E-ISSN 2359-6856
DOSSIÊ TEMÁTICO

MOBILIZANDO CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE FRAÇÕES COM DOCENTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL[i]

MOBILIZING MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR THE FRACTIONS TEACHING WITH TEACHERS IN THE EARLY YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL

http://orcid.org/0000-0003-4649-1899 Rosângela Milagres Patrono[A]
http://orcid.org/0000-0003-0953-1468 Ana Cristina Ferreira[B]
https://orcid.org/0000-0001-9576-2769 Plinio Cavalcanti Moreira[C]

[A] Instituto Federal de Minas Gerais – campus Ouro Preto (IFMG-OP), Ouro Preto, MG, Brasil
[B] Universidade Federal de Ouro Preto (IFOP), Ouro Preto, MG, Brasil
[C] Universidade Federal de Ouro Preto (IFOP), Ouro Preto, MG, Brasil

Recebido em: 03 out 2022 | **Aceito em:** 24 jan. 2023
Correspondência: Rosângela Patrono (rmpatrono@gmail.com)

Resumo

Este estudo pretende identificar, descrever e caracterizar conhecimentos matemáticos para o ensino de frações que afloraram a partir da discussão com as participantes, de respostas de alunos dos anos iniciais a questões a eles propostas em situações de ensino do tema na Educação Básica. No presente estudo, em um contexto de formação continuada, 18 professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental são convidadas a refletir sobre as respostas dadas por estudantes a problemas envolvendo noções iniciais de frações. O referencial teórico que embasa o estudo é o modelo criado por Ball e seus colaboradores. Os dados foram produzidos a partir de transcrições das gravações dos encontros, de registros produzidos pelos participantes e do diário de campo elaborado ao longo da pesquisa. Os resultados evidenciam que a discussão das resoluções propostas pelos alunos dos anos iniciais oportunizou uma rica reflexão acerca de vários conhecimentos matemáticos para o ensino de frações, tais como: quantificar uma parte de um todo, relacionando desenho e símbolos; comparar frações no caso da interpretação parte-todo; somar e subtrair frações; conhecer os erros mais comuns usualmente cometidos pelos alunos, entre outros. O estudo contribui também para ampliar a compreensão acerca dos processos de aprendizagem profissional, especialmente no que se refere ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos específicos da docência.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação continuada de professores; Conhecimento Matemático para o Ensino; Ensino de frações; Anos iniciais do Ensino Fundamental.

Abstract

This study aimed to identify, describe and characterize mathematical knowledge for teaching fractions, that emerged in a discussion about elementary school students' responses to questions posed to them in real elementary school classrooms. In the context of continuing education, we invited 18 elementary school teachers to reflect on the answers given by elementary school students to problems involving introductory notions related to the fraction concept. The theoretical framework that supports the study was the model (Mathematical Knowledge for

Teaching) developed by Ball and her collaborators. From the transcripts of the recordings of the meetings, the records produced by the participants, and the researcher's field diary, we were able to gather data on mathematical knowledge for teaching fractions that emerged in discussions on the subject with the participating teachers. The results show that these discussions favored the mobilization of different categories of mathematical knowledge for teaching fractions, such as: how to quantify a part of a whole (relating drawing and symbol); how to compare fractions in the case of part-whole interpretation; how to add and subtract fractions; some of the most common mistakes usually made by students, among others. Studies like this also contribute to understanding professional learning processes, especially those regarding the development of mathematical knowledge for teaching.

Keywords: Mathematics Education; Inservice Teacher Education; Mathematical knowledge for teaching; Teaching fractions; Elementary School.

Introdução

As ideias relativas ao conceito de número racional estão entre as mais complexas e importantes da escola básica (BEHR *et al*., 1983), e seu "estudo se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico)." (BRASIL, 1998, p. 103). O desenvolvimento do conceito, na maioria das vezes, inicia-se com as frações (noções, representações com modelos contínuos e/ou discretos, identificação da unidade, frações unitárias, equivalência, comparação etc.) e suscita muitas dúvidas entre os professores, especialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental (ROGERI, 2015; SILVA, 2007).

Os Professores que Ensinam Matemática (PEM) nos anos iniciais do Ensino Fundamental (primeiro ao quinto ano), geralmente são formados em cursos de Licenciatura em Pedagogia. Nesse curso, a carga horária destinada ao ensino de Matemática é muito reduzida, resumindo-se, muitas vezes, a uma disciplina (CASTRO; FIORENTINI, 2021; DONÁ; RIBEIRO, 2022; SOUTO, 2016). Com isso, a maioria das noções matemáticas demandadas nas classes dos anos iniciais são superficialmente abordadas (quando o são). Como destaca Gatti (2019), um dos problemas relacionados à formação do professor da Educação Básica no Brasil, que ainda predomina um currículo com pouca vocação para formar profissionalmente os docentes, pautado em ementas, bibliografias e disciplinas que pouco contribuem para a aprendizagem profissional.

Por outro lado, com Diniz-Pereira (2010, p. 67), entendemos que "infelizmente, a 'formação continuada' ou 'contínua' que conhecemos configura-se, na maioria das vezes, em ações isoladas, pontuais e de caráter eventual. Portanto, trata-se de uma formação muito mais 'descontínua' do que propriamente 'contínua'." Tal formação ainda é caracterizada pela oferta de cursos de curta duração, cujos temas e conteúdos nem sempre refletem o interesse e as demandas do professorado e, na prática, pouco contribuem para o desenvolvimento profissional docente.

Contudo, é essencial promover oportunidades de aprendizagem profissional nas quais os conhecimentos matemáticos específicos da docência sejam explorados e aprimorados ou desenvolvidos. Neste artigo[ii], que é um recorte de uma tese de Doutorado, propomo-nos a identificar, descrever e caracterizar conhecimentos matemáticos para o ensino de frações que afloraram e foram identificados a partir da discussão, com as participantes do estudo, de respostas de alunos dos anos iniciais a questões a eles propostas em situações de ensino do tema na Educação Básica. Tais discussões se deram a partir da análise de respostas de alunos dos anos iniciais a questões matemáticas relacionadas aos números racionais. Preocupamo-nos tanto com os conhecimentos matemáticos mobilizados quanto com os potencialmente mobilizáveis[iii].

