

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

**Modelo de otimização de portfólios
restrito: um modelo para custos para
B3 e um estudo do impacto das
restrições de cardinalidade e fronteira**

Eduardo de Carvalho Chagas

Ouro Preto - MG
2023

Modelo de Otimização de Portfólios Restrito: Um Modelo Para Custos Para B3 e Um Estudo do Impacto das Restrições de Cardinalidade e Fronteira

Eduardo de Carvalho Chagas
Universidade Federal de Ouro Preto

Dissertação submetida ao
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto
para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C433m Chagas, Eduardo de Carvalho.

Modelo de otimização de portfólios restrito [manuscrito]: um modelo para custos para B3 e um estudo do impacto das restrições de cardinalidade e fronteira. / Eduardo de Carvalho Chagas. - 2023.
84 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Dr. Alan Robert Resende de Freitas.

Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Computação. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Área de Concentração: Ciência da Computação.

1. Portfólios - Otimização. 2. Otimização multiobjetivo. 3. Algoritmos. 4. Mercado financeiro. I. Freitas, Alan Robert Resende de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 004

Bibliotecário(a) Responsável: Elton Ferreira de Mattos - CRB6/2824



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO



FOLHA DE APROVAÇÃO

Eduardo de Carvalho Chagas

Modelo de otimização de portfólios restrito: um modelo para custos para B3 e um estudo do impacto das restrições de cardinalidade e fronteira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Aprovada em 01 de março de 2023

Membros da banca

Prof. Dr. Alan Robert Resende de Freitas - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Profa. Dra. Fernanda Sumika Hojo de Souza - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Rodrigo César Pedrosa Silva - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Prof. Dr. Alexandre Pimenta - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais

Prof. Dr. Alan Robert Resende de Freitas, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 17/04/2023



Documento assinado eletronicamente por **Gladston Juliano Prates Moreira, COORDENADOR(A) DE CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**, em 28/04/2023, às 14:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0515730** e o código CRC **45A75777**.

Modelo de Otimização de Portfólios Restrito: Um Modelo Para Custos Para B3 e Um Estudo do Impacto das Restrições de Cardinalidade e Fronteira

Resumo

Observa-se na literatura, um grande esforço no desenvolvimento dos modelos de otimização de portfólios buscando formas melhores de mensuração de risco ao mesmo tempo em que se buscam adicionar restrições que tornam os mesmos mais próximos de uma aplicação prática pelos investidores. Entretanto, formas de mensuração de risco mais elaboradas e novas restrições tendem a tornar os algoritmos de otimização mais complexos se fazendo necessário buscar um equilíbrio entre um modelo mais realístico e um tempo de execução computacional que seja aceitável. Além disso, o mercado de ações do Brasil possui algumas peculiaridades tributárias que podem influenciar nos resultados práticos obtidos pelo investidor, mas não foram encontrados na literatura nenhum trabalho que aborde essa especificidade. Assim, esse trabalho propõe uma modelagem matemática para o cálculo de custos de transação e tributação voltado para o mercado de ações do Brasil que é apresentado num modelo de otimização de portfólios usando o *MAD* que considera os custos de transação sujeito as restrições de cardinalidade e de fronteira. Para os testes são utilizados os algoritmos *NSGA-II* e *SPEA2* e procurou-se mensurar o impacto de cada restrição individualmente na qualidade das fronteiras Pareto e no tempo de execução do algoritmo. Notou-se que o *NSGA-II* apresentou uma vantagem em relação ao *SPEA2*; que apesar dos custos de transação impactarem no tempo de execução do algoritmo, a qualidade das fronteiras Pareto obtidas são muito próximas. Por fim, observou-se que enquanto a restrição de cardinalidade apresentou um impacto mais significativo nas métricas estudadas a restrição de fronteira não teve um impacto menos relevante.

Restricted Portfolio Optimization Model: A Cost Model for B3 and a Study of the Impact of Cardinality and Boundary Constraints

Abstract

There is a significant effort in the literature to develop portfolio optimization models that seek better ways to measure risk while adding constraints that make them closer to practical applications by investors. However, more elaborate risk measurement methods and new constraints tend to make optimization algorithms more complex, requiring a balance between a more realistic model and an acceptable computational execution time. In addition, the Brazilian stock market has some tax peculiarities that can influence the practical results obtained by investors, but no work was found in the literature that addresses this specificity. Thus, this work proposes a mathematical modeling for calculating transaction and taxation costs aimed at the Brazilian stock market, which is presented in a portfolio optimization model using MAD that considers transaction costs subject to cardinality and boundary constraints. The NSGA-II and SPEA2 algorithms are used for testing, and the impact of each constraint is measured individually on the quality of the Pareto frontiers and the algorithm's execution time. It was noted that NSGA-II presented an advantage over SPEA2, and although transaction costs impacted the algorithm's execution time, the quality of the obtained Pareto frontiers is very close. Finally, it was observed that while the cardinality constraint presented a more significant impact on the studied metrics, the boundary constraint had a less relevant impact.

Agradecimentos

Acima de tudo agradeço a Deus pelas oportunidades que me trouxeram até aqui, mas sobretudo por Ele ter abençoado minha vida colocando no meu caminho as pessoas as quais agradeço e dedico essa dissertação:

De maneira especial à minha esposa Daniela, pelo amor, carinho, companheirismo, por ter sempre acreditado em mim e me incentivado mesmo durante minhas ausências.

Minha mãe Lourdes, meu pai Hermenegildo (in memoriam) pelos exemplos de vida e por me ensinarem o valor da educação.

Ao meu irmão, meu padrasto, familiares e amigos pelo apoio constante.

À UFOP, aos professores do PPGCC/UFOP, às bancas de qualificação e de defesa e em especial ao professor Alan, pelas orientações que me ajudaram no crescimento enquanto pesquisador.

Muito Obrigado.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Nomenclatura	1
1 Introdução	3
1.1 Objetivos	5
1.2 Justificativa	6
1.3 Organização do Texto	7
2 Revisão Bibliográfica	9
2.1 O problema de otimização de portfólios	9
2.1.1 Modelos de período simples e período múltiplo	11
2.1.2 Modelos para mensuração de retorno de portfólios	12
2.1.3 Modelos para mensuração de risco de portfólios	14
2.1.4 Modelo baseado no índice Sharpe (SR)	24
2.1.5 Modelos restritos	25
2.2 Algoritmos Evolutivos	30
2.2.1 Indivíduo	31

2.2.2	População	32
2.2.3	Operadores genéticos	32
2.3	Conclusão	33
3	Metodologia	35
3.1	Modelo para cálculo dos custos de transação	35
3.2	Modelo de otimização de portfólios restrito usando o MAD	39
3.3	O Algoritmo Evolutivo aplicado à solução do modelo	42
3.4	Conclusão	47
4	Resultados	49
4.1	Instâncias	49
4.2	Experimentos	50
4.3	Resultados	53
4.3.1	Análise dos custos de transação	56
4.3.2	Análise da restrição de cardinalidade	57
4.3.3	Análise da restrição de fronteira	59
4.4	Conclusão	60
5	Considerações Finais	73
5.1	Conclusões	73
5.2	Trabalhos Futuros	74
	Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

2.1	Árvore de cenários com 3 estágios. (Fonte: Adaptado de Najafi & Mushakhian (2015)).	12
2.2	Exemplo de fronteira eficiente. (Fonte: Adaptado de Kalayci et al. (2017)).	17
2.3	Cálculo do <i>CVaR</i> usando a curva de distribuição de retornos com grau de confiança α . (Fonte: Adaptado de Rajabi & Khaloozadeh 2018).	24
3.1	Exemplo de representação de indivíduo	44
3.2	Representação esquemática do processo de criação aleatória de um indivíduo	44
3.3	Exemplo do operador de cruzamento	46
3.4	Exemplo do operador de mutação	47
4.1	Tempo de execução <i>NSGA-II</i> x <i>SPEA2</i> (Período: Junho/2022)	62
4.2	Tempo de execução <i>NSGA-II</i> x <i>SPEA2</i> (Período: Julho/2022)	63
4.3	Hipervolume <i>NSGA-II</i> x <i>SPEA2</i> (Período: Junho/2022)	64
4.4	Hipervolume <i>NSGA-II</i> x <i>SPEA2</i> (Período: Julho/2022)	64
4.5	Fronteiras Pareto <i>NSGA-II</i> x <i>SPEA2</i> (Período: Junho/2022)	65
4.6	Fronteiras Pareto <i>NSGA-II</i> x <i>SPEA2</i> (Período: Julho/2022)	65
4.7	Comparativo dos tempos de execução considerando os custos de transação	66
4.8	Comparativo do hipervolume considerando os custos de transação	66

4.9	Comparativo das fronteiras Pareto considerando os custos de transação (Período: Junho/2022)	67
4.10	Comparativo das fronteiras Pareto considerando os custos de transação (Período: Julho/2022)	67
4.11	Tempo de execução com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo	68
4.12	Hipervolume com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo	68
4.13	Comparativo das fronteiras Pareto com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Junho/2022)	69
4.14	Comparativo das fronteiras Pareto com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Julho/2022)	69
4.15	Tempo de execução com cardinalidade (K) fixa	70
4.16	Hipervolume com cardinalidade (K) fixa	70
4.17	Comparativo das fronteiras Pareto com cardinalidade (K) fixa (Período: Junho/2022)	71
4.18	Comparativo das fronteiras Pareto com cardinalidade (K) fixa (Período: Julho/2022)	71

Lista de Tabelas

4.1	Lista de ativos IBrx 100 (Data de referência: 21/01/2022). Fonte <i>B3</i> . . .	50
4.2	Parâmetros utilizados nos experimentos	51
4.3	Resultados dos experimentos	53
4.4	Comparativo dos hipervolumes obtidos com <i>NSGA-II</i> e <i>SPEA2</i> (Período: Junho/2022)	55
4.5	Comparativo dos hipervolumes obtidos com <i>NSGA-II</i> e <i>SPEA2</i> (Período: Julho/2022)	55
4.6	Comparativo dos hipervolumes obtidos desconsiderando e considerando custos de transação (Período: Junho/2022)	56
4.7	Comparativo dos hipervolumes obtidos desconsiderando e considerando custos de transação (Período: Julho/2022)	56
4.8	Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Junho/2022)	58
4.9	Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Julho/2022)	59
4.10	Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com cardinalidade (K) fixa (Período: Junho/2022)	59
4.11	Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com cardinalidade (K) fixa (Período: Julho/2022)	60

Lista de Algoritmos

3.1	Pseudocódigo do Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo (Adaptado de Kaucic, Moradi e Mirzazadeh 2019)	43
3.2	Pseudocódigo normalização de solução (Adaptado de Chang et al. (2000))	45

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

— Paulo Freire

Nomenclatura

AE	Algoritmo Evolutivo
AEM	Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo
B3	Brasil, Bolsa, Balcão
AG	Algoritmo Genético
CVAR	<i>Conditional Value-at-Risk</i>
MAD	<i>Mean-Absolute Deviation</i>
MM	<i>Minimax</i>
M-V	<i>Mean-Variance</i>
SPEA2	<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2</i>
SR	Índice <i>Sharpe</i>
S-V	<i>Semi-Variance</i>
VAR	<i>Value-at-Risk</i>
VwS	<i>Variance with Skewness</i>
NSGA-II	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm - II</i>

Capítulo 1

Introdução

Selecionar um portfólio de investimentos é uma prática bastante comum nos dias atuais, podendo ser utilizada desde pequenos investidores individuais até grandes investidores profissionais, como bancos e fundos de investimento (Ponsich et al.; 2013). A principal ideia da seleção de portfólios é alocar o capital em diferentes ativos financeiros, de forma a diluir os riscos e ao mesmo tempo maximizar os possíveis retornos (Akabay et al.; 2020).

Sabe-se, porém, que risco e retorno são objetivos conflitantes, ou seja, os ativos com maiores potenciais de retorno tendem a apresentar um risco maior. De acordo com Markowitz (1952), ao otimizar um portfólio, o investidor deseja maximizar o retorno para um dado nível tolerado de risco ou minimizar o risco para um dado retorno desejado. Dessa forma, o problema de seleção de portfólios pode ser modelado como um problema mono-objetivo, maximizando o retorno esperado ou minimizando o risco ou, ainda, como um problema de otimização multiobjetivo, onde deseja-se maximizar os possíveis retornos e ao mesmo tempo minimizar o risco.

A primeira formulação matemática para o problema de otimização de portfólios foi o modelo *Mean-Variance* ($M-V$) apresentado por Markowitz (1952). Apesar de ser um grande marco para teoria de finanças e ser amplamente utilizado nos trabalhos acadêmicos, o modelo proposto por *Markowitz* é pouco utilizado em aplicações práticas (Dastkhan et al.; 2011). As principais causas da baixa aplicabilidade prática do modelo $M-V$ são a alta complexidade computacional relacionada à resolução do problema quadrático e o grande número de parâmetros necessários, como a matriz covariância dos ativos, o que torna inviável a sua aplicação em problemas com grande número de ativos e faz com que os pesquisadores passem a buscar por modelos alternativos com

complexidade linear como o *Mean Absolute Deviation (MAD)* (Mansini and Speranza; 1999).

A partir da formalização inicial do problema de otimização, diversos pesquisadores apresentaram formulações alternativas para o modelo de mensuração de riscos e incluíram novas restrições aos modelos, a fim de torná-los mais realísticos, facilitando possíveis aplicações práticas pelos investidores. Nos trabalhos de Ertenlice and Kalayci (2018); Metaxiotis and Liagkouras (2012) observa-se que as restrições adicionais que vem sendo tratadas com maior frequência pela comunidade científica são: restrição de cardinalidade, restrição de fronteira, custos de transações e transações com lotes inteiros, sendo as duas primeiras mais recorrentes.

A restrição de cardinalidade limita o número máximo de ativos que podem compor o portfólio, buscando reduzir os custos operacionais e assim melhorando seu desempenho (Kaucic; 2019). A restrição de fronteira limita as quantidades máximas e mínimas de capital alocados por ativo, o que pode ajudar também na redução da quantidade de ativos do portfólio, diminuindo o seu custo prático ao mesmo tempo que garante uma diluição do risco entre os diferentes ativos disponíveis (Ehrgott et al.; 2004). Já a utilização dos custos de transação busca incorporar ao modelo as diversas taxas relacionadas à compra e venda dos ativos como corretagem e impostos, fazendo os modelos mais realísticos, pois na prática os custos podem impactar no rendimento real do portfólio (Ertenlice and Kalayci; 2018).

Entretanto, ao trazer modelos de mensuração de retorno esperado e de risco mais elaborados e complexos e ao adicionar restrições que tornam os modelos de otimização de portfólios mais realísticos, pode ocorrer um grande aumento na complexidade computacional. Com isso, faz-se necessário entender o impacto de cada restrição no tempo de execução e na qualidade das fronteiras Pareto obtidas, a fim de buscar um equilíbrio entre um modelo de otimização realístico e um tempo de execução aceitável dado o grande dinamismo na variação de preços dos ativos.

Dada a complexidade do problema de otimização de portfólios, observa-se que os Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (*AEMs*) têm sido uma abordagem comum nos trabalhos publicados na literatura especializada (Gunjan and Bhattacharyya; 2022). No trabalho de Anagnostopoulos and Mamanis (2011) é apresentado um estudo comparativo de diversos *AEMs* na solução do modelo *M-V* com restrição de cardinalidade, tendo sido observado que o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)* (Deb et al.; 2000) e o *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2)* (Zitzler et al.;

2001) apresentaram melhores resultados.

Diante do contexto apresentado anteriormente, na tentativa de analisar um modelo prático de otimização de portfólios, esta pesquisa apresenta um estudo de caso de utilização do *MAD* para estimar o risco dos ativos. Para deixar o modelo teórico mais próximo da aplicação prática, este trabalho propõe um modelo de custos de transação e tributação que considera as peculiaridades da legislação brasileira para cálculo de impostos na compra e venda de ações da bolsa brasileira, a Brasil, Bolsa, Balcão (*B3*). Na resolução do modelo são utilizados os algoritmos *NSGA-II* e *SPEA2* de forma a se permitir uma comparação entre eles. Além disso, são apresentados estudos do impacto das restrições de cardinalidade, fronteira e custos de transação incluindo os custos tributários, no tempo de execução e na qualidade das fronteiras Pareto. Por fim, nos testes do modelo proposto são utilizados dados históricos de ações de empresas brasileiras listadas na *B3*.

Essa abordagem é interessante por trazer uma aplicação prática utilizando dados reais da *B3*, associada a uma modelagem linear usando *MAD* e a uma abordagem usando um algoritmo multiobjetivo, buscando assim encontrar boas soluções num tempo hábil. Da análise dos resultados, verifica-se que o *NSGA-II* obtém resultados muito próximos ao *SPEA-2*, mas o primeiro supera o segundo por apresentar um tempo de execução muito menor. Ao verificar o impacto dos custos de transação nas instâncias de testes utilizadas, verifica-se que, embora os modelos que consideram os custos de transação apresentem um tempo de execução maior, o impacto na qualidade das fronteiras Pareto não é expressivo. Por fim, são analisados os impactos das restrições de fronteira e de cardinalidade verificando-se que, embora ambas restrições impactem no tempo de execução e na qualidade das fronteiras Pareto, a restrição de cardinalidade influencia mais significativamente do que a restrição de fronteira.

1.1 Objetivos

Este trabalho apresenta um modelo de otimização de portfólios sujeito às restrições de cardinalidade, fronteira e custos de transação e tem como objetivos:

1. Apresentar um modelo para inclusão dos custos de transação voltado para as ações das empresas brasileiras negociadas na *B3*, buscando incorporar uma aproximação dos custos e taxas de corretagem e impostos, considerando a especificidade disposta

na Lei 9.250/1995 (Brasil; 1995), que prevê a isenção de imposto caso o volume de vendas seja inferior a R\$20.000,00;

2. Verificar o impacto dos custos de transação na qualidade das fronteiras Pareto obtidas e no tempo de execução do algoritmo;
3. Identificar o impacto da variação dos parâmetros das restrições de fronteira, cardinalidade e custos de transação no tempo de execução do algoritmo;
4. Entender o efeito dos parâmetros de cada restrição individualmente na qualidade das fronteiras Pareto obtidas.

1.2 Justificativa

A principal contribuição pretendida com esse trabalho é a apresentação de um modelo para incorporação dos custos de transação, voltado para as ações negociadas na $B3$ e que inclua os custos de transação e custos tributários. Além disso, busca-se compreender como cada restrição estudada impacta individualmente e em conjunto às demais no tempo de execução do algoritmo e na qualidade das fronteiras Pareto obtidas. Acredita-se que esse trabalho é relevante para tornar os modelos de otimização mais realísticos e que, por meio dele, se possa entender como a adição de novas restrições impacta os modelos de otimização de portfólio. Com isso, espera-se obter um modelo mais prático e próximo da realidade dos investidores, tentando equilibrar um alto grau de realismo com um tempo de execução computacional que seja aceitável.

Por fim, cabe mencionar que a pesquisa realizada durante o mestrado resultou na seguinte publicação:

- Chagas, E. C., Freitas, A R. (2022). Modelo de Otimização de Portfólios Restrito Usando MAD: Um Estudo Do Impacto das Restrições de Cardinalidade e de Fronteira. *Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO'22)*.
URL: <https://proceedings.science/p/157407>

1.3 Organização do Texto

O texto encontra-se organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica do problema de otimização de portfólios, bem como as diversas abordagens encontradas na literatura e alguns conceitos importantes para a compreensão das metodologias adotadas nesse trabalho. No Capítulo 3 é discutida a metodologia utilizada para tratar o problema de otimização de portfólios e exposto o modelo de cálculo dos custos de transação e taxação proposto na pesquisa. No Capítulo 4 são apresentadas as instâncias de testes e os resultados computacionais obtidos. Por fim, são indicadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros no Capítulo 5.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este trabalho apresenta uma abordagem do problema de otimização de portfólios restrito. Assim nesse capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica de abordagens apresentadas na literatura para esse problema.

2.1 O problema de otimização de portfólios

A principal ideia da seleção de portfólios é alocar o capital em diferentes ativos financeiros, de forma a diluir os riscos e ao mesmo tempo maximizar os retornos (Akbay et al.; 2020). Normalmente, ao otimizar um portfólio de investimentos deseja-se conseguir uma alocação de ativos ótima que traga um equilíbrio entre risco e retorno, buscando o maior retorno possível para um dado limite de risco aceito pelo investidor, ou, o menor risco possível para uma dada expectativa de retorno do investidor.

A formulação genérica adaptada de Skolpadungket et al. (2007) desse problema é dada por:

$$\arg \min R(w_i), \tag{2.1}$$

$$\arg \max E(w_i). \tag{2.2}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
 & C_1(w_i), \\
 & C_2(w_i), \\
 & \dots \\
 & C_m(w_i), \\
 & i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

De maneira geral, sendo o número total de ativos N , o número de restrições igual a m e w_i a porcentagem de capital alocado em cada ativo i , temos nesse modelo que se deseja minimizar o risco dado por $R(w_i)$ (Equação 2.1), maximizar o retorno esperado $E(w_i)$ (Equação 2.2), respeitando as m restrições dadas pelas equações de $C_1(w_i)$ até $C_m(w_i)$ (Equação 2.3).

Até meados de 1950, a principal metodologia utilizada na seleção de portfólios de investimentos baseava-se apenas em selecionar os ativos com maior expectativa de retorno (Oliveira; 2013). Esse cenário mudou a partir do trabalho de Markowitz (1952) em que é apresentada a primeira formulação matemática para o problema de otimização de portfólios. Em seu trabalho, *Markowitz* considera que o investidor tem aversão a risco e, por isso, busca uma alocação ótima em que, para uma determinada expectativa de retorno, obtenha-se o menor risco possível (Ertenlice and Kalayci; 2018).

A primeira formulação matemática para esse problema foi apresentada por Markowitz (1952) e utilizava a variância como medida de risco não-sistemático do portfólio (Ertenlice and Kalayci; 2018). Na formulação proposta por *Markowitz* (1952), modelo conhecido como *Mean-Variance (M-V)*, o retorno do portfólio é estimado com base na média de rendimentos passados dos ativos que o compõe e o risco é mensurado utilizando-se a variância total do portfólio (Chang et al.; 2000). Ao minimizar a variância espera-se proteger a carteira de investimentos de fortes variações negativas.

Partindo desse primeiro trabalho, observa-se um grande engajamento da comunidade científica no sentido de trazer cada vez mais avanços ao problema de otimização de portfólios (Doering et al.; 2019). Ao longo dos anos, com o intuito de responder as críticas ao *M-V* diversos trabalhos foram apresentados na literatura como por exemplo *Mean-Absolute Deviation (MAD)* (Konno and Yamazaki; 1991), *Variance with Skewness*

(*VwS*) (Samuelson; 1970), *Semi-Variance (S-V)* (Markowitz; 1959), *Minimax (MM)* (Young; 1998), *Value-at-Risk (VaR)* (Jorion; 1997) e *Conditional Value-at-Risk (CVaR)* (Rockafellar and Uryasev; 2000).

Para mensuração do retorno esperado, Markowitz (1952) apresenta uma formulação baseada na média de retornos passados, mas também são encontradas na literatura abordagens alternativas como retorno médio do último ano (Ehrgott et al.; 2004).

