

Universidade Federal de Ouro Preto

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

Tese

**Modelo computacional para
análises estática e dinâmica
de estruturas de aço e
madeira com seções
genéricas e inércias variáveis
em mísulas**

Miguel Angelo Araújo Lima

Ouro Preto
2022



UFOP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**MODELO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISES
ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE AÇO E
MADEIRA COM SEÇÕES GENÉRICAS E INÉRCIAS
VARIÁVEIS EM MÍSULAS**

Miguel Angelo Araújo Lima

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil da Universidade Federal de
Ouro Preto como parte dos requisitos para obten-
ção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Campus Morro do Cruzeiro
Ouro Preto, MG – Brasil
Dezembro, 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L732m Lima, Miguel Angelo Araujo.

Modelo computacional para análises estática e dinâmica de estruturas de aço e madeira com seções genéricas e inércias variáveis em mísulas. [manuscrito] / Miguel Angelo Araujo Lima. - 2022.
124 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha.
Tese (Doutorado). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Método dos elementos finitos. 2. Mísulas parabólicas. 3. Integração direta de Newmark. 4. Dinâmica estrutural - Análise modal. 5. Análise estrutural (Engenharia) - Análise dinâmica. 6. Software - Análise estática. 7. Método dos elementos finitos - Método Tridimensional. I. Rocha, Paulo Anderson Santana. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB - 1716



FOLHA DE APROVAÇÃO

Miguel Angelo Araújo Lima

Modelo Computacional para Análises Estática e Dinâmica de Estruturas de Aço e Madeira com Seções Genéricas e Inércias Variáveis em Mísulas

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil

Aprovada em 08 de Dezembro de 2022

Membros da banca

Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha - Orientador - (UFOP)
Prof. Dr. Alexandre da Silva Galvão - (UFSJ)
Prof. Dr. Igor José Mendes Lemes - (UFLA)
Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira - (UFOP)
Prof. Dra. Rovadávnia Aline de Jesus Ribas - (UFOP)

Paulo Anderson Santana Rocha, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 08/03/2023



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Anderson Santana Rocha, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/03/2023, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0485287** e o código CRC **F9A78AB6**.

*Aos meus pais, meus irmãos, minha
noiva e ao meu orientador.*

Agradecimentos

A Deus, por me iluminar e me conduzir em todos momentos da minha vida.

Aos meus pais Gonçalo e Maria de Lourdes, pelo apoio, compreensão, motivação e ensinamentos passados. Sou eternamente grato por tudo que me proporcionam.

Aos meus irmãos Michele e Mateus pelo companheirismo, amizade, incentivo, motivação e momentos de descontração.

A minha noiva Thaís Pacelli, por sempre me motivar e me apoiar mesmo nos momentos mais difíceis, nunca me deixando desistir e sempre acreditando no meu potencial.

Ao meu orientador prof. Dr. Paulo Rocha por ter acreditado em mim e ter me guiado durante toda essa jornada. Pelos ensinamentos, amizade, motivação, paciência, conselhos e dedicação durante todo o desenvolvimento dessa pesquisa.

A todos os professores do doutorado, mestrado e da graduação que contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

A todos os amigos do doutorado, pelo apoio, amizade e companheirismo e conhecimentos contribuídos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos, pelos anos de parceria, irmandade e alegria.

A minha família pela torcida e apoio em todas as etapas da minha vida.

A CAPES e à UFOP, pelo auxílio financeiro.

A todos que fazem parte dessa conquista, o meu muito obrigado.

“No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade.”

Albert Einstein

Resumo da Tese apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil.

Modelo computacional para análises estática e dinâmica de estruturas de aço e madeira com seções genéricas e inércias variáveis em mísulas

Miguel Angelo Araújo Lima

Dezembro, 2022

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

O presente trabalho tem como objetivo realizar análise estática e dinâmica de estrutura de aço e madeira com seções transversais genéricas e momentos de inércias variáveis em mísulas ao longo de cada elemento estrutural. Com a finalidade de demonstrar a eficiência do método aplicado a barras com variação em mísula, utilizou-se a Regra de Simpson e verificou-se a sua eficiência a partir do cálculo dos fatores de forma e fatores de carga em alguns elementos estruturais com variação em mísula. Posteriormente utilizou-se uma função parabólica para descrever a variação da altura da seção ao longo do comprimento da barra e em seguida adotou-se o Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss) com a finalidade de calcular numericamente e de forma bastante precisa a flexibilidade dos elementos. Utilizou-se ainda para o cálculo das propriedades geométricas das seções transversais o Método dos Elementos Finitos (MEF). Vale ressaltar que no presente trabalho as discretizações das seções transversais foram realizadas com o auxílio do elemento finito triangular com três nós (CST). Neste trabalho as estruturas foram analisadas de duas formas: usando-se o elemento de barra (para análise estática e dinâmica) e posteriormente utilizou-se o elemento finito tridimensional (para análise estática). Com isso é possível realizar a análise de vigas, treliças, barras axiais e pórticos planos. Para a análise dinâmica utilizaram-se dois métodos de marcha no tempo, a saber: Método de Newmark e o Método da Superposição Modal. Por fim, implementou-se também no código computacional três formulações correspondentes à modelagem de estruturas tridimensionais utilizando-se os elementos finitos tetraédrico com 4 nós (T_4), hexaédrico de oito nós (H_8) e com o elemento hexaédrico ou paralelepípedo com 20 nós (H_{20}). Neste trabalho, fez-se ainda a proposição de uma expressão para a matriz de rigidez, a matriz de massa e a matriz de amortecimento baseada na Regra de Simpson. Ou seja,

daí surgem três matrizes equivalentes para a definição da rigidez, da massa e do amortecimento de estruturas. Com o intuito de validar as implementações numéricas realizadas foram analisadas duas estruturas. Na primeira aplicação comparou-se o resultado correspondente à análise dinâmica da estrutura através do Método de Newmark e do Método da Superposição Modal. Na segunda aplicação, modelou-se um pórtico plano via análise matricial com a consideração das matrizes de forma convencional e posteriormente com o uso da formulação proposta no presente trabalho. Por fim, verificou-se que os resultados obtidos foram bastantes satisfatórios tanto para as análises estáticas quanto para as análises dinâmicas demonstrando assim o sucesso das implementações numéricas realizadas.

Palavras-chave: Análise dinâmica, análise estática, método dos elementos finitos, mísulas parabólicas, integração direta de Newmark; análise modal; elementos finitos tridimensionais.

Abstract of the Thesis presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for obtaining the degree of Doctor of Science in Civil Engineering.

Computational model for static and dynamic analysis of steel and wooden structures with generic sections and variable inertia in corbels

Miguel Angelo Araújo Lima

December, 2022

Doctorate Supervisor: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

This work aims to perform static and dynamic analysis of a steel and wood structure with generic cross sections and variable moments of inertia in corbels along each structural element. For this, with the purpose of demonstrating the efficiency of the method applied to bars with variation in corbel, the Simpson's Rule was used and its efficiency was verified from the calculation of the form factors and load factors in some structural elements with corbel variation. Later, a parabolic function was used to describe the variation of the height of the section along the length of the bar and then the Gauss-Legendre Method (Gauss Quadrature) was adopted in order to calculate numerically and in a very precise way the element flexibility. The Finite Element Method (FEM) was also used to calculate the geometric properties of cross sections. In this work the structures were analyzed in two ways: using the bar element (for static and dynamic analysis) and later using the three-dimensional finite element (for static analysis). With this it is possible to carry out the analysis of beams, trusses, axial bars and plane frames. For the dynamic analysis, two time marching methods were used, namely: Newmark's method and the Modal Superposition Method. Finally, three formulations corresponding to the modeling of three-dimensional structures were also implemented in the computational code using the finite elements tetrahedral with 4 nodes (T4), hexahedral with eight nodes (H8) and with the hexahedral or parallelepiped element with 20 nodes (H20). In this work, an expression was also proposed for the stiffness matrix, the mass matrix and the damping matrix based on Simpson's Rule. In other words, three equivalent matrices emerge for the definition of stiffness, mass and damping of structures. In order to validate the numerical implementations performed, two structures were analyzed. In the first application, the result corresponding to the dynamic analysis of the structure was

compared using the Newmark Method and the Modal Superposition Method. In the second application, a plane frame was modeled via matrix analysis with the consideration of matrices in a conventional way and later with the use of the formulation proposed in the present work. Finally, it was found that the results obtained were quite satisfactory for both static and dynamic analyses, thus demonstrating the success of the numerical implementations carried out.

Keywords: Dynamic analysis; static analysis; finite element method; parabolic cornels; Newmark direct integration; modal analysis; three-dimensional finite elements.

Sumário

1	Introdução	26
1.1	Considerações iniciais.....	26
1.2	Objetivo	28
1.3	Motivação	28
1.4	Estado da Arte.....	29
2	Mísulas	37
3	Formulação.....	43
3.1	Análise Estática.....	43
3.1.1	Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	43
3.1.2	Regra de Simpson.....	44
3.1.3	Cálculo da Flexibilidade de barra via Método de Gauss-Legendre	45
3.2	Elementos finitos sólidos	46
3.2.1	Elemento Finito Tetraédrico de 4 nós (T_4).....	46
3.2.2	Elemento Finito hexaédrico de 8 nós (H_8)	52
3.2.3	Elemento Finito Hexaédrico de 20 nós (H_{20}).....	58
3.3	Análise Dinâmica.....	62
3.3.1	Sistema de equações de equilíbrio dinâmico.....	62
3.3.2	Equações de Equilíbrio em Análise Dinâmica.....	64
3.3.3	Matriz de Massa do Elemento de Viga	64
3.3.4	Matriz de Amortecimento	66
3.3.5	Matriz de Rigidez Equivalente.....	67
3.3.6	Análise Dinâmica por Algoritmo de Integração Direta	67
3.3.7	Vibrações Forçadas	69
3.3.8	Análise modal para vibrações forçadas.....	70

3.4	Fluxograma do programa implementado	71
4	Aplicações	73
4.1	Introdução	73
4.2	Cálculo de Fatores de Forma e Fatores de Carga para a Mísula com voute Parabólica.....	74
4.2.1	Fator de Forma	74
4.2.2	Fatores de Carga para carregamento concentrado.....	75
4.2.3	Fatores de Carga para carga-momento.....	76
4.2.4	Fatores de Carga para carregamento parcialmente distribuído	77
4.2.5	Fatores de Carga para carregamento triangular.....	77
4.3	Cálculo de Deslocamentos.....	78
4.3.1	Aplicação 1 – Determinação do Momento Fletor	78
4.3.2	Aplicação 2 – Cálculo de X_I para mísula com carregamento parcialmente distribuído.....	80
4.3.3	Aplicação 3 – Cálculo de X_I para mísula com carregamento distribuído de forma triangular.....	80
4.3.4	Aplicação 4 - Cálculo de X_I para mísula com carregamento distribuído e carregamento concentrado.....	81
4.4	Cálculo da Flexibilidade de Barras via Método de Gauss-Legendre.....	82
4.5	Análise dinâmica com seções transversais genéricas	83
4.5.1	Viga em balanço sujeita à carga senoidal.....	83
4.5.2	Viga em balanço sujeita à função dente de serra	84
4.5.3	Viga em balanço sujeita à função constante.....	86
4.5.4	Viga em balanço sujeita à função linear decrescente	89
4.5.5	Viga em balanço sujeita à função linear crescente.....	91
4.5.6	Viga biapoçada sujeita à função dente de serra	93

4.6 – Análise dinâmica de um pórtico de madeira com dois pavimentos e pilares com seção constante	95
4.7 – Análise dinâmica de um pórtico de madeira com dois pavimentos e pilares variando em mísula parabólica	96
4.8 - Vibrações Mecânicas.....	98
4.9 – Análise dinâmica de uma viga hiperestática com seção genérica de madeira com dois tramos variando em Mísula Parabólica	99
4.10 – Análise dinâmica de uma treliça de aço hiperestática com seção retangular	101
4.11 – Análise dinâmica de uma treliça de madeira hiperestática com seção retangular	102
4.12 – Barra escalonada de aço.....	102
4.13 – Análise dinâmica de uma barra axial com seção circular	103
4.14 – Elementos sólidos	105
4.14.1 Pórtico em L (H_8).....	105
4.14.2 Mísula com voute reta (H_8)	109
4.14.3 Cubo (H_{20}).....	111
5.14.4 Mísula com voute parabólica (H_{20}).....	113
5 Conclusões	116
5.1 Introdução	116
5.2 Conclusões	116
5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros	118
6 Referências Bibliográficas.....	120

Lista de Figuras

Figura 1.1: Seções transversais genéricas.	27
Figura 2.1: Mísula reta assimétrica.	37
Figura 2.2: Mísula parabólica assimétrica.....	37
Figura 2.3: Mísula reta simétrica.	37
Figura 2.4: Mísula parabólica simétrica.	38
Figura 2.5: Momento unitário aplicado na extremidade 1.	40
Figura 2.6: Momento unitário aplicado na extremidade 2.	40
Figura 2.7: Viga submetida à carga uniformemente distribuída unitária.	41
Figura 3.1: Aproximação de Simpson.....	45
Figura 3.2: Representação esquemática da variação da inércia em mísula parabólica.	45
Figura 3.3: Elemento tetraédrico de 4 nós.....	46
Figura 3.4: Elemento mestre.	47
Figura 3.5: Elemento mestre hexaédrico de 8 nós.	52
Figura 3.6: Elemento Mestre Hexaédrico de 20 nós.....	59
Figura 3.7: Fluxograma do programa implementado.....	72
Figura 4.1: Mísula com voute parabólica.....	74
Figura 4.2: Mísula com voute parabólico submetida a carregamento concentrado.	75
Figura 4.3: Mísula com voute parabólica submetida à carga-momento.	76
Figura 4.4: Mísula com voute parabólica submetida à carga parcialmente distribuída.	77
Figura 4.5: Mísula com voute parabólica submetida à carga triangular parcialmente distribuída.	78
Figura 4.6: Viga em análise.	79
Figura 4.7: Sistema Principal.	79
Figura 4.8: Viga com seção transversal retangular variando em mísula com voute parabólica submetida a carregamento parcialmente distribuído.....	80

Figura 4.9: Viga com seção transversal em mísula com voute parabólica submetida a carregamento distribuído de forma triangular.	81
Figura 4.10: Mísula com voute parabólica submetida à combinação de carregamento distribuído de forma retangular e concentrada.	82
Figura 4.11: Representação esquemática da variação da inércia em mísula parabólica.	82
Figura 4.12: Viga em balanço e malha de elementos finitos.	83
Figura 4.13: Representação gráfica dos resultados.	84
Figura 4.14: Representação gráfica dos resultados.	85
Figura 4.15: Seção transversal e malha de elementos finitos.....	85
Figura 4.16: Representação gráfica dos resultados.	86
Figura 4.17: Representação gráfica das cargas.	87
Figura 4.18: Seção transversal e malha de elementos finitos.....	88
Figura 4.19: Representação gráfica dos resultados.	88
Figura 4.20: Representação gráfica das cargas.	89
Figura 4.21: Seção transversal e malha de elementos finitos.....	90
Figura 4.22: Representação gráfica dos resultados.	90
Figura 4.23: Representação gráfica dos resultados.	91
Figura 4.24: Seção transversal e malha de elementos finitos.....	92
Figura 4.25: Representação gráfica dos resultados.	92
Figura 4.26: Viga biapoiada e malha de elementos finitos.	93
Figura 4.27: Representação gráfica dos resultados.	94
Figura 4.28: Seção transversal e malha de elementos finitos.....	94
Figura 4.29: Representação gráfica dos resultados.	95
Figura 4.30: Pórtico plano com dois pavimentos.	96
Figura 4.31: Deslocamento.	96
Figura 4.32: Pórtico com pilares variando em mísula parabólica.	97

Figura 4.33: Variação da seção transversal dos pilares em mísula parabólica.	97
Figura 5.34: Deslocamento.	98
Figura 4.35: Deslocamento e velocidade.	98
Figura 4.36: Aceleração.	99
Figura 4.37: Viga com seção transversal variável em mísula nos dois tramos.....	99
Figura 4.38: Deslocamento.	100
Figura 4.39: Treliça plana analisada.	101
Figura 4.40: Deslocamento no nó 4 da treliça plana em aço.....	102
Figura 4.41: Barra circular de aço escalonada.	103
Figura 4.42: Barra axial com seção transversal variando de forma escalonada.....	104
Figura 4.43: Barra axial com seção transversal variando em mísula parabólica.	104
Figura 4.44: Deslocamento da barra axial.....	104
Figura 4.45: Pórtico em L – dimensões.....	105
Figura 4.46: Pórtico em L – discretização utilizada.....	106
Figura 4.47: Mísula com voute reta.	110
Figura 4.48: Cubo.....	111
Figura 4.49: Mísula com voute parabólica.....	113

Lista de Tabelas

Tabela 4.1: Fatores de forma para mísula com voute parabólica.	74
Tabela 4.2: Fatores de carga concentrada η_1	75
Tabela 4.3: Fatores de carga concentrada η_2	76
Tabela 4.4: Fatores de carga momento η_1	76
Tabela 4.5: Fatores de carga parcialmente distribuída η_1	77
Tabela 4.6: Fatores de carga triangular parcialmente distribuída η	78
Tabela 4.7: Momento Fletor no apoio B.	79
Tabela 4.8: Valores de X_I	80
Tabela 4.9: Valores de X_1	81
Tabela 4.10: Valores de X_I	82
Tabela 4.11: Valores da flexibilidade.....	83
Tabela 4.12: Momentos de inércia para malha com 608 elementos.....	86
Tabela 4.13: Momentos de inércia para malha com 120 elementos.....	88
Tabela 4.14: Momentos de inércia para malha com 486 elementos.....	90
Tabela 4.15: Momentos de inércia para malha com 486 elementos.....	92
Tabela 4.16: Momentos de inércia para malha com 586 elementos.....	95
Tabela 4.17: Propriedade das seções genéricas da viga hiperestática.	100
Tabela 4.18: Frequência e modos de vibração da treliça plana.	101
Tabela 4.19: Frequência e modos de vibração da barra escalonada.	103
Tabela 4.20: Deslocamentos com seções escalonadas e variando em mísula parabólica.	105
Tabela 4.21: Pórtico em L - Deslocamentos nodais em x.	106
Tabela 4.22: Pórtico em L - Deslocamentos nodais em y.	107
Tabela 4.23: Pórtico em L - Deslocamentos nodais em z.	107

Tabela 4.24: Elemento 1 – Tensões de von Mises.	108
Tabela 4.25: Elemento 2 – Tensões de von Mises.	108
Tabela 4.26: Elemento 3 – Tensões de von Mises.	109
Tabela 4.27: Elemento 4 – Tensões de von Mises.	109
Tabela 4.28: Mísula com voute reta - Deslocamentos nodais.	110
Tabela 4.29: Mísula com voute reta - Tensões elementares.	110
Tabela 4.30: Mísula com voute reta - Tensões de von Mises.	111
Tabela 4.31: Cubo H_{20} - Deslocamentos nodais.	112
Tabela 4.32: Cubo H_{20} - Tensões elementares.	112
Tabela 4.33: Cubo H_{20} - Tensões de von Mises.	113
Tabela 4.34: Mísula com voute parabólica - Deslocamentos nodais.	114
Tabela 4.35: Cubo H_{20} - Tensões elementares.	114
Tabela 4.36: Cubo H_{20} - Tensões de von Mises.	115

Lista de Siglas

CST	Elemento Finito Triangular de três nós
AMS	Amortecedor de Massa Sintonizada
MEF	Método dos Elementos Finitos
AMSM	Amortecedores de Massa Sintonizados Múltiplos
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Regulamentadora Brasileira
MTG	Micro Timber Grader
CaO	Óxido de Cálcio
MgO	Óxido de Magnésio
C	Carbono
ISBN	International Standard Book Number
USA	United States of America
PUC	Pontifical Catholic University
AIAA	American Institute of Aeronautics and Astronautics
DF	Distrito Federal
EUA	Estados Unidos da América
Prof. Dr.	Professor Doutor
D.Sc	Doutor em Ciências
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PROPEC	Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

Lista de Símbolos

ρ	Massa específica
f	Resistência característica
E	Módulo de deformação longitudinal ou Módulo de Elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
β	Coefficiente de dilatação térmica
λ e n	Parâmetros adimensionais
l	Comprimento linear
$J_{máx}$	Momento de inércia máximo
J_{mim}	Momento de inércia mínimo
δ	Deslocamento
M	Momento fletor
\bar{M}	Momento fletor devido à aplicação da carga unitária
J_b	Momento de inércia base escolhido para comparação entre os momentos de inércia disponíveis da estrutura
α_1	Coefficiente que se refere à rotação gerada quando aplicado o momento unitário na extremidade 1
α_2	Coefficiente que se refere à rotação gerada quando aplicado o momento unitário na extremidade 2
β	Coefficiente que se refere à rotação gerada no lado oposto da mísula
k_1, k_2 e k_3	Valores que possibilitam a obtenção dos fatores de forma
μ	Fator para obtenção dos fatores de carga uniforme

W_{int}	Trabalho interno
N	Parâmetro para obtenção dos fatores de carga que depende da posição de aplicação do carregamento
T_4	Elemento tetraédrico de 4 nós
H_8	Elemento finito hexaédrico de 8 nós
H_{20}	Elementos finitos hexaédrico de 20 nós
\bar{N}	Esforço axial unitário
\bar{Q}	Esforço cortante unitário
\bar{T}	Momento torçor unitário
W_{ext}	Trabalho externo
\bar{P}	Carregamento externo unitário
δ	Deslocamento
$P_2(x)$	Polinômio interpolador de ordem 2 (parábola)
$h(x)$	Valor de qualquer altura da seção ao longo do seu comprimento
$H_{máx}$	Altura máxima da seção ao longo do comprimento
H_{min}	Altura mínima da seção ao longo do comprimento
I_z	Momento de inércia da seção retangular
b_w	Base da seção transversal
ξ_i	Pontos de Gauss
w_i	Pesos de Gauss
δ	Flexibilidade de uma seção variável em mísula parabólica

N_1, N_2, N_3	Funções de forma
q	Vetor de deslocamento
u, v, w	Vetor deslocamento em x, y e z respectivamente
N	Matriz função de forma
J	Matriz Jacobiana
V_e	Volume de um elemento tetraédrico
A	Matriz inversa da matriz jacobiana
C	Matriz dos cofatores
C^T	Matriz transposta dos cofatores
$Adj J$	Matriz adjunta da jacobiana
ε	Vetor de deformação
U_e	Energia interna de deformação
k_e	Matriz de rigidez do elemento
f_e	Vetor de força de corpo
N_i	Funções de forma de Lagrange
K^e	A matriz de rigidez do elemento correspondente
Γ	Matriz inversa da matriz jacobiana
DN	Sub-matrizes da matriz D
K	Matriz de rigidez
C	Matriz de amortecimento
M	Matriz de massa
F	Vetor de forças externas
x	Vetor deslocamento
\dot{x}	Vetor velocidade

\ddot{x}	Vetor aceleração
ω_0	Frequência natural
λ	Autovalor
f	Frequência
T	Período
d	Deslocamento
\dot{d}	Velocidade
\ddot{d}	Aceleração
$\varphi_i(x)$	Funções de Hermite
N^T	Vetor transposto das funções de Hermite
M	Massa total do elemento
A	Área da seção transversal da viga e o L o seu comprimento.
k	Rigidez
c	Viscosidade
ξ	Amortecimento crítico
$f(t)$	Vetor de carga
u	Vetor de deslocamento
v	Vetor de velocidade
a	Vetor de aceleração
Δt	Intervalo de tempo entre o instante inicial t_0 e o final t_1
u_0	Vetor de deslocamento no instante t_0
u_1	Vetor de deslocamento no instante t_1
v_0	Vetor de velocidade no instante t_0

v_I	Vetor de velocidade no instante t_I
a_0	Vetor de aceleração no instante t_0
a_I	Vetor de aceleração no instante t_I
f_I	Vetor de carga no instante t_I
ϕ	Ortogonalidade de matrizes
λ_i	Autovalor
ϕ_i	Autovetor
E	Módulo de Elasticidade
η_1 e η_2	Fatores de carga
$J_{comp.}, I_c$	Inércia de comparação
$I_{máx}$	Inércia máxima
I_{min}	Inércia mínima
I_x	Inércia em x
I_y	Inércia em y
J	Inércia polar
$P(t)$	Carga horizontal dinâmica
P_0	Carregamento inicial
$\bar{\omega}, \omega_0$	Frequência de vibração
ϕ	Modos de vibração livre
(Hz)	Hertz
kN	Kilonewton
ν	Coefficiente de Poisson
N	Newton

m^2	Metro quadrado
σ	Tensão normal
τ	Tensão cisalhante

1 Introdução

1.1 Considerações iniciais

Um sistema mecânico de movimento oscilatório é geralmente referido como vibração, sendo a principal questão como o sistema responde a vários estímulos ou excitações. A derivação da equação do movimento pode ser realizada por meio de métodos da mecânica Newtoniana ou por métodos de dinâmica analítica, também conhecida como mecânica Lagrangeana (MEIROVITCH, 1970).

