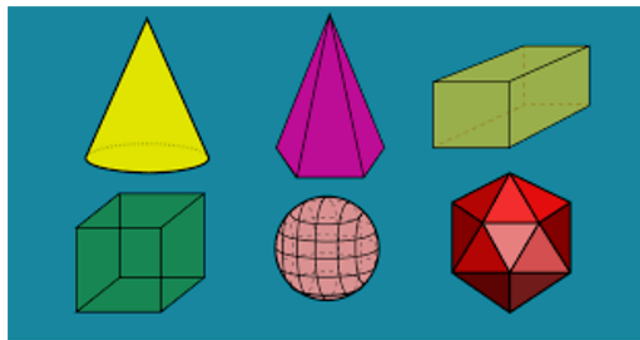
Características da Geometria Espacial

A Geometria Espacial estuda os objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço. Por sua vez, esses objetos são conhecidos como "**sólidos geométricos**" ou "**figuras geométricas espaciais**". Conheça melhor alguns deles:

- prisma
- cubo
- paralelepípedo
- pirâmide
- cone
- cilindro
- esfera

ALGUNS
EXEMPLOS:

Sólidos geométricos



REFERÊNCIAS

GOUVEIA, Rosimar. Toda matéria. Disponível em <https://www.todamateria.com.br/geometria-espacial/>. Acesso em 15 jan. 2023.

IDEM, R. C. **Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra**: uma experiência envolvendo licenciados em Matemática e professores. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017, 163pp. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/152415/idem_rc_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 12 jan. 2023.

MACEDO, A. C.; SILVA, J. A.; BURIOL, T. M. Usando smartphone e Realidade Aumentada para estudar Geometria Espacial. **Renote – Novas Tecnologias na Educação**, v. 14, n. 2, 2016, p.1-10. Disponível em: [https://seer.ufrgs.br/renote/article/download/70688/40123#:~:text=O%20tipo%20de%20intera%C3%A7%C3%A3o%20mais,Kirner%20e%20Tori%2C%202006\).&text=As%20aplica%C3%A7%C3%B5es%20de%20RA%20possuem,virtuais%20de%20uma%20maneira%20intuitiva](https://seer.ufrgs.br/renote/article/download/70688/40123#:~:text=O%20tipo%20de%20intera%C3%A7%C3%A3o%20mais,Kirner%20e%20Tori%2C%202006).&text=As%20aplica%C3%A7%C3%B5es%20de%20RA%20possuem,virtuais%20de%20uma%20maneira%20intuitiva). Acesso em: 13 jan. 2023.

MOURA, A. Apropriação do Telemóvel como Ferramenta de Mediação em Mobile Learning: Estudos de Caso em Contexto Educativo. Portugal/Braga: Universidade do Minho, 2010. Disponível em <https://periodicos.utfr.edu.br/rbect/article/download/2752/2544>.

UNESCO. **Diretrizes de Políticas para a Aprendizagem Móvel**. 2014. Disponível em <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000227770>. Acesso em 19 jun. 2022.

Apêndice 2

TCLE para pais ou responsáveis legais pelos alunos menores de idade



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Educação Matemática



Mestrado em Educação Matemática

Departamento de Educação Matemática – ICEB / UFOP

Projeto de Pesquisa: A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial

Pesquisador Orientando: Silvio Luiz Gomes de Amorim

Pesquisador Responsável: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (para pais ou responsáveis)

Prezado(a) Pai/Mãe/Responsável

Seu filho(a) está convidado(a) a participar da pesquisa “A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial” que será realizada pelo pesquisador orientando. Esta pesquisa tem por objetivo geral identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio de Matemática.

A colaboração de seu filho(a) na pesquisa ocorrerá por meio da participação no desenvolvimento de 6 Atividades Exploratórias relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial Métrica, com a utilização da Realidade Aumentada com o *software* dinâmico GeoGebra e também por meio de respostas a 1 (um) Questionário Inicial e 1 (um) Questionário Final, aplicados de forma *online*, ao longo deste 1º semestre letivo de 2023, com divulgação prévia de todo o cronograma de atividades.