As restrições originalmente acrescentadas ao modelo de otimização de portfólio por *Markowitz* são responsáveis por adicionar algumas características ao modelo, como a alocação de todo capital disponível e não permitir que existam posições vendidas no portfólio. Entretanto, com o intuito de fazer os modelos mais próximos da realidade dos investidores, diversas restrições adicionais foram propostas na literatura como restrição de cardinalidade, restrição de fronteira, custos de transação e restrição de transações em lotes inteiros (Ertenlice and Kalayci; 2018).

Por fim, um modelo de otimização de portfólios pode utilizar uma abordagem de período simples, ou seja, otimizando um único período de tempo, ou uma abordagem multi-período na qual se deseja otimizar uma série de intervalos de tempo.

Dessa forma, observa-se que os modelos para otimização de portfólios apresentados na literatura diferem entre si, principalmente no período que se deseja otimizar (um único período ou um intervalo multi-período); na forma como mensuram o retorno esperado do portfólio; pela forma com que eles mensuram o risco total da carteira de investimentos; na função objetivo do modelo; e nas restrições que podem ser adicionadas aos modelos para torná-los mais próximos à realidade dos investidores. Assim, neste trabalho, descreveremos a seguir as diferenças listadas acima, analisando os pontos positivos e negativos de cada uma delas.

2.1.1 Modelos de período simples e período múltiplo

São apresentadas na literatura duas abordagens na formulação do problema de otimização de portfólios: a restrita a um único período de tempo e a multi-período que busca otimizar um período de tempo de T períodos. A principal diferença entre os dois modelos é que nas abordagens que consideram um período único, caso se deseje obter um portfólio ótimo para o período T com n intervalos de tempo t , devem-se realizar n otimizações independentes para cada intervalo t , enquanto nos modelos multi-período todo período T é considerado na instância (Ertenlice and Kalayci; 2018).

Embora a maioria dos trabalhos apresentados na literatura abordem modelos de otimização de portfólios considerando um único intervalo de tempo t , a abordagem multi-período pode ser mais adequada à realidade dos investidores, pois na prática deseja-se estimar o retorno e risco ao longo de um determinado período de tempo, incluindo os possíveis rebalanceamentos da carteira ao longo desse período (Najafi and Mushakhian; 2015).

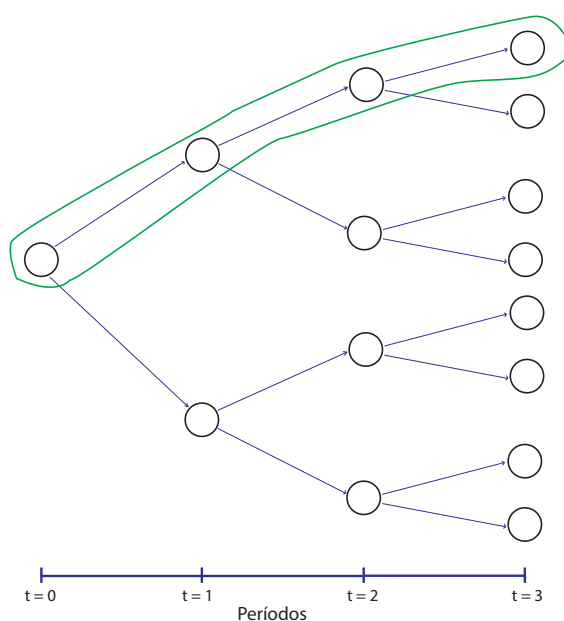


Figura 2.1: Árvore de cenários com 3 estágios. (Fonte: Adaptado de Najafi & Mushakhian (2015)).

De maneira geral, quando se utiliza a modelagem de tempo multi-período criam-se cenários possíveis S para cada intervalo t , sendo que a probabilidade da ocorrência de cada cenário é dada por p_s . Na Figura 2.1 é apresentada uma árvore com três estágios, sendo cada nó um possível cenário. Considerando que a probabilidade de cada cenário $p_s = 50\%$ (alta ou baixa do portfólio no intervalo t), ao resolver o modelo espera-se obter um resultado ótimo para o portfólio para todo período T (Najafi and Mushakhian; 2015).

2.1.2 Modelos para mensuração de retorno de portfólios

De maneira geral, tendo m ativos disponíveis, os modelos de otimização estimam o retorno do portfólio através do somatório da porcentagem de capital alocado por cada ativo (w_i) pelo retorno esperado do ativo (ret_i) como mostrado na Equação 2.4. Na

literatura são apresentadas diferentes maneira para o cálculo do retorno esperado dos ativos que serão apresentadas a seguir.

$$E = w_1ret_1 + w_2ret_2 + \dots + w_mret_m. \quad (2.4)$$

A forma clássica de mensuração de retornos para um ativo financeiro é apresentada por Markowitz (1952). Nessa formulação, tendo os dados históricos de rendimentos para um dado período de tempo T com n intervalos de tempo t , temos que o retorno esperado ret pode ser definido por:

$$ret = p_1r_1 + p_2r_2 + \dots + p_nr_n. \quad (2.5)$$

Considerando p_n a probabilidade do retorno r_n ocorrer em cada intervalo de tempo t , observa-se na Equação 2.5 que se considerarmos que cada retorno r_n tem a mesma probabilidade de ocorrer ($1/n$), o cálculo do retorno esperado do ativo (ret) pode ser simplificado para a média dos n retornos passados do ativo ou portfólio (Equação 2.6. Embora o método baseado no retorno médio seja amplamente utilizado, esse método pode não obter resultados satisfatórios especialmente quando se tem uma amostra de dados pequena (Ong et al.; 2005).

$$ret = \frac{1}{n}r_1 + \frac{1}{n}r_2 + \dots + \frac{1}{n}r_n = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}. \quad (2.6)$$

São apresentadas também modelos alternativos para mensuração de retorno dos ativos: doze meses de performance (ret_i^{12}), três anos de performance (ret_i^{36}) e dividendo anual (d_i) (Ehrgott et al.; 2004).

Sendo ret_i^{12} o retorno percentual esperado do ativo i , $price_{T,1}$ o preço desse ativo no intervalo T , considera-se que o retorno esperado do ativo será igual ao retorno dos últimos doze meses:

$$ret_i^{12} = \frac{price_{12,i} - price_{1,i}}{price_{1,i}}. \quad (2.7)$$

De maneira similar ao ret_i^{12} o ret_i^{36} tem o retorno esperado por ativo calculado como:

$$ret_i^{36} = \frac{price_{36,i} - price_{1,i}}{price_{1,i}}. \quad (2.8)$$

Já o modelo de dividendo anual é calculado usando o maior preço do ativo no último ano (p_i^h) e o rendimento anual nominal do ativo i ($d_i^a = price_{12,i} - price_{1,i}$). De forma que o dividendo anual é dado por:

$$d_i = \frac{d_i^a}{p_i^h}. \quad (2.9)$$

2.1.3 Modelos para mensuração de risco de portfólios

Uma medida de risco tradicional associada ao portfólio de investimentos é a variância, também chamada de volatilidade (Ruttiens; 2013). A ideia central dos modelos baseados em variância é considerar que os investidores tem aversão ao risco, assim ao minimizar a variância, espera-se obter uma carteira que não apresenta variações negativas muito elevadas. Nessa categoria estão inclusos o *Mean-Variance (M-V)* (Seção 2.1.3), *Mean-Absolute Deviation (MAD)* (Seção 2.1.3) e *Variance with Skewness (VwS)* (Seção 2.1.3).

Uma crítica comum aos modelos de mensuração de risco baseados em variância é o fato de considerar as variações positivas e negativas igualmente como medidas de risco. Assim, respondendo a essa crítica, são apresentadas abordagens para mensuração de risco baseadas nos retornos negativos do portfólio. Nessa abordagem pressupõe-se que, na prática, os investidores consideram como risco somente as possíveis variações negativas do portfólio (Najafi and Mushakhian; 2015). Nessa categoria estão inclusos o *Semi-Variance (S-V)* (Seção 2.1.3), *Minimax (MM)* (Seção 2.1.3), *Value-at-Risk (VaR)* (Seção 2.1.3) e *Conditional Value-at-Risk (CVaR)* (Seção 2.1.3).

Além disso, é sabido também que o risco geral de um portfólio de ativos pode ser

dividido em risco não-sistemático e risco sistemático. O risco não-sistemático é o risco aleatório associado a um ativo ou setor da economia que pode ser eliminado usando estratégias de diversificação da carteira de ativos. Já o risco sistemático é o risco associado ao mercado como um todo, de forma que não pode ser minimizado com uma estratégia de diversificação, mas pode ser devidamente administrado (Li et al.; 2019).

Risco sistemático pode ser um conceito difícil de definir, pois não existe um consenso quanto à sua definição. As definições encontradas na literatura são: qualquer circunstância que ameace o sistema financeiro; risco de instabilidade financeira; desequilíbrios; exposições correlacionadas; efeitos indiretos da economia real; análise comportamental; bolhas especulativas; contágio financeiro; e fatores externos que podem impactar negativamente o sistema financeiro (Bisias et al.; 2012). Essa lista mostra que o risco sistêmico ainda não é completamente compreendido, o que pode tornar sua mensuração um grande desafio.

Na tentativa de compreender melhor o risco sistemático de portfólios de investimentos, podemos dividi-lo em três modelos, sendo que cada modelo descreve um fator relacionado ao risco sistemático. O primeiro fator de risco é associado aos fundamentos dos ativos, como preço e tamanho da empresa. O segundo fator está relacionado a fatores macroeconômicos como taxas de juros e inflação. O terceiro fator de risco está relacionado a dados estatísticos, ou seja, busca identificar padrões de comportamento através da análise estatística dos ativos e do mercado financeiro (Li et al.; 2019).

Dada essa distinção de risco não-sistemático e risco sistemático e levando-se em consideração que ambos têm natureza diversa e formas distintas de abordagem do problema, este trabalho limitará seu escopo a modelos voltados para mensuração do risco não-sistemático que serão descritos nas seções seguintes.

Mean-Variance (M-V)

O modelo *Mean-Variance* ou média variância foi proposto por Markowitz em 1952 e foi o primeiro a trazer uma representação matemática para o problema de otimização de portfólios (Qu et al.; 2017). Esse modelo considera a variância total do portfólio como medida de risco (Dastkhan et al.; 2011).

Em sua formulação original, Markowitz (1952) assumia que o investidor deseja um portfólio ótimo que, para uma dada expectativa de retorno, busca minimizar os riscos de perdas financeiras (Ponsich et al.; 2013). O modelo de Markowitz é definido da seguinte

forma (Chang et al.; 2000):

$$\arg \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}. \quad (2.10)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N w_i ret_i = R^*, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (2.12)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

Sendo N o número de ativos disponíveis, ret_i o retorno esperado do ativo i , σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j , R^* o retorno desejado e w_i a proporção do capital a ser alocada no ativo i (Chang et al.; 2000). Pela Equação 2.10 pode-se observar que o modelo define a covariância (σ_{ij}) entre os ativos como medida de risco para o portfólio de forma que, ao minimizar a covariância total do portfólio, o modelo busca proteger a carteira de investimentos de variações negativas muito acentuadas.

Como restrição, o modelo traz na Equação 2.11 que o retorno total do portfólio deve ser igual a um valor pré-estabelecido R^* . E esse valor é obtido pelo somatório da quantidade de cada ativo i expressa por w_i multiplicado pelo seu retorno esperado (μ_i), sendo que este pode ser calculado com base na média de rendimentos passados desse ativo. Na Equação 2.12 tem-se também que o somatório das quantidades de capital alocadas por ativo (w_i) deve ser igual a 1, o que significa que todo capital disponível deve ser alocado.

É importante destacar que variando-se o valor de R^* na Equação 2.13, pode-se traçar

a curva da fronteira eficiente ou Pareto ótima (Figura 2.2), que representa o melhor equilíbrio possível do portfólio entre risco e retorno (Chang et al.; 2000).

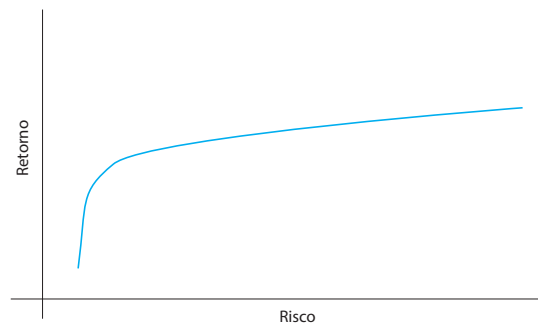


Figura 2.2: Exemplo de fronteira eficiente. (Fonte: Adaptado de Kalayci et al. (2017)).

Uma crítica a esse modelo é utilizar a variância como medida de risco, pois ao minimizar a variância, busca-se reduzir as variações abruptas na carteira de investimentos. No entanto, de maneira geral, fortes variações positivas são desejadas pelos investidores (Macedo et al.; 2017). Outra crítica comum a esse modelo é considerar que o retorno dos ativos segue a distribuição normal, o que raramente acontece de fato (Chang et al.; 2009). Além disso, o modelo faz suposições não condizentes com o mercado real de ativos financeiros, como não estipular uma limitação da quantidade de ativos que irão compor o portfólio, considerar que ativos são negociados normalmente em lotes fracionados, levar em conta os custos das transações na performance do portfólio, entre outras (Chen and Zhou; 2019).

Mean-Absolute Deviation (MAD)

O *Mean-Absolute Deviation* ou *MAD* foi proposto originalmente por Konno & Yamazaki (1991) como um modelo alternativo ao *Mean-Variance* de Markowitz (Chang et al.; 2009). A principal diferença do *MAD* em relação ao *M-V* é utilizar o desvio médio absoluto dos retornos como medida de risco do portfólio (Ertenlice and Kalayci; 2018).

A formulação original desse modelo é dada por (Dastkhan et al.; 2011):

$$\arg \min H(w) = \left\| \left[\sum_{i \in S} ret_{it} w_i - E \left[\sum_{i \in S} ret_i w_i \right] \right] \right\|. \quad (2.14)$$

Onde w_i é a quantidade de lotes de cada ativo i e ret_i é a variável que representa os retornos esperados desse ativo. Uma forma comum de se estimar ret_i é utilizar os dados históricos. Assim para T períodos de tempo e sendo ret_{it} o retorno do ativo i para cada intervalo t em T , o cálculo do retorno pode ser expressado da seguinte forma (Dastkhan et al.; 2011):

$$ret_i = \frac{\sum_{t=1}^T ret_{it}}{T}. \quad (2.15)$$

Substituindo a Equação 2.15 na Equação 2.14, pode-se reescrever a equação de risco da seguinte forma:

$$H(w) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i \in S} (ret_{it} - ret_i) w_i \right|. \quad (2.16)$$

Ao analisar a Equação 2.16 pode-se observar que a medida de risco proposta pelo *MAD* é o desvio absoluto da média de retornos para um período de tempo T . Entretanto para o caso dos retornos dos ativos seguirem a distribuição normal, o *MAD* se equivale ao *M-V* (Dastkhan et al.; 2011). Porém, por poder ser reduzido a um problema de programação linear, o *MAD* tem um custo computacional para solução melhor do que o *M-V* que tem um custo computacional quadrático e portanto mais elevado (Wang et al.; 2011).

Uma crítica que pode ser feita a esse modelo é similar ao modelo *M-V*, pois ao usar o desvio absoluto da média como medida de risco tenta-se minimizar as possíveis fortes variações no preço dos ativos, sendo que, no entanto, fortes variações positivas são desejadas pelos investidores.

Variance with Skewness(VwS)

O modelo *Variance with Skewness* ou *VwS* foi apresentado por Samuelson (1970). Sua principal contribuição é adicionar a análise da assimetria dos retornos do portfólio como medida adicional para mensuração de risco, pois ao selecionar carteiras de investimentos que apresentam uma distribuição de retornos com assimetria positiva, ou seja, com os valores dos retornos concentrados acima da média, espera-se diminuir o risco de perdas financeiras (Chang et al.; 2009).

A formulação desse modelo¹ é dada por (Lai; 1991):

$$\arg \max \mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}^T (\mathbf{R} - \mathbf{r}), \quad (2.17)$$

$$\arg \max \mathbf{Z}_3 = E[\mathbf{X}^T (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R})]^3. \quad (2.18)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X} = 1. \quad (2.19)$$

Na Equação 2.17 tem-se que o modelo busca maximizar o retorno do portfólio, sendo \mathbf{X}^T a matriz transposta que representa a quantidade de cada ativo x_i e $(\mathbf{R} - \mathbf{r})$ o retorno esperado desses ativos. Na Equação 2.18, \mathbf{Z}_3 representa a assimetria e ao maximizá-la espera-se fazer com que a distribuição de retornos do portfólio se concentre acima da média. Já na Equação 2.19, sabendo que \mathbf{V} é a matriz de covariância dos ativos e \mathbf{X} o vetor com as quantidades de cada ativo alocado no portfólio, tem-se que essas quantidades devem ser reescaladas e restritas ao espaço de covariância para tentar limitar a variância total do portfólio e esse valor deve ser igual a 1, indicando que todo capital deve ser alocado (Lai; 1991).

Apesar de ter um custo computacional superior que o *M-V*, são apresentadas na literatura evidências que mostram que incorporar a assimetria no modelo de *M-V* pode

¹As equações em negrito indicam notação vetorial.

melhorar significativamente o desempenho do portfólio (Usta and Kantar; 2011).

Semi-Variance (S-V)

O modelo *Semi-Variance* ou *S-V* foi apresentado por Markowitz (1959) como uma alternativa para mensurar o risco de variações negativas do portfólio. Para isso, o modelo de *Semi-Variance* tenta minimizar a dispersão dos retornos do portfólio abaixo da média, mas sem penalizar as variações acima da média (Najafi and Mushakhian; 2015).

Assim para uma dada janela de tempo T , sendo \bar{ret} o retorno médio do portfólio nesse período e ret_t o rendimento do portfólio em cada intervalo t em T , o risco do portfólio medido pela *S-V* é dado por (Chang et al.; 2009):

$$\sum_{t=1; ret_t < \bar{ret}}^T \frac{(ret_t - \bar{ret})^2}{T}. \quad (2.20)$$

Onde a média de retornos ret_t é calculada por:

$$\bar{r} = \sum_{t=1}^T \frac{ret_t}{T}. \quad (2.21)$$

Ao analisar a Equação 2.20 podemos observar que o modelo *S-V* descarta os valores em que o retorno é superior à média ($ret_t \geq \bar{ret}$) de forma a não penalizá-los como no modelo *M-V*. Entretanto, ao comparar os resultados obtidos com o *S-V* e o *M-V* para carteiras com grande números de ativos, foi observado que não havia diferenças significativas entre eles, porém o *S-V* supera o *M-V* por ter um custo computacional menor (Chang et al.; 2009).

Minimax (MM)

O modelo *Minimax* ou *MM* foi desenvolvido por Young (1998) e busca apresentar uma solução para otimização de portfólios usando programação linear (Chang et al.; 2000). Para isso, esse modelo utiliza como medida de risco o maior prejuízo histórico do portfólio

sujeito a restrição de que os retornos em cada período devem ser superiores a um valor mínimo pré-estabelecido. A formulação desse modelo é apresentada a seguir (Young; 1998):

$$\arg \max_{M_p, W} M_p. \quad (2.22)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j \bar{y}_j - M_p \geq G, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=1}^N w_j \leq W, \quad (2.24)$$

$$w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.25)$$

Na Equação 2.22, M_p é o menor retorno do portfólio que pode ser definido como “maior ganho negativo”, de forma que ao maximizar esse “ganho negativo” espera-se minimizar o maior prejuízo. Na equação 2.23 têm-se que o retorno do portfólio para cada período de tempo t subtraído da perda máxima deve superar um valor pré-estabelecido G . Por fim, nas Equações 2.24 e 2.25 tem-se respectivamente que o total alocado por ativo (w_j) não pode superar o montante de capital W e que a carteira não pode ter posições vendidas ($w_j \geq 0$) (Young; 1998).

Value-at-Risk(VaR)

O *Value-at-Risk* ou *VaR*, é um modelo alternativo à média-variância para estimar o risco associado a um portfólio de maneira mais realista (Ertenlice and Kalayci; 2018). Resumidamente, o *VaR* busca medir o maior prejuízo que o portfólio pode sofrer com uma determinada probabilidade (Wang and Watada; 2013).

A maneira mais comumente usada para calcular o VaR de um ativo ou de um portfólio é chamada de simulação histórica (Khalidji et al.; 2009). Essa abordagem baseia-se no conceito de janelas deslizantes de tempo. Assim, para calcular o VaR para uma data $t + 1$, usando uma janela deslizante de m períodos, obtém-se inicialmente o conjunto de retornos passados $R = \{ret_t, ret_{t-1}, \dots, ret_{t-m+1}\}$. Em seguida, esses retornos são classificados em ordem crescente de forma que os dias mais negativos ficam nas primeiras posições do conjunto. A seguir, determina-se o grau de confiança que se deseja obter do VaR . Se, por exemplo, numa janela de 1000 dias deseja-se mensurar o risco máximo com uma confiança (α) de 95%, divide-se o conjunto R já ordenado em $(1 - \alpha)$ de forma que nesse exemplo com m igual a 1000, o 50^o elemento (r^*) de R obtido é o risco associado àquele conjunto. Assim temos que: $VaR(95\%) = r^*$ de forma que podemos entender que com um grau de confiança de 95% o risco máximo por unidade de tempo t é r^* .

Um modelo para otimização de portfólios é mostrado a seguir (Khalidji et al.; 2009):

$$\arg \max \{E[R_{t+1}(w)]\}, \quad (2.26)$$

$$\arg \min \{Risk[R_{t+1}(w)]\}. \quad (2.27)$$

sujeito a:

$$0 \leq w \leq 1, \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (2.29)$$

Dessa forma, temos um problema bi-objetivo: maximizar o retorno esperado (Equação 2.26) e minimizar o risco (Equação 2.27), o qual pode ser calculado usando o VaR . Esse modelo está sujeito às restrições de que o montante de capital alocado por ativo deve

estar entre 0 e 1 (Equação 2.28), o que implica que não pode haver posições negativas, ou seja, posições vendidas. E por último, na Equação 2.29 temos a restrição de que todo capital disponível deve ser alocado.

As principais críticas ao VaR são: a falta de subaditividade, que pode fazer com que a diversificação leve a um aumento no risco total do portfólio; é um modelo não convexo com diversos mínimos locais, o que dificulta encontrar o ponto ótimo global; e pode encontrar resultados conflitantes para os diferentes níveis de confiança (Dallagnol et al.; 2009).

Conditional Value-at-Risk(CVaR)

Esse modelo para mensuração de risco foi proposto por Rockafellar & Uryasev (2000) buscando ser uma medida de risco mais consistente que o VaR . Embora o VaR possa ser adequado para mensurar o risco em situações normais de mercado, em momentos extremos que pode resultar num rápido crescimento na volatilidade dos preços dos ativos, o $CVaR$ pode fornecer uma medida de risco mais acurada (Sun and Gao; 2009).

O $CVaR$ é usualmente definido como expectativa condicional para perdas acima do VaR para distribuições contínuas, podendo ser expressado da seguinte forma (Chai and Zhou; 2018):

$$CVaR_p(1 - \alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 VaR_p(w)dw. \quad (2.30)$$

A Figura 2.3 apresenta graficamente a distribuição dos retornos do ativo e a forma como o VaR é obtido a partir do ponto $(100 - \alpha)\%$ sendo α o grau de confiança desejado. Partindo da Equação 2.30, a integral pode ser estimada de várias formas, sendo uma delas convertendo-a em um somatório (Rajabi and Khaloozadeh; 2018). Assim uma das formas de se calcular o $CVaR$ é realizar um somatório de VaR de 100 até $(100 - \alpha)$ de forma que graficamente o $CVaR$ pode ser visto como a área sob a curva entre esses pontos. O autor destaca ainda que a precisão dessa aproximação é melhor quando se tem mais pontos na amostra.