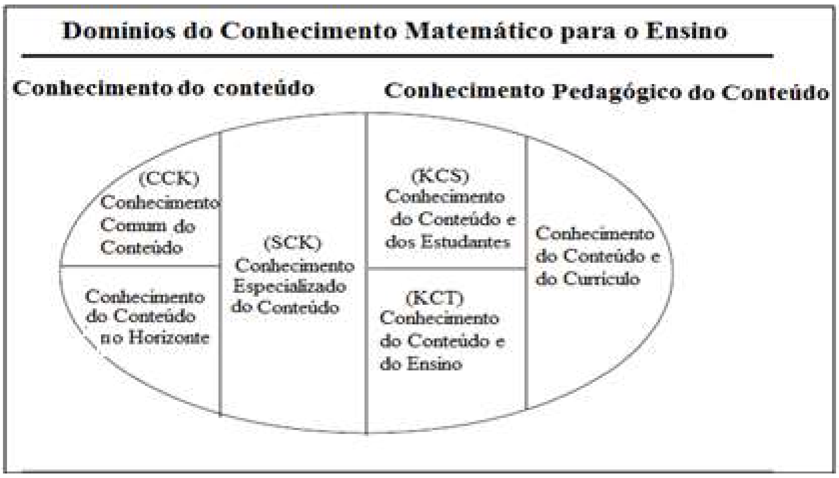
Conhecimentos matemáticos para o ensino de frações

O desenvolvimento profissional docente envolve vários aspectos, contudo, a nosso ver, a apropriação de conhecimentos específicos da docência é central nesse processo. No caso do PEM, entendemos que os saberes demandados pela prática docente são, principalmente, aqueles que compõem a *Matemática Escolar* e se referem

> ao conjunto dos saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Com essa formulação, a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (MOREIRA; DAVID, 2016, p. 20)

É essa matemática que embasa o modelo teórico adotado neste estudo. Após décadas investigando a natureza do conhecimento matemático requerido na prática docente escolar, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem o Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT), constituído por dois domínios e seis subdomínios como ilustra a Figura 1:

Figura 1 – Modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: Extraído de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

O Conhecimento do Conteúdo (*Content Knowledge*, CK) é composto por três subdomínios: a) Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Content Knowledge*, CCK), saber matemático que pode ser usado em outros cenários, não sendo, portanto, exclusivo do ensino; b) Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge*, SCK), específico do PEM; c) Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (*Horizon Content Knowledge*, HCK), conhecimento de como os conteúdos matemáticos se relacionam no currículo escolar.

O segundo domínio — Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) — também conta com três subdomínios: a) Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (*Knowledge of Content and Student*, KCS), que combina conhecimento sobre os alunos e sobre a Matemática; b) Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (*Knowledge of Content and Teaching*, KCT), relacionado ao ensino e à Matemática; e c) Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (*Knowledge of Content and Curriculum,* KCC), que envolve saberes acerca do currículo, de materiais didáticos e da Matemática[iv].

Metodologia

O estudo aqui apresentado, assim como a pesquisa da qual faz parte, desenvolveu-se em uma abordagem qualitativa. Nele, mais que responder a perguntas prévias ou testar hipóteses (BOGDAN; BIKLEN, 1994), procuramos “tentar dar sentido ou interpretar os fenômenos em termos dos significados que as pessoas trazem para eles.” (DENZIN; LINCOLN, 1994, p. 2). Interessava-nos investigar conhecimentos matemáticos que afloraram em um encontro com professoras dos anos iniciais bem como nas reflexões sobre este.

O contexto deste estudo foi o curso de extensão “Repensando o ensino de frações para os anos iniciais do Ensino Fundamental”, desenvolvido e ofertado pela primeira autora deste artigo como parte de sua pesquisa de Doutorado[v]. Esse curso aconteceu, remotamente, pelo *Google Meet*, entre os meses de maio e julho de 2021, em 10 encontros com 2 horas de duração cada. Participaram do estudo 18 professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de Ouro Preto, Minas Gerais (MG), e 3 licenciandos em Matemática que atuaram como monitores. As atividades propostas no curso se pautaram na teoria dos subconstrutos apresentada por Kieren (1976, 1980) e desenvolvida por Behr *et al*. (1983).

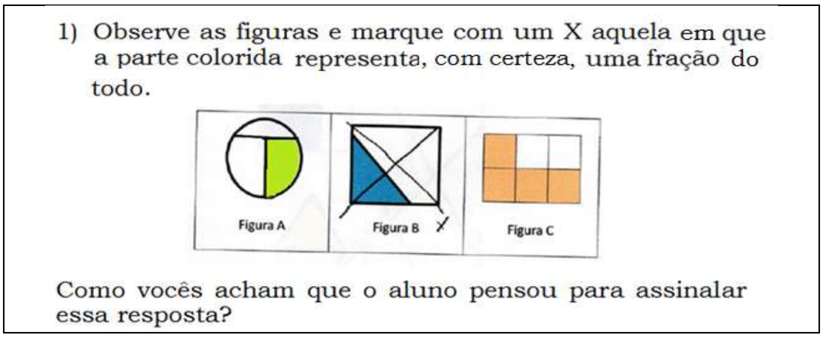
Neste recorte, analisamos uma parte do primeiro encontro do curso e outra do oitavo, no qual algumas questões resolvidas por alunos do Ensino Fundamental foram discutidas. Os dados foram produzidos a partir de informações coletadas por meio da gravação em áudio e vídeo do encontro, bem como de observações registradas no diário de campo da pesquisadora. Para preservar a identidade dos(as) participantes, nomeamos as professoras de P1 a P18, e os(as) licenciandos(as) como L1, L2 e L3.

A análise se deu, inicialmente, por meio de várias leituras do material produzido para, em seguida, passar a identificar conhecimentos matemáticos para o ensino de frações mobilizados nos encontros (ou potencialmente mobilizáveis em outras situações de ensino e de aprendizagem). Para isso, tomamos como referência o modelo teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Em seguida, buscamos desvelar conhecimentos matemáticos para o ensino de frações que poderiam ter sido mobilizados na discussão e, por algum motivo, não o foram (conhecimentos potencialmente mobilizáveis). Finalmente, procuramos discutir os achados da análise à luz do referencial teórico e da literatura sobre o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Resultados e discussão

Ao longo do curso, propusemos diversas tarefas que procuravam favorecer o diálogo e a mobilização de conhecimentos matemáticos para o ensino de frações. No presente artigo, analisamos discussões proporcionadas pela análise de algumas questões resolvidas por alunos do Ensino Fundamental. As primeiras questões, adaptadas das pesquisas de Fernández (2014) e Patrono (2011), envolveram noções iniciais referentes à representação e quantificação de uma parte em relação ao todo. Ser capaz de representar e quantificar uma parte de um todo adequadamente e com compreensão é, a nosso ver, essencial para a compreensão da ideia de fração.