A colaboração de seu filho(a) para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária e não remunerada. Seu filho(a) poderá não participar de qualquer um dos

encontros, poderá escolher livremente não responder a qualquer uma das questões apresentadas nos questionários e ainda poderá, a qualquer momento, retirar seu assentimento e, assim, desistir de participar da pesquisa.

De acordo com as Resoluções CNS 466/2012 e CNS 510/2016, toda pesquisa envolvendo seres humanos possui algum tipo de risco. No presente caso, existe o risco, graduado no nível mínimo, de constrangimento de seu filho(a) em fornecer informações por meio dos questionários propostos, nos quais certamente ele(a) irá expor suas opiniões, bem como há certo risco de seu constrangimento em sua participação nas atividades propostas.

Entretanto, em relação a eventuais riscos de divulgação de opiniões atreladas ao seu nome, em todas as fases da pesquisa, seu filho(a) terá seu anonimato garantido e as informações que fornecerem não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Com isso, acreditamos que tais constrangimentos supracitados poderão ser minimizados, assim como não haverá eventuais riscos de prejuízo profissional para ele(a), pois os conteúdos dos encontros já estão previstos no currículo escolar do Ensino Médio brasileiro.

Por outro lado, o desenvolvimento das atividades exploratórias certamente trará grandes benefícios para a aprendizagem de seu filho(a), especialmente, pela oportunidade de conhecimento e experimentação da utilização da Realidade Aumentada com o *software* GeoGebra de forma integrada, por meio das atividades exploratórias relacionadas a diversos conteúdos de Geometria Espacial Métrica.

É de minha total responsabilidade, como pesquisador responsável, a guarda e o sigilo dos dados coletados, em minha sala localizada no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Universitário do Morro do Cruzeiro, Ouro Preto – MG, por 5 (cinco) anos. Também é de minha total responsabilidade, eventuais danos causados pela participação de seu filho(a) na pesquisa, nos termos das Resoluções CNS 466/2012 e CNS 510/2016.

Para que não existam riscos de prejuízo das atividades acadêmicas de seu filho(a) e nem qualquer tipo de ônus financeiro, ficará a nosso encargo a elaboração, desenvolvimento e apresentação das atividades. Pedimos que os questionários, aplicados de forma *online*, sejam preenchidos em horário e local de preferência dele(a), ficando a nosso encargo seu arquivamento de modo totalmente seguro e confidencial. Lembramos ainda que o pesquisador orientando acompanhará a realização de todas as atividades; portanto, seu filho(a) terá total acesso a ele, caso necessário.

Os resultados da pesquisa serão divulgados na Dissertação de Mestrado do pesquisador orientando e sob a forma de trabalhos científicos que visam contribuir para a prática docente de professores de Matemática do Ensino Fundamental. Haverá, ainda, uma apresentação especial dos resultados da pesquisa para todos os participantes por meio de um Seminário de Avaliação, coordenado pelo pesquisador orientando, para o qual será convidada a Diretoria de Ensino do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto.

Este estudo poderá ser interrompido a qualquer momento se houver solicitação justificada da Diretoria de Ensino do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto ou, ainda, de participantes da pesquisa.

Você terá em mãos uma cópia assinada deste termo e recomendamos que a guarde. Você também poderá tirar dúvidas, quando necessário, juntamente ao pesquisador responsável ou ainda, apenas no caso de dúvidas éticas, ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP / UFOP), órgão da Universidade Federal de Ouro Preto ao qual todo e qualquer Projeto de Pesquisa, que seja relativo a seres humanos (direta ou indiretamente), deve ser submetido à apreciação, criado para defender os interesses dos sujeitos da pesquisa em sua integridade e dignidade, e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – Resolução CNS 196/1996, II.4).