Ao realizar a análise de uma estrutura, deve-se levar em consideração os requisitos técnicos e as exigências de segurança, aliadas a um custo na execução. Logo, uma estrutura deve resistir, com uma certa folga, às combinações de carregamentos que for submetida durante a sua vida útil. Dentre os carregamentos mais comuns estão o peso próprio da estrutura, os recalques, as variações de temperatura, as sobrecargas, ações decorrentes dos efeitos naturais e as ações acidentais. Ações como o vento, terremotos, tráfego de veículos e explosões, podem ter uma ou mais das suas características variadas ao longo da vida útil da estrutura, levando-a a estar sujeita a vibrações mecânicas (ASSUNÇÃO, 2009).

Em uma construção, as vibrações nas vigas são problemas que devem ser controlados ou minimizados para garantir uma maior estabilidade e robustez ao sistema estrutural. O estudo de técnicas de controle ático de vibrações tem aplicações em diversas áreas da engenharia, tais como Engenharia Aeroespacial, Engenharia Mecânica, Engenharia Automobilística, Engenharia Civil, Robótica e até em Sistemas Nanoeletromecânicos (JUNKINS & KIM, 1993; ABDEL-RAHMAN et al., 2003; BHUSHAN, 2004; MORITA, 2009).

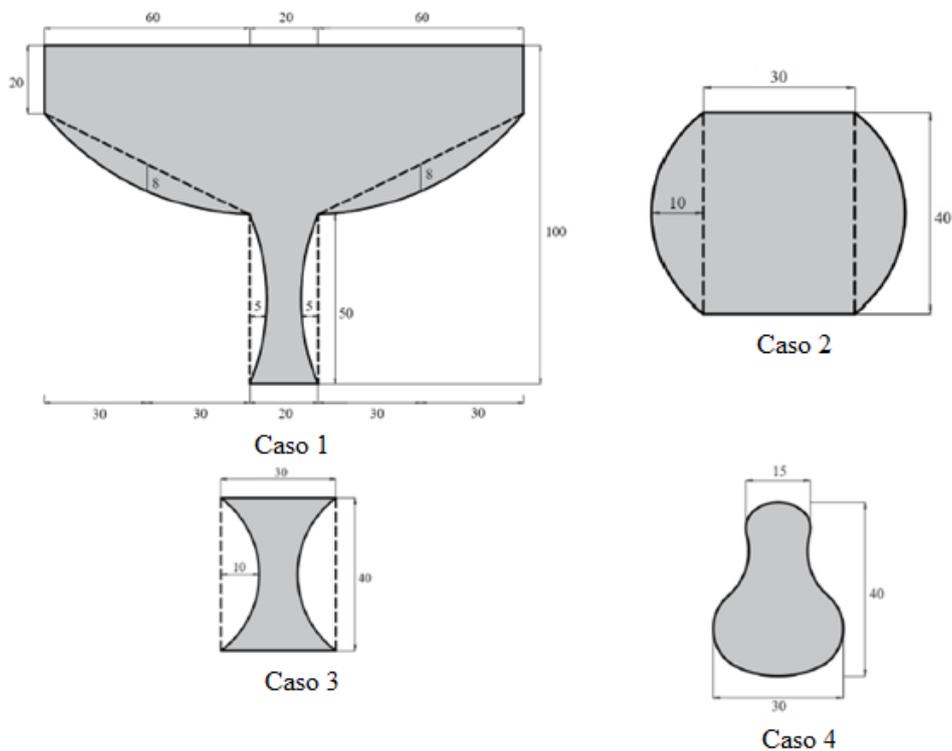
Autores como CRAIG (2006) e CLOUGH (1995) já possuem livros consolidados que abordam o tema de análise dinâmica em estruturas. Nos últimos anos, diversas pesquisas têm sido desenvolvidas com o objetivo de reduzir amplitudes e vibrações em estruturas submetidas às cargas dinâmicas. O grande desafio dos pesquisadores consiste em manipular as propriedades dinâmicas dos sistemas estruturais, variando a rigidez e o

amortecimento da estrutura, de forma que o dimensionamento atenda às exigências normativas. Outro grande desafio é o desenvolvimento de modelos matemáticos que representem de uma forma satisfatória o comportamento real das estruturas sujeitas ao carregamento dinâmico (ASSUNÇÃO, 2009).

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como propósito desenvolver um programa computacional utilizando uma formulação via Método dos Elementos Finitos que permita realizar análises mais precisas de estruturas submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos. Serão levados em consideração o amortecimento da estrutura, denominado amortecimento proporcional ou de Rayleigh, envolvendo as propriedades dos materiais, que nesta pesquisa serão utilizados o aço e a madeira. Além disso, serão utilizadas nas análises, seções transversais genéricas variando em mísulas com voutes lineares e parabólicas.

A Figura 1 mostra as seções transversais genéricas que serão utilizadas para a análise estática e dinâmica das estruturas ao longo da pesquisa.

Figura Erro! Nenhum texto com o estilo especificado foi encontrado no documento..1: Seções transversais genéricas.



Fonte: autor.

1.2 Objetivo

O objetivo geral desse trabalho é realizar um estudo detalhado e aprofundado sobre o comportamento de estruturas com seções transversais genéricas quando submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos. Esta análise será realizada mediante a aplicação de diferentes tipos de solicitações nas peças.

Os objetivos específicos para o desenvolvimento dessa pesquisa são:

- Desenvolvimento de um programa computacional em linguagem FORTRAN 90/95 via Método dos Elementos Finitos;
- Cálculo das propriedades geométricas das seções transversais genéricas a partir da discretização do seu domínio via método dos elementos finitos, para isso, será adotado o elemento finito triangular de três nós ou (CST). Este procedimento permite que o engenheiro possa realizar de forma eficiente a análise de estruturas com diferentes configurações, ou seja, seções transversais não regulares;
- Obter valores de deslocamento, carregamento, aceleração e velocidade de um ponto crítico da estrutura e realizar suas devidas análises;
- Realizar modelagens numéricas das estruturas analisadas com o auxílio do software ANSYS 18.2, com o fim de validar os resultados obtidos pelo programa desenvolvido;
- Comparar as soluções encontradas por meio do programa desenvolvido com as respostas obtidas através do software ANSYS 18.2 e também com resultados encontrados na literatura.

1.3 Motivação

Os projetos estruturais apresentam vários elementos submetidos aos carregamentos dinâmicos. Seu comportamento deve ser estudado para que a segurança de todo um conjunto estrutural seja garantida. Realizando o desenvolvimento de um programa computacional utilizando uma formulação via Método dos Elementos Finitos será possível verificar o comportamento dessas estruturas (vigas e pórticos) com maior

precisão e agilidade para que possam ser realizadas análises mais precisas, possibilitando o desenvolvimento de um projeto estrutural que garanta segurança e possua um melhor custo benefício aos clientes.

Os elementos analisados terão seções transversais genéricas com a inércia variando em mística parabólica ao longo do seu comprimento, para que possam ser utilizados em projetos arquitetônicos cada vez mais inovadores. Pelo fato do aço e o concreto serem os elementos estruturais mais utilizados na atualidade, estudos e análises envolvendo a madeira têm sido pouco explorados no meio científico. Logo, adotar a madeira como um dos materiais para as análises, tem como objetivo compreender um pouco mais o seu comportamento quando submetido a carregamentos dinâmicos.

1.4 Estado da Arte

Nas últimas décadas, vários pesquisadores utilizam métodos voltados para a análise estrutural estática e dinâmica em estruturas de madeira e de aço com o intuito de aperfeiçoá-los e adequá-los aos resultados experimentais. A seguir, encontram-se alguns trabalhos relacionados aos casos que serão analisados nessa pesquisa.

Uma técnica chamada de controle estrutural vem sendo utilizada para combater os efeitos das vibrações excessivas nas estruturas, sendo uma tecnologia que procura reduzir a demanda de dissipação de energia nos elementos estruturais sob a ação de forças externas. Essa redução pode ser alcançada pela aplicação de dispositivos externos ou pela ação de forças externas. Segundo HOUSNER et al.(1997), essa técnica passou a ser usada após um conjunto de pesquisas desenvolvidas pelo japonês John Milne, que idealizou e construiu uma edificação de madeira com sistema de isolamento contra terremoto há mais de 100 anos.

Dentre as alternativas para o controle de vibração em estruturas, há o Amortecedor de Massa Sintonizada (AMS), que consiste em um sistema massa, mola e amortecedor. Esse sistema geralmente é fixado a um sistema vibrante que reduz a demanda de dissipação de energia nos elementos estruturais sob a ação de uma força externa. Essa redução é obtida quando a frequência do amortecedor de massa é sintonizada a uma frequência da estrutura, sendo normalmente o primeiro modo de vibração ou modo fundamental (LARA, 2007).

Desde que DEN HARTOG (1956) propôs a teoria para obter expressões ótimas para os parâmetros das AMS das estruturas não amortecidas de um grau de liberdade, muitos métodos têm sido desenvolvidos na literatura com o propósito de controlar vibrações estruturais induzidas por diversas fontes. Pode-se citar WARBURTON & AYONRIDE (1980), que propuseram fórmulas para encontrar os parâmetros ótimos de um sistema estrutural equipado com AMS submetido a diferentes tipos de carregamento, como forças harmônicas, cargas de vento e cargas sísmicas. LEE et al. (2006) comprovaram que a eficiência do mecanismo de controle é altamente influenciada pelos parâmetros de projeto do AMS que estão relacionados aos parâmetros da estrutura principal.

Um AMS sintonizado na primeira frequência de vibração da estrutura reduz a resposta associada ao primeiro modo de vibração de forma considerável, mas reduz apenas levemente ou, até mesmo, amplifica as respostas associadas aos modos mais altos (HOUSNER et al., 1997).

BOTTURA (1997) desenvolveu alguns algoritmos hermitianos para a integração direta das equações dinâmicas das estruturas. Realizou análise espectral e solucionou um problema unidimensional, comparando os resultados obtidos com outros métodos, que permitiu concluir seu grande potencial de aplicação.

PAULA (2001) implementou de forma numérica modelos matemáticos do comportamento de estruturas considerando não linearidade física e geométrica. O Princípio dos Trabalhos Virtuais via MEF foi utilizado como equilíbrio da posição deslocada. Foi utilizado o Método implícito de Newmark combinado com o procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson para integração no domínio do tempo, sendo que o amortecimento foi levado em conta por meio da Regra de Rayleigh. Análises estáticas e dinâmicas foram desenvolvidas para comprovar a eficiência da implementação desenvolvida.

WU (2003) desenvolveu um estudo sobre as vibrações livres características de uma viga engastada e livre de seção variável equipada com múltiplos AMS por meio de dois métodos distintos. O primeiro processo é o método convencional dos elementos finitos onde cada sistema massa-mola-amortecedor é considerado como um elemento finito com suas respectivas matrizes de rigidez, amortecimento e massa. Já o segundo método é uma aproximação alternativa baseada em elementos finitos onde cada sistema massa-mola-

amortecedor é substituído por uma matriz de rigidez efetiva. Os resultados obtidos pelos dois métodos apresentaram dados semelhantes, permitindo validar a eficiência e funcionalidade do segundo método.

ARAÚJO (2003) implementou numericamente um modelo de dano para o concreto com o objetivo de reproduzir laços de histerese observados experimentalmente em diagramas de tensão-deformação uniaxiais quando, a partir de um certo nível de sollicitação, passam-se a realizar ciclos de descarregamento e recarregamento. O modelo propõe que os laços de histerese são originados da dissipação conjunta decorrente do dano evolutivo e do fenômeno de fricção interna nas faces das fissuras. O fenômeno de fricção interna está relacionado à suposição de que as fissuras não se abrem simplesmente por separação formando faces com superfícies lisas, mas tendem a combinar modos de separação e deslizamento segundo superfícies com uma certa rugosidade. O deslizamento entre as faces das fissuras dá origem a uma deformação por escorregamento, assumida como responsável por um comportamento plástico com encruamento cinemático não-linear. Com os resultados obtidos, o efeito dos laços de histerese sobre o amortecimento estrutural mostrou que a utilização do modelo implementado leva à geração de um amortecimento estrutural que somente poderia ser obtido a partir da utilização do modelo de amortecimento de Rayleigh, por exemplo, na equação do movimento.

GALVÃO (2004) desenvolveu um programa computacional para a análise não-linear estática e dinâmica de pórticos planos com ligações flexíveis (semirrígidas). Foi apresentado a metodologia de solução não-linear e as formulações dos elementos finitos adotados na base computacional implementada. Então é apresentada a formulação do problema dinâmico com a definição das equações diferenciais ordinárias de movimento e as expressões das matrizes de massa e amortecimento. A solução desse sistema de equações diferenciais ordinárias foi obtida por métodos de integração numérica implícitos ou explícitos. Os resultados encontrados apresentam alguns fenômenos importantes de instabilidade estática e dinâmica, bem como possíveis mecanismos de colapso e a influência de parâmetros físicos e geométricos no comportamento estrutural.

NÓBREGA (2004) realizou a análise dinâmica e estática de forma numérica e experimental das condições de contorno em estruturas pré-moldadas. As análises computacionais foram realizadas por meio de modelos via elementos finitos fundamentados na Teoria da Elasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. Os resultados

foram comparados com os obtidos de forma experimental apresentando uma boa correlação, comprovando-se a viabilidade da utilização dos testes de vibração.

CHEN & HUANG (2004), estudaram vigas de Timoshenko equipadas com AMS sob a ação de excitações harmônicas, verificando a resposta dinâmica das vigas para uma faixa de frequências. Eles propuseram um modelo simplificado de dois graus de liberdade e empregaram o método proposto por DEN HARTOG (1956) para estudar as características dinâmicas dos AMS apresentando algumas tabelas de projeto para aplicações práticas. Além disso, desenvolveram um estudo comparativo entre vigas simplesmente apoiadas sem dispositivos de controle, vigas com um AMS e vigas com AMSM (Amortecedores de Massa Sintonizados Múltiplos), mostrando a eficiência dos dispositivos de controle.

ELIAS & ÁVILA (2006) analisaram numericamente a influência da variação de massa na resposta dinâmica de uma viga biapoiada. Foram desenvolvidos seis exemplos, onde massas com distintas concentrações eram localizadas em distintas posições da viga, concluindo que a amplitude do movimento era maior nos locais de maior massa. Os pesquisadores analisaram o efeito do número e da posição de amortecedores visco-fluidos numa viga biapoiada e numa viga engastada e livre.

VILELA (2008) apresentou uma metodologia para determinação das reações de engastamento perfeito para barras submetidas à sollicitação externa e coeficiente de rigidez local. Os elementos estruturais em análise são compostos por barras com seções transversais variáveis em mísula reta para o comportamento transversal de flexão em regime elástico linear. O método apresentado é baseado na Analogia de Viga Conjugada. As integrais encontradas foram resolvidas de forma numérica utilizando integração de Gauss adaptada para se obter uma precisão satisfatória nos resultados obtidos.

SILVA (2009) desenvolveu uma ferramenta computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas baseada no Método dos Elementos Finitos. Foram consideradas duas fontes de não linearidades: a geométrica, que considera os efeitos da deslocabilidade da estrutura, e a física, causada principalmente pelas características mecânicas dos materiais utilizados na construção civil. Foram analisados vários sistemas estruturais com ligações rígidas e semirrígidas cujas soluções analíticas ou numéricas são encontradas na literatura.

ANDRADE (2009) realizou um estudo teórico e experimental sobre o comportamento dinâmico de estruturas não lineares, utilizando uma semi-asa de um avião acoplada a uma turbina com a hélice desbalanceada. Esse sistema é representado através de uma viga engastada excitada por uma fonte não ideal localizada na extremidade oposta ao engaste. Os resultados de simulação numérica foram obtidos utilizando o software Matlab® 8.0.

ADOLFS (2011) analisou peças de madeira fletidas dimensionadas segundo a ABNT NBR 7190/97. Para verificar a confiabilidade dos modelos de cálculos utilizados, foram coletados dados em 549 testes de vigas de madeira submetidas à flexão. Por meio dos resultados obtidos foi possível concluir que o modelo de dimensionamento utilizado pela norma é muito conservador para peças de madeira de Pinus SP.

BATELO (2014) avaliou o comportamento não linear de estruturas de aço sob a ação de excitações dinâmicas extremas, explorando a capacidade de amortecimento histerético da estrutura em decorrência da energia absorvida durante o processo de deformação plástica de seus membros estruturais. As análises dinâmicas inelásticas de segunda ordem foram realizadas utilizando o método da rótula plástica refinada. Situações práticas envolvendo cargas de impactos e sismos foram avaliadas, evidenciando o amortecimento histerético introduzido na estrutura devido à consideração do escoamento parcial das seções transversais e a boa representação das respostas transientes não lineares obtidas com o método da rótula plástica refinada quando comparado à outras análises numéricas e estudos experimentais.

PEREIRA (2015) apresentou uma formulação para a análise de pórticos espaciais (3D) capaz de modelar elementos de barra com seções transversais contendo formas geométricas arbitrárias, variando genericamente ao longo do elemento. Para a determinação da rigidez torcional e da função de empenamento da seção ao transversal, foi utilizado a equação de Laplace aplicando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Para validar os resultados encontrados foram realizadas comparações com resultados encontrados pelo software comercial SAP2000 e com diversos problemas encontrados na literatura.

ROSAS (2016) realizou análises dinâmicas de sistemas estruturais considerando sua interação com o solo. O solo é representado através do modelo de molas discretas e dos modelos contínuos de Winkler e Pasternak, além de considerar os efeitos oriundos da não

linearidade geométrica da estrutura e, em algumas análises, considera-se também o comportamento não linear do solo. O problema transiente não linear é resolvido através do método de integração de Newmark, em combinação com a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson. Situações práticas envolvendo a interação entre o solo e a estrutura foram analisadas, procurando evidenciar a influência do contato na trajetória de equilíbrio, na distribuição dos esforços, nas frequências naturais de vibração e na resposta transiente dessas estruturas.

RIBEIRO (2016) analisou o comportamento não-linear geométrico de sistemas estruturais apertados planos utilizando-se, para tanto, o esquema incremental-iterativo de Newton-Raphson com controle de carga, com atualização da matriz de rigidez a cada iteração e a abordagem corrotacional. Além de desenvolver uma formulação capaz de modelar elementos com seções transversais de formas geométricas arbitrárias e variando genericamente ao longo do elemento. A validação da base computacional implementada foi feita através da comparação de análises estruturais realizadas pelo software SAP2000 (2013) e, quando pertinente, pelo TQS (2016).

KZAM (2016) implementou três tipos de elementos finitos: barras simples, casca e barra geral, para analisar a instabilidade global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio. As trajetórias foram determinadas utilizando os algoritmos de Newton-Raphson e comprimento de arco (arc-length). Foram avaliadas também trajetórias de equilíbrio em grandes deslocamentos considerando pequenas imperfeições geométricas.

ANDRADE (2016) classificou de forma estrutural peças de madeira *Pinus Elliottii*, separando as peças de acordo com a sua resistência estimada. Para a determinação do módulo de elasticidade, foram utilizados ensaios não destrutivos por meio do aparelho portátil Brookhuis Micro Timber Grader (MTG). Os resultados obtidos foram comparados com os módulos de elasticidade obtidos em ensaio de flexão estática.

AMANCIO (2016) realizou ensaios dinâmicos em duas vigas de concreto armado idênticas e com mesma taxa de armadura, porém com a disposição das barras de aço feita de forma diferente. Os elementos foram submetidos a ciclos de carregamento dinâmico até atingirem a ruptura. Verificou-se que o aumento da amplitude da força dinâmica de excitação provocou reduções nos valores das frequências de ressonância e um

comportamento não linear dos índices de amortecimento, associados às excitações aleatórias, mantendo um crescimento linear com as excitações transientes.

MENDES (2017) apresentou estratégias para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado, sendo a não linearidade física incluída de duas formas: via modelo de Ghali-Favre e via processo de equilíbrio direto de esforços na seção. Determinou-se as rigidezes axial e flexional, em uma dada seção, correspondente ao nível de sollicitação. De posse então da rigidez (variável) ao longo do elemento estrutural, emprega-se uma formulação baseada no Método da Rigidez Direta (MRD) que possibilita modelar essa variação de rigidez segundo leis matemáticas quaisquer. Ademais, se incluem, na formulação, opções de modelagem de seções de formas geométricas quaisquer, eventualmente variáveis ao longo do elemento. Para a análise não linear, adota-se um esquema incremental-iterativo de Newton-Raphson no qual a matriz de rigidez geométrica é atualizada, em cada iteração do processo incremental-iterativo, enquanto a matriz de rigidez física é atualizada apenas a cada novo incremento de carga. Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais para atestar a eficiência da estratégia.