O $CVaR$ pode ser considerado uma medida para mensuração do risco mais adequada quando comparado ao VaR , sendo uma característica importante do $CVaR$ a

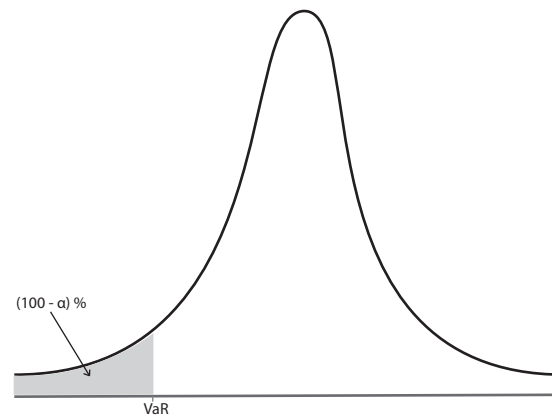


Figura 2.3: Cálculo do *CVaR* usando a curva de distribuição de retornos com grau de confiança α . (Fonte: Adaptado de Rajabi & Khaloozadeh 2018).

convexidade, o que auxilia no processo de otimização na procura do ponto ótimo global (Rockafellar and Uryasev; 2000).

2.1.4 Modelo baseado no índice Sharpe (SR)

O índice Sharpe ou *SR* foi proposto por Sharpe (1965) como medida de performance para fundos de investimento. O índice Sharpe pode ser visto como o retorno do portfólio acima de uma taxa livre de riscos dividido pela variância ou volatilidade da carteira de investimentos. Dessa forma, quanto maior o *SR* de um portfólio maior seu retorno acima de uma taxa livre de risco e menor a sua volatilidade (Lai et al.; 2019).

Sendo r_x o retorno do portfólio, R_f a taxa livre risco e σ_x a variância do portfólio, a formulação matemática do índice Sharpe pode ser vista na Equação 2.31 mostrada a seguir (Lai et al.; 2019):

$$SR = \frac{r_x - R_f}{\sigma_x}. \quad (2.31)$$

Nos trabalhos apresentados por Lai et al. (2019); Sethia (2018); Zhu et al. (2011) são utilizados modelos para otimização de portfólio baseados na maximização do *SR*. A formulação matemática desse modelo é dada por:

$$\arg \max SR = \frac{\sum_{i=1}^N w_i r_i - R_f}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}. \quad (2.32)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (2.33)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad (2.34)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (2.35)$$

A Equação 2.32 busca maximizar o SR , sendo N o número total de ativos no portfólio, r_i e w_i respectivamente o rendimento esperado e a porção do capital aplicado no ativo i e σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j . Como restrições tem-se na Equação 2.33 que todo o capital deve ser alocado, que a porção de capital alocado em cada ativo deve estar entre 0 e 1 (Equação 2.34), o que implica que não podem ocorrer posições vendidas e que o número total de ativos é igual a N (Equação 2.35).

2.1.5 Modelos restritos

Ao utilizar os modelos mostrados anteriormente, muitos investidores podem encontrar dificuldades, pois não consideram particularidades importantes dos ativos, como negociação em lotes inteiros, ou características do mercado como custos das operações. Para superar essa dificuldade, muitos pesquisadores, buscaram introduzir restrições adicionais aos modelos teóricos incorporando à formulação do problema particularidades importantes dos ativos como negociação em lotes inteiros, ou características do mercado como custos das operações, melhorando assim a aplicabilidade prática dos mesmos (Ertenlice and Kalayci; 2018). As restrições mais comumente apresentadas pela comunidade científica são: restrição de cardinalidade, restrição de fronteira, custos de transações e

transações com lotes inteiros (Metaxiotis and Liagkouras; 2012).

Ao adicionar as restrições que tornam o problema de otimização de portfólios mais realístico, acrescenta-se uma maior complexidade computacional ao problema, tornando-o *NP-Difícil*, levando diversos autores a utilizarem meta-heurísticas na busca de boas soluções para esse problema (Doering et al.; 2019).

No trabalho de Chang et al. (2000) é apresentada a utilização das meta-heurísticas *Simulated Annealing*, Busca Tabu e Algoritmos Genéticos na busca de boas soluções para o problema de otimização de portfólios sujeito a restrição de cardinalidade. Nesse trabalho os autores observaram que nenhum dos algoritmos obteve resultados superiores em todas bases de dados, de forma que é sugerida no trabalho a combinação do resultado dos três algoritmos.

Já Streichert et al. (2004b) apresentam um estudo utilizando Algoritmos Evolucionários (AE) na seleção de portfólios sujeitos a restrições de cardinalidade, fronteira e lotes inteiros. Nesse trabalho, os autores utilizam diferentes abordagens de Algoritmos Evolucionários incluindo uma versão memética onde é inserida uma busca local na etapa de seleção de pais do Algoritmo Evolucionário. Apesar, disso os autores concluem que os resultados para os portfólios restritos não foram muito bons e que a adição da busca local não trouxe melhoras sensíveis ao Algoritmo Evolucionário.

Também Streichert et al. (2004a) apresentam um trabalho utilizando um Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo aplicado ao problema de otimização de portfólios restrito. Os autores apresentam ainda um estudo comparativo de diferentes operadores de *crossover*, buscando analisar o impacto desses na qualidade da fronteira Pareto, além de apresentar um novo genótipo para representar as soluções. Ao final, conclui-se que o genótipo proposto melhora a performance do algoritmo independente do operador de *crossover* escolhido e que as diferenças entre os operadores na qualidade da fronteira se tornaram pouco perceptíveis devido à redução do espaço de soluções trazido pelas restrições.

O trabalho apresentado por Armananzas and Lozano (2005) utiliza o *Greedy Search* (ou Busca Gulosa), *Simulated Annealing* (ou Recozimento Simulado) e *Ant Colony* (ou Colônia de Formigas) aplicados ao problema de otimização de portfólios sujeito à restrição de cardinalidade e de fronteira. Ao final, os autores concluem que, à medida que se diminui o valor da cardinalidade, o número de soluções da fronteira Pareto tende a aumentar. Por outro lado, à medida que se aumenta a cardinalidade, as soluções tendem a convergir para pontos de atração ou mínimos locais, de forma que aumentar o valor

da cardinalidade traz pouco impacto para o problema de otimização.

Skolpadungket et al. (2007) apresentam um estudo comparativo de diversos algoritmos aplicados ao problema de otimização de portfólios sujeitos às restrições de cardinalidade, limite inferior e transações em lotes inteiros. De maneira similar, Anagnostopoulos and Mamanis (2011) também apresentam um estudo comparativo de diversos algoritmos evolucionários multiobjetivo aplicados ao problema de otimização de portfólios sujeitos às restrições de cardinalidade e de fronteira. Ao analisar os resultados, ambos trabalhos concluem que os algoritmos evolutivos multiobjetivo *Strength Pareto Evolutionary Algorithm II (SPEA-II)* e *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm - II (NSGA-II)* apresentaram melhores resultados que os demais algoritmos, com uma pequena vantagem para o *SPEA-II* apesar deste apresentar um custo computacional maior.

Soleimani et al. (2009) propõe um modelo de otimização de portfólios baseado no *Mean-Variance*, mas adicionando as restrições de cardinalidade, restrição de limite mínimo de capital alocado por ativo e restrição de setor de capitalização que define o número de setores da economia aos quais os ativos selecionados devem pertencer. Os autores utilizam um modelo mono objetivo, buscando minimizar o risco sujeito a um retorno mínimo esperado e um algoritmo genético para busca de boas soluções para o problema. Ao final, conclui-se que o modelo apresentou bons resultados para um grande número de ativos disponíveis num intervalo de tempo razoável.

Ibrahim et al. (2016) apresentam um estudo utilizando algoritmos evolucionários multiobjetivo para solução de modelos de otimização de portfólios com diferentes características, complexidade e objetivos. Os autores concluem que alguns modelos superam outros em algumas métricas de desempenho, mas, de maneira geral, os algoritmos evolucionários multiobjetivo apresentam resultados satisfatórios em todas as abordagens utilizadas. Com isso, evidencia-se que os algoritmos evolucionários multiobjetivo podem ser uma boa opção para solução dos modelos de otimização de portfólios.

Observa-se que os modelos de otimização de portfólios apresentados tendem a se tornar cada vez mais complexos pelo fato de incorporar as restrições que os tornam mais práticos e próximos da realidade dos investidores. Com isso, esses modelos tornam-se *NP-Difícil* (Doering et al.; 2019) o que torna os algoritmos evolucionários multiobjetivo uma ferramenta útil na busca de boas soluções para esse problema dentro de um limite de tempo aceitável.

Observa-se também que as restrições que vem sendo apresentadas pela comunidade científica são: restrição de cardinalidade, restrição de fronteira, custos de transações e

transações com lotes inteiros. Cada uma dessas restrições será melhor detalhada nas subseções seguintes.

Restrição de cardinalidade

Essa restrição limita o número de ativos que poderão compor o portfólio com o objetivo de controlar os custos e assim melhorar o seu desempenho (Kaucic; 2019). A Equação 2.36 apresenta como essa restrição pode ser inserida em um dado modelo (Chang et al.; 2000).

$$\sum_{i=1}^N z_i = K. \quad (2.36)$$

Na Equação 2.36 tem-se K sendo a quantidade máxima de ativos que pode ser adicionada ao portfólio, z_i igual a 0 se o ativo i não for adicionado ao portfólio e igual a 1 caso contrário.

A adição da restrição de cardinalidade torna o modelo de otimização de portfólios *NP-Difícil* (Ferreira and Cardoso; 2021), o que dificulta a sua solução exata dentro de intervalos de tempo razoáveis, fazendo com que a maioria dos pesquisadores busquem boas soluções aproximadas para esse problema (Akabay et al.; 2020). Entretanto existem evidências na literatura (Mendonça et al.; 2020) de ao restringir o número de ativos, têm-se uma melhora na performance do portfólio.

Restrições de fronteira

Essa restrição limita as quantidades mínimas e máximas de capital que podem ser alocadas em cada ativo do portfólio (Ertenlice and Kalayci; 2018).

Essa restrição pode ser adicionada ao modelo da seguinte forma (Qi and Yen; 2017):

$$lb \leq w_i \leq ub. \quad (2.37)$$

Na Equação 2.37 tem-se que a quantidade de capital alocado em cada ativo w_i deve

ser maior ou igual ao limite inferior lb e menor ou igual ao limite superior ub .

O limite inferior (lb) é bastante útil, pois evita que o modelo gere soluções que na prática não seriam viáveis, pois ao alocar porções muito pequenas do capital em uma grande quantidade de ativos, poderia ocasionar um elevado custo operacional que inviabilizaria a solução. Já o limite superior (ub) ajuda a garantir que uma grande porção do capital não seja alocada num único ativo, de forma a se garantir uma melhor diluição dos riscos (Ehrgott et al.; 2004).

Custos de transações

A maioria das estratégias de investimento fazem rebalanceamento dos ativos, tornando a inclusão dos custos de transação (compra e venda de ativos) uma importante ferramenta para aproximar os modelos de otimização de portfólio da realidade dos investidores (Najafi and Mushakhian; 2015).

Os diversos trabalhos apresentam diferentes formas de incorporar o custo de transações no modelo de otimização, podendo ser através de penalidades, quando há alguma troca de ativo no portfólio (Woodside-Oriakhi et al.; 2013) ou subtraindo diretamente os custos das transações na performance do portfólio (Beyer et al.; 2014).

No trabalho de Woodside-Oriakhi et al. (2013) é apresentado um modelo multi-período onde o valor do portfólio é penalizado subtraindo-se os custos de rebalanceamento (compra e venda de ativos) a cada intervalo de tempo. Dessa forma, a equação que descreve o valor financeiro do portfólio a cada período é dado por:

$$\sum_{i=1}^N P_i x_i = \sum_{i=1}^N P_i X_i + V - \sum_{i=1}^N (c_i^b y_i^b + c_i^s y_i^s + f_i^b \alpha_i^b + f_i^s \alpha_i^s). \quad (2.38)$$

Na Equação 2.38 tem-se que P_i o preço do ativo i , x_i a quantidade em unidades do ativo no portfólio após o rebalanceamento da carteira, X_i a quantidade corrente do ativo i no portfólio, V o capital que pode ser adicionado ao portfólio, c_i^b e c_i^s os custos de compra e venda associados a uma unidade do ativo i , y_i^b e y_i^s o número em unidades compradas e vendidas do ativo, f_i^b e f_i^s os custos fixos relacionados a compra e vendas do ativo e α_i^b e α_i^s tendo valor 0 se não houver mudança na quantidade de ativos e 1 caso contrário.

Transações em lotes inteiros

Muitos modelos de otimização de portfólio vem sendo propostos, considerando que os ativos podem ser negociados fracionados, o que pode tornar a aplicação prática muito difícil de implementar, pois no mundo real eles normalmente são negociados em quantidades inteiras (Liu and Zhang; 2015).

Para adequar os modelos a essa restrição, deve-se formular o problema em termos de variáveis inteiras que representam a quantidade de lotes de cada ativo que irá compor a carteira, atentando-se ao tamanho dos lotes mínimos negociados de cada ativo (Schaerf; 2002).

A restrição de lotes inteiros pode ser adicionada ao modelo por meio das seguintes equações (Skolpadungket et al.; 2007):

$$w_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^N n_i}, \quad (2.39)$$

$$n_i \bmod l_i = 0 \quad \forall i. \quad (2.40)$$

Onde w_i é a porção do capital alocado no ativo i , n_i o número unitário do ativo i no portfólio e l_i o lote inteiro mínimo negociado.

2.2 Algoritmos Evolutivos

Algoritmos Evolutivos (AEs) são heurísticas populacionais baseadas na Teoria de Evolução Natural proposta por *Darwin*. Sendo cada solução do problema um indivíduo e o conjunto de soluções uma população, um AE explora o espaço de soluções avaliando cada indivíduo (ou solução) pertencente a população (ou conjunto de soluções) (Streichert et al.; 2004b). De forma geral, os AEs iniciam com uma população de soluções aleatórias e até que um critério de parada seja atendido, ocorrem iterações de avaliação, combinação e seleção dos indivíduos. De maneira análoga à Teoria de Evolução Natural, a cada geração (ou iteração) os indivíduos mais adaptados, ou seja, que representam uma me-

lhor solução para o problema, tendem a seguir para as próximas gerações, perpetuando suas características de forma a se buscar melhores soluções a cada iteração.

Os AEs podem ser mono-objetivo ou multi-objetivo. Para o problema de otimização de portfólios onde normalmente busca-se otimizar baseando-se no risco e no retorno, faz-se necessário utilizar AEs multiobjetivo. Uma importante característica dos AEs multiobjetivo é implementar procedimentos específicos para garantir uma melhor diversidade das soluções na fronteira Pareto, o que evita que as soluções convirjam para um único ponto ou região. Além disso, os AEs multiobjetivos são capazes de lidar com problemas complexos independente da linearidade, convexidade ou continuidade das funções objetivo, o que o torna mais robusto (Ibrahim et al.; 2016).

Para o problema de otimização de portfólios multi-objetivo onde são consideradas restrições que tornam o problema mais prático e mais próximo de uma aplicação realística pelos investidores, observa-se um crescimento da complexidade do problema fazendo com que uma solução exata utilizando métodos exatos se torne inviável (Lwin et al.; 2014). Assim, AEs têm sido extensivamente usados no problema de otimização de portfólios e embora na maioria dos trabalhos venham sendo utilizados AEs mono-objetivo, dadas as características do problema de otimização de portfólios de possuir funções objetivos conflitantes em adição com restrições que tornam o problema ainda mais complexo, os AEs multi-objetivo se tornam uma opção mais adequada para solução desse problema (Ibrahim et al.; 2016).

2.2.1 Indivíduo

Nos AEs, um indivíduo é uma representação da solução do problema a ser tratado. Assim, de acordo com o problema, a representação do indivíduo pode variar, mas usando a analogia com a biologia, o indivíduo é constituído de um cromossomo que por sua vez é composto por um conjunto de genes. Cada gene representa uma parte da solução de forma que, a depender do problema, o gene pode ser representado por um valor *booleano*, inteiro ou real.

No problema de otimização de portfólios, um indivíduo é uma representação de um portfólio ou seleção de ativos. No trabalho de Streichert et al. (2004a) é apresentada uma representação de indivíduo composta de dois vetores, sendo o primeiro binário para indicar se um ativo está selecionado ou não para o portfólio (ou solução) e um segundo vetor de números reais para indicar a quantidade de capital alocada em cada ativo.

2.2.2 População

Nos AEs, um conjunto de soluções ou indivíduos, é chamado de população. O tamanho da população deve ser grande o suficiente para garantir uma boa cobertura do espaço de soluções, mas ao mesmo tempo não ser grande demais, de maneira a prejudicar o desempenho do algoritmo.

De maneira geral, os AEs são inicializados com um número pré-definido de indivíduos aleatórios e a cada geração, através das operações de *crossover* (ou cruzamento) e mutação, as soluções são combinadas dando origem a novos indivíduos, mas mantendo o tamanho inicial da população. Para que se possa comparar os indivíduos de uma população entre si, de forma a se escolher um em detrimento de outro, os indivíduos são avaliados utilizando uma função de *fitness* (ou aptidão), de forma que se busque ter a cada geração, indivíduos com maior aptidão (Vikhar; 2016).

No problema de otimização de portfólios multiobjetivo, em que se deseja maximizar o retorno esperado e minimizar o risco, o AE pode utilizar essas duas métricas para fins de se estabelecer uma comparação de aptidão entre os indivíduos da população.

2.2.3 Operadores genéticos

Os operadores genéticos de um AE são os mecanismos que permitem a distinção e a combinação de diferentes indivíduos ou soluções. Os principais operadores apresentados na literatura são os de cruzamento (ou *crossover*), mutação e seleção (AL-Salami; 2009).

O operador de cruzamento permite que se combine dois indivíduos da população, chamados pais, para a geração de novos indivíduos que herdaram suas características, chamados filhos. A principal ideia desse operador é fazer com que a solução resultante possua atributos combinados das soluções pais de maneira a perpetuá-los para gerações futuras.

A mutação consiste em alterar uma característica de um indivíduo, a fim trazer uma maior diversidade para a população. De maneira geral, a mutação busca introduzir nas soluções uma característica aleatória buscando, assim, uma maior variabilidade no espaço de soluções.

Por fim, o operador de seleção permite que se consiga escolher um indivíduo ou um conjunto de indivíduos dentre outros seguindo um critério de aptidão (ou *fitness*) pré-

definido. Esses critérios podem mudar de acordo com o algoritmo utilizado na solução do problema, podendo ser melhor valor para função objetivo, dominância Pareto, entre outros.

2.3 Conclusão

Ao fazer um revisão bibliográfica do problema de otimização de portfólios observa-se que existe um grande esforço da comunidade científica para trazer melhores modelos de mensuração de risco e, ao mesmo tempo, trazer modelos mais realísticos pela adição de restrições, o que tende a fazer com que os modelos de otimização se tornem cada vez mais complexos.

É sabido, porém, que a utilização de AEs tem se mostrado bastante eficiente para trabalhar com modelos de otimização complexos, o que os tornam adequados para o problema de otimização de portfólios por conseguirem trazer boas soluções dentro de um tempo de execução aceitável. No capítulo seguinte será apresentado o modelo de otimização e o algoritmo utilizado nesse trabalho.

Capítulo 3

Metodologia

Nesse capítulo são apresentados o modelo de cálculo dos custos de transação proposto nesse trabalho, o modelo de otimização de portfólios restrito incluindo os custos de transação, cardinalidade e fronteira, bem como algoritmos utilizados para solução do modelo.

Inicialmente, é descrito o modelo proposto para cálculo do fator de penalização do retorno, o qual busca incorporar ao modelo de otimização os custos de transação, voltado para o mercado de ações brasileiro. Em seguida, é apresentado o modelo matemático do problema de otimização de portfólios utilizado e, por fim, o AE, especificando os detalhes de representação dos indivíduos com as funções de avaliação de aptidão e operadores genéticos.

3.1 Modelo para cálculo dos custos de transação

Esse trabalho apresenta um modelo para incorporar à otimização de portfólios uma aproximação dos custos de transação, voltado para o mercado de ações no Brasil. É importante ressaltar que, na compra e venda de ações, além dos custos associados à compra e venda, como taxas de bolsa e corretagem, os investidores também estão sujeitos a custos tributários relacionados às possíveis vendas com ganho financeiro. Dessa forma, ao agregar esses custos ao modelo, as soluções obtidas podem se aproximar dos resultados práticos obtidos pelo investidor.

Um diferencial trazido pelo modelo apresentado nesse trabalho é a consideração da

peculiaridade tributária do mercado de ações no Brasil. Pela Lei 9.250/1995 (Brasil; 1995) para transações de venda em que haja lucro financeiro, o investidor precisa realizar o pagamento de imposto de 15% sobre esse lucro, mas existe uma isenção tributária caso o volume de vendas seja inferior a R\$20.000,00 (vinte mil reais).

Os custos de transação impactam diretamente no retorno esperado do portfólio, pois, ao deduzi-los do capital do investidor, também se reduz o seu potencial retorno financeiro. Sendo N o número de ativos do portfólio, ret_i e w_i respectivamente o retorno percentual esperado e a porção do capital alocados do ativo i , a Equação 3.1 apresenta o cálculo do retorno esperado do portfólio desconsiderando os custos de transação.

$$\sum_{i=1}^N w_i \cdot ret_i. \quad (3.1)$$

De maneira semelhante ao apresentado na Equação 3.1, na Equação 3.2 é introduzido o fator de penalização dos custos (α) no cálculo do retorno. De maneira geral, α representa o percentual do capital comprometido com os custos de todas as transações do portfólio, podendo ser observado que, no caso de se ignorar os custos, fazendo α igual a 0, a Equação 3.2 é reduzida à Equação 3.1.

$$(1 - \alpha) \sum_{i=1}^N w_i \cdot ret_i. \quad (3.2)$$

Como nesse trabalho serão considerados os custos de compra e vendas dos ativos e os custos tributários, o valor do fator de penalização dos custos (α) pode ser decomposto em duas partes: a primeira onde é contabilizada os custos de operação (τ) e a segunda onde são calculados os custos tributários (γ) de forma que $\alpha = \tau + \gamma$.

A representação de um portfólio num determinado intervalo de tempo t pode ser dada por $P^t = [w_1^t, w_2^t, \dots, w_N^t]$ sendo w_i^t a alocação de capital em cada ativo i naquele dado intervalo de tempo. Assim, para trazer uma maior aproximação de uma aplicação prática, ao selecionar uma alocação de portfólio P^t será considerado que o investidor já possui um portfólio prévio P^{t-1} de forma que, a partir da diferença entre eles, poderão ser computadas as operações de compra e venda de ativos, permitindo assim o cálculo desses custos.

Sendo o vetor de diferenças entre o portfólio prévio e atual $D = P^{t-1} - P^t$, $D = [d_1, d_2, \dots, d_N]$ e $d_i = w_i^t - w_i^{t-1}$, pode-se notar que, para valores de $d_i > 0$, houve um aumento da alocação no ativo i , ou seja, uma operação de compra. Da mesma forma, pode-se concluir que para valores de $d_i < 0$ ocorreu uma operação de venda e para $d_i = 0$ não houve nenhuma negociação no ativo i .