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – Pesquisador Responsável

Departamento de Educação Matemática – ICEB / UFOP

Fones: (31) 3559-1293 ou 3559-1657 / E-mail: frederico.reis@ufop.edu.br

Eu, _____,

declaro que entendi os objetivos e os termos da colaboração de meu(minha) filho(a)

para o desenvolvimento da pesquisa e o(a) autorizo a participar da mesma.

Ouro Preto – MG, ____ de _____ de 2023.

Assinatura do(a) Pai/Mãe/Responsável

Comitê de Ética em Pesquisa (CEP / UFOP)

Centro de Convergência, Campus Universitário do Morro do Cruzeiro, UFOP

Ouro Preto – MG – Brasil – CEP: 35.400-000

Homepage: <https://www.comitedeetica.ufop.br>

E-mail: cep.propp@ufop.edu.br – Fone: 55(31)3559-1368

Apêndice 3

TCLE para alunos maiores de idade



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
 Universidade Federal de Ouro Preto
 Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
 Departamento de Educação Matemática



Mestrado em Educação Matemática

Departamento de Educação Matemática – ICEB / UFOP

Projeto de Pesquisa: A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial

Pesquisador Orientando: Silvio Luiz Gomes de Amorim

Pesquisador Responsável: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (para alunos maiores de idade)

Prezado(a) Aluno(a)

Você está convidado(a) a participar da pesquisa “A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial” que será realizada pelo pesquisador orientando. Esta pesquisa tem por objetivo geral identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio de Matemática.

Sua colaboração na pesquisa ocorrerá por meio da participação no desenvolvimento de 6 Atividades Exploratórias relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial Métrica, com a utilização da Realidade Aumentada, com o *software* dinâmico GeoGebra e também por meio de respostas a 1 (um) Questionário Inicial e 1 (um) Questionário Final, aplicados de forma *online*, ao longo deste 1º semestre letivo de 2023, com divulgação prévia de todo o cronograma de atividades.

Sua colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária e não remunerada. Você poderá não participar de qualquer um dos encontros, poderá escolher livremente não responder a qualquer uma das questões apresentadas nos questionários e ainda poderá, a qualquer momento, retirar seu assentimento e, assim, desistir de participar da pesquisa.

De acordo com as Resoluções CNS 466/2012 e CNS 510/2016, toda pesquisa envolvendo seres humanos possui algum tipo de risco. No presente caso, existe o risco, graduado no nível mínimo, de seu constrangimento em fornecer informações por meio dos questionários propostos, nos quais certamente você irá expor suas opiniões, bem como há certo risco de seu constrangimento em sua participação nas atividades propostas.

Entretanto, em relação a eventuais riscos de divulgação de opiniões atreladas ao seu nome, em todas as fases da pesquisa, seu filho(a) terá seu anonimato garantido e as informações que fornecerem não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Com isso, acreditamos que tais constrangimentos supracitados poderão ser minimizados, assim como não haverá eventuais riscos de prejuízo profissional para você, pois os conteúdos dos encontros já estão previstos no currículo escolar do Ensino Médio brasileiro.

Por outro lado, o desenvolvimento das atividades exploratórias certamente trará grandes benefícios para a sua aprendizagem, especialmente, pela oportunidade de conhecimento e experimentação da utilização da Realidade Aumentada com o *software* GeoGebra de forma integrada, por meio das atividades exploratórias relacionadas a diversos conteúdos de Geometria Espacial Métrica.

É de minha total responsabilidade, como pesquisador responsável, a guarda e o sigilo dos dados coletados, em minha sala localizada no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Universitário do Morro do Cruzeiro, Ouro Preto – MG, por 5 (cinco) anos. Também é de minha total responsabilidade, eventuais danos causados pela participação na pesquisa, nos termos das Resoluções CNS 466/2012 e CNS 510/2016.