BATELO (2018) apresentou os fundamentos numéricos para prever o comportamento de estruturas planas de aço com ligações semirrígidas e interação com o solo quando são submetidas a ações dinâmicas extremas, como: impacto, abalos sísmicos e ações de ventos. As análises permitiram avaliar o comportamento não linear de estruturas de aço sob ação dinâmica, procurando explorar a capacidade de amortecimento histerético introduzido pelas ligações semirrígidas e pelo processo de deformação plástica de seus membros (vigas e colunas formados por perfis I ou H compactos), com a consequente redistribuição de esforços internos e formação de rótulas plásticas. As respostas transientes não lineares dos problemas analisados são obtidas através um processo incremental-iterativo, usando os métodos Newmark e Newton-Raphson. Os resultados obtidos através da metodologia de solução numérica proposta apresentaram boa concordância com as extraídas da literatura e através do software SAP 2000.

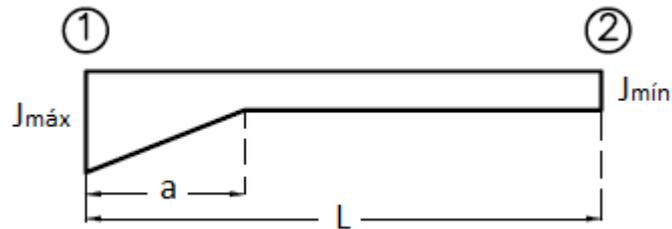
PILLON (2021) apresentou uma nova formulação para determinar as matrizes "exatas" de propriedades estruturais envolvidas nas equações de movimento. O princípio das forças virtuais é aplicado para obter as expressões exatas para cálculo dos coeficientes de rigidez e de cargas nodais equivalentes. Para elementos não prismáticos os polinômios de

diferentes ordens foram empregados para aproximar suas rigidezes axial, de flexão e de cisalhamento, ao longo do elemento. O processo também permite construir as funções de forma exatas de Timoshenko, necessárias para calcular matrizes de propriedades estruturais dependentes da deformação do elemento, como a matriz de massa. A estratégia implícita de Newmark é usada para integrar as equações de equilíbrio no tempo. Os resultados são verificados efetuando-se análises no domínio do tempo de estruturas submetidas a diversas excitações dinâmicas, sendo as respostas comparadas com às calculadas por meio dos pacotes comerciais ANSYS e SAP2000.

2 Mísulas

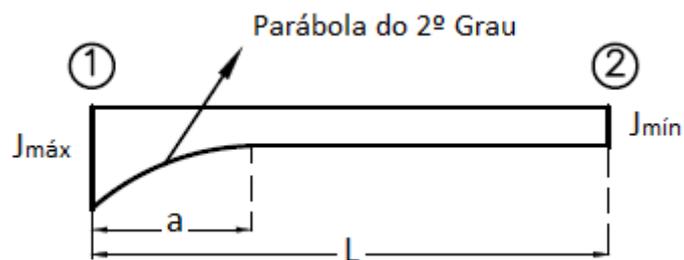
As mísulas são definidas como estruturas que apresentam seção transversal variável ao longo do seu comprimento. Essa variação pode ocorrer de várias formas, sendo os principais casos estudados apresentados nas Figuras 2.1 a 2.4.

Figura 2.2: Mísula reta assimétrica.



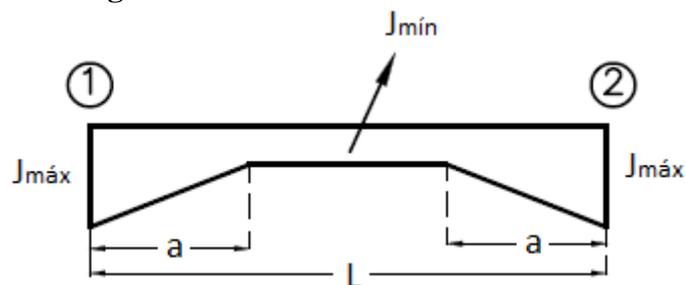
Fonte: autor.

Figura 2.3: Mísula parabólica assimétrica.

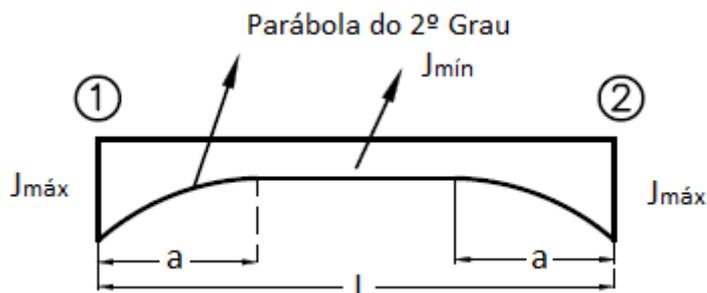


Fonte: autor.

Figura 2.4: Mísula reta simétrica.



Fonte: autor.

Figura 2.5: Mísula parabólica simétrica.

Fonte: autor.

Para solucionar um problema estrutural que possui barras com inrcia variável ao longo do seu comprimento, pode-se utilizar o método dos deslocamentos. Esse procedimento simplifica-se na determinação da rigidez das barras com inrcia variável em suas extremidades, dos coeficientes de transmissão de momento e dos momentos de engastamento perfeito para o carregamento externo atuante (SUSSEKIND,1980).

A solução de uma viga biengastada (ou rotulada e engastada) com inrcia variável para um deslocamento unitário no engaste ou para a atuação do carregamento externo se faz necessário para a determinação de todos esses parâmetros apresentados. Com esse propósito, o Método das Forças surge como ferramenta utilizada para que se possa obter resultados precisos (SUSSEKIND,1980).

Para barras variando em mlsula, esses valores podem ser obtidos através de tabelas apresentadas inicialmente por Guldán, que nos fornecem, para vigas biengastadas, os valores de rigidez, coeficientes de transmissão e momentos de engastamento perfeito para carregamento uniformemente distribuído e para cargas concentradas (SUSSEKIND,1980).

A partir desses estudos, outros autores tabelaram os coeficientes necessários para a obtenção desses deslocamentos. Como no caso do método das forças, os coeficientes de entrada nas tabelas são os parâmetros adimensionais λ e n , obtidos pelas Equações 2.1 a e 2.1b.

$$\lambda = \frac{a}{l} \quad (2.1a)$$

$$n = \frac{J_{mín}}{J_{máx}} \quad (2.1b)$$

Nas equações 2.1a e 2.1b, tem-se que a refere-se ao comprimento linear do trecho em mísula, l o comprimento linear total da barra, $J_{máx}$ e $J_{mm}$ são os momentos de inércia máximos e mínimos, respectivamente.

Nas Tabelas IV a VII do livro “Curso de Análise estrutural” do SUSSEKIND (1980), encontram-se disponíveis os valores de rigidez nas extremidades das barras e dos coeficientes de transmissão de momentos. Logo, pode-se dizer que essas tabelas fornecem os valores de rigidez e coeficientes de transmissão para mísulas com qualquer condio de apoio. Já as tabelas VIII a XI e XII a XV nos fornecem os momentos de engastamento perfeito para mísulas biengastadas sujeitas a carregamento distribuído ou carga concentrada.

Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais para barras submetidas à flexão e com momento de inércia constante, os valores dos deslocamentos podem ser encontrados pela

expressão $\delta = \int_l \frac{\bar{M} M}{EI} dx$. Os valores dessas integrais foram tabelados por Kurt Beyer,

que fornece os valores da Equao 2.2.

$$\frac{J_b}{J} = \int \bar{M} M dx \quad (2.2)$$

Logo, multiplicando-se o valor de δ por $E J_b$, onde J_b é o momento de inércia escolhido para comparao entre os momentos de inércia disponíveis da estrutura, também chamado de momento de inércia básico. Os comprimentos elásticos das hastes (l') são dados pela Equao 2.3.

$$l' = l \frac{J_b}{J} \quad (2.3)$$

É importante ressaltar que todos os valores das integrais surgem em funo de M , \bar{M} e l .

Para estruturas com momento de inércia variável, tem-se a Tabela II, de autoria do prof. Aderson Moreira da Rocha que nos permite obter resultados para a expressão demonstrada na Equação 2.4.

$$\delta = J_b \int \frac{\bar{M} M}{J} dx \quad (2.4)$$

Os resultados da Equação 2.4 são dados em função de fatores de forma e de carga. Os fatores de forma são ângulos de rotação multiplicados por EJ_b , que surgem nas extremidades das vigas submetidas à ação de um momento unitário em uma das extremidades como demonstrado nas Figuras 2.5 e 2.6.

Figura 2.6: Momento unitário aplicado na extremidade 1.



Fonte: autor.

Figura 2.7: Momento unitário aplicado na extremidade 2.



Fonte: autor.

Aplicando-se um momento unitário na extremidade 1, surge uma rotação α_1 nessa extremidade, e na extremidade oposta um fator β . Da mesma forma, aplicando um momento unitário na extremidade 2, surge uma rotação α_2 e no lado oposto surge um ângulo β de mesmo valor que na primeira situação.

Os fatores de forma podem ser determinados por meio das Tabelas III a VI de autoria de Guldán presentes no livro de POLILLO (1977), tanto para mísulas com voute reta quanto para voute parabólica. Os dados de entrada das tabelas para obtenção desses fatores também são os parâmetros adimensionais λ e n , cujas expressões encontram-se nas Equações 2.1a e 2.1b.

Para mísulas assimétricas, as tabelas fornecem os valores de k_1 , k_2 e k_3 , o que possibilita a obtenção dos fatores de forma pelas Equações 2.5a, 2.5b e 2.5c.

$$\alpha_1 = k_1 l' \quad (2.5a)$$

$$\alpha_2 = k_2 l' \quad (2.5b)$$

$$\beta = k_3 l' \quad (2.5c)$$

O coeficiente α_1 refere-se ao lado da mísula em análise, α_2 ao lado oposto e o terceiro permite calcular o parâmetro β .

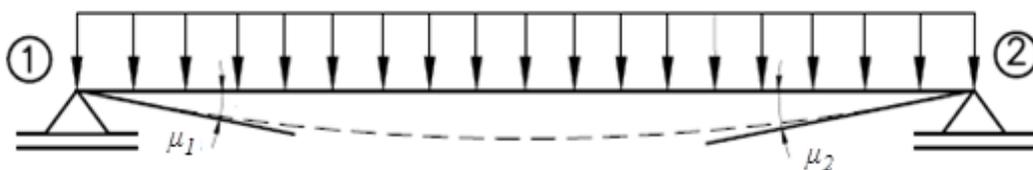
Já para as mísulas simétricas, as tabelas fornecem dois valores (k_1 e k_2), sendo possível o cálculo dos fatores de forma pelas Equações 2.6a e 2.6b.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = k_1 l' \quad (2.6a)$$

$$\beta = k_2 l' \quad (2.6b)$$

Já os fatores de carga são ângulos de rotações que surgem nas extremidades de uma viga quando estão submetidas a um carregamento externo qualquer, podendo esse carregamento ser devido a uma carga concentrada, carga momento, carga triangular e carga totalmente ou parcialmente distribuída. A Figura 2.7 demonstra a situação em questão.

Figura 2.8: Viga submetida à carga uniformemente distribuída unitária.



Fonte: autor.

Para barras retas, como demonstrado na Figura 2.7, as tabelas VIII a XI de Guldán disponibilizam os valores de k , que possibilitam a determinação dos fatores μ para carregamento uniformemente distribuído. Para mísulas assimétricas, os fatores de carga são dados pelas Equações 2.7a e 2.7b.

$$\mu_1 = k_1 q l^2 l' \quad (2.7a)$$

$$\mu_2 = k_2 q l^2 l' \quad (2.7b)$$

Para mísulas simétricas, os fatores de carga são encontrados pela Equação 2.8.

$$\mu_1 = \mu_2 = k q l^2 l' \quad (2.8)$$

As tabelas XII a XV possibilitam o cálculo dos fatores de carga para carga concentrada, fornecendo um terceiro parâmetro N , que depende da posição de aplicação do carregamento. Como as tabelas foram elaboradas dividindo o elemento em doze partes, o parâmetro N é dado pela Equação 2.9.

$$N = 12 \frac{a}{l} \quad (2.9)$$

A numeração para hastes assimétricas é feita sempre a partir do lado onde encontra-se a mísula, sendo os fatores de forma dados pelas Equações 2.10a e 2.10b.

$$\mu_1 = k_1 P l l' \quad (2.10a)$$

$$\mu_2 = k_2 P l l' \quad (2.10b)$$

Para o caso de variação de momento de inércia arbitrária, Guldán disponibilizou a Tabela XVI, que permite calcular os fatores de carga para o momento aplicado, carga concentrada, carga parcialmente distribuída de forma retangular e triangular.

3 Formulação

O programa computacional desenvolvido possibilita realizar análises estáticas e dinâmicas em estruturas de madeira e de aço. Para realizar as análises estáticas utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) juntamente com o princípio dos trabalhos virtuais. A Regra de Simpson foi utilizada para determinar, de forma aproximada, os fatores de forma e de carga nas análises das mísulas com voute reta ou parabólica. O programa ainda permite realizar análise estática para estruturas sólidas por meio dos elementos finitos tetraédricos com 4 nós (T_4), hexaédricos de 8 nós (H_8) e elementos finitos hexaédricos de 20 nós (H_{20}).

Nas análises dinâmicas também se utilizou o MEF, verificando o comportamento oscilatório das estruturas por meio de aproximações via Série de Fourier. Os resultados foram obtidos através do algoritmo de integração direta (Método de Newmark) e a partir da análise modal.

Nesse capítulo será apresentado as formulações utilizados para o desenvolvimento do programa implementado.

3.1 Análise Estática

3.1.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Para calcular o deslocamento de uma estrutura isostática submetida a um carregamento qualquer pelo método das forças, aplica-se uma carga unitária na direção do deslocamento desejado e traça-se o diagrama de esforço seccional gerado pela carga unitária e pelo carregamento externo real. A interação entre esses dois diagramas fornece o valor do deslocamento desejado (POLILLO,1977).

O trabalho das forças internas é dado pela soma dos trabalhos virtuais de deslocamento dos elementos de comprimento dx ao longo da estrutura. A expressão que demonstra o trabalho das forças internas devido a todos os esforços que a estrutura se encontra submetida (momento fletor, esforço axial, esforço cortante e momento torçor) é apresentada na Equação 3.1.

$$W_{int} = \int \bar{M} dj + \int \bar{N} dl + \int \bar{Q} dh + \int \bar{T} dq \quad (3.1)$$

Substituindo-se na Equação 3.1 as expressões que descrevem os deslocamentos e as rotações, tem-se:

$$W_{int} = \int_l \frac{\bar{M} M}{EI} dx + \int_l \frac{\bar{N} N}{EA} dx + \int_l \frac{\bar{Q} \chi Q}{GA} dx + \int_l \frac{\bar{T} T}{GJ} dx \quad (3.2)$$

Sabendo-se que o trabalho das forças externas é definido pela Equação 3.3.

$$W_{ext} = \bar{P} \delta \quad (3.3)$$

Desprezando-se as parcelas correspondentes ao esforço normal, cortante e momento de torção na Equação 3.2 e igualando-se o trabalho das forças externas ao trabalho das forças internas, o deslocamento da estrutura pode ser encontrado pela Equação 3.4.

$$\delta = \int_l \frac{\bar{M} M}{EI} dx \quad (3.4)$$

3.1.2 Regra de Simpson

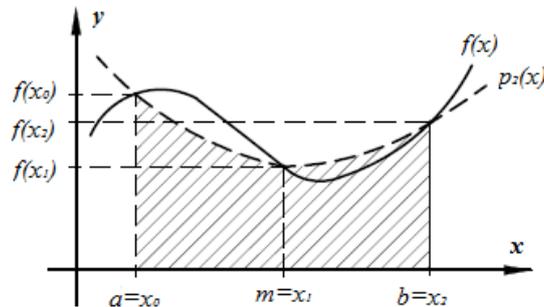
A Regra de Simpson foi utilizada para determinar os fatores de forma e de carga das mísulas. A Regra de Simpson descreve que para aproximar uma função $f(x)$, pode-se utilizar um polinômio interpolador de ordem 2 (parábola), $P_2(x)$, que é dado pela fórmula de Lagrange. Na Equação 3.5a apresenta-se o polinômio interpolador, sendo que os valores de $L_i(x)$ são dados pela Equação 3.5b.

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \quad (3.5a)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i=0,1,2... \quad (3.5b)$$

A Figura 3.1 mostra a aproximação obtida com o polinômio de Lagrange pela Regra de Simpson. É possível verificar que quanto maior o número de termos do polinômio, melhor será a aproximação obtida.

Figura 3.9: Aproximação de Simpson.



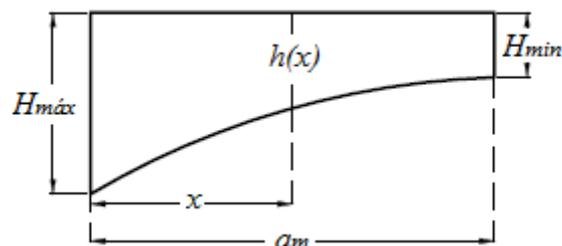
Fonte: autor.

3.1.3 Cálculo da Flexibilidade de barra via Método de Gauss-Legendre

Aproximando-se a altura da mísula apresentada na Figura 3.2 a um trecho parabólico descrito por uma equação do 2º grau, tem-se que a Equação 3.6 pode determinar o valor de qualquer altura da seção ao longo do seu comprimento.

$$h(x) = (H_{máx} - H_{min}) \frac{x^2}{a_m^2} - 2 (H_{máx} - H_{min}) \frac{x}{a_m} + H_{máx} \quad (3.6)$$

Figura 3.10: Representação esquemática da variação da inércia em mísula parabólica.



Fonte: autor.

Por consequência, o momento de inércia da seção retangular será representado pela Equação 3.7.

$$I_z = \frac{b_w}{12} \left[(H_{máx} - H_{min}) \frac{x^2}{a_m^2} - 2 (H_{máx} - H_{min}) \frac{x}{a_m} + H_{máx} \right]^3 \quad (3.7)$$

Da equação da Quadratura de Gauss, tem-se na Equação 3.8.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-1}^1 f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (3.8)$$

Sendo que ξ_i são os pontos de Gauss e w_i são os pesos de Gauss.

Logo, a flexibilidade de uma seção variável em mísula parabólica é obtida pela Equação 3.9.

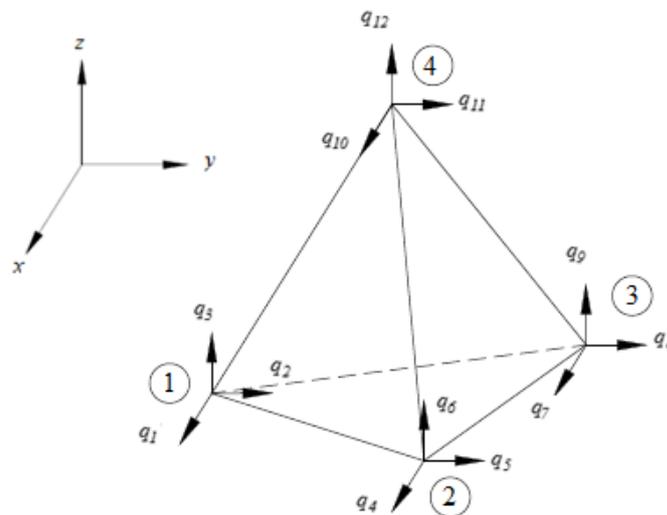
$$\delta = \int_0^L \frac{I}{EI_Z} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx \quad (3.9)$$

3.2 Elementos finitos sólidos

3.2.1 Elemento Finito Tetraédrico de 4 nós (T₄)

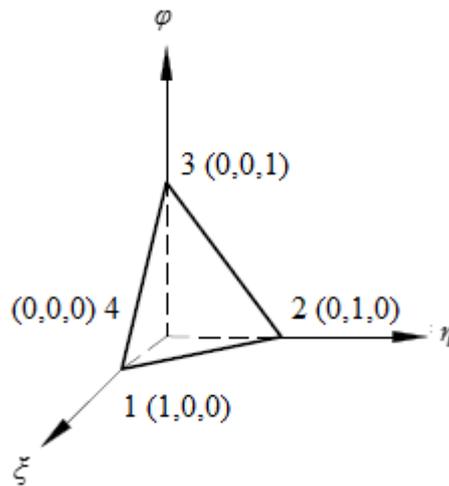
A Figura 3.3 representa o modelo do elemento tetraédrico de 4 nós (T₄) com as indicações dos possíveis deslocamentos.

Figura 3.11: Elemento tetraédrico de 4 nós.



Fonte: autor.

O elemento mestre é mostrado na Figura 3.4.

Figura 3.12: Elemento mestre.

Fonte: autor.

As funções de forma correspondentes a este elemento são:

$$N_1 = \zeta \quad (3.10a)$$

$$N_2 = \eta \quad (3.10b)$$

$$N_3 = \varphi \quad (3.10c)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \quad (3.10d)$$

$$\zeta + \eta + \varphi + N_4 = 1 \quad (3.10e)$$

$$N_4 = 1 - \zeta - \eta - \varphi \quad (3.10f)$$

O vetor de deslocamento será descrito como:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12}] \quad (3.11)$$

Sendo a relação entre o vetor do campo de deslocamentos e o vetor de deslocamentos nodais dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (3.12)$$

Em que \mathbf{N} é a matriz que representa as funções de forma, dada por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Por meio das Equações 3.11 e 3.12, pode-se concluir que:

$$\mathbf{u} = N_1 q_1 + N_2 q_4 + N_3 q_7 + N_4 q_{10} \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{v} = N_1 q_2 + N_2 q_5 + N_3 q_8 + N_4 q_{11} \quad (3.14b)$$

$$\mathbf{w} = N_1 q_3 + N_2 q_6 + N_3 q_9 + N_4 q_{12} \quad (3.14c)$$

As coordenadas cartesianas são escritas como:

$$x = \xi x_1 + \eta x_2 + \varphi x_3 + (1 - \xi - \eta - \varphi)x_4 \quad (3.15)$$

Organizando -se as parcelas da Equação 3.15, tem-se:

$$x = \xi (x_1 - x_4) + \eta (x_2 - x_4) + \varphi (x_3 - x_4) + x_4 \quad (3.16)$$

Organizando a equação 3.16 de uma forma mais sucinta chega-se a Equação 3.17:

$$x = x_4 + x_{14} \xi + x_{24} \eta + x_{34} \varphi \quad (3.17)$$

De forma análoga, obtém-se para as coordenadas y e z:

$$y = y_4 + y_{14} \xi + y_{24} \eta + y_{34} \varphi \quad (3.18)$$

$$z = z_4 + z_{14} \xi + z_{24} \eta + z_{34} \varphi \quad (3.19)$$

Visto que o vetor de deslocamento \mathbf{u} depende de x , y e z , e que estas dependem das coordenadas naturais ξ , η e φ , logo a função \mathbf{u} também é dependente de ξ , η e φ .