Embora os custos operacionais¹ para compra e venda de ações na $B3$ não sejam fixos, com o intuito de simplificar o problema, optou-se por definir um valor fixo de R\$10,00 (dez reais), para cada operação de compra e venda realizada.

Assim, considerando o vetor de diferenças D , para cada valor de $d_i \neq 0$, tem-se uma operação de compra ou de venda. Assim sendo b o número de operações de compra, s o número de operações de venda e C o capital total alocado no portfólio, o cálculo do custo de operação τ é dado por:

$$\tau = \frac{(b + s) \cdot 10}{C}. \quad (3.3)$$

Já o custo tributário (γ) precisa considerar dois aspectos: o primeiro relacionado ao volume de vendas, pois pela legislação vigente, com vendas totais abaixo de R\$20.000,00 (vinte mil reais) mensais esse custo pode ser ignorado. O segundo aspecto, caso o volume de vendas exceda o limite não tributável, é necessário calcular se as vendas geraram lucro e, em caso afirmativo, se faz necessário debitar do capital total o valor relativo a 15% desse lucro.

Usando o vetor de diferenças D e sabendo que para todo $d_i < 0$ temos uma operação de venda, o volume de vendas V pode ser obtido por:

$$V = (-1) \sum_{i=1}^N d_i \quad \forall i \in N \mid d_i < 0. \quad (3.4)$$

Sendo ψ a variável que define se o volume financeiro de vendas excede o volume isento de tributos, temos:

¹https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/tarifas/listados-a-vista-e-derivativos/renda-variavel/tarifas-de-aco-es-e-fundos-de-investimento/a-vista/

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{se } (V \cdot C) \leq 20.000. \\ 1 & \text{se } (V \cdot C) > 20.000. \end{cases} \quad (3.5)$$

No caso do volume de vendas exceder o limite de vendas isento de tributação ($\psi = 1$), realiza-se o cálculo do eventual lucro ou prejuízo obtidos dessas operações. Para isso, se faz necessário saber o preço de compra do ativo i dado por $price_i^b$ e o preço atual do ativo pelo qual a venda é realizada ($price_i$). De posse desses valores, obtidos nos dados históricos de cotação dos ativos, a variação percentual para cada ativo (var_i) pode ser obtida por:

$$var_i = \frac{price_i - price_i^b}{price_i^b}. \quad (3.6)$$

Para calcular o lucro ou prejuízo em unidades monetárias para que um eventual imposto seja calculado em caso de lucro, faz-se necessário computar o valor de venda (SV) do valor de compra (BV) de forma que o ganho de capital (GC) é dado por: $GC = SV - BV$.

O valor de vendas pode ser obtido multiplicando o volume total de vendas (V) pelo capital total (C), ou seja, $SV = V \cdot C$. Já o valor de compra dos ativos BV pode ser calculado somando-se individualmente o volume individual de vendas por ativo (d_i), considerando a sua variação de preço percentual (var_i) no momento atual t e no momento de compra $t - 1$. Dessa forma, BV pode ser obtido por:

$$BV = \sum_{i=1}^N (-1) \cdot d_i \cdot \frac{C}{1 + var_i} \quad \forall i \in N \mid d_i < 0. \quad (3.7)$$

Tendo calculado o ganho de capital da venda (GC), em caso de ser um valor negativo, indica que houve prejuízo e, portanto, não ocorre taxaço. Para valores de GC positivos, indica que a operação de venda gerou um lucro, que leva à cobrança de imposto. Pode assim ser definida uma variável π para auxiliar no controle dessa condição definida na Equação 3.8:

$$\pi = \begin{cases} 0 & \text{se } GC \leq 0. \\ 1 & \text{se } GC > 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Assim os custos tributários (γ) podem ser definidos por:

$$\gamma = \psi \cdot \pi \cdot 0,15 \cdot \frac{GC}{C} \quad (3.9)$$

É importante observar que tanto para vendas inferiores a R\$20.000,00(vinte mil reais) com $\psi = 0$, quanto para instâncias em que as operações geraram prejuízo com $\pi = 0$, o custo tributário é anulado, de forma que só ocorre a cobrança caso o volume de vendas exceda o limite isento e que as operações tenham gerado lucro.

Por fim, a equação que define o fator de penalização dos custos no retorno esperado de todo o portfólio ($\alpha = \tau + \gamma$) pode ser reescrita como:

$$\alpha = \frac{(b + s) \cdot 10}{C} + \psi \cdot \pi \cdot 0,15 \cdot \frac{GC}{C}. \quad (3.10)$$

3.2 Modelo de otimização de portfólios restrito usando o MAD

Apesar dos AEs serem bem sucedidos na resolução de problemas de otimização multiobjetivo com várias restrições complexas que aproximam os modelos das aplicações práticas, devido ao seu comportamento estocástico, eles podem apresentar uma convergência lenta e baixa acurácia (Wang et al.; 2011).

Embora o $M-V$ seja o modelo mais clássico para mensuração de risco de otimização de portfólios, sabe-se que ele possui um custo computacional quadrático, o que pode inviabilizar o modelo quando restrições complexas são adicionadas para torná-lo mais realístico (Doering et al.; 2019). Alternativamente ao $M-V$, o MAD vem sendo estudado por vários pesquisadores (Dastkhan et al. (2011), Angelelli et al. (2008), Kellerer et al.

(2000), Mansini and Speranza (1999)) por apresentar um custo computacional linear e obter resultados semelhantes se os retornos dos ativos seguirem a distribuição normal (Dastkhan et al.; 2011).

Nesse trabalho, em que são consideradas as restrições de cardinalidade, fronteira e custos de transação, sabendo que estas podem tornar os modelos mais realísticos mas também trazer uma maior complexidade (Anagnostopoulos and Mamanis; 2011), optou-se por utilizar o *MAD*. Com isso, espera-se obter um modelo que, ao mesmo tempo em que se aproxima de uma aplicação prática, consegue bons resultados dentro de um limite de tempo satisfatório. O modelo matemático é apresentado a seguir:

$$\min \sum_{i=1}^N w_i \cdot risk_i, \quad (3.11)$$

$$\max(1 - \alpha) \sum_{i=1}^N w_i \cdot ret_i. \quad (3.12)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K, \quad (3.14)$$

$$w_i \geq lb \cdot z_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.15)$$

$$w_i \leq ub \cdot z_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

Sendo w_i a proporção do capital a ser alocado no ativo i , $risk_i$ e ret_i respectivamente o risco e retorno esperado do ativo i , nas Equações 3.11 e 3.12 temos as funções objetivo que correspondem respectivamente a minimizar o risco e a maximizar o retorno esperado do portfólio. É importante destacar que na Equação 3.12 está incluído o fator de penalização dos custos (α) apresentado na Seção 3.1, para que o modelo possa incorporar os custos de transação.

Na Equação 3.13 temos a restrição de que o somatório de w_i deve ser igual a 1, ou seja, todo capital disponível deve ser alocado entre os ativos disponíveis. Sendo z_i uma variável de controle com valor igual a 1 para indicar se o ativo i foi selecionado para o portfólio e 0 caso contrário; e K o número total de ativos, na Equação 3.14, temos a restrição indicando que o número de ativos selecionados deve ser igual a K .

Nas Equações 3.15 e 3.16 temos as restrições de fronteira limitando a alocação por ativo (w_i) entre os limites inferior lb e limite superior ub . Por fim, nas restrições apresentadas nas Equações 3.17 e 3.18 temos as restrições de não-negatividade de w_i indicando que não podem alocações negativas e que z_i é uma variável binária.

Os retornos (ret_i) são calculados com base na média dos retornos históricos dos ativos, como mostrado na Equação 2.15 e o risco estimado por ativo ($risk_i$) é calculado usando o *MAD*, conforme pode ser visto na Equação 2.16.

É importante destacar que nos problemas de otimização de portfólios em que as restrições de cardinalidade e de fronteira são aplicadas simultaneamente, se faz necessário atentar para que os valores de lb e ub respeitem as Equações 3.19 e 3.20, a fim de respeitar a equação de restrição de integralidade dada pela Equação 3.13.

$$K \cdot lb \leq 1, \quad (3.19)$$

$$K \cdot ub \geq 1. \quad (3.20)$$

3.3 O Algoritmo Evolutivo aplicado à solução do modelo

No presente trabalho, utilizou-se os AEs multiobjetivo *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm - II* (NSGA-II) proposto por Deb et al. (2000) e o *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA2) apresentado por Zitzler et al. (2001).

De maneira geral, algoritmo NSGA-II avalia o *fitness* dos indivíduos da população baseando-se na dominância Pareto e no *crowding distance* (ou distância de aglomeração). Na ordenação por dominância, os indivíduos são classificados de acordo com a fronteira Pareto a que pertencem, de forma que os indivíduos que não são dominados são colocados na fronteira 1, os que são dominados apenas pelos indivíduos da fronteira 1 são colocados na fronteira 2 e assim sucessivamente. Já na ordenação por *crowding distance* é calculado para cada indivíduo o hipercubo definido pelos seus dois vizinhos mais próximos. Assim, um indivíduo que pertença à fronteira 1, ao ser comparado com indivíduos das demais fronteiras, se mostra uma solução melhor pela relação de dominância. Entretanto, ao comparar soluções de uma mesma fronteira, o critério de desempate será o maior *crowding distance*. Assim, o NSGA-II busca garantir um elitismo das soluções com boa cobertura do espaço de soluções.

Já no algoritmo SPEA2 o *fitness* dos indivíduos é calculado de acordo com a sua força e densidade de vizinhança. De maneira geral, a força é calculada com base no número de indivíduos que dominam e na distância para um enésimo vizinho. Assim, na comparação entre dois indivíduos, o SPEA2 considera mais apto o que possui uma menor dominância e uma maior distância para o enésimo vizinho, trazendo um elitismo ao algoritmo ao mesmo tempo em que busca uma maior dispersão e conseqüente melhor cobertura da fronteira Pareto.

O pseudocódigo mostrado em Algoritmo 3.1 apresenta a estrutura geral do Algoritmo Evolutivo Muti-objetivo com G gerações utilizado nesse trabalho. É preciso destacar que

o cálculo do *fitness* (linha 5) é baseado nos critérios do Algoritmo Evolutivo adotado (*NSGA-II* ou *SPEA2*) e as etapas de seleção e geração de descendentes (linhas 6 e 7) ocorrem seguindo os operadores de cruzamento, mutação e seleção que serão apresentados posteriormente nessa Seção, ressaltando ainda que, após as operações de cruzamento e mutação, se faz necessário executar o processo de normalização para tornar as restrições factíveis, respeitando as restrições pré-estabelecidas.

Algoritmo 3.1: Pseudocódigo do Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo (Adaptado de Kaucic, Moradi e Mirzazadeh 2019)

Result: Conjunto de soluções

```

1 k = 0 ;
2 P0 = Gera_solucoes_aleatorias(N);
3 Q0 = ∅;
4 while k < G do
5   Calcula_fitness(Pk) ;
6   Qk = Geracao_descendente(Pk) ;
7   Pk+1 = Selecciona_populacao(Pk, Qk) ;
8   k = k + 1 ;
9 retorne Pk;

```

Sendo o conjunto de N ativos disponíveis para alocação de capital, um indivíduo é representado por um vetor de tamanho N , sendo que cada gene ou posição do vetor contem um valor real entre 0 e 1, representando a porcentagem de capital alocado por ativo. Para fins de integralidade de alocação do capital no portfólio, a soma de todas as posições do indivíduo deve ser igual a 1. Assim, um indivíduo W , pode ser representado por: $W = \{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ em que w_i é a porcentagem total de capital alocado no ativo i e N o número total de ativos disponíveis.

Na Figura 3.1 é apresentado um exemplo de representação de indivíduo utilizada nesse trabalho. Observa-se que se tem um conjunto de ativos com N igual a 10, que em cada um dos ativos 1, 5 e 6 são alocados 22% do capital, nos ativos 2 e 10 são alocados 17% do capital e por fim que não há alocação nos ativos 3, 4, 7, 8 e 9. Destacam-se ainda duas características no indivíduo mostrado como exemplo na Figura 3.1: a primeira é que a soma de todos valores do vetor é igual a 1, indicando que todo capital disponível foi alocado nos ativos; a segunda é que a cardinalidade (K) da solução é igual a 5, pois tem-se o capital aplicado em 5 ativos.

Nesse trabalho, ao considerar o problema de otimização de portfólios sujeito às restrições de cardinalidade e de fronteira, na etapa de inicializar a população aleatoriamente,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.22	0.17	0.00	0.00	0.22	0.22	0.00	0.00	0.00	0.17

Figura 3.1: Exemplo de representação de indivíduo

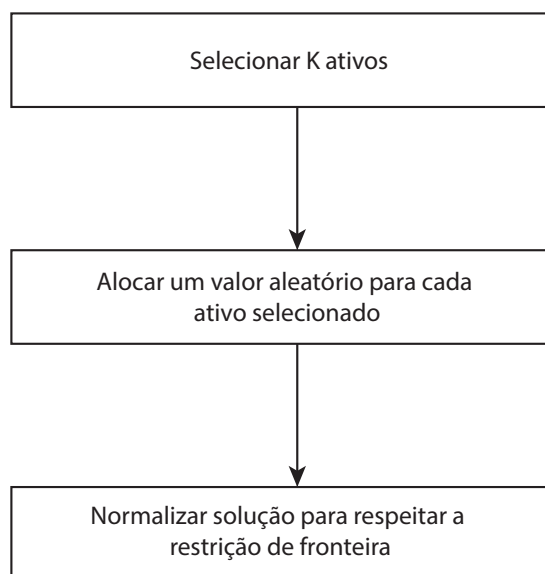


Figura 3.2: Representação esquemática do processo de criação aleatória de um indivíduo

se faz necessário seguir um processo que garanta que as soluções criadas respeitem essas restrições. Conforme pode ser observado na Figura 3.2, esse processo consiste basicamente de três etapas. A primeira consiste em selecionar aleatoriamente K ativos entre os N ativos disponíveis para alocação de capital, de forma a se respeitar a restrição de cardinalidade. Após definidos os ativos, a segunda etapa consiste em atribuir valores aleatórios de alocação entre os limites superior e inferior definidos pela restrição de fronteira, de forma a respeitar essa restrição. Por fim, realiza-se o processo de normalização para que se respeite a restrição de integralidade, de que todo capital deve ser alocado e, portanto, a soma de todas alocações deve ser igual a 1.

O procedimento para normalização foi adaptado do apresentado por Chang et al. (2000) e o pseudocódigo é apresentado em Algoritmo 3.2. Sendo K a cardinalidade do portfólio, N o número total de ativos e w_i o total de capital alocado no ativo i e os limites inferior e superior, respectivamente lb e ub , o algoritmo de normalização busca fazer com que a solução inicial respeite as restrições, buscando-se manter as proporções

previamente alocadas em cada ativo.

Algoritmo 3.2: Pseudocódigo normalização de solução (Adaptado de Chang et al. (2000))

Result: Conjunto de soluções

```

1 # Sendo:
  #  $Q$  o conjunto dos ativos com capital alocado ( $w_i > 0$ ).
  #  $R$  o conjunto dos ativos com capital alocado acima do limite superior ( $w_i > ub$ ).
  #  $w'_i$  o valor de  $w_i$  após a normalização
   $L = \sum_{i=1}^N w_i$ ;
2  $F = 1 - (K \cdot lb)$ ;
3  $w'_i = lb + w_i \cdot (F/L) \quad \forall i \in W^N$ ;
4  $R = \emptyset$ ;
5 while  $\exists i \in (Q - R) \mid w'_i > ub$  do
6   for all  $i \in (Q - R)$  do
7     if  $w'_i > ub$  then
8        $R = R \cup [i]$ ;
9    $L = \sum_{i \in (Q-R)} w_i$ ;
10   $F = 1 - (\sum_{i \in (Q-R)} lb + \sum_{i \in R} ub)$ ;
11  for all  $i \in (Q - R)$  do
12     $w'_i = lb + w_i \cdot (F/L)$ ;
13  for all  $i \in R$  do
14     $w'_i = ub$ ;

```

Nesse trabalho, foi utilizado o operador de cruzamento $BLX - \alpha$ apresentado por Streichert et al. (2004a). A escolha desse operador se deve ao fato de que os autores apresentam uma comparação entre diferentes operadores de *crossover* observando que o $BLX - \alpha$ teve um desempenho levemente superior. De maneira geral, sendo W^N o indivíduo resultante do cruzamento dos indivíduos W^1 e W^2 , usando esse operador temos que no indivíduo resultante cada posição w_i^N recebe um valor aleatório entre $w_{i,min} - I \cdot \alpha$ e $w_{i,max} + I \cdot \alpha$ sendo $w_{i,min} = MIN(w_i^1, w_i^2)$, $w_{i,max} = MAX(w_i^1, w_i^2)$ e $I = w_{(i,max)} - w_{(i,min)}$. Seguindo ainda o modelo apresentado pelos autores, o valor de α foi definido em 0.5 e, após o cruzamento, são efetuadas as operações de normalização para que o indivíduo resultante se torne factível respeitando as restrições dadas para o problema.

Na Figura 3.3 é apresentado um exemplo de cruzamento implementado nesse trabalho. Observa-se que temos nesse exemplo um número de ativos disponíveis (N) igual a 10, cardinalidade (K) igual a 3 e os limites inferior e superior (lb e ub) iguais a 0,25

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indivíduo 1:	0.00	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.35	0.00	0.35	0.00
Indivíduo 2:	0.00	0.00	0.40	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.27
Indivíduo resultante (crossover):	0.00	0.00	0.41	0.00	0.00	0.38	0.45	0.00	0.47	0.29
Indivíduo resultante (correção cardinalidade):	0.00	0.00	0.41	0.00	0.00	0.00	0.45	0.00	0.47	0.00
Indivíduo resultante (normalizado):	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.34	0.00

Figura 3.3: Exemplo do operador de cruzamento

e 0,40. Pode-se verificar na Figura que inicialmente é realizado o cruzamento usando o operador $BLX - \alpha$ descrito anteriormente, entretanto o indivíduo resultante viola a restrição de cardinalidade e de integralidade. Para correção da restrição de cardinalidade, são selecionados os K ativos com maior alocação de capital e por fim, utilizando o Algoritmo 3.2 é feita a normalização para fazer com que a solução resultante respeite a restrição de integralidade.

Para o operador de mutação, foi utilizado o modelo apresentado por Streichert et al. (2004a) em que para cada valor de w_i (com $w_i > 0$) é adicionado um valor aleatório σ_i tal que $-(ub - lb) \leq \sigma_i \leq (ub - lb)$ e em seguida são aplicadas as funções de normalização para fazer que a solução resultante dessa operação respeite as restrições impostas pelo problema.

Na Figura 3.4 é apresentado um exemplo do funcionamento do operador de mutação. De maneira análoga ao exemplo do operador de cruzamento considera-se um número de ativos disponíveis (N) igual a 10, cardinalidade (K) igual a 3 e os limites inferior e superior (lb e ub) iguais a 0,25 e 0,40. Para os ativos 2, 7 e 9 com alocação de capital são definidos aleatoriamente valores de σ entre $-0,15$ e $0,15$ e esses valores são somados a alocação de cada um. Observa-se que o indivíduo resultante possui uma alocação total

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indivíduo original:	0.00	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.35	0.00	0.35	0.00

		$\sigma_3 = -0.10$				$\sigma_7 = 0.03$		$\sigma_9 = 0.09$		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indivíduo após mutação:	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.38	0.00	0.44	0.00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indivíduo resultante (normalizado):	0.00	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.34	0.00	0.36	0.00

Figura 3.4: Exemplo do operador de mutação

igual a 1,02 o que viola a restrição de integralidade, assim, para corrigir esse problema é utilizado o Algoritmo 3.2 para normalizar a solução, tornando-a factível.

Por fim, para o operador de seleção utilizou-se os critérios de *fitness* do Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo escolhido (NSGA-II ou SPEA2), ou seja, usando critérios de dominância Pareto e distância entre as soluções como critério de seleção elitista dos indivíduos que iriam compor a próxima geração. De maneira geral, são escolhidos sempre os mais aptos entre os indivíduos da geração atual(pais), adicionados da população de filhos resultante das operações de cruzamento e mutação.

3.4 Conclusão

Nesse capítulo foi apresentado o modelo de otimização de portfólios utilizado nesse trabalho e como esse modelo foi implementado.

Nos capítulos seguintes serão apresentados os experimentos computacionais, bem como os resultados obtidos a partir desses.

Capítulo 4

Resultados

Nesse capítulo são apresentadas inicialmente as instâncias utilizadas nos testes. A seguir, são descritos os experimentos e os resultados obtidos. Por fim, é apresentada uma análise dos resultados buscando se estabelecer uma relação entre a variação dos parâmetros das restrições na qualidade das fronteiras Pareto obtidas e no tempo de execução dos algoritmos.

4.1 Instâncias

Uma instância é um problema de teste usado para avaliação e comparação de métodos utilizados na solução do mesmo. Assim nesse trabalho, uma instância consiste de um conjunto de N ativos financeiros nos quais o investidor deseja alocar partes do capital em K ativos diferentes, respeitando as restrições de limites inferior e superior (lb e ub), além de considerar os custos de transação.

As instâncias de teste buscam simular um possível cenário real de um investidor no mercado de ações negociadas na bolsa de valores do Brasil, a Brasil, Bolsa, Balcão ($B3$). Nesse cenário, dentre os ativos listados na carteira teórica $IBrX 100 B3$ (Tabela 4.1), onde são listados os ativos com maior volume de negócios da $B3$, seleciona-se um portfólio, que respeite as restrições de cardinalidade (K) e de fronteira (ub e lb), incorporando ao mesmo o impacto dos custos de transação e tributação. Destaca-se também que para o cálculo dos custos de transação se faz necessário saber o capital do investidor, pois os custos impactam diretamente no mesmo, assim as instâncias de testes consideram um

Tabela 4.1: Lista de ativos IBrx 100 (Data de referência: 21/01/2022). Fonte *B3*.