Para que não existam riscos de prejuízo de suas atividades acadêmicas e nem qualquer tipo de ônus financeiro, ficará a nosso encargo a elaboração, desenvolvimento e apresentação das atividades. Pedimos que os questionários, aplicados de forma *online*, sejam preenchidos em horário e local de sua preferência, ficando a nosso encargo seu arquivamento de modo totalmente seguro e confidencial. Lembramos ainda que o

pesquisador orientando acompanhará a realização de todas as atividades; portanto, você terá total acesso a ele, caso necessário.

Os resultados da pesquisa serão divulgados na Dissertação de Mestrado do pesquisador orientando e sob a forma de trabalhos científicos que visam contribuir para a prática docente de professores de Matemática do Ensino Fundamental. Haverá, ainda, uma apresentação especial dos resultados da pesquisa para todos os participantes por meio de um Seminário de Avaliação, coordenado pelo pesquisador orientando, para o qual será convidada a Diretoria de Ensino do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto.

Este estudo poderá ser interrompido a qualquer momento se houver solicitação justificada da Diretoria de Ensino do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto ou, ainda, de participantes da pesquisa.

Você terá em mãos uma cópia assinada deste termo e recomendamos que a guarde. Você também poderá tirar dúvidas, quando necessário, juntamente ao pesquisador responsável ou ainda, apenas no caso de dúvidas éticas, ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP / UFOP), órgão da Universidade Federal de Ouro Preto ao qual todo e qualquer Projeto de Pesquisa, que seja relativo a seres humanos (direta ou indiretamente), deve ser submetido à apreciação, criado para defender os interesses dos sujeitos da pesquisa em sua integridade e dignidade, e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – Resolução CNS 196/1996, II.4).

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – Pesquisador Responsável

Departamento de Educação Matemática – ICEB / UFOP

Fones: (31) 3559-1293 ou 3559-1657 / E-mail: frederico.reis@ufop.edu.br

Eu, _____,
 declaro que entendi os objetivos e os termos da minha colaboração para o desenvolvimento da pesquisa e concordo em participar da mesma.

Ouro Preto – MG, _____ de _____ de 2023.

Assinatura do(a) Participante

Comitê de Ética em Pesquisa (CEP / UFOP)

Centro de Convergência, Campus Universitário do Morro do Cruzeiro, UFOP

Ouro Preto – MG – Brasil – CEP: 35.400-000

Homepage: <https://www.comitedeetica.ufop.br>

E-mail: cep.propp@ufop.edu.br – Fone: 55(31)3559-1368

Apêndice 4

TALE para alunos menores de idade



Mestrado em Educação Matemática

Departamento de Educação Matemática – ICEB / UFOP

Projeto de Pesquisa: A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial

Pesquisador Orientando: Silvio Luiz Gomes de Amorim

Pesquisador Responsável: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (para alunos menores de idade)

Prezado(a) Aluno(a)

Você está convidado(a) a participar da pesquisa “A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial” que será realizada pelo pesquisador orientando. Esta pesquisa tem por objetivo geral identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio de Matemática.

Sua colaboração na pesquisa ocorrerá por meio da participação no desenvolvimento de 6 Atividades Exploratórias relacionadas a conteúdos de Geometria Espacial Métrica, com a utilização da Realidade Aumentada com o *software* dinâmico GeoGebra e também por meio de respostas a 1 (um) Questionário Inicial e 1 (um) Questionário Final, aplicados de forma *online*, ao longo deste 1º semestre letivo de 2023, com divulgação prévia de todo o cronograma de atividades.

Sua colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária e não remunerada. Você poderá não participar de qualquer um dos encontros, poderá escolher livremente não responder a qualquer uma das questões apresentadas nos questionários e ainda poderá, a qualquer momento, retirar seu consentimento e, assim, desistir de participar da pesquisa.

De acordo com as Resoluções CNS 466/2012 e CNS 510/2016, toda pesquisa envolvendo seres humanos possui algum tipo de risco. No presente caso, existe o risco, graduado no nível mínimo, de seu constrangimento em fornecer informações por meio dos questionários propostos, nos quais certamente você irá expor suas opiniões, bem como há certo risco de seu constrangimento em sua participação nas atividades propostas.