Figura 2 – Questão resolvida por um aluno com idade entre 8 e 10 anos



Fonte: Adaptada de Fernández (2014, p. 29).

Enquanto as professoras preparavam suas respostas, comentamos que alguns alunos haviam marcado também a Figura A. Analisando a questão e a resposta marcada na Figura 2, P3 disse: “*o aluno ainda não pegou o conceito de fração*.” Também afirmou que alguns podem ter marcado as Figuras A e B “*pelo desenho remeter a algo que já conheciam – pizza, pipa*.”

Entendemos que o aluno marcou a resposta sem observar a divisão da figura em partes iguais (mesma área). A divisão em partes iguais dá a certeza, por exemplo na Figura C, de que a relação entre a parte colorida (quatro partes) e o todo (seis partes) é 4/6. Isso não acontece com as Figuras A e B. Em ambos os casos, a parte colorida talvez represente uma fração do todo, mas não se pode ter certeza, porque os dados não são suficientes.

Compreender o conceito de fração (“pegar o conceito”, nas palavras de P3), no caso da interpretação parte-todo e especificamente nessa questão, significa ser capaz de identificar precisamente a relação entre a área da parte colorida e a área total da figura correspondente. Isso só pode ser feito com certeza no caso da Figura C. Assim, uma resolução correta da questão proposta requer um tipo de conhecimento matemático extremamente relevante para o ensino de frações nos anos iniciais.

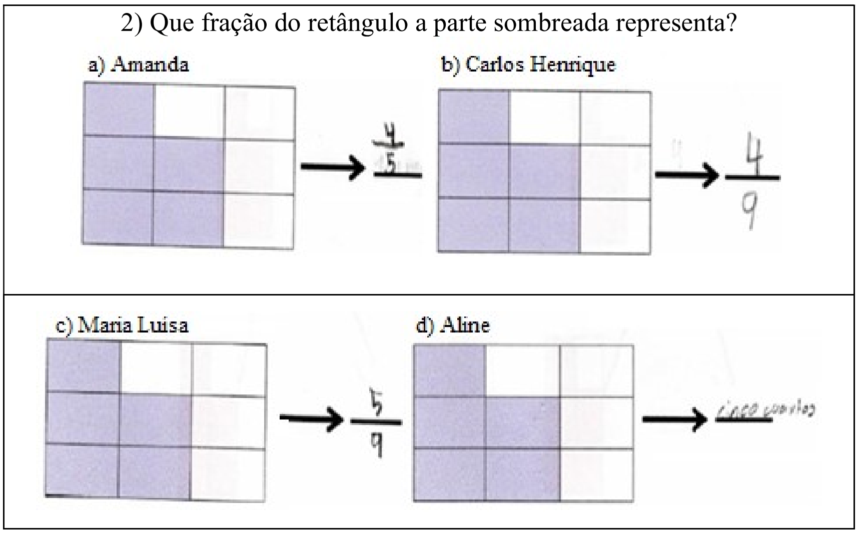
Esse tipo de conhecimento, SCK, tomando como referência os domínios de Ball, Thames e Phelps (2008), pode ser descrito, de modo abreviado, da seguinte maneira: quando o todo (representado por uma figura, por exemplo) é dividido em *b* partes iguais e são coloridas *a* dessas partes, é seguro afirmar que a parte colorida representa uma fração desse todo, no caso a fração a/b. Mas a recíproca não é verdadeira sempre, e isso também, juntamente com uma justificativa adequada ao ensino nos anos iniciais, constitui um tipo de conhecimento relevante para o trabalho com frações nesse segmento do Ensino Fundamental. A recíproca não é verdadeira, essencialmente porque pode-se colorir uma fração do todo, digamos 1/3, e dividir os 2/3 restantes em duas partes de tamanhos diferentes entre si, deixando-as sem colorir. A parte colorida, é claro, representa 1/3 do todo, mesmo que cada uma das outras duas partes não coloridas não represente 1/3 do todo. Observamos, finalmente, que não se está levando em conta, aqui, o fato de que a parte colorida pode também, em alguns casos, não representar uma fração do todo, porque pode ser incomensurável com esse todo. Não levamos tal argumento em conta, pois pensamos que não faz sentido discutir isso com crianças dos anos iniciais.

Outra forma, também associada a essa situação, de conhecimento matemático relevante para o ensino de frações nos anos iniciais, que se enquadra, a nosso ver, em alguns dos subdomínios do domínio PCK do MKT, é a que comentamos a seguir. De acordo com a teoria piagetiana (PIAGET, 1974), na construção do conhecimento, a criança tenta adaptar os novos estímulos aos esquemas que já possui. Essa adaptação pode ocorrer de modo satisfatório ou não, em cada caso. Por exemplo, se ainda não conhece bem a interpretação parte-todo, a criança pode associar a ideia de fração apenas a dois números naturais, sem vinculação com o propósito de quantificação da parte colorida em relação com o todo. Nesse caso, pode colocar mais ou menos mecanicamente no denominador o número de partes em que o todo está dividido e no numerador o número dessas partes que foram coloridas, sem atentar para o fato de que as partes contadas são de diferentes "tamanhos". Assim, ignorando o propósito da divisão do todo em partes iguais para quantificar a parte colorida desse todo, o numerador e o denominador indicados mecanicamente podem não expressar a fração que essa parte colorida representa do todo.

Isso justifica, então, uma ênfase específica no *propósito* do trabalho inicial com a relação parte-todo: já que a parte a ser quantificada não pode se expressar por meio de nenhum número natural (que é o que se conhece nos anos iniciais até o momento da introdução da ideia de fração), queremos desenvolver uma forma de expressar o tamanho da parte (em princípio, menor que o todo, sem ser zero) tomando o todo como referência da unidade (1). No fundo, o propósito é criar (eventualmente) um "número" para expressar um tamanho que é menor que o todo (1) e maior que nada (0), já que esse número ainda não existe para as crianças nesse estágio da aprendizagem matemática. É claro que não estamos sugerindo dizer isso, nesses termos, às crianças. Entretanto, achamos importante discutir esse tipo de conhecimento com as professoras participantes, porque ter esse propósito em mente pode ajudar a orientar e dar sentido às ações pedagógicas, no trabalho com certos erros dos alunos na aprendizagem inicial da ideia de fração como quantificação de uma parte do todo. Retornaremos a esse ponto logo adiante, comentando outros erros cometidos por alunos dos anos iniciais.