Código	Empresa	Código	Empresa	Código	Empresa
RRRP3	3R Petroleum	ELET6	Eletrobras	MRVE3	MRV
ALPA4	Alpargatas	EMBR3	Embraer	MULT3	Multipian
ABEV3	Ambev S/A	ENBR3	Energias BR	PCAR3	Pão de Açúcar-CBD
AMER3	Americanas	ENGI11	Energisa	PETR3	Petrobras
ASAI3	Assai	ENEV3	Eneva	PETR4	Petrobras
AZUL4	Azul	EGIE3	Engie Brasil	PRIO3	Petrorio
B3SA3	B3	EQTL3	Equatorial	PETZ3	Petz
BIDI11	Banco Inter	EZTC3	Eztec	PSSA3	Porto Seguro
BPAN4	Banco Pan	FLRY3	Fleury	POS3	Positivo TEC
BBSE3	BB Seguridade	GGBR4	Gerdau	QUAL3	Qualicorp
BRML3	BR Malls	GOAU4	Gerdau Metalurgica	RADL3	Raiadrogasil
BBDC3	Banco Bradesco	GOLL4	Gol	RDOR3	Rede D'Or
BBDC4	Banco Bradesco	NTCO3	Grupo Natura	RAIL3	Rumo S.A.
BRAP4	Bradespar	SOMA3	Grupo Soma	SBSP3	Sabesp
BBAS3	Banco do Brasil	HAPV3	Hapvida	SANB11	Santander BR
BRKM5	Braskem	HYPE3	Hypera	STBP3	Santos BRP
BRFS3	BRF SA	IGTI11	Iguatemi S.A	CSNA3	Siderurgia Nacional
BPAC11	Banco BTGP	IRBR3	IRB Brasil	SLCE3	SLC Agrícola
CRFB3	Carrefour BR	ITSA4	Itausa	SULA11	Sul America
CCRO3	CCR SA	ITUB4	Itau Unibanco	SUZB3	Suzano S.A.
CMIG4	Cemig	JBSS3	JBS	TAEE11	Taesa
CESP6	Cesp	KLBN11	Klabin S/A	VIVT3	Telefonica Brasil
CIEL3	Cielo	LIGT3	Light S/A	TIMS3	Tim
COGN3	Cogna ON	RENT3	Localiza	TOTS3	Totvs
CPLE6	Copel	LCAM3	Locamerica	UGPA3	Ultrapar
CSAN3	Cosan	LWSA3	Locaweb	USIM5	Usiminas
CPFE3	CPFL Energia	AMAR3	Lojas Marisa	VALE3	Vale
CMIN3	CSN Mineração	LREN3	Lojas Renner	VIAA3	Via
CVCB3	CVC Brasil	MGLU3	Magazine Luiza	VBBR3	Vibra
CYRE3	Cyrela Realty	MRF3	Marfrig	WEGE3	WEG
DXCO3	Dexco	CASH3	Meliuz	YDUQ3	Yduqs
ECOR3	Ecorodovias	BEEF3	Minerva		
ELET3	Eletrobras	MOVI3	Movida		

capital de R\$50.000,00 (cinquenta mil reais).

Na Tabela 4.1 observa-se que o cenário utilizado nos testes é composto por 97 ações de empresas brasileiras listadas na *B3* com os dados históricos de variação de preços mensais no período de 01/05/2021 a 29/07/2022 obtidos através da AlphaVantage (2017). De maneira mais específica, cada instância de testes busca selecionar um portfólio independente para cada intervalo de tempo diferente, sendo esses os meses de junho e julho de 2022, seguindo um determinado conjunto de restrições, de forma a se estabelecer o impacto da variação das mesmas na curva Pareto do conjunto de soluções obtidas.

4.2 Experimentos

Os experimentos propostos nesse trabalho consistem em se avaliar o impacto dos custos de transação, da cardinalidade e dos limites superiores e inferiores de alocação por ativo.

Para isso, foi planejado um conjunto de experimentos conforme a Tabela 4.2, destacando-se que os resultados que serão apresentados nesse trabalho se baseiam na execução de cada instância 100 vezes.

Tabela 4.2: Parâmetros utilizados nos experimentos

Instância	K	λ	lb	ub	Custos
1	10	10%	9%	11%	Não
2	10	30%	7%	13%	Não
3	10	50%	5%	15%	Não
4	20	10%	4,5%	5,5%	Não
5	20	30%	3,5%	6,5%	Não
6	20	50%	2,5%	7,5%	Não
7	30	10%	3%	3,66%	Não
8	30	30%	2,33%	4,33%	Não
9	30	50%	1,66%	5%	Não
10	10	10%	9%	11%	Sim
11	10	30%	7%	13%	Sim
12	10	50%	5%	15%	Sim
13	20	10%	4,5%	5,5%	Sim
14	20	30%	3,5%	6,5%	Sim
15	20	50%	2,5%	7,5%	Sim
16	30	10%	3%	3,66%	Sim
17	30	30%	2,33%	4,33%	Sim
18	30	50%	1,66%	5%	Sim

Na Tabela 4.2 observa-se que, nas instâncias de testes, foram utilizados valores de cardinalidade (K) iguais a 10, 20 e 30 para avaliar o impacto dessa restrição na fronteira Pareto resultante. É importante ressaltar que para valores de K mais baixos existe o risco de haver pouca diversificação do capital total, ocorrendo, entretanto, uma diminuição nos custos operacionais relacionados às operações de compras e vendas dos ativos. Já valores muito elevados de K permitem uma boa diluição do risco entre os ativos, mas elevam os custos operacionais por fazerem com que aumente o número de operações de compra e venda desses ativos. Esse trabalho também avalia o efeito do custo de transação apresentado na Seção 3.1, buscando-se compreender seus impactos no modelo de otimização de portfólios. Com as instâncias de testes propostas, espera-se avaliar a

influência dessas restrições para fornecer ao investidor ferramentas para uma seleção de portfólio que consiga um melhor equilíbrio entre diversificação e custos operacionais.

Sabe-se também pelas Equações 3.19 e 3.20 que o valor máximo para o limite inferior e o valor mínimo para o limite superior deve ser igual a $1/K$ para manter a factibilidade do modelo. Como esse valor é dependente da cardinalidade, a maneira utilizada para normalizar os valores de limite inferior e superior nas diferentes cardinalidades foi definir um coeficiente de dilatação das fronteiras (λ), que define o quanto restrito serão as restrições de fronteira impostas às instâncias de testes. Os valores de λ utilizados nos testes foram 10%, 30% e 50%. As Equações 4.1 e 4.2 apresentam os cálculos dos valores de limite inferior e superior em função da cardinalidade (K) e do coeficiente de dilatação das fronteiras (λ). É importante observar que, para valores de λ menores, o intervalo de valores que podem ser alocados se torna menor e conseqüentemente o modelo mais restrito e à medida que o valor de λ cresce, o intervalo se torna maior, deixando o modelo mais flexível.

Destaca-se que os valores de K e λ foram escolhidos empiricamente, tentando incorporar aos testes diferentes cenários. Para valores de K e λ mais baixos busca-se um cenário mais restritivo com um menor número de ativos e menos flexibilidade nos valores de alocação por ativo dos ativos (lb e ub), aumentando a flexibilidade à medida que se aumenta esses valores.

$$lb = (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{K}, \quad (4.1)$$

$$ub = (1 + \lambda) \cdot \frac{1}{K}. \quad (4.2)$$

Para mensurar o impacto dos custos na qualidade da fronteira Pareto e no tempo de execução dos algoritmos são realizados testes comparando modelos que desconsideram os custos com modelos que os incorporam e conseqüentemente possuem maior complexidade computacional. Com isso, espera-se entender melhor o impacto desses custos, permitindo que o investidor consiga obter modelos teóricos mais próximos de uma aplicação prática e também buscando um equilíbrio da qualidade das soluções com o tempo de execução dos algoritmos.

Tabela 4.3: Resultados dos experimentos

Instância	K	λ	Custo	Junho/2022				Julho/2022			
				NSGA-II		SPEA2		NSGA-II		SPEA2	
				H	T	H	T	H	T	H	T
1	10	10%	Não	$3,20 \times 10^{-4}$	20,42	$3,15 \times 10^{-4}$	69,31	$3,24 \times 10^{-4}$	19,62	$3,86 \times 10^{-4}$	68,48
2	10	30%	Não	$3,77 \times 10^{-4}$	20,78	$3,67 \times 10^{-4}$	61,27	$4,08 \times 10^{-4}$	18,79	$3,60 \times 10^{-4}$	69,38
3	10	50%	Não	$4,43 \times 10^{-4}$	19,32	$4,23 \times 10^{-4}$	73,68	$4,37 \times 10^{-4}$	18,87	$3,85 \times 10^{-4}$	73,95
4	20	10%	Não	$6,35 \times 10^{-5}$	21,79	$5,97 \times 10^{-5}$	64,61	$6,95 \times 10^{-5}$	22,23	$6,76 \times 10^{-5}$	60,34
5	20	30%	Não	$7,58 \times 10^{-5}$	21,61	$6,79 \times 10^{-5}$	69,84	$8,56 \times 10^{-5}$	21,62	$8,01 \times 10^{-5}$	64,76
6	20	50%	Não	$9,92 \times 10^{-5}$	22,55	$8,40 \times 10^{-5}$	71,47	$1,11 \times 10^{-4}$	22,48	$1,03 \times 10^{-4}$	67,65
7	30	10%	Não	$3,27 \times 10^{-5}$	25,09	$3,30 \times 10^{-5}$	58,74	$4,14 \times 10^{-5}$	25,00	$4,55 \times 10^{-5}$	59,09
8	30	30%	Não	$3,13 \times 10^{-5}$	24,88	$3,24 \times 10^{-5}$	67,75	$4,83 \times 10^{-5}$	24,99	$4,92 \times 10^{-5}$	62,51
9	30	50%	Não	$3,17 \times 10^{-5}$	26,56	$3,74 \times 10^{-5}$	59,04	$5,25 \times 10^{-5}$	26,84	$4,50 \times 10^{-5}$	59,18
10	10	10%	Sim	$3,24 \times 10^{-4}$	40,69	$3,14 \times 10^{-4}$	92,51	$3,91 \times 10^{-4}$	39,80	$3,27 \times 10^{-4}$	90,88
11	10	30%	Sim	$3,74 \times 10^{-4}$	40,34	$3,45 \times 10^{-4}$	83,60	$3,94 \times 10^{-4}$	39,49	$3,65 \times 10^{-4}$	90,89
12	10	50%	Sim	$4,58 \times 10^{-4}$	40,89	$4,14 \times 10^{-4}$	95,97	$4,50 \times 10^{-4}$	39,96	$3,85 \times 10^{-4}$	96,81
13	20	10%	Sim	$6,25 \times 10^{-5}$	45,93	$6,13 \times 10^{-5}$	90,27	$7,51 \times 10^{-5}$	45,83	$6,55 \times 10^{-5}$	85,47
14	20	30%	Sim	$7,12 \times 10^{-5}$	45,78	$6,94 \times 10^{-5}$	96,28	$8,92 \times 10^{-5}$	45,18	$8,02 \times 10^{-5}$	89,91
15	20	50%	Sim	$9,55 \times 10^{-5}$	46,59	$8,87 \times 10^{-5}$	96,36	$1,11 \times 10^{-4}$	46,39	$1,05 \times 10^{-4}$	91,38
16	30	10%	Sim	$3,35 \times 10^{-5}$	53,08	$3,30 \times 10^{-5}$	87,08	$4,92 \times 10^{-5}$	51,93	$4,41 \times 10^{-5}$	86,64
17	30	30%	Sim	$3,42 \times 10^{-5}$	52,92	$3,06 \times 10^{-5}$	96,66	$4,90 \times 10^{-5}$	52,45	$4,42 \times 10^{-5}$	92,25
18	30	50%	Sim	$3,98 \times 10^{-5}$	54,23	$3,73 \times 10^{-5}$	87,46	$5,07 \times 10^{-5}$	53,83	$4,80 \times 10^{-5}$	88,00

4.3 Resultados

Para execução dos testes computacionais, os algoritmos foram implementados utilizando a linguagem de programação C++ e todos experimentos práticos que serão apresentados foram executados utilizando-se um computador com as seguintes configurações: processador Intel Core i7 3.6 Ghz, memória RAM de 16 Gb. e sistema operacional *Windows 10 64 bits*.

Na Tabela 4.3 são apresentados os resultados de hipervolume(H) e tempo(T) em segundos da execução de cada instância de teste, ressaltando que os resultados apresentados são a mediana de 100 execuções de cada instância. Observa-se que são utilizados os algoritmos *NSGA-II* e *SPEA2*, para dois intervalos de tempo diferentes variando-se os parâmetros das restrições de cardinalidade (K), coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) e custos de transação. Para as instâncias de testes onde se levam em conta os custos de transação, considera-se que o capital alocado no portfólio é de R\$50.000,00(cinquenta mil reais).

Analisando a Tabela 4.3 observa-se que, para ambos períodos de tempo, a qualidade das fronteiras Pareto medidas pelo hipervolume obtidas usando o *NSGA-II* e o *SPEA2* se mostram muito próximas para todas as instâncias de teste, embora o tempo de execução das instâncias pelo *NSGA-II* se mostre muito menor.

A Figura 4.1 mostra o tempo de execução dos algoritmos no primeiro intervalo de tempo (junho/2022) enquanto a Figura 4.2 apresentam essa comparação para o segundo intervalo analisado (julho/2022). Observa-se que não ocorre a sobreposição entre as caixas do *boxplot*, o que nos permite afirmar, que estatisticamente, o tempo de execução dos algoritmos são diferentes. Nesse parâmetro, em ambos intervalos, destaca-se uma superioridade do *NSGA-II* se comparado ao *SPEA2* por se obter um tempo de execução menor.

Para a verificar se há diferenças nas médias do hipervolume entre os algoritmos é utilizado o teste *T-Student*. De maneira geral, esse teste verifica duas hipóteses sobre os conjuntos observados - H_0 (ou hipótese nula): a média dos conjuntos é igual; H_1 (ou hipótese alternativa): a média dos conjuntos é diferente. De acordo com o nível de significância (α) adotado pode-se rejeitar ou não a hipótese nula (Crawley; 2014). Nas Tabelas 4.4 e 4.5 são apresentados as médias (μ), o desvio padrão (SD), o *p-value* e a informação se a hipótese nula foi rejeitada. Pode-se observar, usando uma significância (α) igual a 0,01, , que para maioria das instâncias não se pode rejeitar H_0 indicando que o resultado médio é estatisticamente igual.

Já na Figura 4.3 é apresentado um comparativo do hipervolume para o período de junho de 2022 e na Figura 4.4 para o período de julho de 2022. Em ambos os períodos analisados observa-se que a qualidade das fronteiras Pareto medidas pelo hipervolume obtidas pelo *NSGA-II* e pelo *SPEA2* são muito próximas, não apresentando superioridade aparente de nenhum dos algoritmos.

Embora não se possa afirmar que estatisticamente não haja diferença no hipervolume dos algoritmos em todas as instâncias de testes, ao observar as fronteiras Pareto no período de junho de 2022 na Figura 4.5 e do período de julho de 2022 e na Figura 4.6 pode-se verificar visualmente que as fronteiras Pareto são muito próximas para os dois algoritmos utilizados. Entretanto, como visto anteriormente, o tempo médio de execução do *NSGA-II* tende a ser inferior ao *SPEA2* e, portanto, nas próximas seções, serão utilizados somente os resultados obtidos pelo *NSGA-II*.

Com o intuito de analisar o impacto dos custos de transação e de cada restrição individualmente, a análise será dividida em três partes, sendo na primeira um estudo do impacto dos custos e transação, seguido do estudo do impacto da restrição de cardinalidade mantendo fixa a restrição de fronteira e, por fim, o estudo do impacto da restrição de fronteira, mantendo-se fixa a restrição de cardinalidade.

Tabela 4.4: Comparativo dos hipervolumes obtidos com *NSGA-II* e *SPEA2* (Período: Junho/2022)

Instância	K	λ	Custo	NSGA-II		SPEA2		p-value	rejeita H_0
				μ	SD	μ	SD		
1	10	10%	Não	$2,87 \times 10^{-4}$	$4,81 \times 10^{-5}$	$2,91 \times 10^{-4}$	$4,14 \times 10^{-5}$	$5,23 \times 10^{-1}$	Não
2	10	30%	Não	$3,51 \times 10^{-4}$	$5,98 \times 10^{-5}$	$3,47 \times 10^{-4}$	$4,86 \times 10^{-5}$	$5,97 \times 10^{-1}$	Não
3	10	50%	Não	$4,22 \times 10^{-4}$	$7,58 \times 10^{-5}$	$4,00 \times 10^{-4}$	$8,18 \times 10^{-5}$	$4,76 \times 10^{-2}$	Não
4	20	10%	Não	$6,21 \times 10^{-5}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$5,93 \times 10^{-5}$	$1,66 \times 10^{-5}$	$2,21 \times 10^{-1}$	Não
5	20	30%	Não	$7,37 \times 10^{-5}$	$1,09 \times 10^{-5}$	$6,81 \times 10^{-5}$	$1,48 \times 10^{-5}$	$2,60 \times 10^{-3}$	Sim
6	20	50%	Não	$9,83 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-5}$	$8,69 \times 10^{-5}$	$2,03 \times 10^{-5}$	$2,03 \times 10^{-5}$	Sim
7	30	10%	Não	$3,40 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-5}$	$3,53 \times 10^{-5}$	$1,40 \times 10^{-5}$	$4,94 \times 10^{-1}$	Não
8	30	30%	Não	$3,39 \times 10^{-5}$	$1,18 \times 10^{-5}$	$3,43 \times 10^{-5}$	$1,20 \times 10^{-5}$	$7,83 \times 10^{-1}$	Não
9	30	50%	Não	$4,10 \times 10^{-5}$	$1,66 \times 10^{-5}$	$3,87 \times 10^{-5}$	$1,44 \times 10^{-5}$	$2,99 \times 10^{-1}$	Não
10	10	10%	Sim	$3,00 \times 10^{-4}$	$4,09 \times 10^{-5}$	$2,90 \times 10^{-4}$	$4,40 \times 10^{-5}$	$8,74 \times 10^{-2}$	Não
11	10	30%	Sim	$3,53 \times 10^{-4}$	$5,95 \times 10^{-5}$	$3,31 \times 10^{-4}$	$5,65 \times 10^{-5}$	$9,76 \times 10^{-3}$	Sim
12	10	50%	Sim	$4,26 \times 10^{-4}$	$7,48 \times 10^{-5}$	$4,03 \times 10^{-4}$	$6,77 \times 10^{-5}$	$2,15 \times 10^{-2}$	Não
13	20	10%	Sim	$5,99 \times 10^{-5}$	$1,16 \times 10^{-5}$	$6,01 \times 10^{-5}$	$1,41 \times 10^{-5}$	$9,16 \times 10^{-1}$	Não
14	20	30%	Sim	$7,33 \times 10^{-5}$	$1,56 \times 10^{-5}$	$6,75 \times 10^{-5}$	$1,50 \times 10^{-5}$	$7,75 \times 10^{-3}$	Sim
15	20	50%	Sim	$9,74 \times 10^{-5}$	$1,76 \times 10^{-5}$	$8,97 \times 10^{-5}$	$1,96 \times 10^{-5}$	$4,35 \times 10^{-3}$	Sim
16	30	10%	Sim	$3,72 \times 10^{-5}$	$1,63 \times 10^{-5}$	$3,40 \times 10^{-5}$	$1,20 \times 10^{-5}$	$1,14 \times 10^{-1}$	Não
17	30	30%	Sim	$3,79 \times 10^{-5}$	$1,45 \times 10^{-5}$	$3,25 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^{-5}$	$4,50 \times 10^{-3}$	Sim
18	30	50%	Sim	$4,06 \times 10^{-5}$	$1,40 \times 10^{-5}$	$3,88 \times 10^{-5}$	$1,41 \times 10^{-5}$	$3,82 \times 10^{-1}$	Não

Tabela 4.5: Comparativo dos hipervolumes obtidos com *NSGA-II* e *SPEA2* (Período: Julho/2022)

Instância	K	λ	Custo	NSGA-II		SPEA2		p-value	rejeita H_0
				μ	SD	μ	SD		
1	10	10%	Não	$3,45 \times 10^{-4}$	$6,29 \times 10^{-5}$	$3,47 \times 10^{-4}$	$6,44 \times 10^{-5}$	$7,82 \times 10^{-1}$	Não
2	10	30%	Não	$3,88 \times 10^{-4}$	$6,49 \times 10^{-5}$	$3,65 \times 10^{-4}$	$7,09 \times 10^{-5}$	$1,84 \times 10^{-2}$	Não
3	10	50%	Não	$4,39 \times 10^{-4}$	$6,67 \times 10^{-5}$	$4,02 \times 10^{-4}$	$7,22 \times 10^{-5}$	$2,24 \times 10^{-4}$	Sim
4	20	10%	Não	$7,30 \times 10^{-5}$	$1,87 \times 10^{-5}$	$7,01 \times 10^{-5}$	$1,83 \times 10^{-5}$	$2,72 \times 10^{-1}$	Não
5	20	30%	Não	$9,24 \times 10^{-5}$	$2,18 \times 10^{-5}$	$8,81 \times 10^{-5}$	$2,36 \times 10^{-5}$	$1,81 \times 10^{-1}$	Não
6	20	50%	Não	$1,14 \times 10^{-4}$	$2,03 \times 10^{-5}$	$1,05 \times 10^{-4}$	$2,26 \times 10^{-5}$	$1,39 \times 10^{-3}$	Sim
7	30	10%	Não	$4,43 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	$4,42 \times 10^{-5}$	$1,22 \times 10^{-5}$	$9,67 \times 10^{-1}$	Não
8	30	30%	Não	$5,03 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	$4,70 \times 10^{-5}$	$1,32 \times 10^{-5}$	$7,74 \times 10^{-2}$	Não
9	30	50%	Não	$5,40 \times 10^{-5}$	$1,72 \times 10^{-5}$	$4,75 \times 10^{-5}$	$1,52 \times 10^{-5}$	$5,15 \times 10^{-3}$	Sim
10	10	10%	Sim	$3,56 \times 10^{-4}$	$6,12 \times 10^{-5}$	$3,39 \times 10^{-4}$	$6,86 \times 10^{-5}$	$6,48 \times 10^{-2}$	Não
11	10	30%	Sim	$3,80 \times 10^{-4}$	$6,40 \times 10^{-5}$	$3,69 \times 10^{-4}$	$5,83 \times 10^{-5}$	$1,84 \times 10^{-1}$	Não
12	10	50%	Sim	$4,43 \times 10^{-4}$	$7,41 \times 10^{-5}$	$3,93 \times 10^{-4}$	$6,77 \times 10^{-5}$	$1,42 \times 10^{-6}$	Sim
13	20	10%	Sim	$7,79 \times 10^{-5}$	$1,96 \times 10^{-5}$	$7,07 \times 10^{-5}$	$1,94 \times 10^{-5}$	$9,97 \times 10^{-3}$	Sim
14	20	30%	Sim	$9,43 \times 10^{-5}$	$2,05 \times 10^{-5}$	$8,49 \times 10^{-5}$	$1,91 \times 10^{-5}$	$1,04 \times 10^{-3}$	Sim
15	20	50%	Sim	$1,13 \times 10^{-4}$	$2,27 \times 10^{-5}$	$1,06 \times 10^{-4}$	$2,14 \times 10^{-5}$	$2,84 \times 10^{-2}$	Não
16	30	10%	Sim	$4,71 \times 10^{-5}$	$1,44 \times 10^{-5}$	$4,62 \times 10^{-5}$	$1,43 \times 10^{-5}$	$6,68 \times 10^{-1}$	Não
17	30	30%	Sim	$4,98 \times 10^{-5}$	$1,22 \times 10^{-5}$	$4,58 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	$2,84 \times 10^{-2}$	Não
18	30	50%	Sim	$5,35 \times 10^{-5}$	$1,58 \times 10^{-5}$	$5,04 \times 10^{-5}$	$1,52 \times 10^{-5}$	$1,58 \times 10^{-1}$	Não

Tabela 4.6: Comparativo dos hipervolumes obtidos desconsiderando e considerando custos de transação (Período: Junho/2022)