Contudo, realizando as substituições necessárias, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Visto que a matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Logo, conclui-se que para o cálculo do volume de um elemento tetraédrico, via Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser obtido por:

$$V_e = (\det J) \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\varphi d\eta d\xi \quad (3.22)$$

Considerando-se que a matriz A é a matriz inversa da matriz jacobiana, tem-se:

$$A = J^{-1} \quad (3.23)$$

Sendo:

$$J^{-1} = \frac{Adj J}{\det J} \quad (3.24)$$

Como a matriz adjunta é a matriz transposta da matriz dos cofatores, tem-se:

$$Adj J = C^T \quad (3.25)$$

Sendo:

C é a matriz dos cofatores.

Sabendo-se que a matriz dos cofatores é definida por:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M c_{ij} \quad (3.26)$$

Chega-se a:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.27a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dv}{dz} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\eta} \\ \frac{dv}{d\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.27b)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dw}{dx} \\ \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\eta} \\ \frac{dw}{d\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.27c)$$

A relação entre o vetor de deformação e o vetor de deslocamentos é:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.28)$$

Sabendo-se que o vetor de deformação específica é definido por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{zy} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{yx} \right]^T \quad (3.29)$$

Ou ainda como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \ \frac{\partial v}{\partial y} \ \frac{\partial w}{\partial z} \ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T \quad (3.30)$$

Após algumas manipulações matemáticas é possível concluir que a matriz \mathbf{B} é igual a:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{12} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\tilde{A}_3 & 0 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\tilde{A}_2 & -\tilde{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Sendo:

$$-\tilde{A}_1 = [A_{11} + A_{12} + A_{13}] \quad (3.32a)$$

$$-\tilde{A}_2 = [A_{21} + A_{22} + A_{23}] \quad (3.32b)$$

$$-\tilde{A}_3 = [A_{31} + A_{32} + A_{33}] \quad (3.32c)$$

A rigidez do elemento pode ser obtida com base na equação da energia interna de deformação, dada por:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.33)$$

Assim, substituindo-se a Equação 3.28 na Equação 3.33, chega-se a:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \int_e dV \quad (3.34)$$

A matriz de rigidez do elemento será definida por:

$$\mathbf{k}_e = V_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.35)$$

Por sua vez, a força de corpo (correspondente ao peso próprio), será dada por:

$$\mathbf{f}_e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \mathbf{N}^T \mathbf{f} |detJ| d\varphi d\eta d\xi \quad (3.36)$$

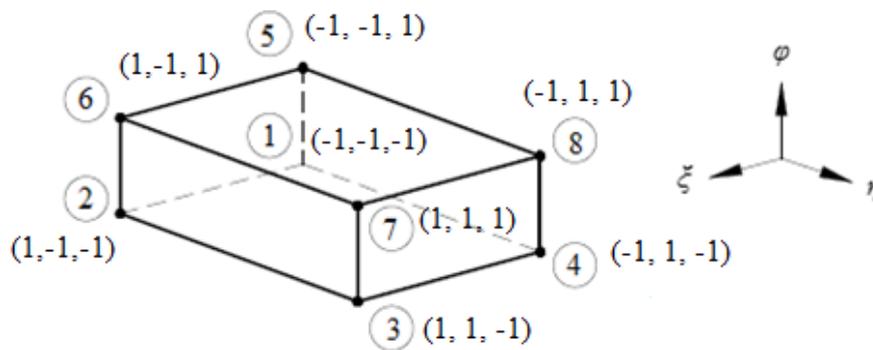
Resolvendo a integral da Equação 3.36, o vetor de forças pode ser descrito da seguinte forma:

$$f_e = \frac{1}{4} V_e \{f_x f_y f_z f_x f_y f_z f_x f_y f_z f_x f_y f_z\} \quad (3.37)$$

3.2.2 Elemento Finito hexaédrico de 8 nós (H₈)

No elemento hexaédrico de 8 nós (H₈) considera-se que o mapeamento será realizado em um cubo. Assim, utilizando-se as coordenadas naturais ξ , η e φ , conforme mostra a Figura 3.5, sendo que os nós do elemento estão representados no sistema de coordenadas naturais.

Figura 3.13: Elemento mestre hexaédrico de 8 nós.



Fonte: autor

Vale ressaltar que as funções de forma de Lagrange são representadas como:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \varphi_i \varphi) \quad (3.38)$$

Por sua vez, os deslocamentos nodais serão representados pelo vetor:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{23}, q_{24}]^T \quad (3.39)$$

A relação entre o vetor que representa o campo de deslocamentos e o vetor de deslocamentos nodais dado pela Equação 3.12, os deslocamentos nodais, nas três direções, localizados no centroide do elemento finito hexaédrico serão representados como:

$$\mathbf{u} = N_1 q_1 + N_2 q_4 + N_3 q_7 + \dots + N_8 q_{22} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{v} = N_1 q_2 + N_2 q_5 + N_3 q_8 + \dots + N_8 q_{23} \quad (3.40b)$$

$$\mathbf{w} = N_1 q_3 + N_2 q_6 + N_3 q_9 + \dots + N_8 q_{24} \quad (3.40c)$$

A relação entre o vetor de deformação e o vetor de deslocamento é dado pela Equação 3.28. A matriz de rigidez do elemento correspondente ao elemento finito hexaédrico com 8 nós é definida como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\det J| d\varphi d\eta d\xi \quad (3.41)$$

Sendo \mathbf{B} a matriz Jacobiana com dimensão (3x3) e lembrando que as integrais são resolvidas numericamente com o auxílio do Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss). As relações entre as derivadas parciais dos deslocamentos podem ser representadas de forma matricial, como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \end{Bmatrix} \quad (3.42a)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\eta} \\ \frac{dv}{d\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dv}{dz} \end{Bmatrix} \quad (3.42b)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\eta} \\ \frac{dw}{d\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dw}{dx} \\ \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \end{Bmatrix} \quad (3.42c)$$

Considerando-se que a matriz gama é a matriz inversa da matriz jacobiana, tem-se:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^{-1} \quad (3.43)$$

Substituindo-se a Equação 3.42 na Equação 3.43, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{Bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.44a)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dv}{dz} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{Bmatrix} \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\eta} \\ \frac{dv}{d\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.44b)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dw}{dx} \\ \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{Bmatrix} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\eta} \\ \frac{dw}{d\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.44c)$$

A matriz \mathbf{B} correspondente ao elemento finito hexaédrico é representada como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}_u \mathbf{D} \mathbf{N} \quad (3.45)$$

A partir da Equação 3.45 é possível concluir que:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\eta} \\ \frac{dv}{d\varphi} \\ \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\eta} \\ \frac{dw}{d\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{D N q} \quad (3.46)$$

A matriz \mathbf{DN} apresenta 9 linhas e 24 colunas sendo organizada com o uso de sub-matrizes apresentadas como:

$$\mathbf{DN}_1 = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\xi} & 0 & 0 \\ \frac{dN_1}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\eta} & 0 & 0 \\ \frac{dN_1}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47a)$$

$$\mathbf{DN}_2 = \begin{bmatrix} \frac{dN_3}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\xi} & 0 & 0 \\ \frac{dN_3}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\eta} & 0 & 0 \\ \frac{dN_3}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47b)$$

$$\mathbf{DN}_3 = \begin{bmatrix} \frac{dN_5}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\xi} & 0 & 0 \\ \frac{dN_5}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\eta} & 0 & 0 \\ \frac{dN_5}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47c)$$

$$\mathbf{DN}_4 = \begin{bmatrix} \frac{dN_7}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\xi} & 0 & 0 \\ \frac{dN_7}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\eta} & 0 & 0 \\ \frac{dN_7}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47d)$$

$$\mathbf{DN}_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\xi} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47e)$$

$$\mathbf{DN}_6 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_3}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\xi} & 0 \\ 0 & \frac{dN_3}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_3}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47f)$$

$$\mathbf{DN}_7 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_5}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\xi} & 0 \\ 0 & \frac{dN_5}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_5}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47g)$$

$$\mathbf{DN}_8 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_7}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\xi} & 0 \\ 0 & \frac{dN_7}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_7}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47h)$$

$$\mathbf{DN}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\xi} \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.47i)$$

$$\mathbf{DN}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_3}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\xi} \\ 0 & 0 & \frac{dN_3}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_3}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.47j)$$

$$DN_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_5}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\xi} \\ 0 & 0 & \frac{dN_5}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_5}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.47k)$$

$$DN_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_7}{d\xi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\xi} \\ 0 & 0 & \frac{dN_7}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_7}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.47l)$$

Ou de forma compacta como:

$$DN = \begin{bmatrix} DN_1 & DN_2 & DN_3 & DN_4 \\ DN_5 & DN_6 & DN_7 & DN_8 \\ DN_9 & DN_{10} & DN_{11} & DN_{12} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Com base na equação referente ao vetor de deformações é possível concluir que:

$$\varepsilon = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \\ \frac{d\varphi}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Sendo a matriz \mathbf{H} será expressa por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Daí, a partir da Equação 3.46 tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{dw}{dy} \\ \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_u \begin{bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\eta} \\ \frac{dv}{d\varphi} \\ \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\eta} \\ \frac{dz}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

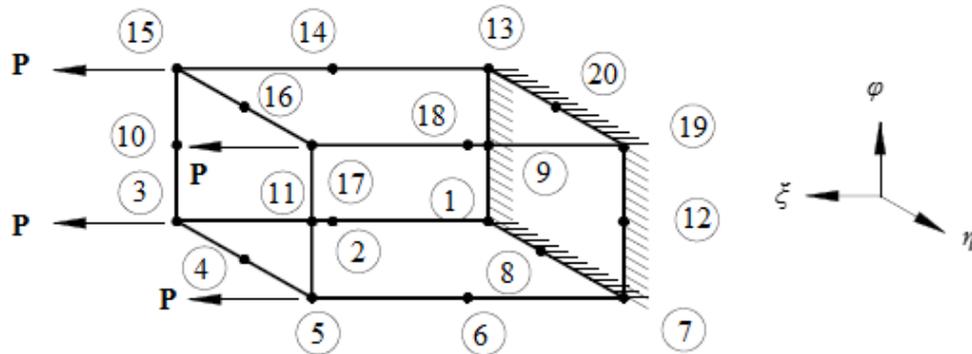
Assim é possível chegar à $\mathbf{\Gamma}_u$ definida pela relação que segue:

$$\mathbf{\Gamma}_u = \begin{bmatrix} \Gamma(\zeta, \eta, \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma(\zeta, \eta, \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(\zeta, \eta, \varphi) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

3.2.3 Elemento Finito Hexaédrico de 20 nós (H₂₀)

A Figura 3.6 representa o cubo mestre correspondente ao elemento finito hexaédrico de 20 nós.

Figura 3.14: Elemento Mestre Hexaédrico de 20 nós.



Fonte: autor.

Os nós do elemento representados no sistema de coordenadas naturais são definidos como:

1 (-1,-1,-1) 2 (0,-1,-1) 3 (1,-1,-1) 4 (1,0,-1) 5 (1,1,-1) 6 (0,1,-1) 7 (-1,1,-1)
 8 (-1,0,-1) 9 (-1,-1,0) 10 (1,-1,0) 11 (1,1,0) 12 (-1,1,0) 13 (-1,-1,1) 14 (0,-1,1)
 15 (1,-1,1) 16 (1,0,1) 17 (1,1,1) 18 (0,1,1) 19 (-1,1,1) 20 (-1,0,1).

Os deslocamentos nodais, serão representados pelo seguinte vetor:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{59}, q_{60}]^T \quad (3.53)$$

As coordenadas cartesianas são definidas como:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots + N_{20} x_{20} \quad (3.54a)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + \dots + N_{20} y_{20} \quad (3.54b)$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + \dots + N_{20} z_{20} \quad (3.54c)$$

Sendo a matriz Jacobiana dada pela Equação 3.21 e seguindo as mesmas considerações válidas para o elemento finito hexaédrico de 8 nós, é possível chegar à matriz \mathbf{DN} , que apresenta 9 linhas e 60 colunas, sendo formada pelas sub-matrizes descritas abaixo, e posteriormente à matriz \mathbf{B} .

$$DN_8 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_9}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{10}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{11}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{12}}{d\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_9}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{10}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{11}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{12}}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_9}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{10}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{11}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{12}}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55h)$$

$$DN_9 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_{13}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{14}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{15}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{16}}{d\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_{13}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{14}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{15}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{16}}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_{13}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{14}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{15}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{16}}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55i)$$

$$DN_{10} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_{17}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{18}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{19}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{20}}{d\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_{17}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{18}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{19}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{20}}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{dN_{17}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{18}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{19}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{20}}{d\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55j)$$

$$DN_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_1}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.55k)$$

$$DN_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_5}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_7}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_5}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_7}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_5}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_6}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_7}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_8}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.55l)$$

$$DN_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_9}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{10}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{11}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{12}}{d\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_9}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{10}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{11}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{12}}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_9}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{10}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{11}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{12}}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.99m)$$

$$DN_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_{13}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{14}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{15}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{16}}{d\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_{13}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{14}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{15}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{16}}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_{13}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{14}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{15}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{16}}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.55n)$$

$$DN_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN_{17}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{18}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{19}}{d\zeta} & 0 & 0 & \frac{dN_{20}}{d\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_{17}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{18}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{19}}{d\eta} & 0 & 0 & \frac{dN_{20}}{d\eta} \\ 0 & 0 & \frac{dN_{17}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{18}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{19}}{d\varphi} & 0 & 0 & \frac{dN_{20}}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.55o)$$

Na forma compacta, tem-se:

$$DN = \begin{bmatrix} DN_1 & DN_2 & DN_3 & DN_4 & DN_5 \\ DN_6 & DN_7 & DN_8 & DN_9 & DN_{10} \\ DN_{11} & DN_{12} & DN_{13} & DN_{14} & DN_{15} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Lembrando que a matriz \mathbf{B} , será definida pela Equação 3.45 e a matriz de rigidez \mathbf{k}_e pela Equação 3.35.

3.3 Análise Dinâmica

3.3.1 Sistema de equações de equilíbrio dinâmico

Para atender aos objetivos dessa pesquisa, nesse capítulo será apresentada uma síntese da formulação utilizada para o desenvolvimento do programa computacional destinado à análise dinâmica, permitindo realizar as análises dos elementos estruturais de forma automatizada.

O sistema de equações de equilíbrio dinâmico é dado pelas Equações 3.57 e 3.58:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{f} \quad (3.58)$$

Sendo:

\mathbf{K} : matriz de rigidez;

\mathbf{C} : matriz de amortecimento;

\mathbf{M} : matriz de massa.

\mathbf{f} : vetor de forças externas.

A equação de equilíbrio de uma estrutura em vibração livre, ou seja, sem cargas externas aplicadas ($f = 0$), não amortecidas ($C = 0$) e com graus de liberdade não restringidos é demonstrada através da Equação 3.59:

$$\mathbf{K} x + \mathbf{M} \ddot{x} = 0 \quad (3.59)$$

Uma estrutura apresenta movimentos harmônicos representados pela Equação 3.60:

$$x = x_0 \text{ sen}(\omega_0 t) \quad (3.60)$$

Derivando-se a equação 3.60, tem-se:

$$\dot{x} = x_0 \omega_0 \text{ cos}(\omega_0 t) \quad (3.61a)$$

$$\ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \text{ sen}(\omega_0 t) \quad (3.61b)$$

Substituindo-se a Equação 3.61a e 3.61b na Equação 3.59, tem-se:

$$\mathbf{K} x_0 \text{ sen}(\omega_0 t) + \mathbf{M} [-\omega_0^2 x_0 \text{ sen}(\omega_0 t)] = 0 \quad (3.62a)$$

$$[\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}] x_0 \text{ sen}(\omega_0 t) = 0 \quad (3.62b)$$

Fazendo-se $\lambda = \omega_0^2$, pode-se obter a solução através de um problema de autovalor, chegando-se aos valores de λ pela solução da Equação 3.63:

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] = 0 \quad (3.63)$$

Sendo $\omega_0 = \sqrt{\lambda}$, obtêm-se as expressões que descrevem a frequência e os períodos, através das Equações 3.64a e 3.64b. Além de ser possível determinar os modos de vibrações correspondentes às frequências naturais.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}} \quad (3.64a)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{K}}} \quad (3.64b)$$

3.3.2 Equações de Equilíbrio em Análise Dinâmica

A equação de equilíbrio em análise dinâmica pode ser representada pela integral definida mostrada através da Equação 3.65:

$$\int_0^{v_k} \delta \varepsilon^t \sigma dV_k = \int_0^{v_k} \delta u^t f_I dV_k + \delta d^t f \quad (3.65)$$

O campo de deslocamentos nodais é dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.66a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.66b)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d} \quad (3.66c)$$

$$\delta \mathbf{u}^t = \delta \mathbf{d}^t \mathbf{N}^t \quad (3.66d)$$

Substituindo-se as Equações 3.66a, 3.66b, 3.66c e 3.66d na Equação 3.65, tem-se:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = - \int_0^{v_k} \mathbf{N}^t \rho \mathbf{N} dV_k \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f} \quad (3.67)$$

Através da equação 3.67 conclui-se que a matriz de massa (\mathbf{M}) é representada por:

$$\mathbf{M} = \int_0^{v_k} \mathbf{N}^t \rho \mathbf{N} dV_k \quad (3.68)$$

Logo, a expressão 3.67 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{f} \quad (3.69)$$

Com a parcela do amortecimento, tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.70)$$

Ou ainda:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.71)$$

3.3.3 Matriz de Massa do Elemento de Viga

O vetor com as funções de Hermite é dado por:

$$N(x) = \{\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \varphi_3(x) \quad \varphi_4(x)\} \quad (3.72)$$

Sendo que $\varphi_i(x)$ representa as funções de Hermite, dadas pelas Equações 3.73a, 3.73b, 3.73c e 3.73d. Assim sendo, tem-se:

$$\varphi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.73a)$$

$$\varphi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.73b)$$

$$\varphi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.73c)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L} \quad (3.73d)$$

Por sua vez, o vetor transposto das funções de Hermite é representado como:

$$N^T(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \varphi_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \varphi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \varphi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \varphi_4(x) = \frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Daí, substituindo-se as Equações 3.73 e 3.74 na Equação 3.68 e realizando a integração, obtém-se a matriz de massa consiste para o elemento de viga dada por:

$$\mathbf{M} = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Sendo que m é a massa total do elemento dada por ρAL , em que A é a área da seção transversal da viga e o L o seu comprimento.

3.3.4 Matriz de Amortecimento

A matriz de amortecimento \mathbf{C} é convenientemente representada por uma função linear das matrizes de rigidez \mathbf{K} e matriz de massa \mathbf{M} . Ou seja:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (3.76)$$

Essa forma de representar o amortecimento é denominada amortecimento proporcional ou de Rayleigh. Para um sistema massa-mola, com massa m e mola de rigidez k oscilando livremente em um fluido de viscosidade c , o amortecimento crítico é dado por:

$$\xi = \frac{c}{2 m \omega_0} \quad (3.77)$$

Segundo a condição dada pela Equação 3.63 correspondente a um problema de autovalor, tem-se que:

$$\lambda = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}, \text{ se } \omega_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}} \quad (3.78)$$

Logo:

$$2m \omega_0 \xi = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (3.79)$$

Isolando-se o amortecimento crítico, tem-se:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_0 + \frac{\beta}{\omega_0} \right) \quad (3.80)$$

As “n” frequências próprias da estrutura ω_{0i} são determinadas com a solução do problema de autovalor definido anteriormente. Sendo assim, as duas primeiras frequências próprias (as menores) são utilizadas para se escrever o sistema de equações dado abaixo por:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_{0i} + \frac{\beta}{\omega_{0i}} \right) \quad (3.81a)$$

$$\xi = \frac{I}{2} \left(\alpha \omega_{0_2} + \beta / \omega_{0_2} \right) \quad (3.81b)$$

A solução do sistema definido fornece os coeficientes α e β . Daí, o valor de ξ deve ser fixado para a determinação de α e β . Esse valor depende do material da estrutura e do nível de tensões.

3.3.5 Matriz de Rigidez Equivalente

A matriz de rigidez equivalente utilizada é dada pela Equação 3.82:

$$\mathbf{k}_{eq} = \frac{l}{30} [k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 4k_4 + 2k_5 + 4k_6 + 2k_7 + 4k_8 + 2k_9 + 4k_{10} + k_{11}] \quad (3.82)$$

Se a estrutura analisada for um elemento de viga, tem-se que:

$$k = k(I) \quad (3.83)$$

Caso a estrutura seja um elemento sujeito à força axial, tem-se:

$$k = k(A) \quad (3.84)$$

Por fim, para um elemento de pórtico plano, tem-se que:

$$k = k(A, I) \quad (3.85)$$

3.3.6 Análise Dinâmica por Algoritmo de Integração Direta

A equação de equilíbrio é reescrita na seguinte forma:

$$\mathbf{K} u + \mathbf{C} v + \mathbf{M} a = \mathbf{f}(t) \quad (3.86)$$

Quando se usa o algoritmo de integração direta para a solução do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, um sistema de equações algébricas deve ser resolvido a cada passo de tempo para que se obtenham as respostas no fim do intervalo. O algoritmo de Newmark será usado nesse item para resolver a equação por integração direta.

No Método de Newmark, adotam-se as seguintes equações:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \Delta t \mathbf{v}_0 + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{a}_0 + \alpha \mathbf{a}_1 \right] \quad (3.87a)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \Delta t \left[(1 - \beta) \mathbf{a}_0 + \beta \mathbf{a}_1 \right] \quad (3.87b)$$

Sendo que Δt representa o intervalo de tempo entre o instante inicial t_0 e o final t_1 , ou seja:

$$\Delta t = t_1 - t_0 \quad (3.88)$$

Sendo:

\mathbf{u}_0 e \mathbf{u}_1 : os vetores de deslocamento no instante t_0 e t_1 , respectivamente;

\mathbf{v}_0 e \mathbf{v}_1 : os vetores de velocidade no instante t_0 e t_1 , respectivamente;

\mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1 : os vetores de aceleração no instante t_0 e t_1 , respectivamente.