Para responder às questões 2 e 3 (Figura 3), esperar-se-ia que o aluno olhasse para o todo e quantificasse a parte sombreada.

Figura 3 – Questão resolvida por alunos com idade entre 8 e 10 anos



Fonte: Adaptada de Fernández (2014, p. 29-30).

Observando as respostas dadas na questão 2, as professoras perceberam que Amanda e Aline não levaram em consideração a relação entre a parte sombreada e o todo, mas a conexão entre o número de partes sombreadas e o das partes não sombreadas, representando, assim, não uma quantificação da parte sombreada em relação ao todo, mas a razão entre duas partes do retângulo. Para P8, Amanda "*analisou a parte colorida isolada e a parte que não foi colorida isolada, mas não pensou no todo.*" Seu comentário revela indícios de conhecimento pertencente ao subdomínio SCK, ao fazer uma interpretação possível da resposta dada pela estudante. Contudo, não fica claro que P8 percebe que, caso a fração pedida fosse a que expressasse a relação parte-parte, a resposta de Amanda estaria correta. Isso remete a conhecimentos matemáticos para o ensino de frações, que poderiam ter sido mobilizados de forma mais aprofundada nessa discussão.

Outra questão importante, que se associa a essa discussão, refere-se à quantificação de uma parte de algo considerado como o todo. A ideia de quantificar[vi] uma parte de um todo mediante uma fração exige uma estratégia que conduza ao objetivo pretendido. Essa estratégia pode ser descrita abreviadamente da seguinte maneira, como é sabido: dividimos o todo em certo número de partes iguais e verificamos quantas dessas partes compõem o pedaço do todo que queremos quantificar. Contudo, o que parece acontecer, de modo mais ou menos generalizado, é que não se discute esse objetivo com os alunos. Fica-se preso à questão de identificar o numerador e o denominador da fração — ou seja, contar mecanicamente em quantas partes (iguais) foi dividido o todo e quantas dessas partes foram sombreadas, por exemplo. Essa (dupla) contagem, muitas vezes, produz uma resposta correta para uma dada pergunta, mas, quando feita automaticamente, sem compreensão do objetivo a ser alcançado, pode levar a erros como os das respostas de alguns alunos, descritas acima. Além disso, como não se identifica o objetivo, fica difícil, ao estudante, perceber o erro. No caso da resposta de Amanda, $\frac{4}{5}$ não faria sentido, se ela tivesse claro o objetivo a ser alcançado, pois o pedaço sombreado é pouco maior que a metade do retângulo todo, e 4 em 5 é “quase” o retângulo todo. É possível que esse tipo de erro possa ser evitado por meio do trabalho de desenvolvimento de uma compreensão conceitual da ideia fundamental do significado (no caso, parte-todo) que se quer atribuir a uma fração.

Com base na teoria dos subconstrutos (BEHR *et al.*, 1983), observamos que a situação se complica ainda mais porque existem outros significados (subconstrutos) que expressam relações diferentes daquela existente entre os tamanhos de uma parte e do todo. Por exemplo, uma fração pode expressar também a razão entre os tamanhos de uma parte e outra parte de um todo (no caso em questão, poderia representar a razão entre os tamanhos da parte sombreada e da parte não sombreada do retângulo). Nesse caso, a estratégia é semelhante, mas o objetivo é diferente: o que interessa contar agora é o número de partes que expressa o tamanho do pedaço sombreado e o que representa o da parte não sombreada. A razão entre esses dois números inteiros revela a relação entre os dois tamanhos, $\frac{4}{5}$. Observemos que essa resposta faz sentido, pois os dois pedaços têm tamanhos quase iguais, o que se traduz na razão 4 para 5 (próxima de 1).

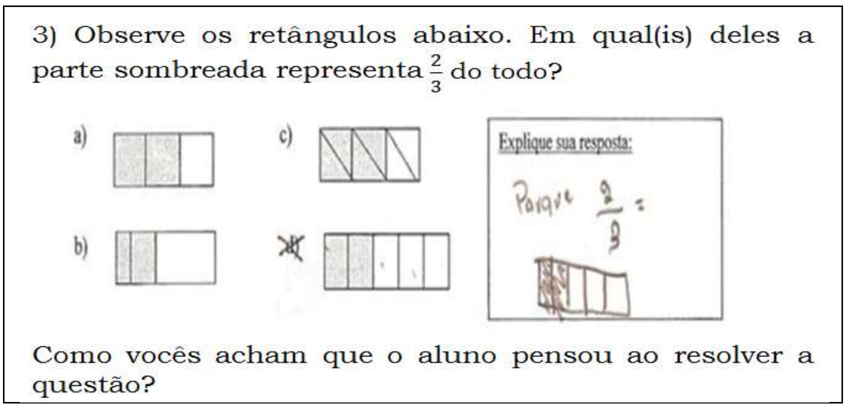
Por fim, podemos destacar pelo menos dois elementos, referentes ao subdomínio *SCK*, que saltam aos olhos a partir dessas considerações. Em primeiro lugar, há a necessidade de conjugar a estratégia a ser utilizada e o objetivo a ser alcançado, em cada interpretação da ideia de fração que se queira trabalhar no ensino. Em segundo lugar, é importante notar como o trabalho com a ideia de fração, centrado em procedimentos decorados, sem referências conceituais que balizem o reconhecimento e a eventual correção de um erro cometido, pode criar dificuldades cada vez maiores para o aluno na aprendizagem matemática. O que parece que simplifica, num momento, acaba complicando, de fato, a sequência da aprendizagem. Tais conhecimentos matemáticos para o ensino poderiam ter sido mobilizados na discussão dessa tarefa, caso houvesse mais tempo.

Em relação à resposta da aluna Maria Luísa (letra c), P2, P3, P8 e P12 entendem que a aluna estava correta, pois "*relacionou os cinco retângulos menores sombreados com o total de retângulos – nove.*" Já em relação à resposta da aluna Aline (letra d), enquanto P8 afirma que "*a aluna pensou igual na letra a, porém inverteu as partes coloridas e sem colorir*", P12 acredita que "*eles* [os alunos] *estão olhando só a imagem que veem com mais nitidez, esquecendo-se de contar o todo, ou seja, estão contando só parte sombreada e não sombreada*."

Entendemos que a dupla contagem não pode ser vista como um caminho automático para responder a uma pergunta envolvendo a ideia de fração como relação parte-todo. Como já observado, essa forma de resolver mecanicamente pode criar obstáculos para alguns alunos. A origem do erro do educando pode não ser "deixar de olhar para o todo", mas sim não perceber com clareza o papel do todo no objetivo que se quer alcançar (talvez nem reconheça esse objetivo na situação proposta). Assim, erros podem acontecer tanto pela existência de falhas na compreensão do conceito, como pela aplicação automática do procedimento de dupla contagem.