Instância	K	λ	Sem custos		Com custos		p-value	rejeita H_0
			μ	SD	μ	SD		
1	10	10%	$2,87 \times 10^{-4}$	$4,81 \times 10^{-5}$	$3,00 \times 10^{-4}$	$4,09 \times 10^{-5}$	$3,12 \times 10^{-2}$	Não
2	10	30%	$3,51 \times 10^{-4}$	$5,98 \times 10^{-5}$	$3,53 \times 10^{-4}$	$5,95 \times 10^{-5}$	$8,19 \times 10^{-1}$	Não
3	10	50%	$4,22 \times 10^{-4}$	$7,58 \times 10^{-5}$	$4,26 \times 10^{-4}$	$7,48 \times 10^{-5}$	$6,79 \times 10^{-1}$	Não
4	20	10%	$6,21 \times 10^{-5}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$5,99 \times 10^{-5}$	$1,16 \times 10^{-5}$	$2,43 \times 10^{-1}$	Não
5	20	50%	$7,37 \times 10^{-5}$	$1,09 \times 10^{-5}$	$7,33 \times 10^{-5}$	$1,56 \times 10^{-5}$	$8,50 \times 10^{-1}$	Não
6	20	30%	$9,83 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-5}$	$9,74 \times 10^{-5}$	$1,76 \times 10^{-5}$	$7,02 \times 10^{-1}$	Não
7	30	10%	$3,40 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-5}$	$3,72 \times 10^{-5}$	$1,63 \times 10^{-5}$	$1,17 \times 10^{-1}$	Não
8	30	30%	$3,39 \times 10^{-5}$	$1,18 \times 10^{-5}$	$3,79 \times 10^{-5}$	$1,45 \times 10^{-5}$	$3,45 \times 10^{-2}$	Não
9	30	50%	$4,10 \times 10^{-5}$	$1,66 \times 10^{-5}$	$4,06 \times 10^{-5}$	$1,40 \times 10^{-5}$	$8,62 \times 10^{-1}$	Não

Tabela 4.7: Comparativo dos hipervolumes obtidos desconsiderando e considerando custos de transação (Período: Julho/2022)

Instância	K	λ	Sem custos		Com custos		p-value	rejeita H_0
			μ	SD	μ	SD		
1	10	10%	$3,45 \times 10^{-4}$	$6,29 \times 10^{-5}$	$3,56 \times 10^{-4}$	$6,12 \times 10^{-5}$	$1,77 \times 10^{-1}$	Não
2	10	30%	$3,88 \times 10^{-4}$	$6,49 \times 10^{-5}$	$3,80 \times 10^{-4}$	$6,40 \times 10^{-5}$	$4,13 \times 10^{-1}$	Não
3	10	50%	$4,39 \times 10^{-4}$	$6,67 \times 10^{-5}$	$4,43 \times 10^{-4}$	$7,41 \times 10^{-5}$	$6,58 \times 10^{-1}$	Não
4	20	10%	$7,30 \times 10^{-5}$	$1,87 \times 10^{-5}$	$7,79 \times 10^{-5}$	$1,96 \times 10^{-5}$	$7,04 \times 10^{-2}$	Não
5	20	50%	$9,24 \times 10^{-5}$	$2,18 \times 10^{-5}$	$9,43 \times 10^{-5}$	$2,05 \times 10^{-5}$	$5,41 \times 10^{-1}$	Não
6	20	30%	$1,14 \times 10^{-4}$	$2,03 \times 10^{-5}$	$1,13 \times 10^{-4}$	$2,27 \times 10^{-5}$	$6,45 \times 10^{-1}$	Não
7	30	10%	$4,43 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	$4,71 \times 10^{-5}$	$1,44 \times 10^{-5}$	$1,55 \times 10^{-1}$	Não
8	30	30%	$5,03 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	$4,98 \times 10^{-5}$	$1,22 \times 10^{-5}$	$7,76 \times 10^{-1}$	Não
9	30	50%	$5,40 \times 10^{-5}$	$1,72 \times 10^{-5}$	$5,35 \times 10^{-5}$	$1,58 \times 10^{-5}$	$8,36 \times 10^{-1}$	Não

4.3.1 Análise dos custos de transação

Na Figura 4.7 são apresentados os comparativos dos tempos de execução para as instâncias de testes nos dois períodos analisados. Observa-se que para todas instâncias ocorre um aumento no tempo de execução quando os custos de transação e tributação são considerados e como não há sobreposição das caixas do *boxplot* pode-se afirmar que eles são estatisticamente diferentes. Esse aumento é explicado pelo fato de que a complexidade do algoritmo cresce muito ao incorporar os custos de transação, impactando diretamente no tempo de execução do algoritmo.

Nas Tabelas 4.6 e 4.7 são apresentados os testes *T-Student* comparando o hipervolume das instâncias sem e com os custos de transação. Pelos resultados de testes, verifica-se que para os valores de K e λ analisados, não há diferença entre os hipervolumes medidos, mostrando que o custos de transação não impactaram na qualidade das soluções obtidas.

Já na Figura 4.8 são apresentadas a dispersão dos hipervolumes das fronteiras Pareto

obtidas nos períodos de testes. É interessante observar que os hipervolumes são bastante próximos em todas as instâncias observadas, evidenciando que os custos de transação não impactaram significante na qualidade das fronteiras Pareto medidas pelo hipervolume. Isso pode ser explicado pelo fato de que, nesse trabalho, o custo de transação afeta somente o retorno do portfólio e não o risco. Aliado a isso, tem-se que o modelo de custos utiliza um custo fixo de transação de R\$10,00 (dez reais) e o capital total do portfólio das instâncias de teste é de R\$50.000,00 (cinquenta mil reais), ou seja, cada operação de compra ou venda tem o custo de 0,02% do capital total, fazendo que seu impacto na qualidade da fronteira Pareto seja pouco significativo. Destaca-se também que o impacto dos custos foram medidos em cada instante tempo de forma independente o que minimiza o impacto do mesmo, sendo interessante em trabalhos futuros buscar entender seu impacto cumulativo após sucessivas rodadas de testes.

Nas Figuras 4.9 e 4.10 são mostrados comparativos das fronteiras Pareto dos modelos que ignoram os custos de transação com os modelos que consideram os custos de transação. Observa-se que as fronteiras obtidas se sobrepõem em todas as instâncias observadas. Isso ajuda a confirmar que os custos de transação trazem pouco impacto na fronteira Pareto obtida.

4.3.2 Análise da restrição de cardinalidade

Na Figura 4.11 são apresentadas as dispersões do tempo de execução das instâncias de teste para os dois intervalos de tempo analisados, comparando o tempo utilizando-se valores do coeficiente de dilatação de fronteiras (λ) fixos. Numa primeira análise, observa-se que, independente do valor λ utilizado nos testes e aumentando-se a cardinalidade, tende-se a aumentar o tempo de execução. Esse aumento no tempo de execução pode estar associado ao fato de que ao aumentar o número de ativos selecionados, traz-se uma maior flexibilidade ao modelo de otimização, mas acaba implicando em um maior consumo computacional.

Para tentar entender se ocorre uma variação estatística dos resultados obtidos a medida que se varia a cardinalidade foi utilizado o teste *ANOVA*. De maneira geral esse teste compara três ou mais grupos independentes buscando responder se há ou não diferença nas médias dos conjuntos observados. Para isso, são elaboradas duas hipóteses, sobre os conjuntos observados - H_0 (ou hipótese nula): a média dos conjuntos é igual; H_1 (ou hipótese alternativa): a média dos conjuntos é diferentes. Para realizar esse teste de hipóteses, o teste *ANOVA* retorna dois valores, sendo eles: valor F que informa o quanto

Tabela 4.8: Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Junho/2022)

λ	Custos	Tempo			Hipervolume		
		F	p-value	rejeita H_0	F	p-value	rejeita H_0
10%	Não	745,89	$4,12 \times 10^{-83}$	Sim	1042,58	$2,57 \times 10^{-99}$	Sim
30%	Não	609,61	$4,80 \times 10^{-74}$	Sim	1132,30	$1,64 \times 10^{-103}$	Sim
50%	Não	4034,60	$2,90 \times 10^{-175}$	Sim	1194,20	$2,95 \times 10^{-106}$	Sim
10%	Sim	1219,31	$2,45 \times 10^{-107}$	Sim	1034,21	$6,55 \times 10^{-99}$	Sim
30%	Sim	2668,21	$9,71 \times 10^{-151}$	Sim	1061,84	$3,07 \times 10^{-100}$	Sim
50%	Sim	2634,36	$5,38 \times 10^{-150}$	Sim	1201,09	$1,49 \times 10^{-106}$	Sim

as médias variam entre si e um valor $p - value$ que indica a probabilidade da diferença ter ocorrido por acaso. Assim para valores de $p - value$ menores que uma significância (α) pré-estabelecida pode-se rejeitar H_0 e concluir que a média dos grupos é diferente (Crawley; 2014).

Nas Tabelas 4.8 e 4.9 são mostrados os resultados do teste *ANOVA* considerando os valores de coeficiente de dilatação de fronteiras (λ) fixos para os dois períodos de tempo utilizados nos testes. Pode-se observar que para todas as instâncias o valor de $p - value$ foi menor que o grau de significância (α) igual a 0,01 adotado nesse trabalho. Assim podemos afirmar que ao variar a cardinalidade (K), fez com tanto a média de tempo de execução quanto a média do hipervolume, fossem estatisticamente diferentes.

Apesar de se observar um aumento no tempo de execução com um aumento da cardinalidade, a qualidade da fronteira Pareto medida pelo hipervolume não tende a aumentar com o aumento da cardinalidade. Embora não siga um comportamento linear, na Figura 4.12 observa-se que, aumentando-se a cardinalidade, a qualidade da fronteira tende a diminuir. É interessante observar que para todos valores de λ observados o valor de K igual a 10 tendeu a apresentar fronteiras Pareto de melhor qualidade que os demais valores. Com isso, pode-se concluir que nos modelos de otimização de portfólio é preciso encontrar um equilíbrio entre valores de K baixos que trazem uma melhor eficiência em relação ao tempo de execução, mas restringem a diversificação do risco entre os ativos, e valores de K muito altos que, além de aumentar o tempo de execução, tendem a fazer com que a qualidade das soluções obtidas diminua.

Embora nesse trabalho tenham sido utilizados valores fixos de cardinalidade, uma abordagem alternativa da análise da cardinalidade é apresentada por Ferreira and Cardoso (2021). Nesse trabalho, os autores usam a cardinalidade variável como uma função objetivo a ser otimizada, como resultado é observado que determinados valores de car-

Tabela 4.9: Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Julho/2022)

λ	Custos	Tempo			Hiper-volume		
		F	p-value	rejeita H_0	F	p-value	rejeita H_0
10%	Não	316,22	$1,01 \times 10^{-48}$	Sim	938,18	$4,58 \times 10^{-94}$	Sim
30%	Não	270,39	$1,09 \times 10^{-43}$	Sim	1090,20	$1,41 \times 10^{-101}$	Sim
50%	Não	85,03	$5,54 \times 10^{-18}$	Sim	1315,60	$2,54 \times 10^{-111}$	Sim
10%	Sim	753,93	$1,31 \times 10^{-83}$	Sim	978,35	$3,89 \times 10^{-96}$	Sim
30%	Sim	277,64	$1,65 \times 10^{-44}$	Sim	1131,31	$1,81 \times 10^{-103}$	Sim
50%	Sim	460,93	$1,90 \times 10^{-62}$	Sim	1225,58	$1,32 \times 10^{-107}$	Sim

Tabela 4.10: Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com cardinalidade (K) fixa (Período: Junho/2022)

K	Custos	Tempo			Hiper-volume		
		F	p-value	rejeita H_0	F	p-value	rejeita H_0
10	Não	89,48	$9,70 \times 10^{-19}$	Sim	234,32	$1,39 \times 10^{-39}$	Sim
20	Não	32,94	$2,33 \times 10^{-8}$	Sim	305,42	$1,43 \times 10^{-47}$	Sim
30	Não	51,69	$5,26 \times 10^{-12}$	Sim	12,96	$3,72 \times 10^{-4}$	Sim
10	Sim	$3,80 \times 10^{-4}$	$9,84 \times 10^{-1}$	Não	217,40	$2,50 \times 10^{-37}$	Sim
20	Sim	13,71	$2,53 \times 10^{-4}$	Sim	295,83	$1,57 \times 10^{-46}$	Sim
30	Sim	7,50	$6,54 \times 10^{-3}$	Sim	2,60	$1,08 \times 10^{-1}$	Não

dinalidade trazem melhores soluções, reforçando que ela impacta de fato na qualidade das soluções obtidas.

Por fim, nas Figuras 4.13 e 4.14 são apresentadas as fronteiras Pareto resultantes das 100 execuções de cada instância de teste, sendo os resultados apresentados agrupados pelo valor de λ . Pode-se observar que as fronteiras Pareto para valores de K menores tendem a dominar as soluções obtidas por valores maiores de K . Entretanto, observa-se que para valores maiores de K essa fronteira tende a apresentar uma cobertura mais limitada do espaço de soluções.

4.3.3 Análise da restrição de fronteira

Ao analisar os gráficos apresentados na Figura 4.15 observa-se que não é possível se estabelecer uma relação direta entre o tempo de execução e o valor de coeficiente de dilatação (λ) para os diferentes valores de K analisados neste trabalho. Dessa forma, entende-se que o valor de λ não impacta de maneira significativa na eficiência do modelo de otimização de portfólios.

Nos gráficos da Figura 4.16 são apresentados os hipervolumes agrupados pela cardi-

Tabela 4.11: Comparativo dos tempos de execução e hipervolumes com cardinalidade (K) fixa (Período: Julho/2022)

K	Custos	Tempo			Hipervolume		
		F	p-value	rejeita H_0	F	p-value	rejeita H_0
10	Não	3,89	$4,94 \times 10^{-2}$	Sim	104,98	$2,65 \times 10^{-21}$	Sim
20	Não	1,73	$1,90 \times 10^{-1}$	Não	207,32	$4,82 \times 10^{-32}$	Sim
30	Não	6,84	$9,36 \times 10^{-3}$	Sim	21,14	$6,00 \times 10^{-6}$	Sim
10	Sim	$3,79 \times 10^{-1}$	$5,39 \times 10^{-1}$	Não	80,91	$2,82 \times 10^{-17}$	Sim
20	Sim	1,36	$2,44 \times 10^{-1}$	Não	139,13	$1,31 \times 10^{-26}$	Sim
30	Sim	15,90	$8,40 \times 10^{-5}$	Sim	10,03	$1,70 \times 10^{-3}$	Sim

nalidade. É interessante observar que valores maiores de λ tendem a permitir melhores soluções. Esse comportamento pode ser explicado pelo fato de que maiores valores de λ permitem uma maior flexibilidade nos valores atribuídos à alocação de capital em cada ativo do portfólio, tornando o modelo de otimização menos restrito pela relaxação dos valores de alocação.

De maneira similar ao apresentado na análise da restrição de cardinalidade (Seção 4.3.2) utilizou-se o teste *ANOVA* para tentar entender se ocorre uma variação estatística dos resultados obtidos a medida que se varia o coeficiente de dilatação das fronteiras (λ). Nas Tabelas 4.10 e 4.11 pode-se observar que embora para maioria das instâncias a variação de λ fez com que houvesse uma diferença estatística nas médias do tempo de execução e hipervolume, em algumas instâncias não houve essa diferenciação. Podemos concluir assim, que ao alterar o valor de λ não impacta necessariamente no tempo de execução e hipervolume, mas pelos testes realizados existe uma grande tendência de que ocorra algum impacto com a variação de λ .

Na Figuras 4.17 e 4.18 são apresentadas as fronteiras Pareto obtidas a partir das 100 execuções de cada instância de teste para os períodos analisados. Esses gráficos evidenciam que valores de λ maiores tendem a trazer uma maior qualidade à fronteira Pareto que se torna mais evidente com valores mais altos de K . Esse comportamento pode ser explicado, pois aumentando-se o valor de λ e de K o modelo tende a se tornar um pouco mais flexível, permitindo obter um conjunto de soluções de melhor qualidade.

4.4 Conclusão

Nesse capítulo foram especificadas as configurações utilizadas na instâncias de teste, bem como os resultados obtidos da execução dessas instâncias. Além disso, foi apresentada

uma comparação dos algoritmos *NSGA-II* e *SPEA2* analisando o tempo de execução e a qualidade das fronteiras Pareto medidas pelo hipervolume. Por fim, foi feito um estudo dos resultados de forma a tentar identificar o impacto de cada restrição individualmente no modelo de otimização de portfólios.

Na comparação dos algoritmos *NSGA-II* e *SPEA2* observa-se que embora estes apresentem fronteiras Pareto muito próximas (Figuras 4.5 e 4.6) o tempo de execução do *SPEA2* se mostrou muito maior do que do *NSGA-II* (Figuras 4.1 e 4.2). Com isso, optou-se por utilizar somente o *NSGA-II* nas demais análises.

Para os custos de transação e tributação observa-se que, embora ocorra um grande aumento no tempo de execução do algoritmo (Figura 4.7), o impacto na qualidade das soluções não é significativo (Figura 4.8). Isso pode ser explicado pelo fato de que, ao se considerar os custos de transação, se traz uma maior complexidade ao algoritmo, o que implica no aumento do tempo de execução. Entretanto, pelo fato do modelo de custos adotado utilizar um custo de transação fixo baixo que corresponde a 0,02% do capital total, esse custo impacta de maneira pouco significativa nas fronteiras obtidas.

Pela verificação dos resultados, observa-se que a restrição de cardinalidade traz ao modelo de otimização de portfólios um impacto mais significativo que a restrição de fronteira, tanto em relação ao tempo de execução quanto na qualidade das fronteiras Pareto medidas através do hipervolume.

De maneira geral, pode-se concluir que aumentando-se o valor do coeficiente de dilatação das fronteiras (λ), observa-se um aumento na qualidade das fronteiras Pareto obtidas. No entanto, observa-se que esse aumento aparece de maneira mais evidente nos modelos com valores de cardinalidade maiores.

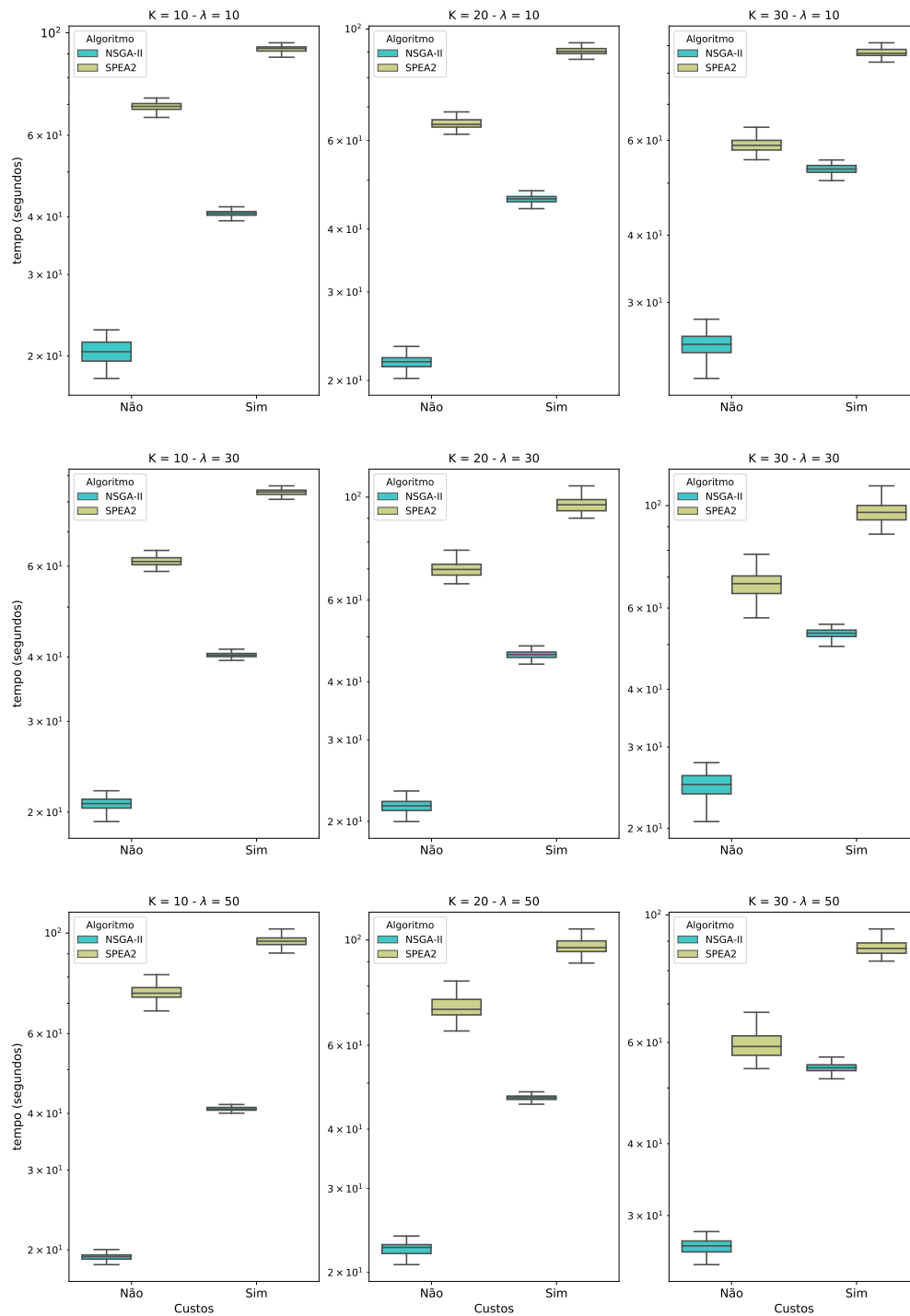


Figura 4.1: Tempo de execução *NSGA-II* x *SPEA2* (Período: Junho/2022)

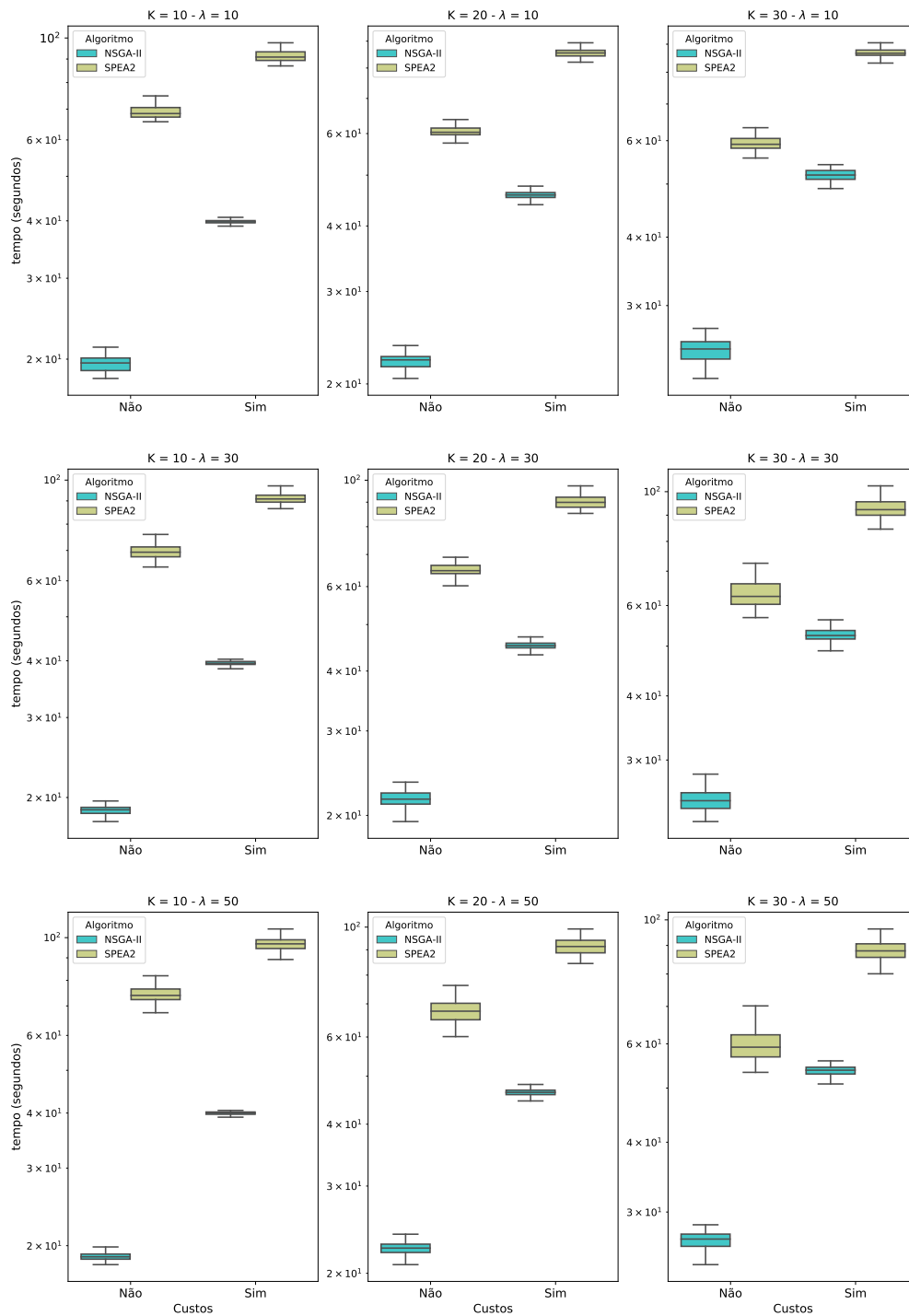


Figura 4.2: Tempo de execução *NSGA-II* x *SPEA2* (Período: Julho/2022)