Considerando-se $\alpha = 1/4$ e $\beta = 1/2$, e o algoritmo sendo incondicionalmente estável, as equações 3.87a e 3.87b ficam representadas da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \Delta t \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) \quad (3.89a)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) \quad (3.89b)$$

Isolando-se a incógnita \mathbf{a}_1 na Equação 3.89a, tem-se:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) - \frac{4 \mathbf{v}_0}{\Delta t} - \mathbf{a}_0 \quad (3.90)$$

Substituindo-se a Equação 3.90 na Equação 3.89b, tem-se:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0) - \mathbf{v}_0 \quad (3.91)$$

Substituindo-se as Equações de 3.90 e 3.91 na Equação 3.57 dada para o instante $t = t_1$, vem:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_1 + \mathbf{C} \mathbf{v}_1 + \mathbf{M} \mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_1 \quad (3.92)$$

Reagrupando-se os termos das Equações 3.90 e 3.91, chega-se à Equação 3.93:

$$\left[\mathbf{K} + \frac{2\mathbf{C}}{\Delta t} + \frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right] u_1 = \left[\frac{2\mathbf{C}}{\Delta t} + \frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right] u_0 + \left[\mathbf{C} + \frac{4\mathbf{M}}{\Delta t} \right] v_0 + \mathbf{M} a_0 + \mathbf{f}_1 \quad (3.93)$$

A equação 3.93 é resolvida a cada passo Δt fornecendo a solução no instante t_1 em termos da carga f_1 no instante t_1 e das respostas u_0 , v_0 e a_0 no instante t_0 .

3.3.7 Vibrações Forçadas

Considerando-se a situação na qual existe uma força externa $F_e = f(t)$ agindo no sistema, essa força pode ser originada por um campo magnético, vibração na parede ou pelo vento de alta intensidade. Logo, tem-se:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{dx}{dt} + \mathbf{K} x = \mathbf{f}(t) \quad (3.94)$$

O sistema físico é linear de segunda ordem. A força externa dá origem ao termo não homogêneo. Um caso que se pode analisar ocorre quando $f(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$, que é a situação em que há uma ação externa atuando de forma periódica na estrutura. Então, a Equação 3.94 fica representada da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{dx}{dt} + \mathbf{K} x = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3.95)$$

Para a sua solução pode ser usado o método dos coeficientes indeterminados que será apresentado na Equação 3.96, logo:

$$x_0(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (3.96)$$

Substituindo-se a Equação 3.95 e 3.96, chega-se ao seguinte sistema:

$$\omega_0 \mathbf{C} A + (\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) B = F_0 \quad (3.97a)$$

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) A - \omega_0 \mathbf{C} B = 0 \quad (3.97b)$$

Resolvendo-se o sistema linear, obtêm-se as Equações 3.98a e 3.98b correspondentes aos coeficientes A e B .

$$A = \frac{\omega_0 \mathbf{C} F_0}{(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M})^2 + \omega_0^2 \mathbf{C}^2} \quad (3.98a)$$

$$B = \frac{(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) F_0}{(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M})^2 + \omega_0^2 \mathbf{C}^2} \quad (3.98b)$$

Por fim, substituindo-se as Equações 3.98a e 3.98b em 3.96, tem-se a solução particular dada por:

$$x_0(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) \cos(\varphi)}{(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M})} \quad (3.99)$$

3.3.8 Análise modal para vibrações forçadas

Dadas as matrizes \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} , obtém-se as matrizes diagonalizadas:

$$\mathbf{K}_d = \phi^T \mathbf{K} \phi \quad (3.100)$$

$$\mathbf{C}_d = \phi^T \mathbf{C} \phi \quad (3.101)$$

$$\mathbf{M}_d = \phi^T \mathbf{M} \phi \quad (3.102)$$

Sendo que:

$$d = \phi y \quad (3.103)$$

$$\dot{d} = \phi \dot{y} \quad (3.104)$$

$$\ddot{d} = \phi \ddot{y} \quad (3.105)$$

Substituindo as Equações 3.103, 3.104 e 3.105 na Equação 3.57, tem-se:

$$\mathbf{K} d + \mathbf{C} \dot{d} + \mathbf{M} \ddot{d} = f \quad (3.106)$$

$$\mathbf{K} \phi y + \mathbf{C} \phi \dot{y} + \mathbf{M} \phi \ddot{y} = f \quad (3.107)$$

$$\phi^T \mathbf{K} \phi y + \phi^T \mathbf{C} \phi \dot{y} + \phi^T \mathbf{M} \phi \ddot{y} = \phi^T f \quad (3.108)$$

Devido à ortogonalidade de ϕ em relação às matrizes \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} , pode-se reescrevê-las como:

$$\mathbf{K}_d \mathbf{y} + \mathbf{C}_d \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_y \quad (3.109)$$

Sendo que:

$$\mathbf{f}_y = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} \quad (3.110)$$

Como as matrizes \mathbf{K}_d , \mathbf{C}_d e \mathbf{M}_d são diagonais, o sistema apresentado na Equação 3.109 é desacoplado. Logo, cada componente é dada por:

$$\mathbf{K}_{di} y_i + \mathbf{C}_{di} \dot{y}_i + \mathbf{M}_{di} \ddot{y}_i = f_{yi} \quad (3.111)$$

Os resultados em termos de deslocamento, velocidade e aceleração podem ser recuperados fazendo-se as seguintes relações:

$$d = \boldsymbol{\phi} \mathbf{y} \quad (3.112)$$

$$v = \dot{d} = \boldsymbol{\phi} \dot{\mathbf{y}} \quad (3.113)$$

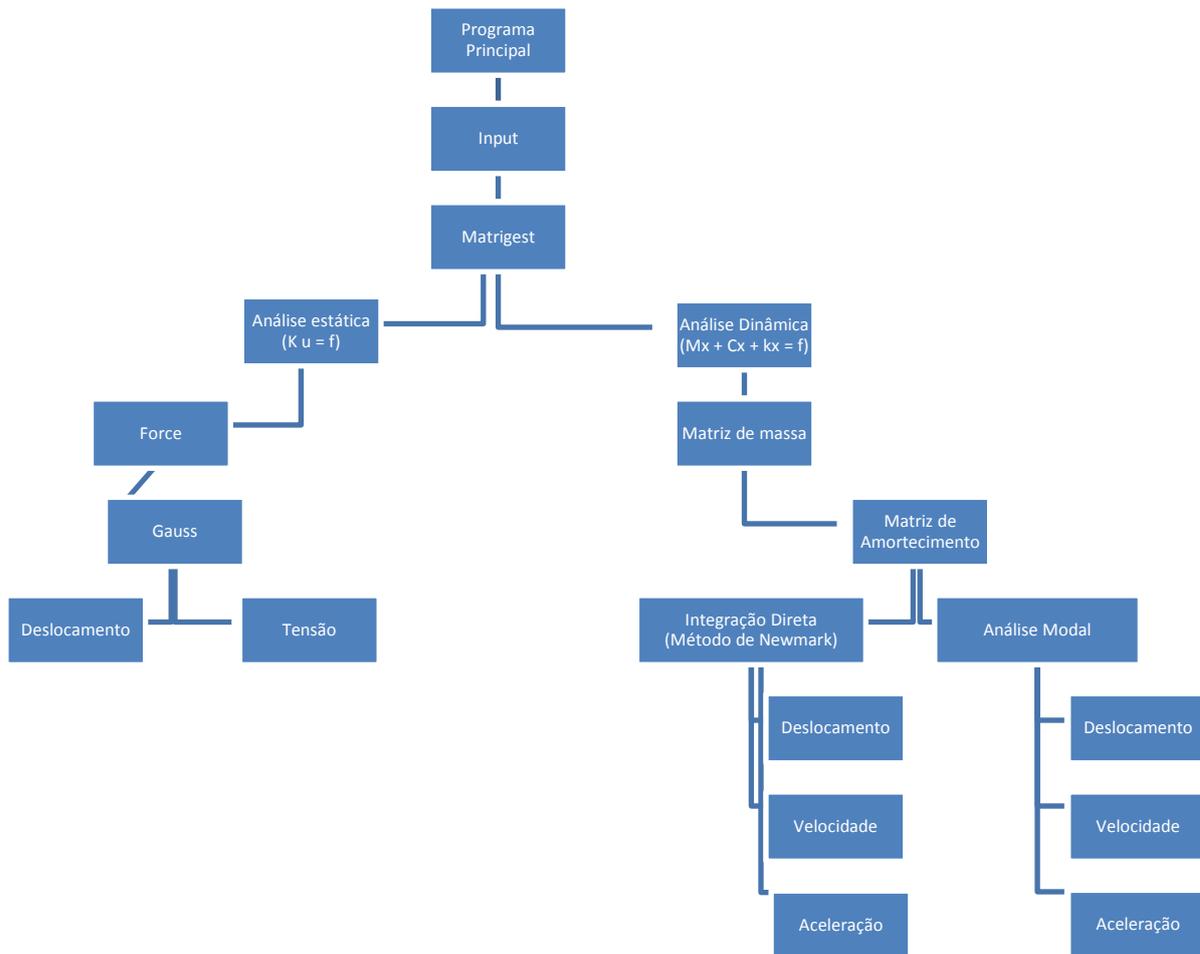
$$a = \ddot{d} = \boldsymbol{\phi} \ddot{\mathbf{y}} \quad (3.114)$$

Para cada autovalor λ_i há um autovetor ϕ_i associado. Logo, a matriz $\boldsymbol{\phi}$ será:

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_n] \quad (3.115)$$

3.4 Fluxograma do programa implementado

O programa desenvolvido foi implementado em linguagem FORTRAN. Na Figura 3.7 apresenta-se, de forma esquemática, a estrutura do programa computacional bem como as rotinas utilizadas para a obtenção dos resultados.

Figura 3.15: Fluxograma do programa implementado.

Fonte: autor.

4 Aplicações

4.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos por meio da formulação descrita anteriormente. O primeiro passo foi discretizar a estrutura utilizando o Método dos Elementos Finitos e montar as matrizes de rigidez e de massa. Em seguida, usa-se a consideração referente à Regra de Simpson aplicada à formulação matricial, sendo bastante eficiente na solução de análise dinâmica de estruturas com seção transversal variável e variação em mísula. Nesse trabalho serão realizadas análises dinâmicas com oscilações livre e oscilação forçada com amortecimento.

Foi possível desenvolver aplicações para determinação de deslocamentos, fatores de carga e fatores de forma de vigas com inércia variável em mísulas com voute reta e parabólica. Os resultados obtidos por meio do Método de Simpson foram comparados com os valores tabulares encontrados na literatura.

Mostram-se também os resultados numéricos referentes às vibrações mecânicas das vigas de madeira com seções transversais genéricas e sujeitas a várias condições de carregamentos periódicos, considerando uma taxa de amortecimento igual a 5% em todas as análises. Os exemplos foram analisados inicialmente com elementos de barra. Para a matriz de rigidez, usou-se o elemento de pórtico plano, a matriz de massa foi a matriz de massa consistente e a matriz de amortecimento foi obtida com o auxílio do princípio do amortecimento proporcional de Rayleigh. Para obter os resultados se utilizou o método da integração direta de Newmark e análise modal.

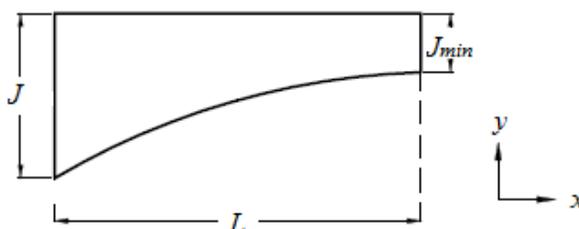
Por fim, foi implementado a formulação correspondente ao Elemento Finito Tridimensional. No programa há a possibilidade de analisar a estrutura com o elemento finito tetraédrico com 4 nós (T_4), hexaédrico de oito nós (H_8) e com o elemento hexaédrico ou paralelepípedo com 20 nós (H_{20}). Vale ressaltar que as propriedades da madeira utilizada são $E = 24,5GPa$ e $\rho = 800 kg/m^3$. Já as do aço foram indicadas em cada análise separadamente.

4.2 Cálculo de Fatores de Forma e Fatores de Carga para a Mísula com voute Parabólica

4.2.1 Fator de Forma

Verificaram-se os fatores de forma para uma mísula com voute parabólica conforme Figura 4.1, variando o valor de J_{min} até J e mantendo o valor de $L=1$ e $J=1$.

Figura 4.16: Mísula com voute parabólica.



Fonte: autor.

A Tabela 4.1 apresenta as comparações entre os valores de fator de forma obtidos pela Regra de Simpson e pelas Tabelas de Van Langendonk.

Tabela 4.1: Fatores de forma para mísula com voute parabólica.

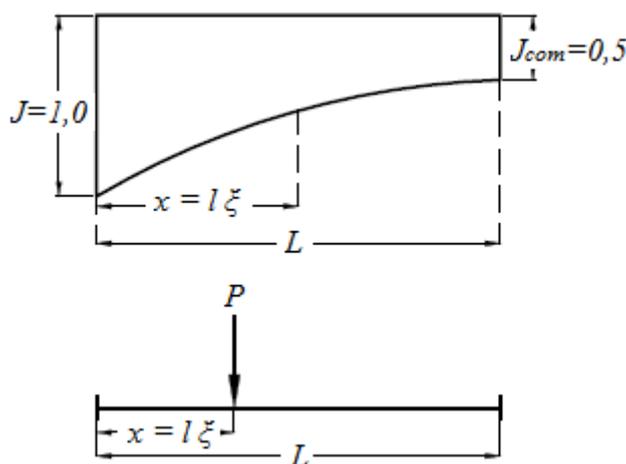
$J_{máx}$	J_{min}	Fator de Forma – Valores Tabulares	Fator de Forma – Regra de Simpson	Valores Tabulares / Regra de Simpson
1,0	0,15	0,0780	0,0778	1,0025
1,0	0,2	0,0892	0,0895	1,0000
1,0	0,3	0,1070	0,1075	1,0040
1,0	0,4	0,1208	0,1210	1,0010
1,0	0,5	0,1317	0,1319	1,0021
1,0	0,6	0,1407	0,1410	1,0024
1,0	0,7	0,1485	0,1488	1,0026
1,0	0,8	0,1551	0,1555	1,0019
1,0	0,9	0,1611	0,1613	1,0012
1,0	1,0	0,1664	0,1666	1,0016

Fonte: autor.

4.2.2 Fatores de Carga para carregamento concentrado

Calculou-se os fatores de carga η_1 e η_2 para uma viga submetida a um carregamento concentrado $P = 8t$. Nessa análise foi utilizada a seção transversal com altura variável e base constante devido à configuração em mísula com voute parabólica conforme a Figura 4.2. O valor do J_{comp} manteve-se constante ($J_{comp} = 0,5$) em ambas as análises, com ξ variando entre 0,2 e 0,5.

Figura 4.17: Mísula com voute parabólico submetida a carregamento concentrado.



Fonte: autor.

Nas Tabelas 4.2 e 4.3 encontra-se a comparação entre os resultados determinados para os fatores de carga concentrada η_1 e η_2 , respectivamente. Foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos através da Regra de Simpson e utilizando os valores encontrados por meios das tabelas disponíveis na literatura (Tabelas de *Van Langendonk*).

Tabela 4.2: Fatores de carga concentrada η_1 .

ξ	Fator de Carga η_1 - Valores Tabulares	Fator de Carga η_1 - Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
0,2	0,2636	0,2637	1,0002
0,5	0,3723	0,3777	1,0146

Fonte: autor.

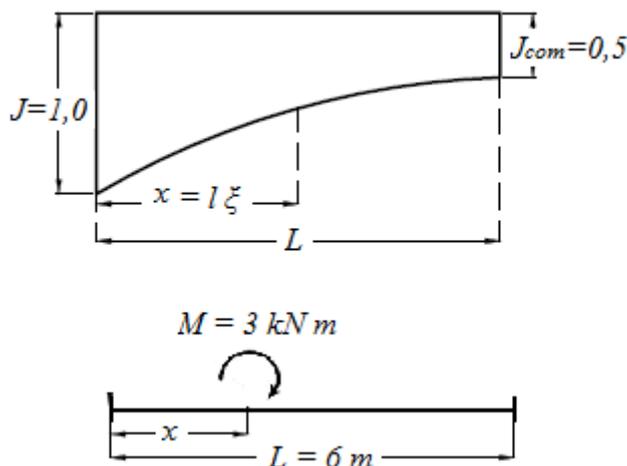
Tabela 4.3: Fatores de carga concentrada η_2 .

ξ	Fator de Carga η_2 – Valores Tabulares	Fator de Carga η_2 – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
0,2	0,2053	0,2052	0,9996
0,5	0,4206	0,4262	1,0132

Fonte: autor.

4.2.3 Fatores de Carga para carga-momento

Determinou-se o fator de carga correspondente à carga-momento para uma mísula com voute parabólica conforme Figura 4.3, submetida a um momento fletor igual a $M = 3 \text{ kN/m}$. A mísula foi analisada com o ponto de atuação da carga momento em duas posições distintas ($x = 1,2 \text{ m}$ e $x = 3,0 \text{ m}$).

Figura 4.18: Mísula com voute parabólica submetida à carga-momento.

Fonte: autor.

Na Tabela 4.4 é possível verificar a comparação entre os resultados obtidos pela Regra de Simpson e a partir das Tabelas de Van Langendonk, verificando uma ótima aproximação entre as respostas.

Tabela 4.4: Fatores de carga momento η_1 .

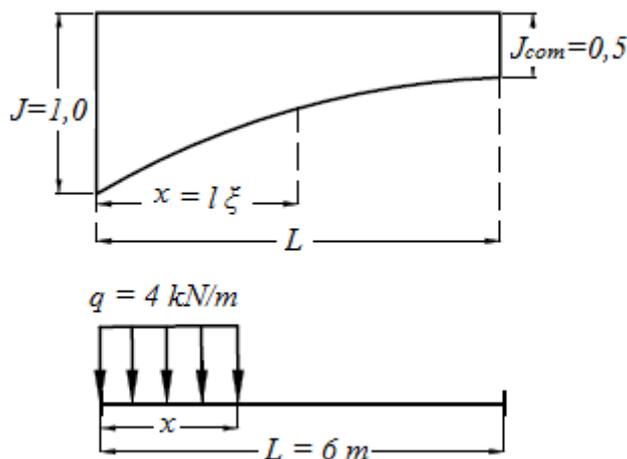
x	Fator de Carga η_1 – Valores Tabulares	Fator de Carga η_1 – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
1,2	2,0806	2,0768	0,9982
3,0	-0,3640	-0,3528	0,9692

Fonte: autor.

4.2.4 Fatores de Carga para carregamento parcialmente distribuído

Determinou-se o fator de carga para uma mísula com voute parabólica, conforme Figura 4.4, submetida a um carregamento parcialmente distribuído $q = 4 \text{ kN/m}$. O ponto de aplicação do carregamento foi posicionado em duas situações ($x = 0,6 \text{ m}$ e $x = 1,2 \text{ m}$).

Figura 4.19: Mísula com voute parabólica submetida à carga parcialmente distribuída.



Fonte: autor.

Os resultados encontrados para os fatores de carga parcialmente distribuída são mostrados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Fatores de carga parcialmente distribuída η_1 .

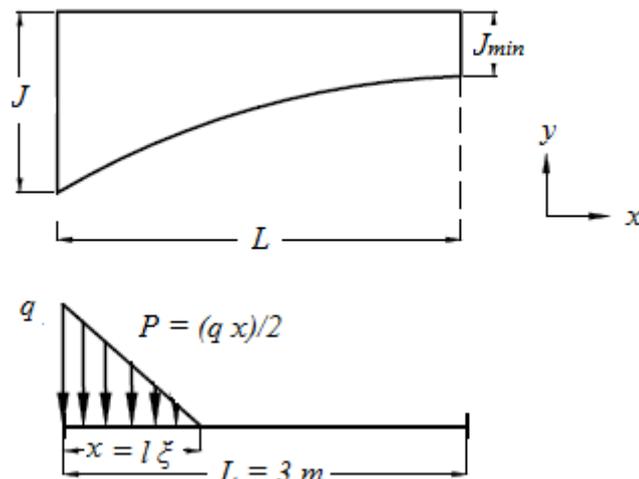
x (m)	Fator de Carga η – Valores Tabulares	Fator de Carga η – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
0,6	0,8559	0,8550	0,9990
1,2	3,1384	3,1339	0,9985

Fonte: autor.

4.2.5 Fatores de Carga para carregamento triangular

De forma análoga aos casos anteriores, verificou-se o fator de carga para uma mísula com voute parabólica submetida a um carregamento triangular parcialmente distribuído conforme Figura 4.5.

Figura 4.20: Mísula com voute parabólica submetida à carga triangular parcialmente distribuída.



Fonte: autor.

Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Fatores de carga triangular parcialmente distribuída η .

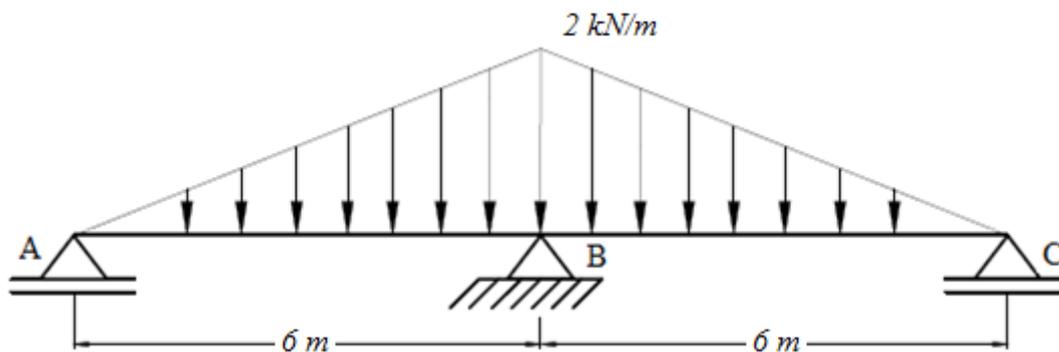
x (m)	Fator de Carga η – Valores Tabulares	Fator de Carga η – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
0,6	6,9031	6,9027	0,9999

Fonte: autor.

4.3 Cálculo de Deslocamentos

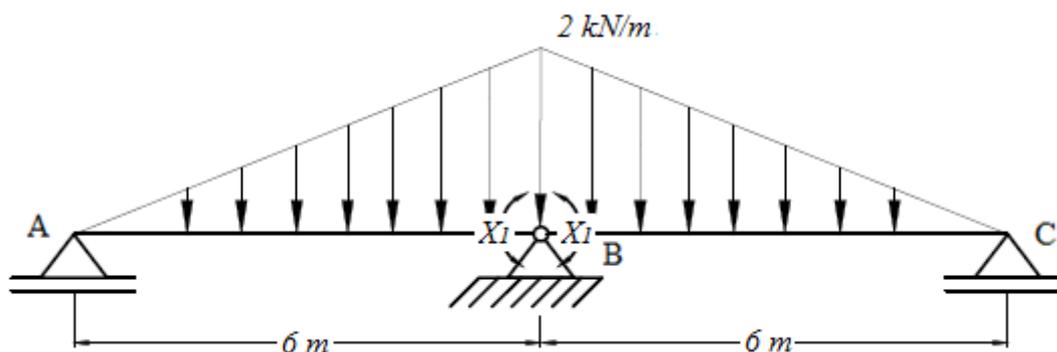
4.3.1 Aplicação 1 – Determinação do Momento Fletor

Na viga hiperestática apresentada na Figura 4.6, determinou-se o valor do momento no apoio B (M_B), levando-se em consideração que a seção transversal apresenta inércia constante ao longo do comprimento.