As questões a seguir exploraram a comparação, equivalência, adição e subtração de frações.

Figura 4 – Questão resolvida por aluno de sexto ano

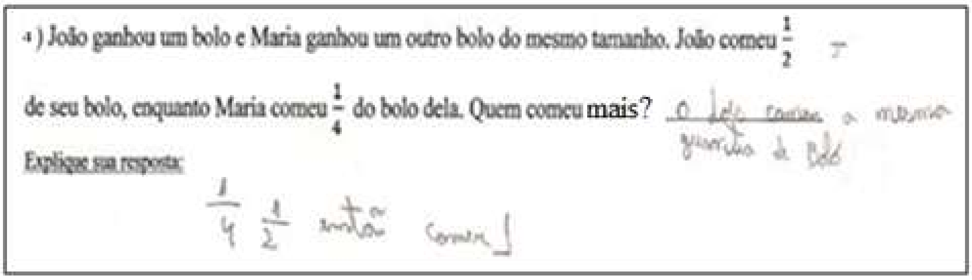


Fonte: Patrono (2011, p. 127).

Na questão 3, de modo geral, as professoras manifestam que a "justificativa" dada pelo aluno mostra que o raciocínio foi o mesmo utilizado por Amanda e Aline na questão anterior — contar partes sombreadas e não sombreadas. Novamente, elas parecem sinalizar uma visão de erro absoluto. Se a pergunta fosse, por exemplo, "Em qual deles a parte sombreada representa $\frac{2}{3}$ da parte não sombreada?", a resposta do aluno estaria correta. Logo, a ideia de certo e errado, nesses casos, é relativa à pergunta feita e demanda cuidado. Além disso, restringir a falha a uma interpretação de fração como parte-todo, perceptível nas entrelinhas das falas das professoras, pode eventualmente levar a um conflito com o subconstruto razão (no caso parte-parte), se o trabalho anterior tiver incutido nos alunos essa forma inflexível e enrijecida de interpretar uma fração.

As três questões seguintes envolveram comparação, equivalência, adição e subtração de frações. A questão 4 foi extraída da pesquisa de Patrono (2011) e as outras duas de um instrumento[vii] aplicado a alunos de quinto e sexto anos do Ensino Fundamental em 2019.

Figura 5 – Questão resolvida por aluno de sexto ano


4) João ganhou um bolo e Maria ganhou um outro bolo do mesmo tamanho. João comeu $\frac{1}{2}$ de seu bolo, enquanto Maria comeu $\frac{1}{4}$ do bolo dela. Quem comeu mais?

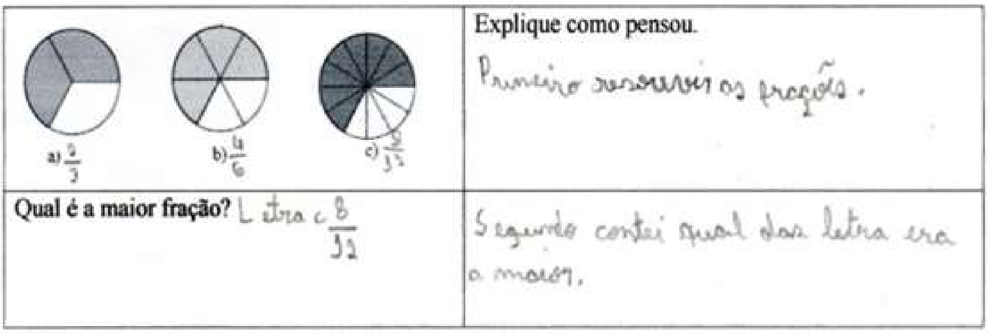
Explique sua resposta:

Fonte: Patrono (2011, p. 128).

P13 fala: "*Eu acho que ele olhou só o numerador:* $\frac{1}{4}$ *tem numerador um,* $\frac{1}{2}$ *tem numerador um. Então os dois comeram um.*" A resposta desse aluno parece evidenciar que ele analisou apenas os numeradores e que, caso tivesse considerado os denominadores (isoladamente), responderia que Maria comeu mais. É muito comum os discentes realizarem a comparação olhando só os numeradores ou só os denominadores, porque sua referência são os números naturais, parecem ainda não compreender que a notação fracionária expressa um único número. Esse é um processo que pode ser longo, especialmente se não for conduzido de modo adequado pelo docente. Assim, acostumados, por exemplo, com a relação 4>2, eles terão que compreender uma desigualdade que pode lhes soar contraditória, $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, e que supõe uma ruptura com certas ideias construídas para os números naturais (BRASIL, 1998). O tratamento independente dos numeradores e denominadores de números racionais, em relação ao qual a ordem dos naturais parece ser contraditória, é um importante fator, que costuma levar ao erro nesse tipo de questão (CERVANTES, 2010; MONTEIRO; GROENWALD, 2014; SANTOS FILHO, 2015; SILVA, 2007).

Figura 6 – Questão resolvida por aluno de quinto ano

5) Observe as figuras abaixo. Escreva as frações do todo representadas pela parte sombreada em cada uma delas e responda qual é a maior fração. Explique como pensou.



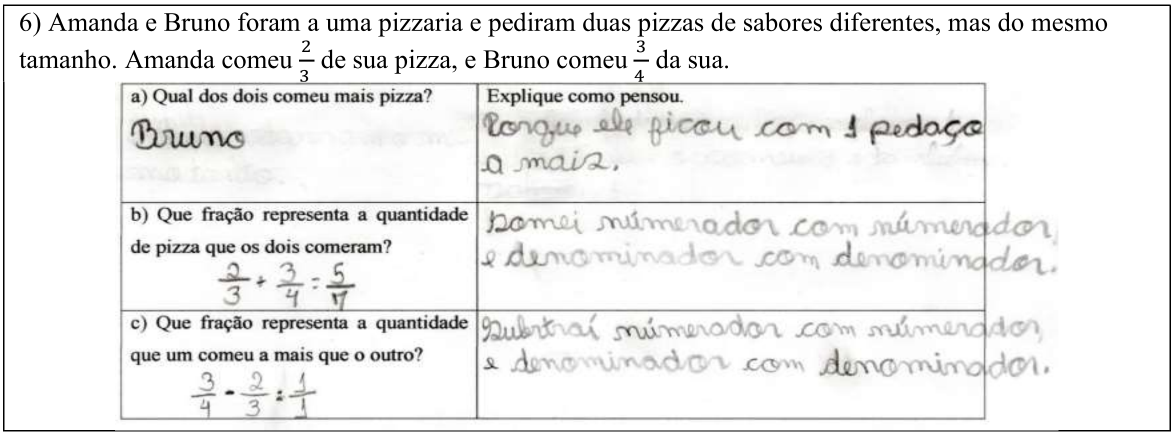
Fonte: Arquivo pessoal.