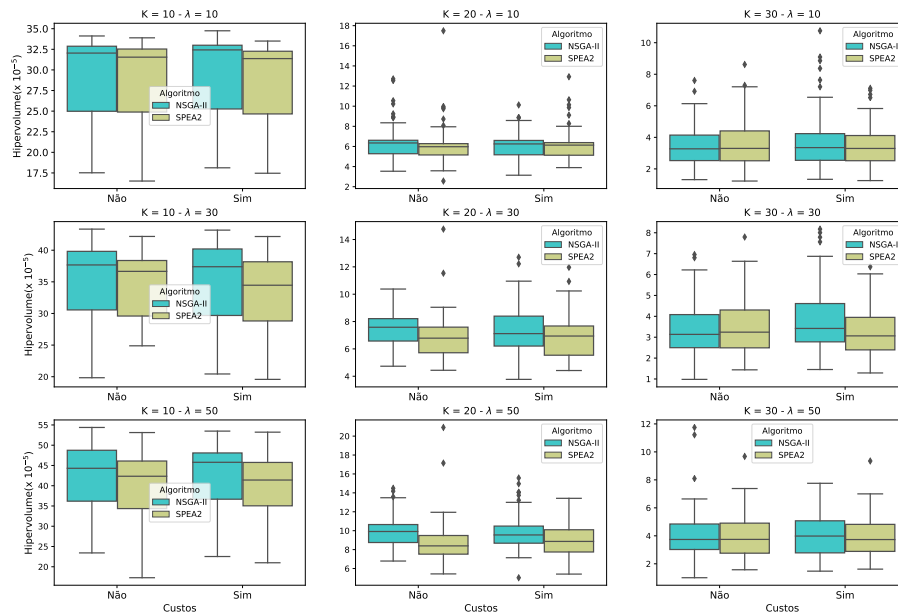


Figura 4.3: Hipervolume *NSGA-II* x *SPEA2* (Período: Junho/2022)

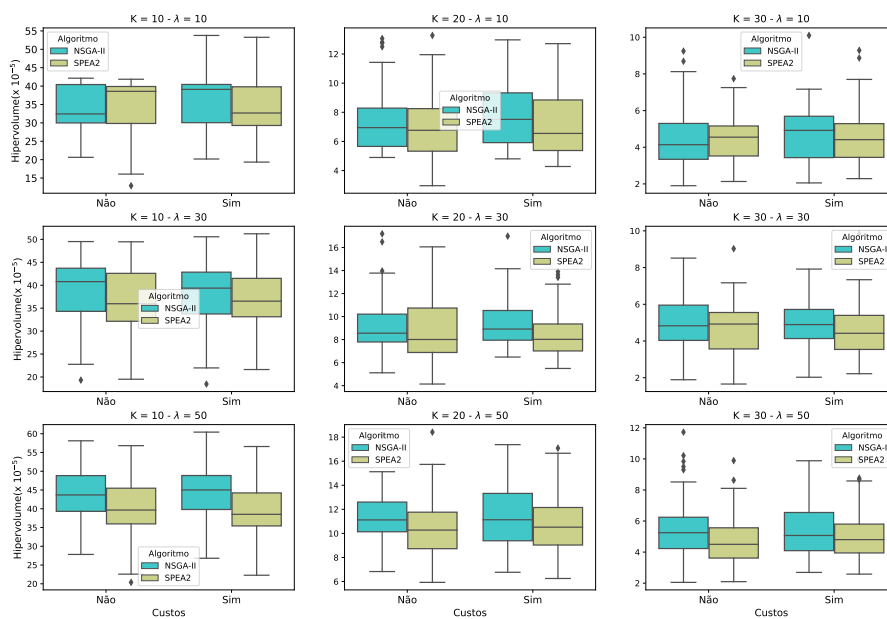


Figura 4.4: Hipervolume *NSGA-II* x *SPEA2* (Período: Julho/2022)

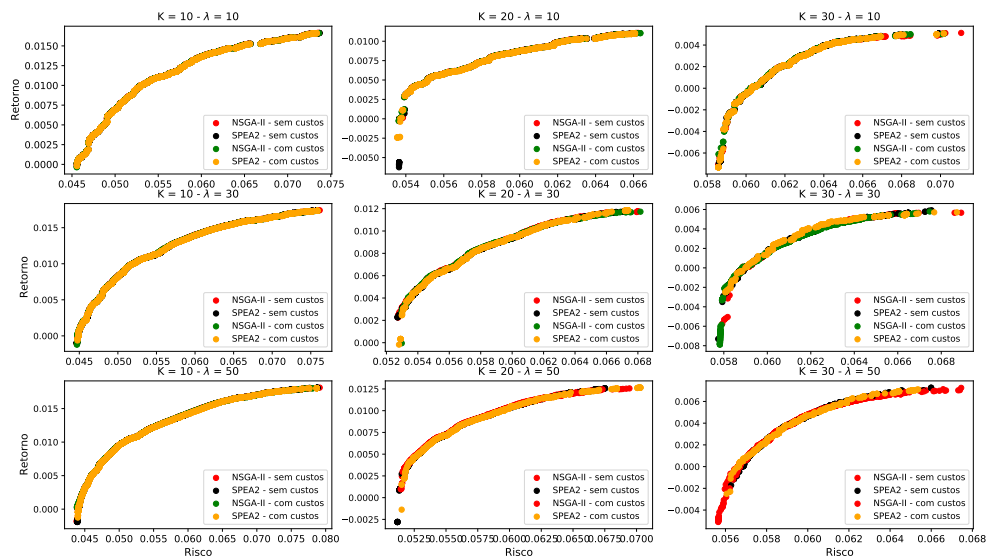


Figura 4.5: Fronteiras Pareto *NSGA-II* x *SPEA2* (Período: Junho/2022)

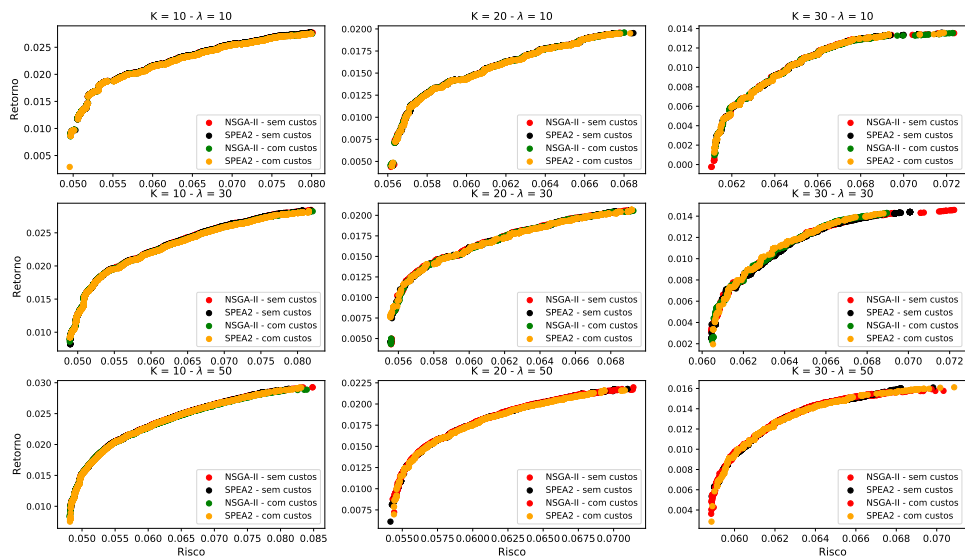


Figura 4.6: Fronteiras Pareto *NSGA-II* x *SPEA2* (Período: Julho/2022)

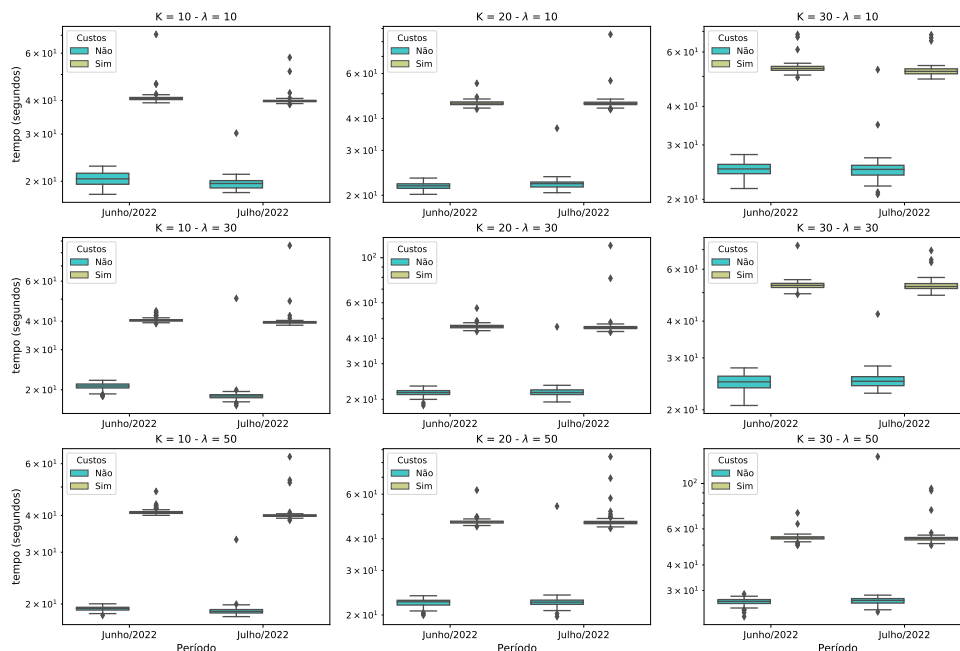


Figura 4.7: Comparativo dos tempos de execução considerando os custos de transação

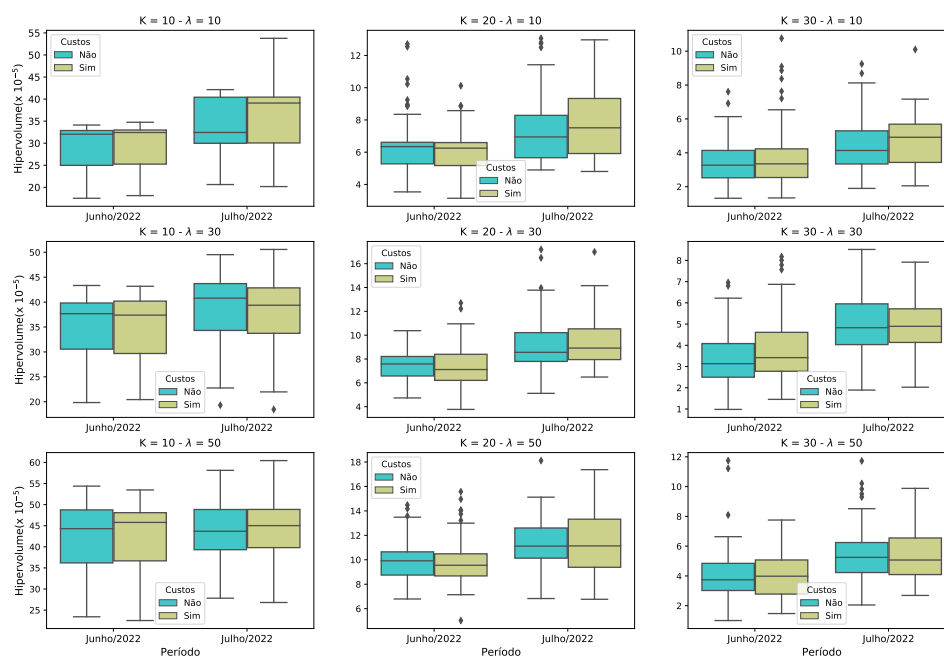


Figura 4.8: Comparativo do hipervolume considerando os custos de transação

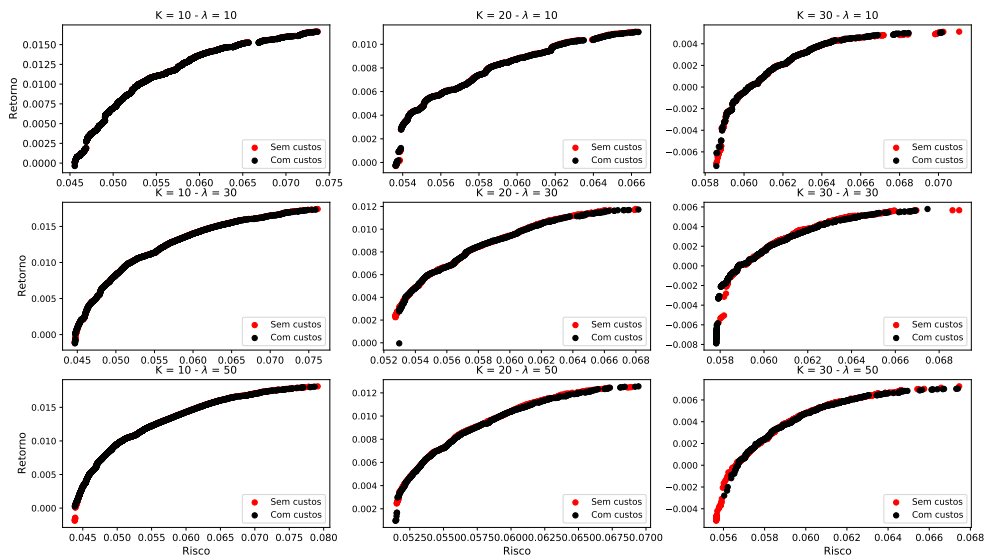


Figura 4.9: Comparativo das fronteiras Pareto considerando os custos de transação (Período: Junho/2022)

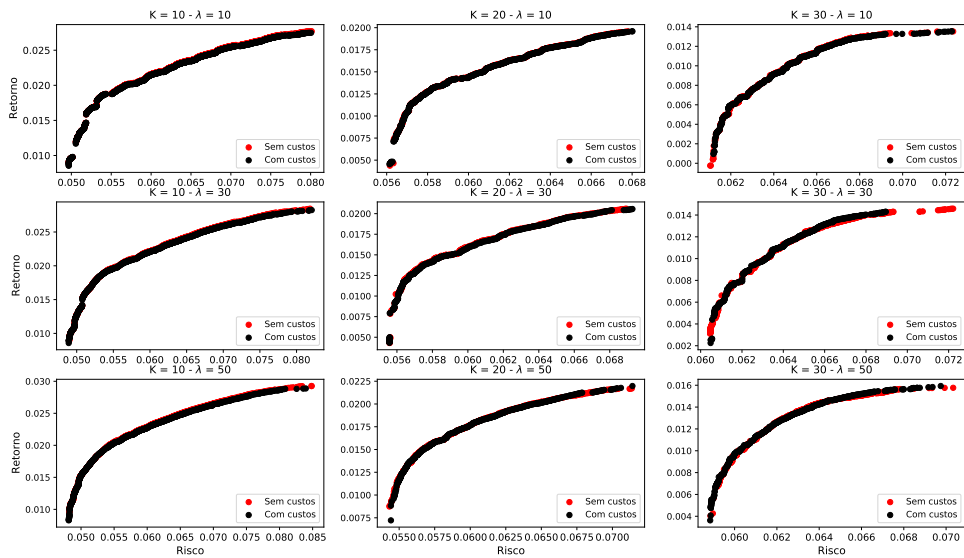


Figura 4.10: Comparativo das fronteiras Pareto considerando os custos de transação (Período: Julho/2022)

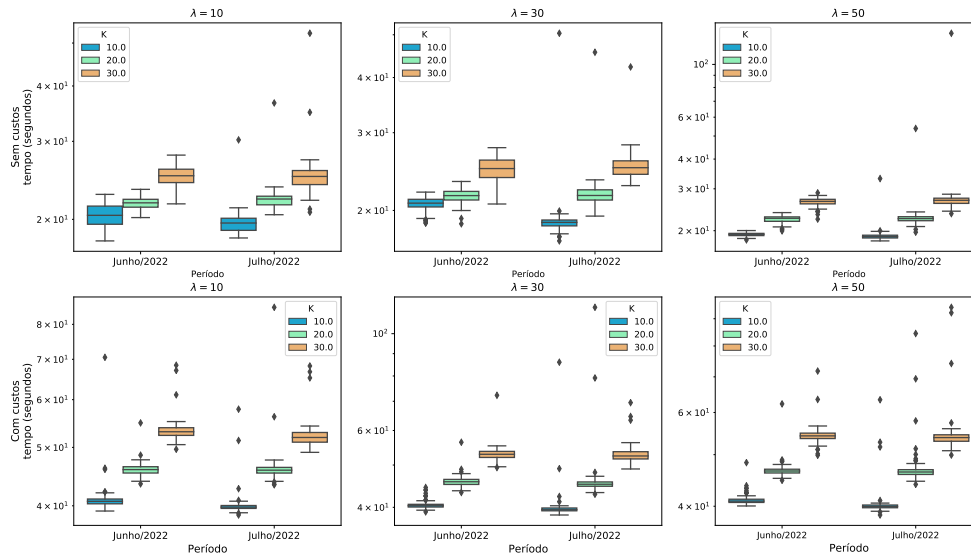


Figura 4.11: Tempo de execução com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo

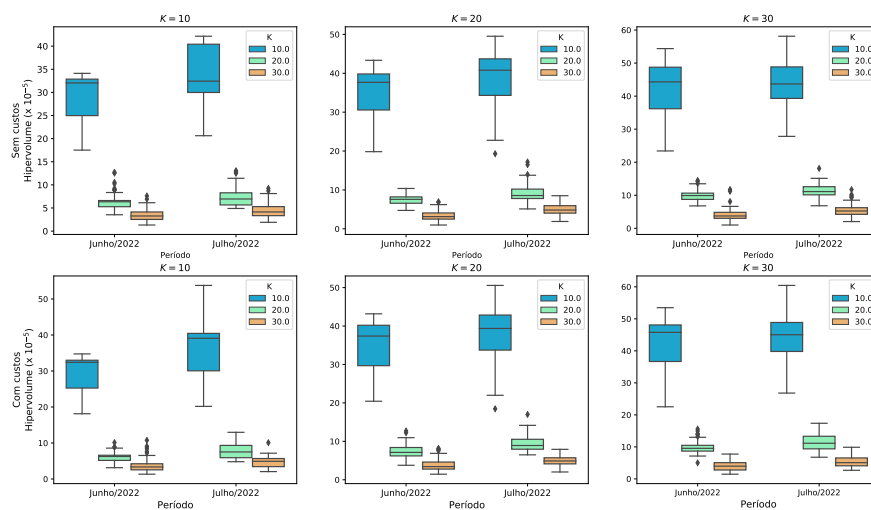


Figura 4.12: Hipervolume com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo

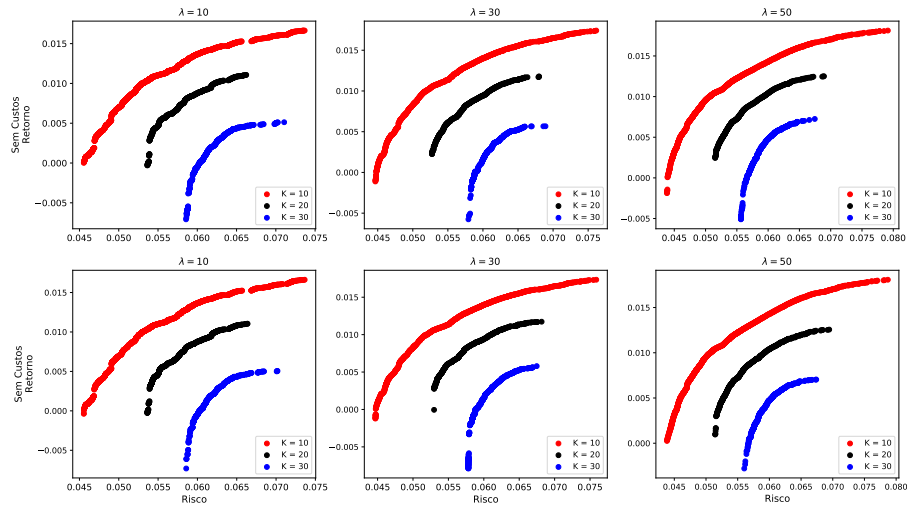


Figura 4.13: Comparativo das fronteiras Pareto com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Junho/2022)

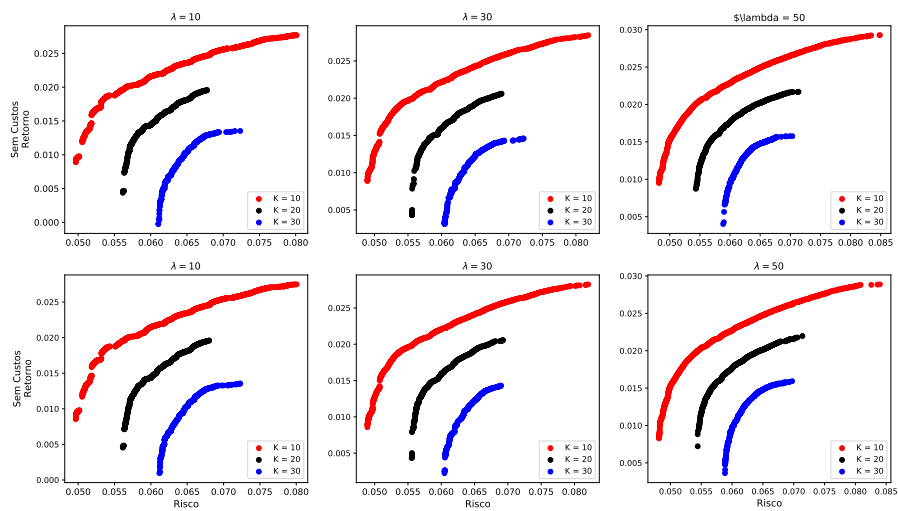


Figura 4.14: Comparativo das fronteiras Pareto com coeficiente de dilatação das fronteiras (λ) fixo (Período: Julho/2022)