Figura 4.21: Viga em análise.

Fonte: autor.

Para solucionar o sistema proposto, é preciso liberar um grau de liberdade da estrutura. Logo, no apoio B foi permitida a rotação unitária conforme mostra a Figura 4.7.

Figura 4.22: Sistema Principal.

Fonte: autor.

Utilizando as Tabelas de *Van Langendonk*, chegou-se ao resultado apresentado na Tabela 4.7 que foi comparada com a resposta determinada por meio do software FTOOL.

Tabela 4.7: Momento Fletor no apoio B.

Valores Tabulares M_B (Kn.m)	FTOOL M_B (Kn.m)	FTOOL / Valores Tabulares
4,80	4,80	1,00

Fonte: autor.

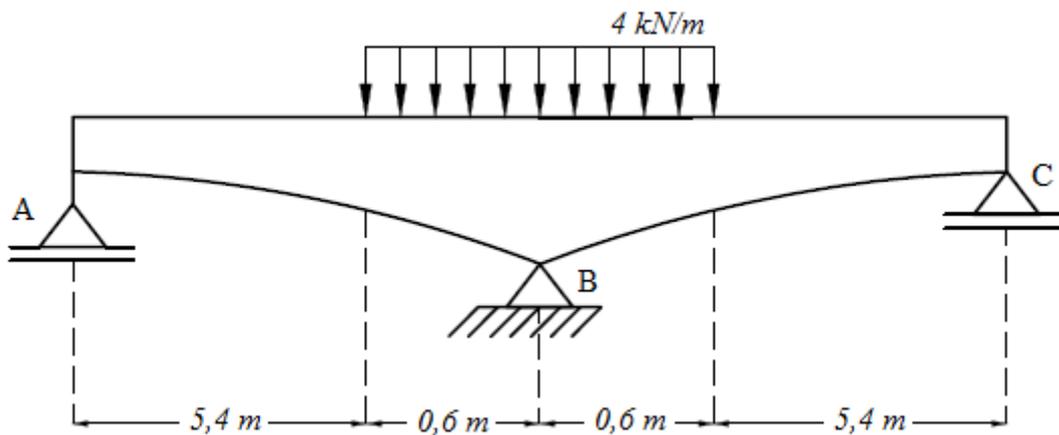
4.3.2 Aplicação 2 – Cálculo de X_I para mísula com carregamento parcialmente distribuído

Identificou-se o valor do hiperestático X_I para a viga representada na Figura 4.8, sabendo-se que a seção apresenta inércia variável ao longo do comprimento. Na análise, foram considerados apenas os efeitos decorrentes dos esforços de flexão.

Dados: $I_{máx} = 2 I_c$

$$I_{min} = I_c$$

Figura 4.23: Viga com seção transversal retangular variando em mísula com voute parabólica submetida a carregamento parcialmente distribuído.



Fonte: autor.

Os resultados numéricos encontrados podem ser verificados na Tabela 4.8. Daí, apresenta-se a comparação entre os valores obtidos com a Regra de Simpson e as respostas determinadas a partir das Tabelas de Van Langendonk.

Tabela 4.8: Valores de X_I .

X_I – Valores Tabulares	X_I – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
-0,6638	-0,6641	0,9999

Fonte: autor.

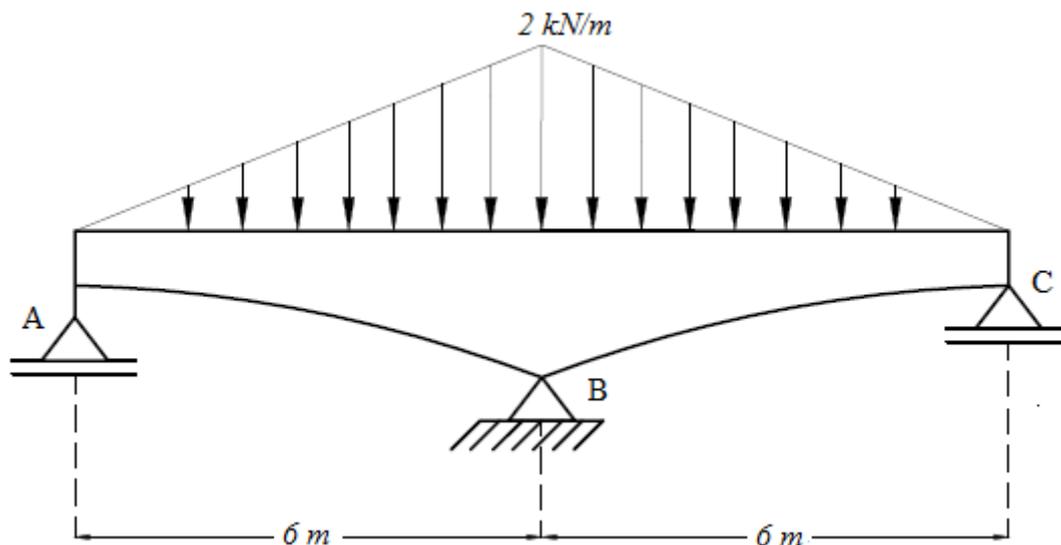
4.3.3 Aplicação 3 – Cálculo de X_I para mísula com carregamento distribuído de forma triangular

Determinou-se o valor de X_I da viga representada na Figura 4.9, sabendo que a seção transversal apresenta inércia variável ao longo do comprimento. Na análise, foram considerados apenas os efeitos decorrentes dos esforços de flexão.

Dados: $I_{máx} = 2 I_c$

$$I_{min} = I_c$$

Figura 4.24: Viga com seção transversal em mísula com voute parabólica submetida a carregamento distribuído de forma triangular.



Fonte: autor.

A Tabela 4.9 apresenta os resultados obtidos por meio da Regra de Simpson e das Tabelas de Van Langendonk.

Tabela 4.9: Valores de X_I .

X_I – Valores Tabulares	X_I – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
-5,3601	-5,3540	1,0012

Fonte: autor.

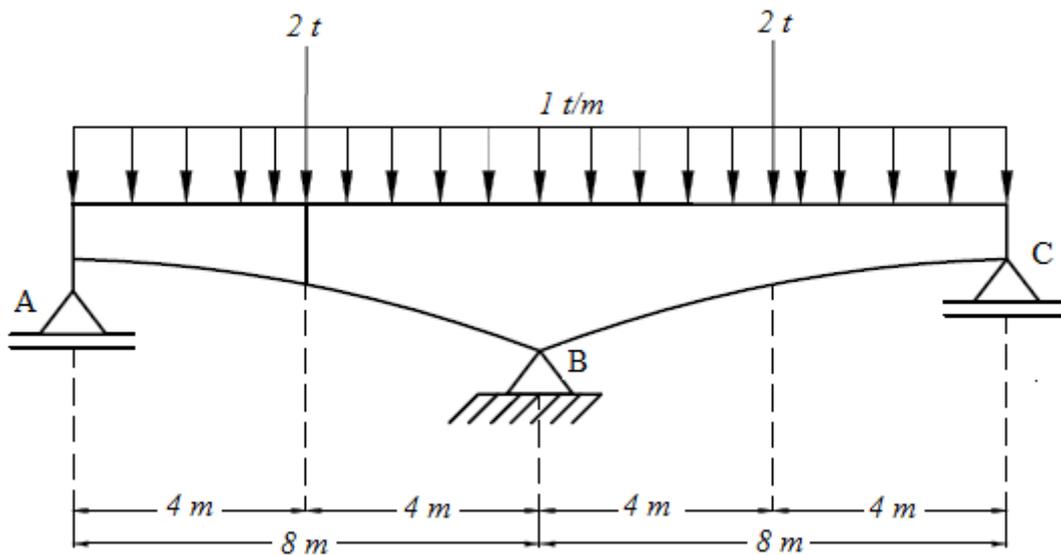
4.3.4 Aplicação 4 - Cálculo de X_I para mísula com carregamento distribuído e carregamento concentrado

Nessa análise, realizou-se a combinação de carregamentos distribuídos de forma retangular com carregamento concentrado. Logo, determinou-se o valor de X_I da viga representada na Figura 4.10, sabendo-se que a seção apresenta inércia variável ao longo do comprimento. Vale ressaltar que foram considerados apenas os efeitos decorrentes dos esforços de flexão.

Dados: $I_A = I_C = I$

$$I_B = 5 I$$

Figura 4.25: Mísula com voute parabólica submetida à combinação de carregamento distribuído de forma retangular e concentrada.



Fonte: autor.

Na Tabela 4.10 encontram-se os resultados obtidos por meio da Regra de Simpson e determinados através dos valores tabulares.

Tabela 4.10: Valores de X_I .

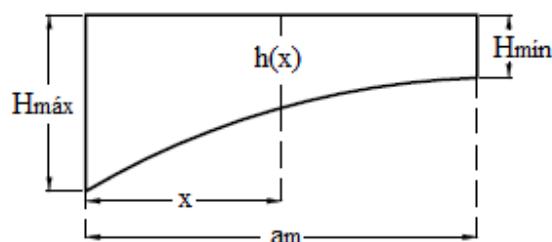
X_I – Valores Tabulares	X_I – Regra de Simpson	Regra de Simpson / Valores Tabulares
-14,6973	-14,6027	0,9936

Fonte: autor.

4.4 Cálculo da Flexibilidade de Barras via Método de Gauss-Legendre

Nessa análise foi verificado a flexibilidade de uma estrutura com mísula de voute parabólica conforme Figura 4.11.

Figura 4.26: Representação esquemática da variação da inércia em mísula parabólica.



Fonte: autor.

Para solução do problema foi realizada uma análise numérica via Método de Gauss-Legendre com 11 e 16 pontos de Gauss, sendo os resultados comparados com a solução analítica encontrada por meio do software Maple. Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 4.11.

Tabela 4.11: Valores da flexibilidade.

Pontos	Método de Gauss-Legendre	Solução analítica - MAPLE	Gauss-Legendre / Solução analítica
11	631,4759738	631,4759615	1,0000000
16	631,4759611	631,4759615	0,9999999

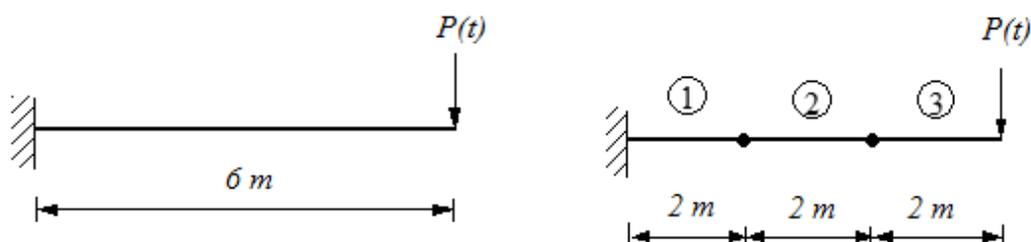
Fonte: autor.

4.5 Análise dinâmica com seções transversais genéricas

4.5.1 Viga em balanço sujeita à carga senoidal

Nesta aplicação considerou-se uma viga de madeira em balanço sujeita a uma carga horizontal $P(t) = 100 \text{ sen}(0,5t)$, sendo a carga inicial $P_0 = 100 \text{ kN}$. A seção transversal é retangular com área $A = 0,06 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 4,5 \text{ cm}^4$. Na Figura 4.12 apresenta-se a viga utilizada e ao lado mostra-se a sua discretização via Método dos Elementos Finitos. Esta estrutura será adotada nas análises 4.5.1 até 4.5.5 do presente trabalho, em que serão feitas apenas alterações no carregamento aplicado e nas propriedades geométricas das seções transversais.

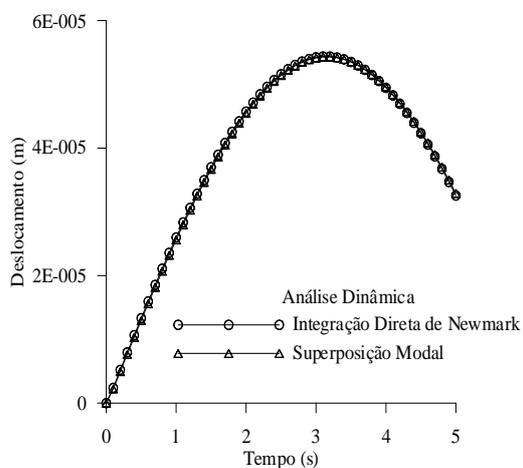
Figura 4.27: Viga em balanço e malha de elementos finitos.



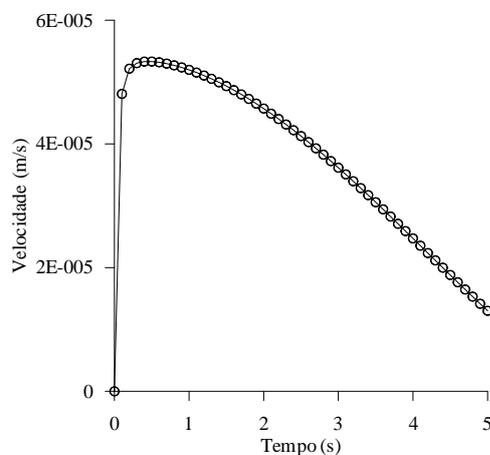
Fonte: autor.

Na Figura 4.13 apresentam-se, de forma gráfica, os resultados obtidos para esta estrutura.

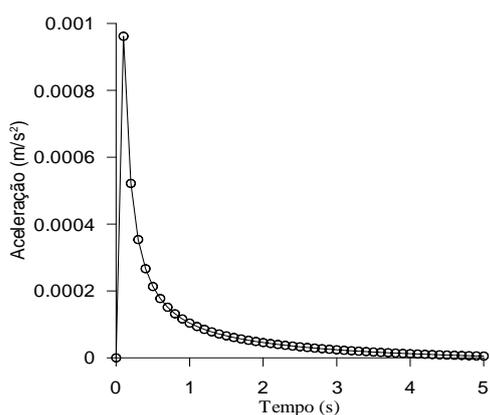
Figura 4.28: Representação gráfica dos resultados.



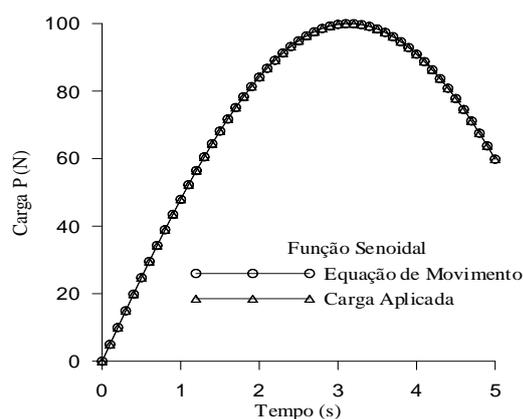
a: Deslocamento.



b: Velocidade.



c: Aceleração.



d: Carga.

Fonte: autor.

4.5.2 Viga em balanço sujeita à função dente de serra

Neste exemplo, considerou-se uma viga de madeira em balanço sujeita a uma carga vertical na extremidade livre igual a:

$$P(t) = 100 [f(t)] \quad (4.1)$$

A função que foi usada para a definição da carga aplicada é:

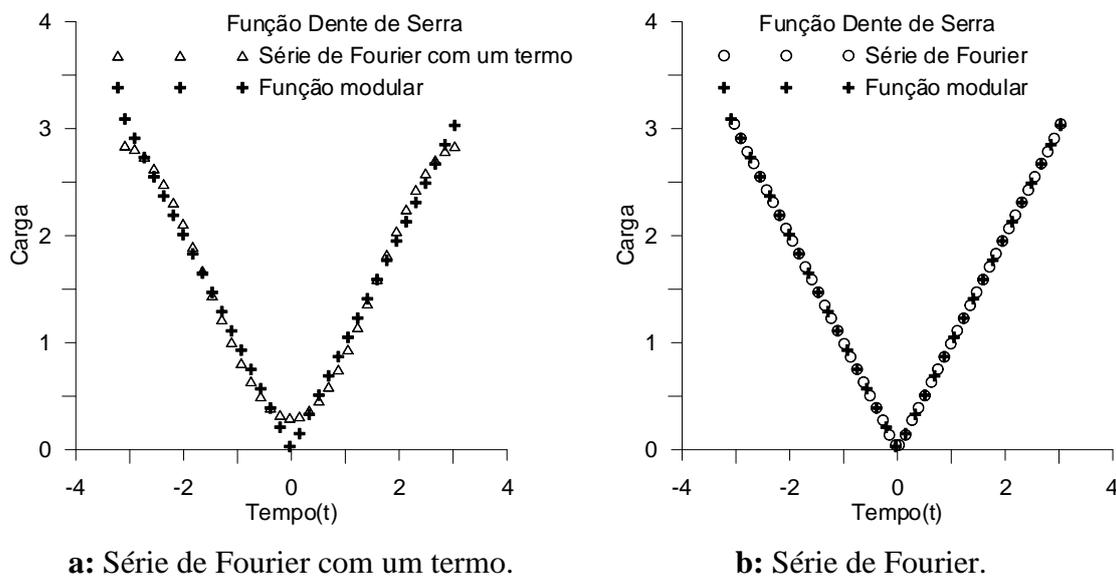
$$f(t) = |t| \text{ se } -\pi < t < \pi \quad (4.2)$$

A Equação 4.2 pode ser aproximada através da Série de Fourier da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \frac{\cos 7t}{7^2} + \frac{\cos 9t}{9^2} + \dots \right) \quad (4.3)$$

Na Figura 4.14 mostram-se os gráficos obtidos através da série de Fourier e com o auxílio da função modular.

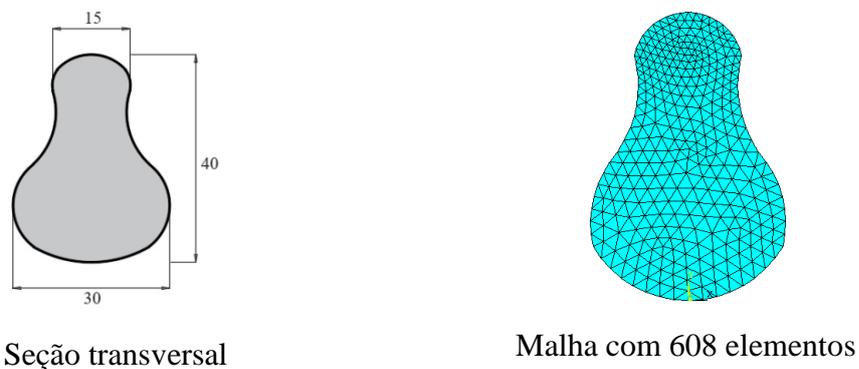
Figura 4.29: Representação gráfica dos resultados.



Fonte: autor.

Neste exemplo, escolheu-se para a realização das análises uma seção genérica que foi discretizada com 608 elementos finitos. Na Figura 4.15 apresenta-se a seção e a malha de elementos finitos adotada para a obtenção das propriedades geométricas.

Figura 4.30: Seção transversal e malha de elementos finitos.



Fonte: autor.

As propriedades foram obtidas via método dos elementos finitos e os resultados foram comparados com os obtidos pelo software AutoCAD. Os dados comparativos encontram-se na Tabela 4.12.

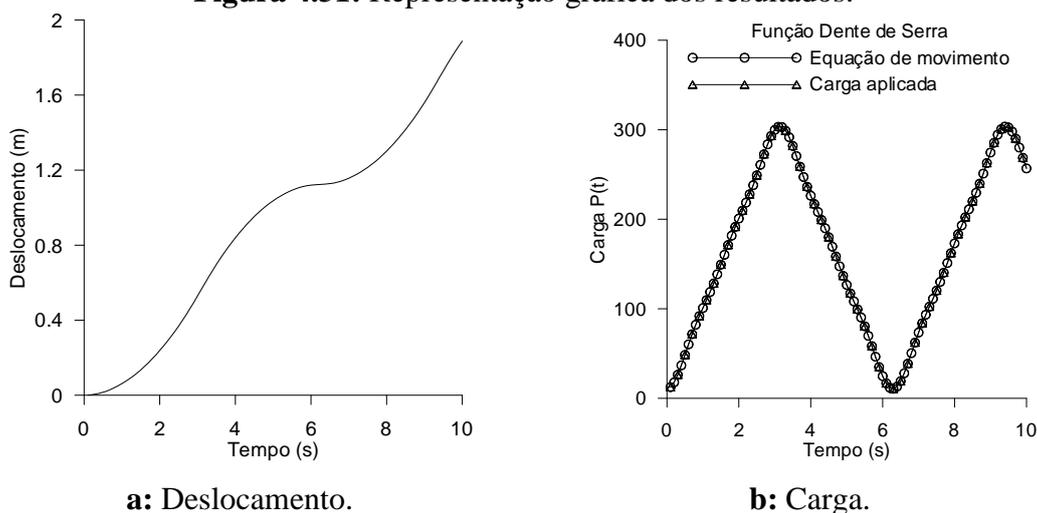
Tabela 4.12: Momentos de inércia para malha com 608 elementos.

	Presente Trabalho (cm ⁴)	AutoCAD (cm ⁴)	Presente Trabalho/AutoCAD
<i>I_x</i>	7,8155 x 10 ⁴	7,8552 x 10 ⁴	0,9950
<i>I_y</i>	2,6894 x 10 ⁴	2.6648 x 10 ⁴	1,0090
<i>J</i>	1,0500 x 10 ⁴	1,052 x 10 ⁴	0,9980

Fonte: autor.

Nesta análise foram usados a área $A = 730,84 \text{ cm}^2$ e o momento de inércia $I = 7,8155 \times 10^4 \text{ cm}^4$. Na Figura 4.16 mostram-se os resultados obtidos nesta aplicação.

Figura 4.31: Representação gráfica dos resultados.



Fonte: autor.