Entretanto, em relação a eventuais riscos de divulgação de opiniões atreladas ao seu nome, em todas as fases da pesquisa, você terá seu anonimato garantido e as informações que fornecerem não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Com isso, acreditamos que tais constrangimentos supracitados poderão ser minimizados, assim como não haverá eventuais riscos de prejuízo profissional para você, pois os conteúdos dos encontros já estão previstos no currículo escolar do Ensino Médio brasileiro.

Por outro lado, o desenvolvimento das atividades exploratórias certamente trará grandes benefícios para a sua aprendizagem, especialmente, pela oportunidade de conhecimento e experimentação da utilização da Realidade Aumentada com o *software* GeoGebra de forma integrada, por meio das atividades exploratórias relacionadas a diversos conteúdos de Geometria Espacial Métrica.

É de minha total responsabilidade, como pesquisador responsável, a guarda e o sigilo dos dados coletados, em minha sala localizada no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Universitário do Morro do Cruzeiro, Ouro Preto – MG, por 5 (cinco) anos. Também é de minha total responsabilidade, eventuais danos causados pela sua participação na pesquisa, nos termos das Resoluções CNS 466/2012 e CNS 510/2016.

Para que não existam riscos de prejuízo de suas atividades acadêmicas e nem qualquer tipo de ônus financeiro, ficará a nosso encargo a elaboração, desenvolvimento e apresentação das atividades. Pedimos que os questionários, aplicados de forma *online*, sejam preenchidos em horário e local de sua preferência, ficando a nosso encargo seu arquivamento de modo totalmente seguro e confidencial. Lembramos ainda que o

pesquisador orientando acompanhará a realização de todas as atividades; portanto, você terá total acesso a ele, caso necessário.

Os resultados da pesquisa serão divulgados na Dissertação de Mestrado do pesquisador orientando e sob a forma de trabalhos científicos que visam contribuir para a prática docente de professores de Matemática do Ensino Fundamental. Haverá, ainda, uma apresentação especial dos resultados da pesquisa para todos os participantes por meio de um Seminário de Avaliação, coordenado pelo pesquisador orientando, para o qual será convidada a Diretoria de Ensino do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto.

Este estudo poderá ser interrompido a qualquer momento se houver solicitação justificada da Diretoria de Ensino do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto ou, ainda, de participantes da pesquisa.

Você terá em mãos uma cópia assinada deste termo e recomendamos que a guarde. Você também poderá tirar dúvidas, quando necessário, juntamente ao pesquisador responsável ou ainda, apenas no caso de dúvidas éticas, ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP / UFOP), órgão da Universidade Federal de Ouro Preto ao qual todo e qualquer Projeto de Pesquisa, que seja relativo a seres humanos (direta ou indiretamente), deve ser submetido à apreciação, criado para defender os interesses dos sujeitos da pesquisa em sua integridade e dignidade, e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – Resolução CNS 196/1996, II.4).

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – Pesquisador Responsável
 Departamento de Educação Matemática – ICEB / UFOP
 Fones: (31) 3559-1293 ou 3559-1657 / E-mail: frederico.reis@ufop.edu.br

Eu, _____,
 declaro que entendi os objetivos e os termos da minha colaboração para o desenvolvimento da pesquisa e concordo em participar da mesma.

Ouro Preto – MG, ____ de _____ de 2023.

Assinatura do(a) Participante
Comitê de Ética em Pesquisa (CEP / UFOP)
 Centro de Convergência, Campus Universitário do Morro do Cruzeiro, UFOP
 Ouro Preto – MG – Brasil – CEP: 35.400-000
 Homepage: <https://www.comitedeetica.ufop.br>
 E-mail: cep.propp@ufop.edu.br – Fone: 55(31)3559-1368

Apêndice 5 Questionário Inicial



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Educação Matemática



Mestrado em Educação Matemática / UFOP

Projeto de Pesquisa: A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial

Pesquisador: Silvio Luiz Gomes de Amorim

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Coorientador: Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira

Questionário Inicial

Prezado(a) Aluno(a)

Lembramos que você pode escolher não responder a qualquer uma das questões apresentadas no questionário, que você terá seu anonimato totalmente garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa!