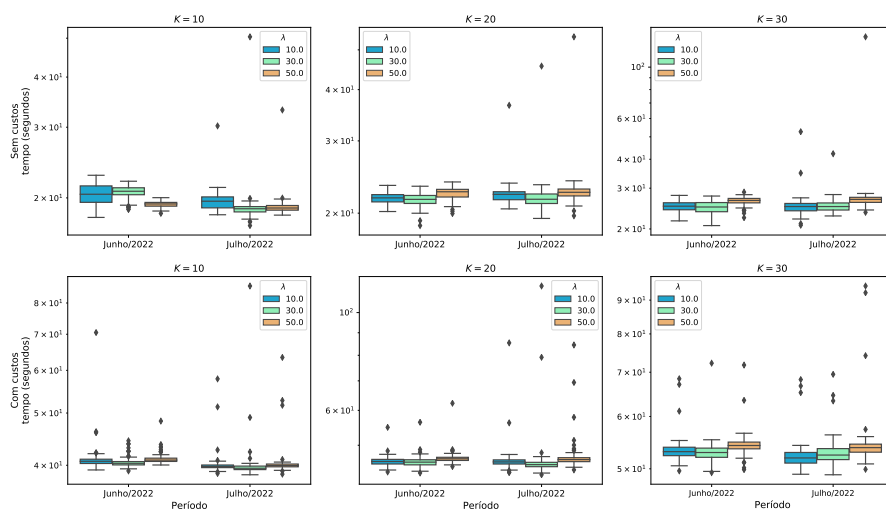


Figura 4.15: Tempo de execução com cardinalidade (K) fixa

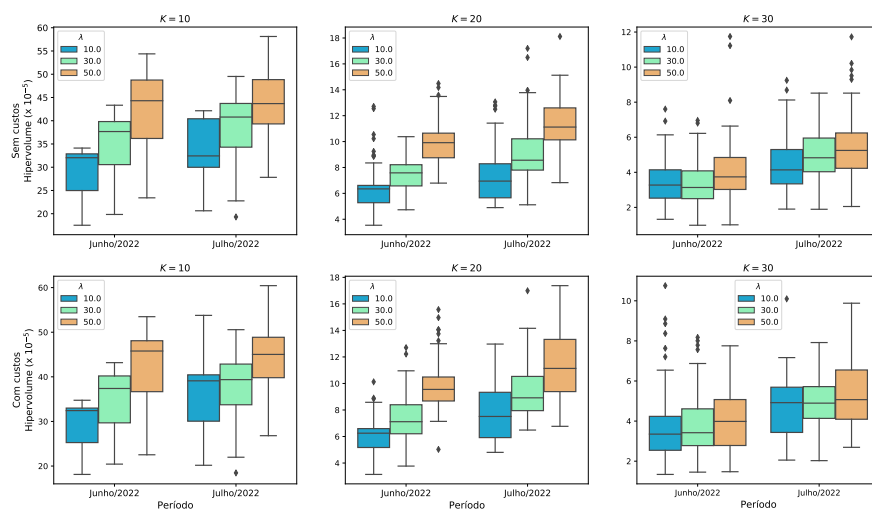


Figura 4.16: Hiper-volume com cardinalidade (K) fixa

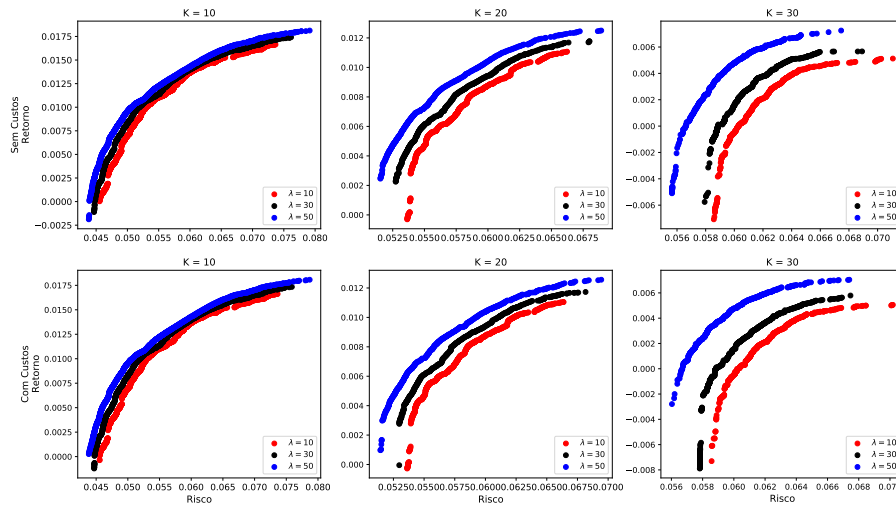


Figura 4.17: Comparativo das fronteiras Pareto com cardinalidade (K) fixa (Período: Junho/2022)

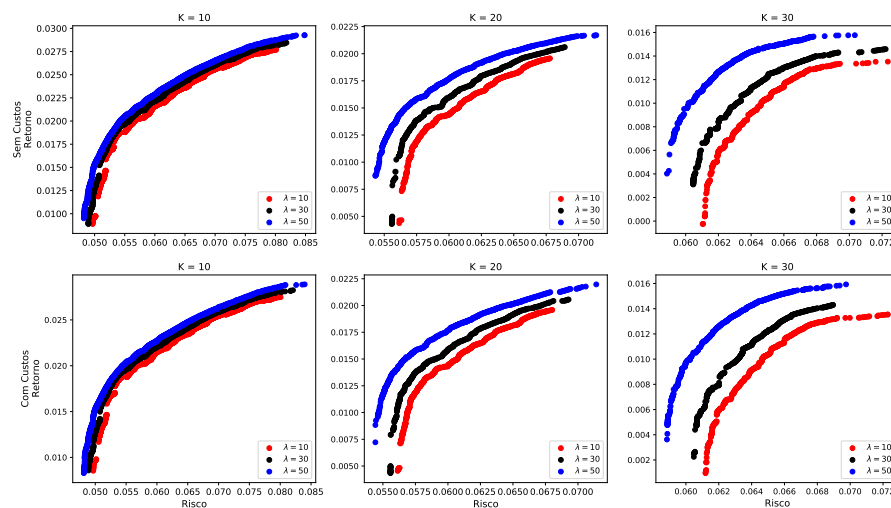


Figura 4.18: Comparativo das fronteiras Pareto com cardinalidade (K) fixa (Período: Julho/2022)

Capítulo 5

Considerações Finais

Esse capítulo apresenta as conclusões obtidas a partir da pesquisa realizada durante o mestrado e traz apontamentos de trabalhos futuros. Inicialmente são feitas algumas considerações sobre os modelos de otimização apresentados na literatura, bem como uma discussão da aplicabilidade prática desses modelos. Em seguida, é discutida a abordagem utilizada nesse trabalho para implementação do modelo de otimização de portfólios, apresentando-se, finalmente, as propostas de trabalhos futuros.

5.1 Conclusões

Observa-se na literatura um grande esforço para se obter melhores modelos de mensuração de risco, bem como inclusão de restrições com o objetivo de tornar os modelos mais realísticos. Sabe-se, entretanto, que a utilização de modelos de mensuração de risco mais complexos e a adição de um conjunto maior de restrições aumentam a complexidade computacional, fazendo com que seja necessário entender o impacto de cada restrição, a fim de se encontrar um equilíbrio entre o tempo de execução aceitável e um modelo que possa ser aplicado de forma mais realística pelos investidores.

Dada a complexidade computacional e características dos modelos de otimização de portfólios, observa-se na literatura a utilização de Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo, sendo os mais comuns o *NSGA-II* e o *SPEA2*. Nesse trabalho, foram utilizados os dois algoritmos e foi observado que embora a qualidade das soluções Pareto sejam muito próximas, o tempo de execução do *NSGA-II* foi muito menor do que do *SPEA2* em todas as instâncias de teste, indicando uma superioridade do primeiro sobre o segundo.

Ao analisar os custos de transação e tributação apresentados nesse trabalho, verifica-se nas instâncias de teste estudadas que, embora tais custos tragam ao modelo uma grande complexidade computacional impactando no tempo de execução do algoritmo, o efeito dos custos na qualidade da fronteira Pareto é pouco significativo. Como nas instâncias foi utilizado um modelo simplificado de custo fixo por operação que equivale a 0,02% do capital total, associado a uma tributação de 15% sobre um possível lucro, houve pouco impacto na qualidade das fronteiras Pareto, concluindo-se que, com valores de custos muito baixos em relação ao capital total, o impacto dos custos tende a ser pouco significativo.

Analisando as restrições de cardinalidade e de fronteira, observa-se que enquanto a restrição de cardinalidade impacta tanto o tempo de execução quanto a qualidade do conjunto de soluções obtidas, a alteração dos parâmetros da restrição de fronteira traz pouco impacto ao modelo se comparado ao primeiro.

Observa-se que as restrições utilizadas nesse trabalho não conseguem trazer ainda um alto grau de aplicabilidade prática, pois desconsideram que os ativos são negociados em lotes inteiros. No entanto, acredita-se que controlando o número de ativos do portfólio (K) e a quantidade de capital a ser alocada por ativo (lb e ub) e, principalmente, compreendendo o impacto das restrições no modelo de otimização de portfólios, seja um passo importante para trazer uma aplicabilidade prática ao modelo.

5.2 Trabalhos Futuros

O modelo desenvolvido nessa pesquisa apresenta algumas limitações, de forma que há ainda espaço para que novas restrições sejam adicionadas, a fim de que os modelos se tornem mais próximos de uma aplicação prática pelos investidores. Assim, as principais sugestões de trabalhos futuros são:

1. Utilizar diferentes métricas de avaliação de risco do portfólio, permitindo que se se faça um estudo do tempo de execução das diferentes metodologias.
2. Incluir a restrição de lotes inteiros, pois ao considerar que os ativos são negociados em lotes inteiros, as alocações de capital propostas pelo modelo de otimização poderão ser realizadas de maneira mais eficiente.
3. Considerar diferentes valores de capital total para buscar entender se para um

capital menor os custos de transação trazem um impacto maior ao modelo de otimização de portfólios.

4. Avaliar os custos de transação e tributação ao longo de série de otimizações sucessivas afim de se observar seu impacto no capital total no longo prazo.
5. Comparar diferentes formas de incorporar o cálculo do custo de transação e impostos ao modelo, por exemplo, adicionando os custos como função objetivo adicional a ser minimizada.

Referências Bibliográficas

Akbay, M. A., Kalayci, C. B. and Polat, O. (2020). A parallel variable neighborhood search algorithm with quadratic programming for cardinality constrained portfolio optimization, *Knowledge-Based Systems* **198**: 105944.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950705120302707>

AL-Salami, N. M. (2009). Evolutionary algorithm definition, *American Journal of Engineering and Applied Sciences* **2**(4): 789–795.

URL: <https://thescipub.com/abstract/ajeassp.2009.789.795>

AlphaVantage (2017). Alpha vantage inc.

URL: <https://www.alphavantage.co/>

Anagnostopoulos, K. P. and Mamanis, G. (2011). The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms, *Expert Systems with Applications* **38**(11): 14208–14217.

Angelelli, E., Mansini, R. and Speranza, M. G. (2008). A comparison of mad and cvar models with real features, *Journal of Banking Finance* **32**(7): 1188 – 1197.

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426607002981>

Armananzas, R. and Lozano, J. A. (2005). A multiobjective approach to the portfolio optimization problem, *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Vol. 2, pp. 1388–1395 Vol. 2.

Beyer, H.-G., Finck, S. and Breuer, T. (2014). Evolution on trees: On the design of an evolution strategy for scenario-based multi-period portfolio optimization under transaction costs, *Swarm and Evolutionary Computation* **17**: 74 – 87.

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650214000352>

Bisias, D., Flood, M., Lo, A. W. and Valavanis, S. (2012). A survey of systemic risk

- analytics, *Annual Review of Financial Economics* **4**(1): 255–296.
URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-financial-110311-101754>
- Brasil (1995). Lei nº 9.250, de 26 de dezembro de 1995, *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*. Altera a legislação do imposto de renda das pessoas físicas e dá outras providências.
URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9250.htm
- Chai, S. and Zhou, P. (2018). The minimum-cvar strategy with semi-parametric estimation in carbon market hedging problems, *Energy Economics* **76**: 64 – 75.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988318303967>
- Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. and Sharaiha, Y. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation, *Computers Operations Research* **27**(13): 1271 – 1302.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030505489900074X>
- Chang, T.-J., Yang, S.-C. and Chang, K.-J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm, *Expert Systems with Applications* **36**(7): 10529 – 10537.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417409002188>
- Chen, Y. and Zhou, A. (2019). Moea/d with an improved multi-dimensional mapping coding scheme for constrained multi-objective portfolio optimization, *2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 1742–1749.
- Crawley, M. J. (2014). *Statistics*, 2 edn, John Wiley & Sons, Nashville, TN.
- Dallagnol, V. A. F., van den Berg, J. and Mous, L. (2009). Portfolio management using value at risk: A comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization, *International Journal of Intelligent Systems* **24**(7): 766–792.
URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/int.20360>
- Dastkhan, H., Gharneh, N. S. and Golmakani, H. (2011). A linguistic-based portfolio selection model using weighted max–min operator and hybrid genetic algorithm, *Expert Systems with Applications* **38**(9): 11735 – 11743.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411004684>
- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A. and Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II, *Parallel Problem*

- Solving from Nature PPSN VI*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 849–858.
URL: https://doi.org/10.1007/3-540-45356-3_33
- Doering, J., Kizys, R., Juan, A. A., Àngels Fitó and Polat, O. (2019). Metaheuristics for rich portfolio optimisation and risk management: Current state and future trends, *Operations Research Perspectives* **6**: 100121.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214716019300399>
- Ehrgott, M., Klamroth, K. and Schwehm, C. (2004). An mcdm approach to portfolio optimization, *European Journal of Operational Research* **155**(3): 752 – 770. Traffic and Transportation Systems Analysis.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702008810>
- Ertenlice, O. and Kalayci, C. B. (2018). A survey of swarm intelligence for portfolio optimization: Algorithms and applications, *Swarm and Evolutionary Computation* **39**: 36 – 52.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221065021730353X>
- Ferreira, F. G. D. C. and Cardoso, R. T. N. (2021). Mean-cvar portfolio optimization approaches with variable cardinality constraint and rebalancing process, *Archives of Computational Methods in Engineering* **28**(5): 3703–3720.
URL: <https://doi.org/10.1007/s11831-020-09522-1>
- Gunjan, A. and Bhattacharyya, S. (2022). A brief review of portfolio optimization techniques, *Artificial Intelligence Review* .
URL: <https://doi.org/10.1007/s10462-022-10273-7>
- Ibrahim, M. A., El-Beltagy, M. and Khorshid, M. (2016). Evolutionary multiobjective optimization for portfolios in emerging markets: Contrasting higher moments and median models, in G. Squillero and P. Burelli (eds), *Applications of Evolutionary Computation*, Springer International Publishing, Cham, pp. 73–87.
URL: https://www.doi.org/10.1007/978-3-319-31204-0_6
- Jorion, P. (1997). *Value at risk : The new benchmark for controlling market risk*, Irwin Professional Pub., Chicago.
- Kalayci, C. B., Ertenlice, O., Akyer, H. and Aygoren, H. (2017). A review on the current applications of genetic algorithms in mean-variance portfolio optimization, *Pamukkale Univ Muh Bilim Derg* **23**(4): 470–476. doi: 10.5505/pajes.2017.37132.
URL: <https://dx.doi.org/10.5505/pajes.2017.37132>

- Kaucic, M. (2019). Equity portfolio management with cardinality constraints and risk parity control using multi-objective particle swarm optimization, *Computers Operations Research* **109**: 300 – 316.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054819301273>
- Kellerer, H., Mansini, R. and Speranza, M. G. (2000). Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots, *Annals of Operations Research* **99**(1): 287–304.
URL: <https://doi.org/10.1023/A:1019279918596>
- Khalidji, M., Zeiaee, M., Taei, A., Jahed-Motlagh, M. R. and Khaloozadeh, H. (2009). Dynamically weighted continuous ant colony optimization for bi-objective portfolio selection using value-at-risk, *2009 Third Asia International Conference on Modelling Simulation*, pp. 230–235.
- Konno, H. and Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market, *Management Science* **37**: 519–531.
- Lai, K. H., Siow, W. J., Kaw, A. A. b. M. N., Ong, P. and Zainuddin, Z. (2019). Portfolio optimization using genetic algorithm and harmony search algorithm with varying operators and parameter values, *AIP Conference Proceedings* **2184**(1): 060061.
URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5136493>
- Lai, T.-Y. (1991). Portfolio selection with skewness: A multiple-objective approach, *Review of Quantitative Finance and Accounting* **1**(3): 293.
URL: <https://doi.org/10.1007/BF02408382>
- Li, Q., Bai, Y., Yan, X. and Zhang, W. (2019). Portfolio selection with the effect of systematic risk diversification: formulation and accelerated gradient algorithm, *Optimization Methods and Software* **34**(3): 612–633.
URL: <https://doi.org/10.1080/10556788.2017.1414815>
- Liu, Y.-J. and Zhang, W.-G. (2015). A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots, *European Journal of Operational Research* **242**(3): 933 – 941.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037722171400900X>
- Lwin, K., Qu, R. and Kendall, G. (2014). A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization, *Applied Soft Computing* **24**: 757 – 772.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494614003913>

- Macedo, L. L., Godinho, P. and Alves, M. J. (2017). Mean-semivariance portfolio optimization with multiobjective evolutionary algorithms and technical analysis rules, *Expert Systems with Applications* **79**: 33 – 43.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417417301252>
- Mansini, R. and Speranza, M. G. (1999). Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots, *European Journal of Operational Research* **114**(2): 219–233.
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221798002525>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection, *The Journal of Finance* **7**(1): 77–91.
URL: <http://www.jstor.org/stable/2975974>
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection; efficient diversification of investments.*, Wiley, New York.
- Mendonça, G. H., Ferreira, F. G., Cardoso, R. T. and Martins, F. V. (2020). Multi-attribute decision making applied to financial portfolio optimization problem, *Expert Systems with Applications* **158**: 113527.
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417420303511>
- Metaxiotis, K. and Liagkouras, K. (2012). Multiobjective evolutionary algorithms for portfolio management: A comprehensive literature review, *Expert Systems with Applications* **39**(14): 11685 – 11698.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417412006501>
- Najafi, A. A. and Mushakhian, S. (2015). Multi-stage stochastic mean-semivariance-cvar portfolio optimization under transaction costs, *Applied Mathematics and Computation* **256**: 445 – 458.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300315000806>
- Oliveira, F. A. S. d. (2013). *Desempenho da otimização robusta de carteiras no mercado acionário brasileiro*, Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
URL: <http://hdl.handle.net/1843/BUOS-9F4GN8>
- Ong, C.-S., Huang, J.-J. and Tzeng, G.-H. (2005). A novel hybrid model for portfolio selection, *Applied Mathematics and Computation* **169**(2): 1195–1210.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300304008458>
- Ponsich, A., Jaimes, A. L. and Coello, C. A. C. (2013). A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other

- finance and economics applications, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **17**(3): 321–344.
- Qi, R. and Yen, G. G. (2017). Hybrid bi-objective portfolio optimization with pre-selection strategy, *Information Sciences* **417**: 401 – 419.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025517308381>
- Qu, B. Y., Zhou, Q., Xiao, J. M., Liang, J. J. and Suganthan, P. N. (2017). Large-Scale Portfolio Optimization Using Multiobjective Evolutionary Algorithms and Preselection Methods, *Mathematical Problems in Engineering* **2017**.
- Rajabi, M. and Khaloozadeh, H. (2018). Investigation and comparison of the performance of multi-objective evolutionary algorithms based on decomposition and dominance in portfolio optimization, *Electrical Engineering (ICEE), Iranian Conference on*, pp. 923–929.
- Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk, *The Journal of Risk* **2**(3): 21–41.
- Ruttiens, A. (2013). Portfolio risk measures: The time’s arrow matters, *Computational Economics* **41**(3): 407–424.
URL: <https://doi.org/10.1007/s10614-012-9336-9>
- Samuelson, P. A. (1970). The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments¹, *The Review of Economic Studies* **37**(4): 537–542.
URL: <https://doi.org/10.2307/2296483>
- Schaerf, A. (2002). Local search techniques for constrained portfolio selection problems, *Computational Economics* **20**(3): 177–190.
URL: <https://doi.org/10.1023/A:1020920706534>
- Sethia, A. M. (2018). Application of swarm intelligence to portfolio optimisation, *2018 International Conference on Computing, Power and Communication Technologies (GUCON)*, pp. 1029–1033.
- Sharpe, W. (1965). Mutual fund performance, *The Journal of Business* **39**.
URL: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp:jnlbus:v:39:y:1965:p:119>
- Skolpadungket, P., Dahal, K. and Harnpornchai, N. (2007). Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms, *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 516–523.

- Soleimani, H., Golmakani, H. R. and Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm, *Expert Systems with Applications* **36**(3, Part 1): 5058 – 5063.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095741740800328X>
- Streichert, F., Ulmer, H. and Zell, A. (2004a). Evaluating a hybrid encoding and three crossover operators on the constrained portfolio selection problem, *Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No.04TH8753)*, Vol. 1, pp. 932–939 Vol.1.
- Streichert, F., Ulmer, H. and Zell, A. (2004b). Evolutionary algorithms and the cardinality constrained portfolio optimization problem, *in* D. Ahr, R. Fahrion, M. Oswald and G. Reinelt (eds), *Operations Research Proceedings 2003*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 253–260.
- Sun, Y. and Gao, Y. (2009). The research of a double objective model of loans portfolio optimization based on pso, *2009 International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering*, pp. 1–5.
- Usta, I. and Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection, *Entropy* **13**(1): 117–133.
URL: <http://dx.doi.org/10.3390/e13010117>
- Vikhar, P. A. (2016). Evolutionary algorithms: A critical review and its future prospects, *2016 International Conference on Global Trends in Signal Processing, Information Computing and Communication (ICGTSPICC)*, pp. 261–265.
- Wang, B. and Watada, J. (2013). Multiobjective particle swarm optimization for a novel fuzzy portfolio selection problem, *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering* **8**(2): 146–154.
URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/tee.21834>
- Wang, X., Chen, Q., Gen, M. and Lin, L. (2011). A hybrid evolutionary algorithm for mean-absolute deviation portfolio optimization problem, *41st International Conference on Computers and Industrial Engineering*, pp. 912–917.
URL: <https://www.computers-and-ie.org/conferences/41>
- Woodside-Oriakhi, M., Lucas, C. and Beasley, J. (2013). Portfolio rebalancing with an investment horizon and transaction costs, *Omega* **41**(2): 406 – 420. Management

science and environmental issues.

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048312000680>

Young, M. R. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, *Management Science* **44**(5): 673–683.

URL: <https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.44.5.673>

Zhu, H., Wang, Y., Wang, K. and Chen, Y. (2011). Particle swarm optimization (pso) for the constrained portfolio optimization problem, *Expert Systems with Applications* **38**(8): 10161 – 10169.

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411002818>

Zitzler, E., Laumanns, M. and Thiele, L. (2001). Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm.

URL: <http://hdl.handle.net/20.500.11850/145755>