4.5.3 Viga em balanço sujeita à função constante

Neste exemplo considerou-se uma viga de madeira em balanço sujeita a uma carga vertical na extremidade livre igual a:

$$P(t) = 100 f(t) \quad (4.4)$$

Vale ressaltar que a função usada para a definição da carga aplicada é:

$$f(t) = 0 \text{ se } -\pi < t < 0 \quad (4.5a)$$

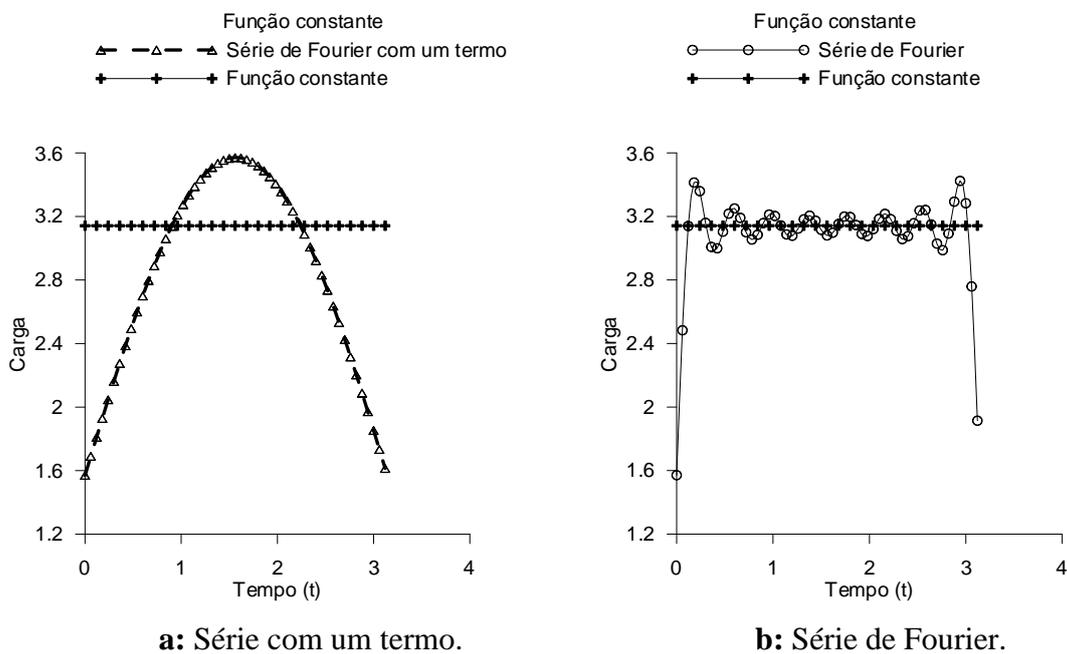
$$f(t) = \pi \text{ se } 0 \leq t < \pi \quad (4.5b)$$

A Equação 4.5 pode ser aproximada através da Série de Fourier da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\text{sen } t + \frac{\text{sen } 3t}{3} + \frac{\text{sen } 5t}{5} + \frac{\text{sen } 7t}{7} + \frac{\text{sen } 9t}{9} + \dots \right) \quad (4.6)$$

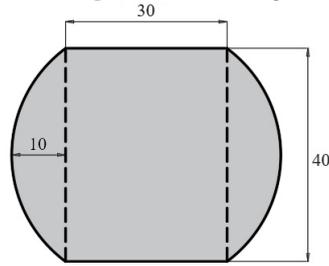
Na Figura 4.17 mostram-se os gráficos obtidos através da série de Fourier e com o auxílio da função constante.

Figura 4.32: Representação gráfica das cargas.

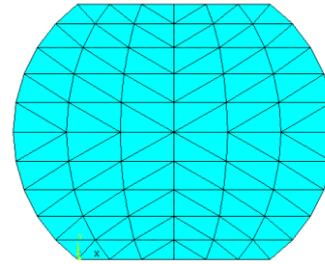


Fonte: autor.

Neste exemplo foi utilizado uma seção genérica que foi discretizada com 120 elementos finitos. Na Figura 4.18 apresenta-se a seção e a malha de elementos finitos adotada para a obtenção das propriedades geométricas.

Figura 4.33: Seção transversal e malha de elementos finitos.

Seção transversal.



Malha com 120 elementos.

Fonte: autor.

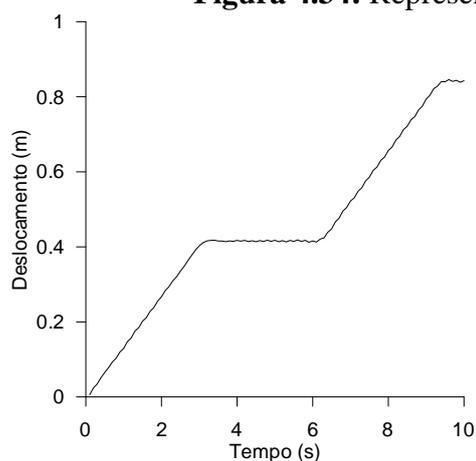
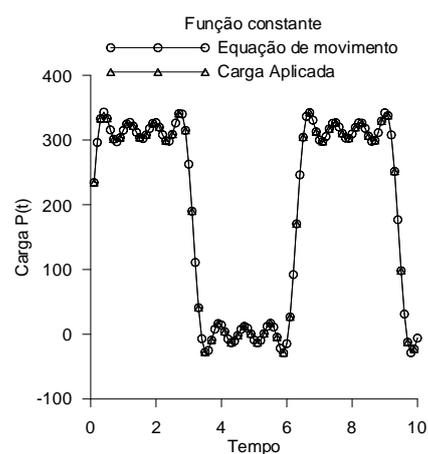
As propriedades foram obtidas via método dos elementos finitos e os resultados foram comparados com o software AutoCAD. Os dados comparativos encontram-se na Tabela 4.13.

Tabela 4.13: Momentos de inércia para malha com 120 elementos.

	Presente Trabalho (cm^4)	AutoCAD (cm^4)	Presente Trabalho/ AutoCAD
I_x	$2,063 \times 10^5$	$2,073 \times 10^5$	0,995
I_y	$2,942 \times 10^5$	$2,973 \times 10^5$	0,989
J	$5,005 \times 10^5$	$5,046 \times 10^5$	0,992

Fonte: autor.

Neste trabalho serão usados a área $A = 1752,48 \text{ cm}^2$ e o momento de inércia $I = 2,063 \times 10^5 \text{ cm}^4$, sendo os resultados gráficos mostrados na Figura 4.19.

Figura 4.34: Representação gráfica dos resultados.**a:** Deslocamento.**b:** Carga.

Fonte: autor.

4.5.4 Viga em balanço sujeita à função linear decrescente

Neste exemplo considerou-se a mesma viga em balanço sujeita à carga vertical:

$$P(t) = 100 f(t) \quad (4.7)$$

A função usada para a definição da carga aplicada é:

$$f(t) = \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \quad \text{se} \quad -\pi \leq t < 0 \quad (4.8a)$$

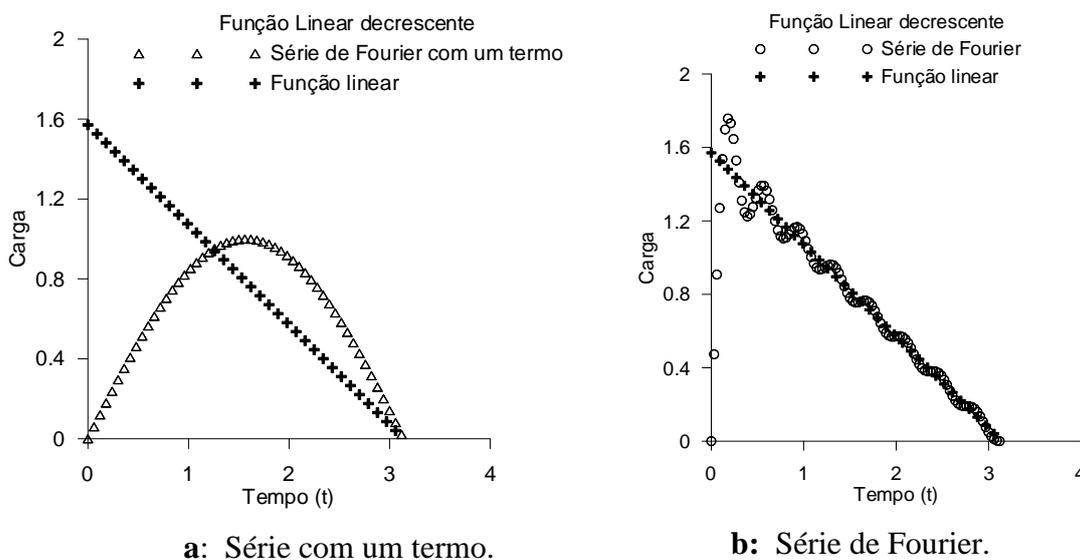
$$f(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (4.8b)$$

De maneira análoga aos exemplos anteriores, a Equação 4.8 pode ser aproximada através da Série de Fourier da seguinte forma:

$$f(t) = (\text{sen } t + \frac{\text{sen } 2t}{2} + \frac{\text{sen } 3t}{3} + \frac{\text{sen } 4t}{4} + \frac{\text{sen } 5t}{5} + \dots) \quad (4.9)$$

Na Figura 4.20 mostram-se os gráficos obtidos através da Série de Fourier e com o auxílio da função linear decrescente.

Figura 4.35: Representação gráfica das cargas.



Fonte: autor.

Neste exemplo, escolheu-se para a realização das análises uma seção genérica que foi discretizada com 486 elementos finitos. Na Figura 4.21 apresenta-se a seção e a malha de elementos finitos adotada para a obtenção das propriedades geométricas.

Figura 4.36: Seção transversal e malha de elementos finitos.



Fonte: autor.

As propriedades foram obtidas via método dos elementos finitos e os resultados foram comparados com o programa AutoCAD. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4.14.

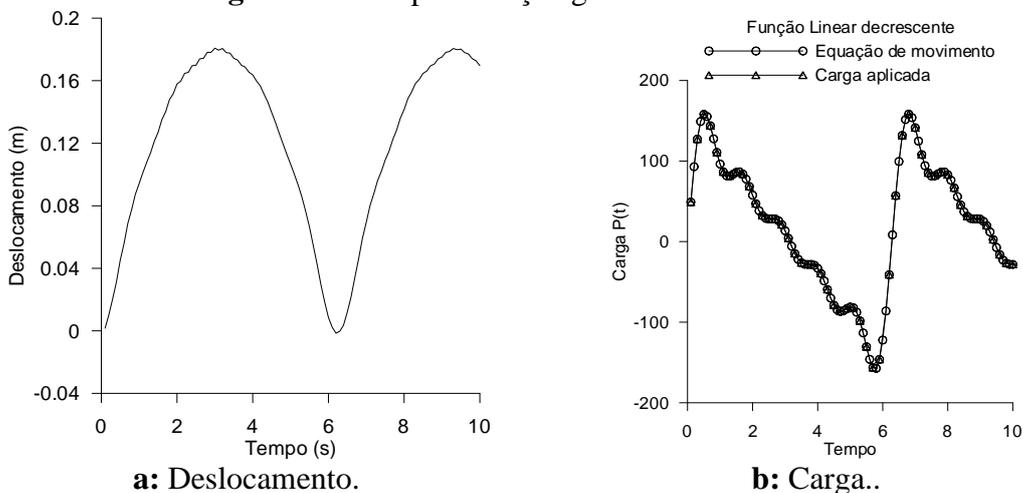
Tabela 4.14: Momentos de inércia para malha com 486 elementos.

	Presente Trabalho (cm ⁴)	AutoCAD (cm ⁴)	Presente Trabalho/Auto CAD
<i>I_x</i>	1,1289 x 10 ⁵	1,1264 x 10 ⁵	1,0020
<i>I_y</i>	1,9560 x 10 ⁴	1,9430 x 10 ⁵	1,0067
<i>J</i>	1,3245 x 10 ⁵	1,3207 x 10 ⁵	1,0028

Fonte: autor.

Os resultados gráficos para deslocamento e carregamento são mostrados na Figura 4.22.

Figura 4.37: Representação gráfica dos resultados.



Fonte: autor.

Nessa aplicação foi usado a área $A = 642,54 \text{ cm}^2$ e o momento de inércia $I = 1,1289 \times 10^5 \text{ cm}^4$.

4.5.5 Viga em balanço sujeita à função linear crescente

Neste exemplo considerou-se a mesma viga em balanço sujeita à carga vertical:

$$P(t) = 100f(t) \quad (4.10)$$

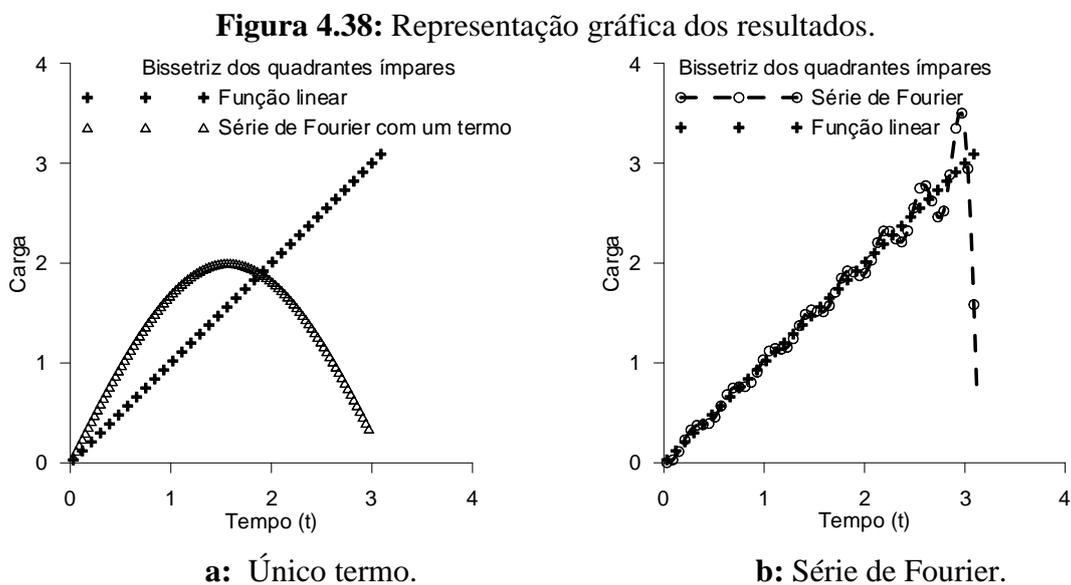
A função usada para a definição da carga aplicada é:

$$f(t) = t \quad \text{se} \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (4.11)$$

A Equação 4.11 pode ser aproximada através da Série de Fourier da seguinte forma:

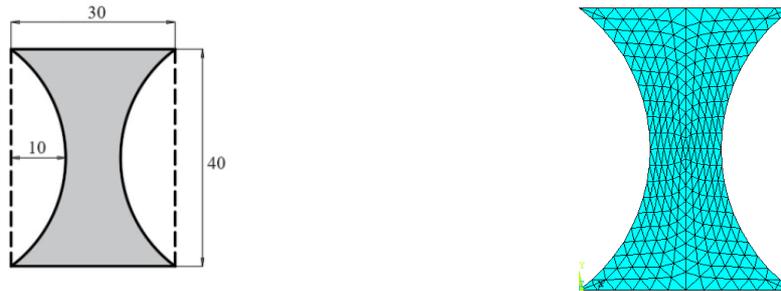
$$f(t) = 2 \left(\text{sen } t - \frac{\text{sen } 2t}{2} + \frac{\text{sen } 3t}{3} - \frac{\text{sen } 4t}{4} + \frac{\text{sen } 5t}{5} + \dots \right) \quad (4.12)$$

Na Figura 4.23 mostram-se os gráficos obtidos através da Série de Fourier e com o auxílio da função linear crescente.



Fonte: autor.

Neste exemplo, escolheu-se para a realização das análises uma seção genérica que foi discretizada com 486 elementos finitos. Na Figura 4.24 apresenta-se a seção e a malha de elementos finitos adotada para a obtenção das propriedades geométricas.

Figura 4.39: Seção transversal e malha de elementos finitos.

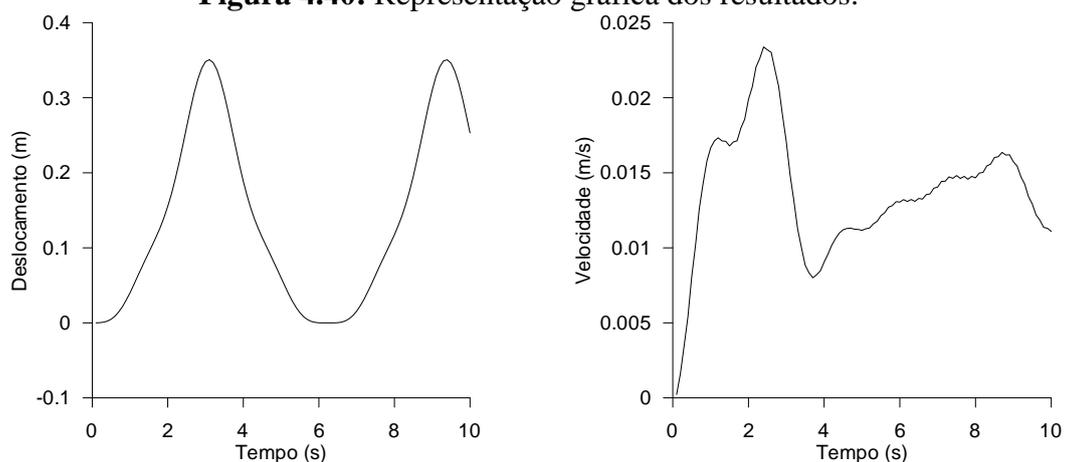
Fonte: autor.

As propriedades foram obtidas via método dos elementos finitos e os resultados foram comparados com o programa AutoCAD. Na Tabela 4.15 apresenta-se a comparação entre os resultados obtidos.

Tabela 4.15: Momentos de inércia para malha com 486 elementos.

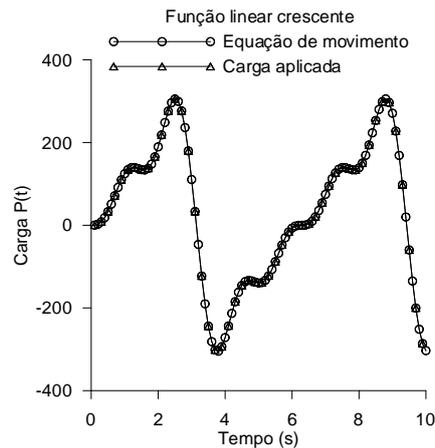
	Presente Trabalho (cm^4)	AutoCAD (cm^4)	Presente Trabalho/ AutoCAD
I_x	$1,1289 \times 10^5$	$1,1264 \times 10^5$	1,0020
I_y	$1,9560 \times 10^4$	$1,9430 \times 10^4$	1,0067
J	$1,3245 \times 10^5$	$1,3207 \times 10^5$	1,0028

Neste exemplo serão usados a área $A = 642,54\text{cm}^2$ e o momento de inércia $I = 1,1289 \times 10^5 \text{ cm}^4$. Na Figura 4.25 mostram-se os gráficos obtidos através da série de Fourier e com o auxílio da função linear crescente.

Figura 4.40: Representação gráfica dos resultados.

a: Deslocamento.

b: Velocidade.



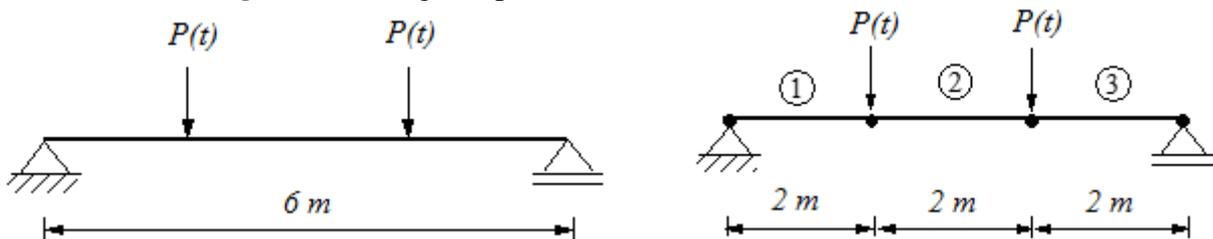
c: Carga.

Fonte: autor.

4.5.6 Viga biapoiada sujeita à função dente de serra

Por fim, neste exemplo apresentam-se os resultados correspondentes à análise dinâmica de uma viga de madeira biapoiada sujeita a duas cargas verticais concentradas aplicadas a um terço e dois terços do comprimento da estrutura. Na Figura 4.26 apresenta-se a estrutura estudada.

Figura 4.41: Viga biapoiada e malha de elementos finitos.



Fonte: autor.

Cada carregamento aplicado é igual a:

$$P(t) = 100 f(t) \quad (4.13)$$

A função que foi usada para a definição da carga aplicada é:

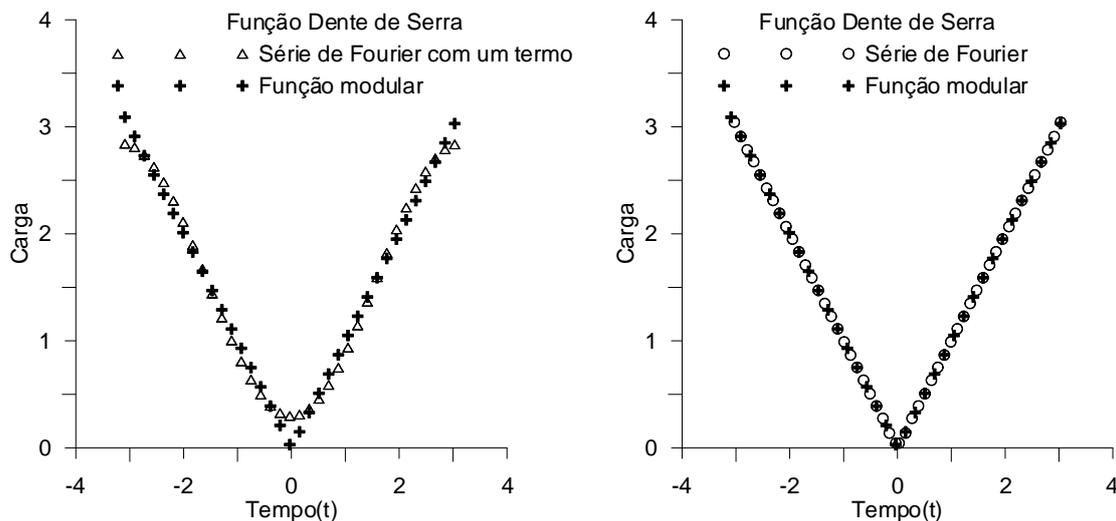
$$f(t) = |t| \text{ se } -\pi < t < \pi \quad (4.14)$$

que pode ser aproximada através da Série de Fourier da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \frac{\cos 7t}{7^2} + \frac{\cos 9t}{9^2} + \dots \right) \tag{4.15}$$

Nas Figuras 4.27 mostram-se os gráficos obtidos através da série de Fourier e com o auxílio da função modular.

Figura 4.42: Representação gráfica dos resultados.