O aluno quantificou corretamente (embora, talvez, sem clareza de que estivesse de fato quantificando) a parte sombreada de cada disco, relacionando o número de partes sombreadas com o total de partes — o processo de dupla contagem pode ter sido utilizado de modo mecânico, levando, nesse caso, ao acerto. Entretanto, o estudante não percebeu que, em todos os casos, a parte sombreada equivalia à mesma porção do disco, ou seja, não percebeu que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ são frações equivalentes (do disco). A resposta do aluno revela outra maneira de pensar o numerador e o denominador da fração, ele os vê como números independentes, reduzindo, de certa forma, a ordem nas frações à ordem nos naturais (é maior a fração que tem numerador e denominador maiores).

Na questão 4, como não havia um desenho mostrando as partes que cada um comeu, parece menos conflitivo dizer que as duas pessoas comeram um bolo. Já no caso do disco, as partes do todo estão sombreadas e é possível ver (embora não seja óbvio) que elas constituem a mesma parte do disco em todos os casos. Assim, o conflito poderia aparecer, se o aluno tivesse, de alguma maneira, conhecimento do significado da fração como relação parte-todo. Nesse momento, a intervenção do professor seria essencial. Ele poderia pedir ao educando que observasse as partes quantificadas nos discos, poderia sugerir que recortasse as partes quantificadas e as colocasse uma sobre a outra. Feito isso, poderia perguntar, mais uma vez, qual é a maior e propor novas situações. Desse modo, o estudante poderia perceber que a parte quantificada do todo é a mesma, apesar de os números utilizados na expressão da quantificação serem diferentes. Esse tipo de percepção vai, aos poucos, instituindo uma nova e enriquecida associação entre uma quantidade e a fração que a expressa, ou seja, contribui para que eventualmente a fração passa a ser vista como um número.

Esses exemplos de respostas, além de mostrar os erros comuns que os alunos cometem ao comparar frações, reforçam a importância de um trabalho de ensino que leve a um entendimento do significado da fração no contexto da interpretação parte-todo (e, evidentemente, das demais interpretações também). Os exemplos também evidenciam a importância do domínio, por parte do professor, de conhecimentos matemáticos para o ensino das frações que favoreçam o reconhecimento das origens e possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos. Além disso, e talvez até mais fundamental para a aprendizagem, mostra a necessidade do domínio de conhecimentos que tornem o professor capaz de trabalhar com os alunos procedimentos e formas de raciocínio que levem não apenas ao reconhecimento, mas também à correção e superação do próprio erro cometido. Há uma vasta literatura que deixa muito claro que a superação do erro não decorre apenas do ato docente de refazer o ensino da forma conceitual ou procedimental correta para cada situação (CURY, 2012; GRAEBER; TANANHAUS, 1992).

Figura 7. Questão resolvida por um aluno de quinto ano


6) Amanda e Bruno foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas de sabores diferentes, mas do mesmo tamanho. Amanda comeu $\frac{2}{3}$ de sua pizza, e Bruno comeu $\frac{3}{4}$ da sua.

a) Qual dos dois comeu mais pizza?	Explique como pensou.
Bruno	Porque ele ficou com 1 pedaço a mais.
b) Que fração representa a quantidade de pizza que os dois comeram? $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$	Somei númerador com númerador e denominador com denominador.
c) Que fração representa a quantidade que um comeu a mais que o outro? $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{1}$	Subtraí númerador com númerador e denominador com denominador.

Fonte: Arquivo pessoal.

Apresentamos a questão com as perguntas para as professoras, solicitamos que pensassem em como os alunos responderiam, e só depois mostramos as respostas dadas por eles. As previsões feitas pelas professoras se confirmaram: (a) “*Acho que ela ia responder assim: três e quatro maior, Bruno comeu mais*” (P3); (b) “$\frac{5}{7}$, *eles somariam numerador com numerador e denominador com denominador*” (P2); (c) “*Acho que faria a subtração, três menos dois que daria um, e quatro menos três seria um, daria um e* [sobraria] *um*” (P3).

Apesar de o aluno responder corretamente quem comeu mais pizza, a explicação parece indicar que analisou apenas os denominadores. Nas letras b e c, ele somou e subtraiu os numeradores com numeradores e denominadores com denominadores, ou seja, entendeu que as operações a serem feitas com as frações eram a adição e a subtração, mas não conseguiu executar corretamente os algoritmos. Além disso, fica claro que não se deu ao trabalho (é possível que isso não tenha sido discutido com ele em sala de aula) de analisar os significados dos resultados obtidos: a resposta está errada, pois no caso da letra *c*, um não poderia ter comido uma pizza inteira a mais do que o outro e no caso da letra *b*, cada um teria comido mais do que meia pizza, logo os dois juntos teriam comido mais do que uma pizza. Llinares e Sánchez (1988, p. 158, tradução nossa) chamam atenção para a, já comentada, experiência que a criança tem com números naturais, e isso “leva a uma tendência de ver as frações como um conjunto de dois números naturais separados por um traço. A consequência é que ela tenta usar seus conhecimentos de cálculo com números naturais, extrapolando suas regras e algoritmos para o caso das frações.”

De acordo com uma visão piagetiana, a transferência de relações e regras de cálculo dos naturais para as frações se daria em função do seguinte processo: diante de uma situação nova, o aluno tende a acionar os conhecimentos que já possui, ainda que o recurso a esse conhecimento anterior provoque certo desequilíbrio na estrutura cognitiva vigente até então. O novo conhecimento demandado pela situação seria, então, construído através de um processo de adaptação e reorganização, de assimilação e acomodação. Assim, o conhecimento antigo funcionaria, ao mesmo tempo, como base para a construção do novo, mas precisaria superar, no processo, a condição inicial de obstáculo para a assimilação e acomodação desse conhecimento novo, de modo a ampliar e reequilibrar a nova estrutura cognitiva resultante (PIAGET, 1974).