1) Qual é a importância do uso das Tecnologias Digitais (TD) para a aprendizagem de Matemática?

- a) () As TD não são realmente importantes, pois sempre é possível se ensinar Matemática perfeitamente bem, mesmo sem as TD que, talvez, possam ser consideradas um simples modismo passageiro.
- b) () As TD até podem ser importantes, mas não é uma obrigação sua utilização no ensino de Matemática, pois existem metodologias muito boas que já são utilizadas há muito tempo.
- c) () As TD são importantes e podem ser utilizadas no ensino de Matemática, entretanto, sua utilização é um processo gradual e que deve ser opcional para cada um dos professores.

d) () As TD são cada vez mais importantes e devem ser utilizadas no ensino de Matemática, pois sua utilização é, atualmente, um processo inevitável para todos os professores.

2) Que conhecimentos você possui sobre o *software* GeoGebra e a Realidade Aumentada?

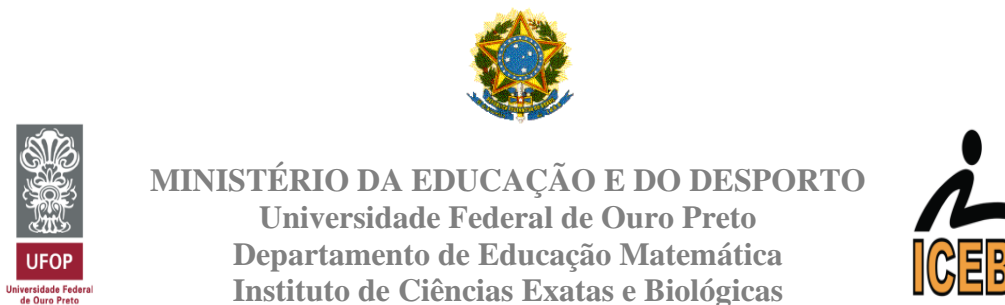
- a) () Nunca utilizei nenhum dos dois *softwares*.
- b) () Já utilizei somente o *software* GeoGebra.
- c) () Já utilizei somente a Realidade Aumentada.
- d) () Já utilizei os dois *softwares*.

3) Como foi sua experiência com a utilização de *softwares* como aluno, desde o Ensino Fundamental até os dias atuais?

- a) () Nunca utilizei em nenhuma disciplina.
- b) () Já utilizei somente na disciplina de Matemática.
- c) () Já utilizei em outras disciplinas, mas não em Matemática.
- d) () Já utilizei em outras disciplinas e também em Matemática.

Muito obrigado por sua participação na pesquisa!

Apêndice 6 Questionário Final



Mestrado em Educação Matemática / UFOP

Projeto de Pesquisa: A utilização integrada da Realidade Aumentada com o *Software* GeoGebra na perspectiva da Aprendizagem Móvel de Geometria Espacial

Pesquisador: Silvio Luiz Gomes de Amorim

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Coorientador: Prof. Dr. Neuber Silva Ferreira

Questionário Final

Prezado(a) Aluno(a)

Lembramos que você pode escolher não responder a qualquer uma das questões apresentadas no questionário, que você terá seu anonimato totalmente garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa!

- 1) **Como foi a sua participação e quais foram suas maiores dificuldades no desenvolvimento das atividades exploratórias com o *software* GeoGebra e a RA?**
- 2) **Quais foram as contribuições das atividades exploratórias para sua aprendizagem de Geometria Espacial? Em que conteúdos aconteceram as maiores contribuições?**
- 3) **Você gostaria de experimentar a utilização de Tecnologias Digitais para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos? Quais?**

Muito obrigado por sua participação na pesquisa!