O conhecimento a respeito dos erros dos alunos seria, então, parte importante dos conhecimentos profissionais dos docentes de Matemática da escola. Mas, do ponto de vista prático, cabe a pergunta: como trabalhar o erro na escola? A tendência usual do professor que não está preparado para trabalhar o erro é apontá-lo ao aluno que o cometeu e mostrar como se pode fazer do jeito certo. Opondo-se a essa visão tradicional, outra forma seria "colocar para o aluno argumentos que o façam tomar consciência dos problemas do seu raciocínio." (LA TAILLE, 1997, p. 41). Dessa forma, o trabalho do professor consistiria em levar o aluno a: perceber que houve um erro no processo; em seguida, constatar em que ponto do desenvolvimento do raciocínio o erro aconteceu (em que momento errou); e, por fim, descobrir como poderia corrigir o erro cometido.

Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que os professores devem ser capazes de ouvir e interpretar o pensamento incompleto dos alunos, e essas tarefas requerem interação entre os conhecimentos matemáticos específicos para o ensino e uma familiaridade com o pensamento matemático dos alunos. Assim, segundo esses autores, é essencial que os docentes conheçam as concepções errôneas mobilizadas pelos estudantes e seus erros mais comuns ao resolverem as tarefas que lhes são propostas.

Na questão a seguir (Figura 8), discutimos com as professoras a resolução de uma tarefa proposta por L1 e L2 a 2 crianças – uma de 8 anos de idade (terceiro ano) e outra de 11 (quinto ano). A situação foi gravada; e, nos vídeos, os licenciandos perguntam às crianças: "*De um total de cinco bolas idênticas, duas são brancas. Que fração do total de bolas as brancas representam?*".

Figura 8 – Representação feita pelas crianças de terceiro e quinto anos, respectivamente

Fonte: Dados da pesquisa da Autora 1 (2021).

A criança de 8 anos, depois de ouvir a questão, desenhou 3 bolas com canetas coloridas e 2 bolas (um pouco separadas das anteriores) com caneta preta. Circulou estas últimas e as indicou com uma seta, escrevendo acima "bolas brancas". Já a criança de 11 anos, após desenhar as 5 bolas, parou e disse: "*Espera, não tem como só duas* [bolas] *serem brancas, porque elas são idênticas. Então, obviamente, todas vão ser brancas. Se elas são idênticas, a* *cor não pode ser mudada, porque, senão, elas não vão ser idênticas. Todas são brancas, ou nenhuma é branca.*"

O foco das discussões com as professoras, no curso, foi o enunciado da questão, pois a palavra "idênticas" dificultou a interpretação da criança de 11 anos.

Sintetizando, podemos dizer que, na construção das primeiras ideias relacionadas à noção de frações, estes são, dentre outros, conhecimentos profissionais fundamentais requeridos na prática docente dos PEM: compreender e saber utilizar as diversas formas de representação e relações entre elas, tanto no contexto do modelo discreto quanto no do contínuo (incluindo o uso de material concreto, desenhos, representação simbólica); usar a linguagem no nível de precisão adequado à idade, ao conhecimento prévio e aos recursos linguísticos do estudante; conjugar a estratégia didática a ser utilizada com o objetivo a ser alcançado; identificar interpretações (subconstrutos) pertinentes às diversas situações; reconhecer as origens e possíveis causas dos erros mais comuns cometidos pelos alunos; entender que uma noção de fração restrita apenas à relação parte-todo pode limitar a compreensão do aluno; avaliar a adequação (ou inadequação) de cada uma de diferentes formas e estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem às questões que lhes são propostas. O uso precoce e sem a compreensão dos símbolos e a ênfase nos procedimentos podem levar os alunos a internalizar (inconscientemente, talvez) uma visão contraproducente do que seja aprender matemática e comprometer a aprendizagem de conteúdos posteriores (BEHR *et al*., 1983; LLINARES; SÁNCHEZ, 1988).

Considerações finais

No planejamento e realização da atividade de discussão, com as professoras participante do curso, de respostas de estudantes da Educação Básica a questões envolvendo noções básicas relacionadas ao conceito de número racional, mobilizamos diversos conhecimentos matemáticos para o ensino de frações. Ao organizar e selecionar tais tarefas, foi preciso definir por qual subconstruto começar, que conceitos abordar, que discussões desenvolver para aprofundar certos aspectos do trabalho com as frações, entre outros objetivos. Ou seja, além dos conhecimentos pertencentes ao subdomínio CCK (*Common Content Knowledge*), foram identificados, descritos e caracterizados saberes relacionados a todos os outros subdomínios do

MKT, associando-os com situações de ensino e de aprendizagem que emergiram em diferentes momentos da atividade.

As professoras participantes, por sua vez, analisaram respostas dos alunos a questões a eles propostas e, para fazer isso apropriadamente, ou seja, tomando como referência os processos de ensino e de aprendizagem, mobilizaram, de alguma forma, conhecimentos de diferentes subdomínios do conhecimento matemático para o ensino de frações. Alguns exemplos comentados neste artigo foram, entre outros, quantificar uma parte de um todo (relacionar desenho e símbolo), usar noções de equivalência, comparação e operações com frações, reconhecer a natureza de erros cometidos pelos alunos. Observamos que, no modelo MKT, tais conhecimentos se distribuem pelos subdomínios SCK, KCS e KCT. Observamos ainda que identificar a natureza dos erros cometidos pelos alunos é um passo importante no sentido de se tornar capaz de antecipar os erros mais comuns e prováveis dos estudantes ao resolverem uma questão e, a partir disso, direcionar a escolha das tarefas e da metodologia a ser usada na sala de aula (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Um conhecimento potencialmente mobilizável que se destacou nessas discussões foi o relativo aos outros subconstrutos (diferentes do parte-todo) e, entre eles, o subconstruto *razão*. Além disso, trabalhamos na elaboração junto com as participantes e através dos exemplos que se apresentaram nas discussões, da ideia de que o uso do procedimento de dupla contagem no subconstruto *parte-todo* de forma mecânica, sem uma compreensão conceitual e sem um destaque para o objetivo de quantificar o tamanho de uma parte em relação ao todo a que ela se associa (este suposto de tamanho 1), pode levar a uma quantificação inconsistente — na medida em que não se refere ao que foi pedido na situação em questão — expressa, no caso exemplificado no texto do artigo, pelo número que se refere à *relação parte-parte* em que a intepretação subjacente alinha-se ao subconstruto razão.

O presente artigo deu pistas sobre o que as professoras participantes conhecem e/ou desconhecem a respeito das frações e como reconhecem os saberes profissionais docentes requeridos na análise de respostas dadas pelos estudantes a questões do cotidiano escolar, evidenciando a necessidade de uma ampliação da formação matemática nos cursos de Licenciatura em Pedagogia. Além disso, desvelou conhecimentos matemáticos para o ensino de frações mobilizados (ou potencialmente mobilizáveis) em tarefas que envolvem a discussão de respostas de estudantes a questões sobre frações, de modo a contribuir para a defesa da ideia de que saber associar conhecimentos matemáticos com as situações de ensino nas quais estes são requeridos constitui uma forma fundamental de conhecimento profissional docente. Destacamos essas associações porque elas proporcionam meios para que o professor reconheça, contextualmente, conhecimentos cuja demanda pode não ser percebida naturalmente no dia a dia de sua prática profissional, uma vez que apresentam nuances e elaborações teóricas específicas, condicionadas pela situação de ensino em que é requerido.

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, London, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEHR, Merlyn; LESH, Richard; POST, Thomas; SILVER, Edward. Rational-Number Concepts. *In*: LESH, Richard; LANDAU, Marsha. (ed.). *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*. Florida: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. *Investigação qualitativa em educação*. Portugal: Porto Editora, 1994. p. 15-80.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CASTRO, Franciana Carneiro de; FIORENTINI, Dario. Formação docente em Matemática para os primeiros anos da escolarização: estudo comparativo Brasil-Portugal. *Revista Internacional de Educação Superior*, Campinas, v. 7, p. 1-26, 2021.

CERVANTES, Patrícia de Barros Monteiro. *Uma formação continuada sobre as frações*. 2010. 86 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

CURY, Helena Noronha. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. *In*: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (org.). *Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas*. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012. p. 19-48.

DENZIN, Norman K.; LINCOLN, Yvonna S. *Handbook of Qualitative Research*. London: Sage, 1994.

DINIZ-PEREIRA, Júlio Emílio. Formação continuada de professores. *In*: OLIVEIRA, Dalila Andrade; DUARTE, Adriana Cancella; VIEIRA, Lívia Fraga (org.). *Dicionário*: trabalho, profissão e condição docente. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010. CD-ROM. Disponível em: https://gestrado.net.br/wp-content/uploads/2020/08/10-1.pdf. Acesso em: 20/01/2023.

DONÁ, Eduardo Goedert; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Conhecimento Matemático para Ensinar Álgebra: uma análise curricular na Licenciatura em Pedagogia. *Zetetiké*, Campinas, v. 30, p. 1-9, 2022.

FERNÁNDEZ, Freidel Francisco Cano. *Unidad didáctica para la enseñanza de los fraccionarios en el grado cuarto de básica primaria*. 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales) – Universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2014.

GATTI, Bernadete Angelina. *Formação do Professor da Educação Básica: Um panorama das questões fundamentais*. 2019. 1 vídeo (41m25s). Publicado pelo canal Professor Helio Dias. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=NnZXyDT4PDM. Acesso em: 1 set. 2021.

GRAEBER, Anna O.; TANENHAUS, Elaine. Multiplication and division: from whole numbers to rational numbers. *In*: OWENS, Douglas T. (ed.) *Research ideas for the classroom*: middle grades mathematics. New York: MacMillan, 1992. p. 99-117.

KIEREN, Thomas E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, Richard; BRADBARD, David (ed.). *Number and measurement*: papers from a research workshop. Columbus: Eric/Smeac, 1976. p. 108-151.

KIEREN, Thomas E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, Thomas E. (ed.). *Recent Research on Number Learning*. Columbus: Eric/Smeac, 1980. p. 128-152.

LA TAILLE, Yves de. O erro na perspectiva piagetiana. *In*: AQUINO, Julio Groppa (org.). *Erro e fracasso na escola*: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997. p. 25-44.

LLINARES, Salvador; SANCHEZ, MariaVictoria. *Fracciones*. Madrid: Sintesis, 1988.

MONTEIRO, Alexandre Branco; GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira. Dificuldades na aprendizagem de frações: reflexões a partir de uma experiência utilizando testes adaptativos. *Alexandria*: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 7, n. 2, p. 103-135, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/download/38217/29121. Acesso em: 8 out. 2021.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

PATRONO, Rosângela Milagres. *A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental*: análise de uma proposta de ensino. 2011. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

PIAGET, Jean. *O Nascimento da Inteligência na Criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

ROGERI, Norma Kerches de Oliveira. *Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal.* 2015. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

SANTOS FILHO, Josué Ferreira dos. *Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais*. 2015. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

SILVA, Angélica da Fontoura Garcia. *O desafio do desenvolvimento profissional docente*: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de frações. 2007. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SOUTO, Nayara Mariano. *Percepções de futuros pedagogos acerca de sua formação matemática*: estudo com licenciandos de dois cursos de pedagogia de Minas Gerais. 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Ouro Preto, Mariana, 2016.

---

[i] Texto revisado por Camila Pires de Campos Freitas, formada em Letras (Habilitação Português e Espanhol) pela Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo (FFLCH/USP). *E-mail*: camilacampos.revisora@gmail.com.

[ii] Os autores agradecem a leitura atenta, bem como as críticas e sugestões dos(as) pareceristas. Elas favoreceram significativamente o aprimoramento do artigo. Contudo, as ideias expressas são inteiramente de reponsabilidade dos(as) autores(as).

[iii] Chamamos de *conhecimentos potencialmente mobilizáveis* os saberes matemáticos relevantes para o ensino de frações nos anos iniciais da Educação Básica que poderiam ter sido mobilizados nas situações analisadas, mas, em função das prioridades estabelecidas no curso ou de outros fatores circunstanciais, não o foram.

[iv] Os autores destacam que tanto o subdomínio *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo* quanto o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte foram situados de forma provisória, pois talvez pudessem pertencer a vários subdomínios.

[v] Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Ouro Preto (CAAE: 35489720.7.0000.5150) e se desenvolveu sob a orientação dos professores doutores Ana Cristina Ferreira e Plinio Cavalcanti Moreira (coorientador).

[vi] Expressar, por meio de números, a relação estabelecida entre partes de um todo e o todo, ou seja, atribuir um número ao tamanho da parte, supondo que o todo tem tamanho 1. Eventualmente, poderia se contemplar também a possibilidade de a parte ser maior que o todo, o que levaria à sua quantificação por meio da atribuição de um número maior que 1 a seu tamanho.

[vii] Instrumento composto por um grupo de questões envolvendo conceitos relativos às frações, aplicado pela pesquisadora a um grupo de alunos de quinto e sexto anos do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto, com o propósito de produzir material para o curso com as professoras.