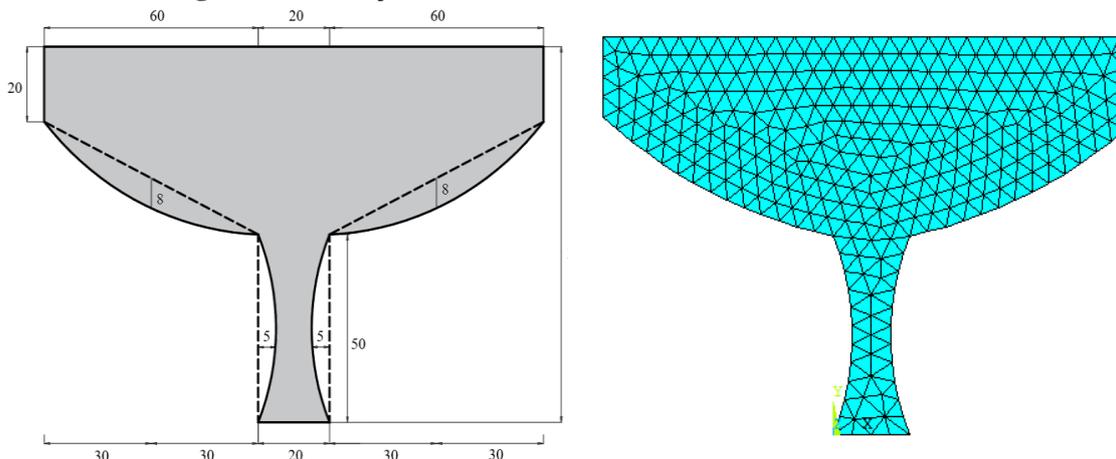
a: Série com um termo.

b: Série de Fourier.

Fonte: autor.

Neste exemplo, escolheu-se para a realização das análises uma seção genérica que foi discretizada com 586 elementos finitos. Na Figura 4.28 apresenta-se a seção e a malha de elementos finitos adotada para a obtenção das propriedades geométricas.

Figura 4.43: Seção transversal e malha de elementos finitos.



Seção transversal

Malha com 586 elementos

Fonte: autor.

Na Tabela 4.16 encontram-se os resultados dos momentos de inércia que foram obtidos via método dos elementos finitos e as respostas foram comparadas com o programa AutoCAD.

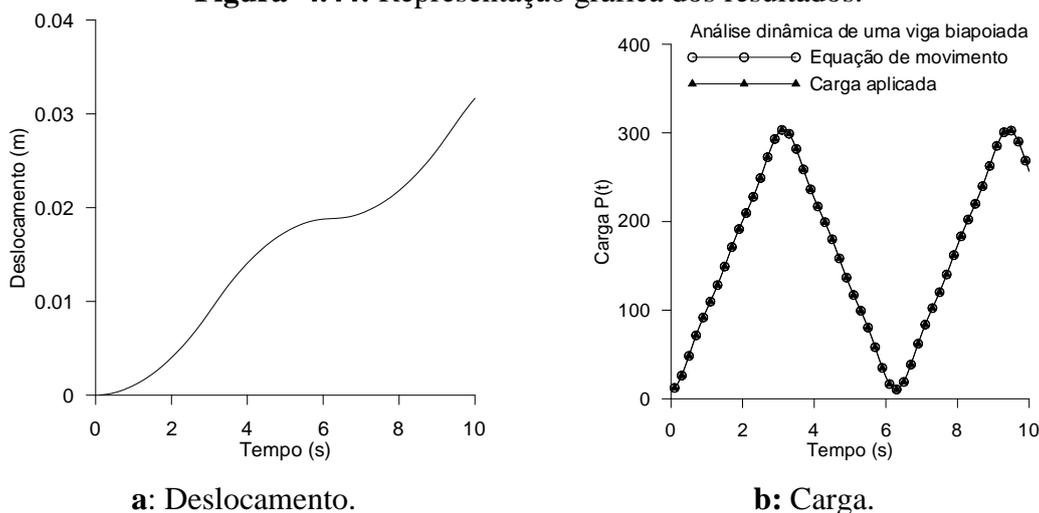
Tabela 4.16: Momentos de inércia para malha com 586 elementos.

	Presente Trabalho (cm ⁴)	AutoCAD (cm ⁴)	Presente Trabalho/AutoCA D
<i>I_x</i>	2,8500 x 10 ⁶	2,8434 x 10 ⁶	1,0020
<i>I_y</i>	7,3248 x 10 ⁶	7,3289 x 10 ⁶	0,9990
<i>J</i>	1,0175 x 10 ⁷	1,0172 x 10 ⁷	1,0003

Fonte: autor.

Neste trabalho serão usados a área $A = 6267,98 \text{ cm}^2$ e o momento de inércia $I = 2,85 \times 10^6 \text{ cm}^4$. Na Figura 4.29 mostram-se os resultados obtidos nesta pesquisa.

Figura 4.44: Representação gráfica dos resultados.

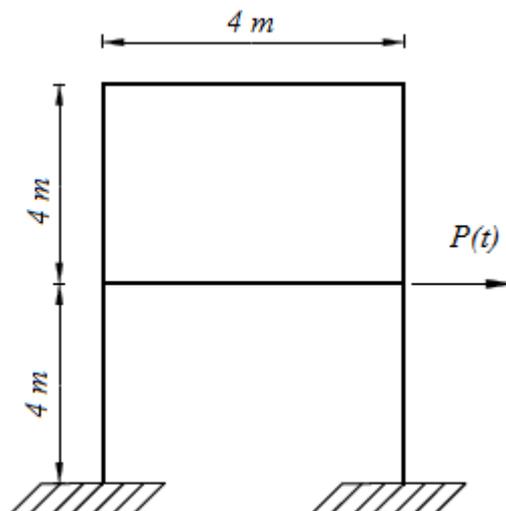


Fonte: autor.

4.6 – Análise dinâmica de um pórtico de madeira com dois pavimentos e pilares com seção constante

Nesta aplicação considerou-se uma pórtico plano de madeira com dois pavimentos e pilares com seção constante (20x20cm) submetido a uma carga horizontal $P(t) = P_0 \text{ sen}(0,5t)$, sendo o carregamento inicial P_0 igual a 20 kN. A seção transversal analisada apresenta área $A = 0,04 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 13333,33 \text{ cm}^4$. Na Figura 4.30 apresenta-se o pórtico utilizado com suas respectivas dimensões.

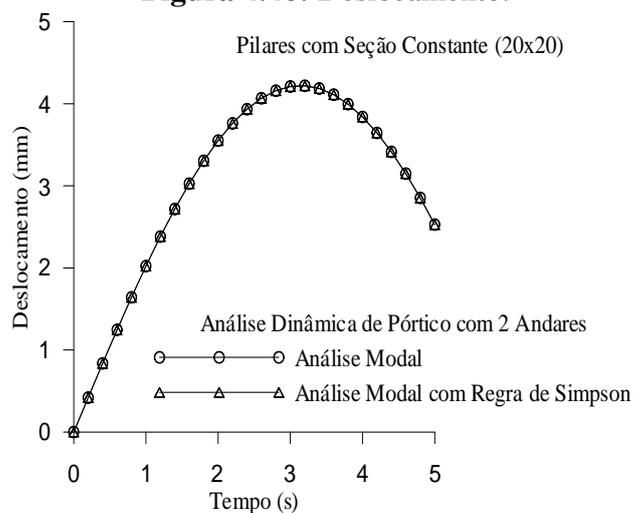
Figura 4.45: Pórtico plano com dois pavimentos.



Fonte: autor.

Na Figura 4.31 apresentam-se os deslocamentos gerados pelo carregamento dinâmico na estrutura durante o tempo de análise.

Figura 4.46: Deslocamento.



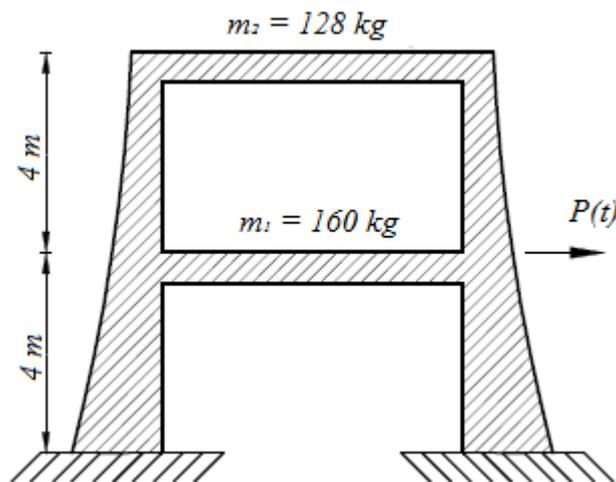
Fonte: autor.

4.7 – Análise dinâmica de um pórtico de madeira com dois pavimentos e pilares variando em mística parabólica

Nesta aplicação considerou-se um pórtico plano de madeira com dois pavimentos e pilares variando em mística parabólica. A estrutura foi submetido a uma carga horizontal

$P(t) = P_0 \text{sen}(0,5t)$ com carregamento inicial P_0 igual a 20 kN . Na Figura 4.32 apresenta-se o pórtico utilizado com suas dimensões.

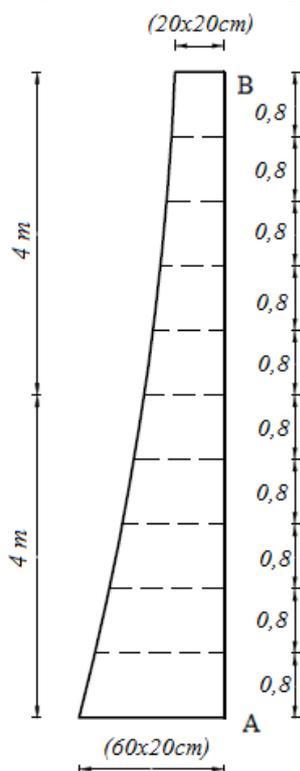
Figura 4.47: Pórtico com pilares variando em mística parabólica.



Fonte: autor.

Na Figura 4.33 mostra-se a variação da seção transversal dos pilares em mística parabólica ao longo do comprimento. Essa variação foi utilizada para cálculo do momento de inércia da seção transversal dos pilares para realizar a discretização da estrutura.

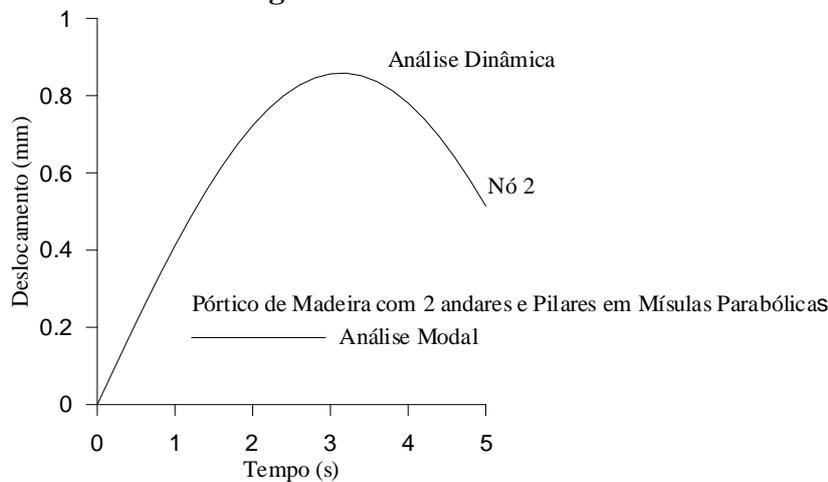
Figura 4.48: Variação da seção transversal dos pilares em mística parabólica.



Fonte: autor.

Na Figura 4.34 é possível verificar os deslocamentos gerados pelo carregamento dinâmico na estrutura durante o tempo de análise.

Figura 5.49: Deslocamento.



Fonte: autor.

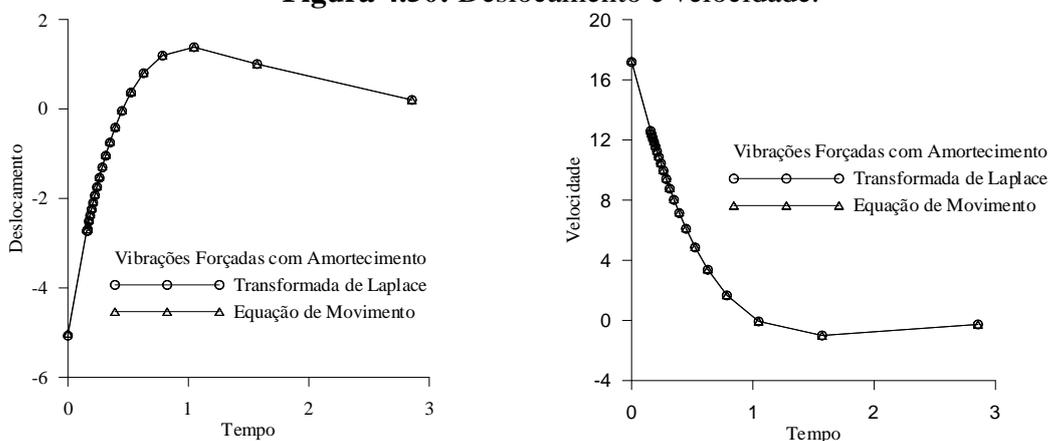
4.8 - Vibrações Mecânicas

Neste exemplo, apresentam-se os resultados referentes à solução de um problema de vibração mecânica. A equação diferencial linear de segunda ordem é definida como

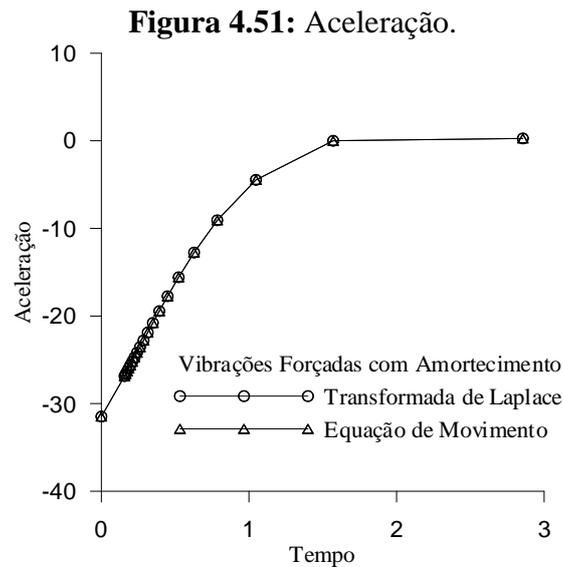
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 4x = \sin t \quad \text{para as seguintes condições, a saber: } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ e } y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Na Figura 4.35 e na Figura 4.36 apresentam-se as respostas correspondentes ao deslocamento, velocidade e à aceleração, obtidos através da Transformada de Laplace e da Equação de Movimento.

Figura 4.50: Deslocamento e velocidade.



Fonte: autor.

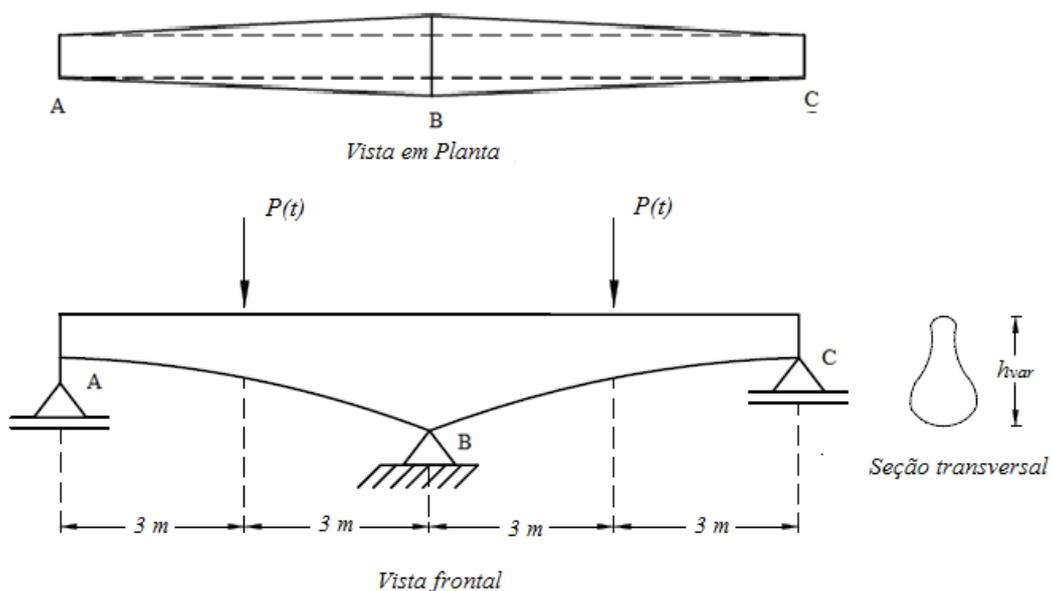


Fonte: autor.

4.9 – Análise dinâmica de uma viga hiperestática com seção genérica de madeira com dois tramos variando em Mísula Parabólica

Nesse caso, analisou-se de forma dinâmica uma viga contínua com seção transversal genérica e com altura variável em mísula parabólica ao longo do seu comprimento, conforme pode ser verificado na Figura 4.37.

Figura 4.52: Viga com seção transversal variável em mísula nos dois tramos.



Utilizando a lei de variação de inércia e dividindo cada tramo em 11 valores de alturas com intervalos de 0,6m, gerou-se 11 seções genéricas, sendo possível calcular o hiperestático com base na Regra de Simpson (somente a flexão). A viga foi submetida a uma carga de oscilação igual a $P(t) = P_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$, sendo a carga inicial $P_0 = 30 \text{ kN}$ e $\bar{\omega} = 0,5$. A Tabela 4.17 apresenta as propriedades das 11 seções genéricas que a viga foi dividida.

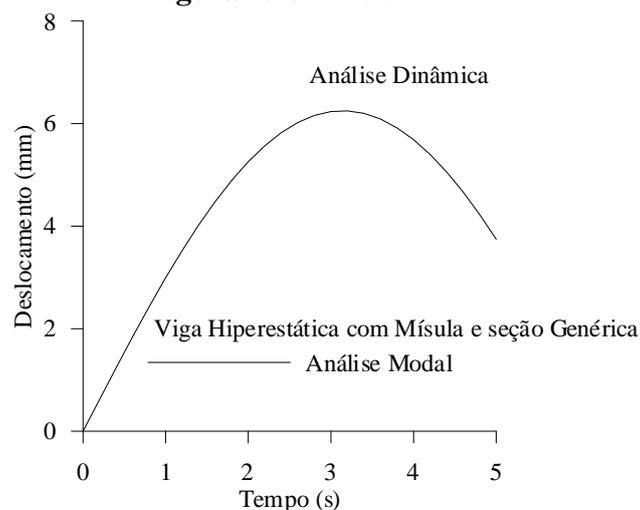
Tabela 4.17: Propriedade das seções genéricas da viga hiperestática.

Seção	Inércia (cm ⁴)	Área (cm ²)
1	75507,68	698,11
2	50650,55	571,76
3	34138,51	469,40
4	23260,33	387,46
5	16144,52	322,80
6	11521,56	272,69
7	8544,80	234,84
8	6661,55	207,35
9	5520,84	188,76
10	4910,86	178,03
11	4719,23	174,52

Fonte: autor.

Com o auxílio do programa computacional desenvolvido, foi possível determinar os deslocamentos da estrutura conforme mostrado na Figura 4.38.

Figura 4.53: Deslocamento.

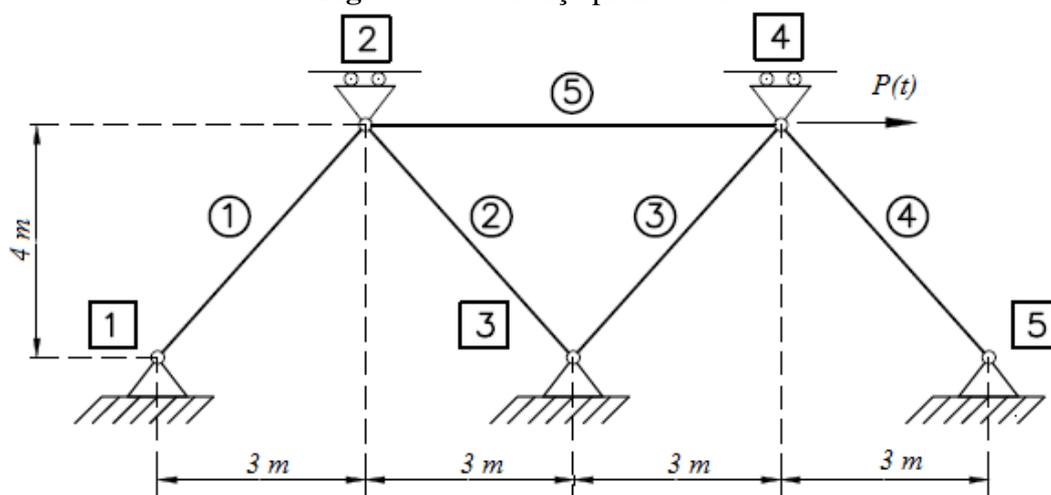


Fonte: autor.

4.10 – Análise dinâmica de uma treliça de aço hiperestática com seção retangular

Nesta aplicação foi determinado as frequências (ω_0) e os modos de vibração livre (ϕ) não amortecido de uma treliça plana de aço conforme mostrado na Figura 4.39. As barras da treliça possuem seção quadrada $50 \times 50 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$ e $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$.

Figura 4.54: Treliça plana analisada.



Fonte: autor.

A Tabela 4.18 mostra os valores das frequências e os modos de vibração obtidos pelo presente trabalho e os resultados encontrados por BRASIL & DA SILVA (2013).

Tabela 4.18: Frequência e modos de vibração da treliça plana.

Modo de Vibração	Presente Trabalho		BRASIL & DA SILVA (2013)	
	ω_0 (rad/s)	ϕ	ω_0 (rad/s)	ϕ
1 ^o	150,79	{1 -1}	150,79	{1 -1}
2 ^o	331,89	{1 -1}	331,89	{1 -1}

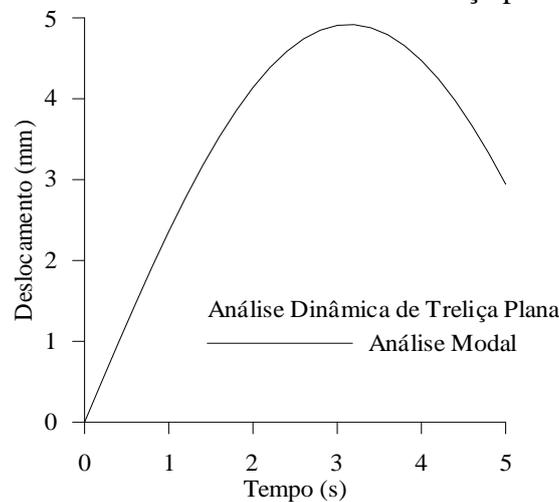
Fonte: autor.

4.11 – Análise dinâmica de uma treliça de madeira hiperestática com seção retangular

Nesta aplicação foi analisada a treliça plana apresentada na Figura 4.39, porém o material utilizado nessa análise foi o aço. A treliça foi submetida a uma carga horizontal $P(t) = P_0 \text{ sen}(0,5t)$ com carregamento inicial P_0 igual a 80 kN .

Na Figura 4.40 é possível verificar de forma gráfica os deslocamentos gerados no nó 4 (ponto de aplicação do carregamento) durante o tempo de análise da estrutura.

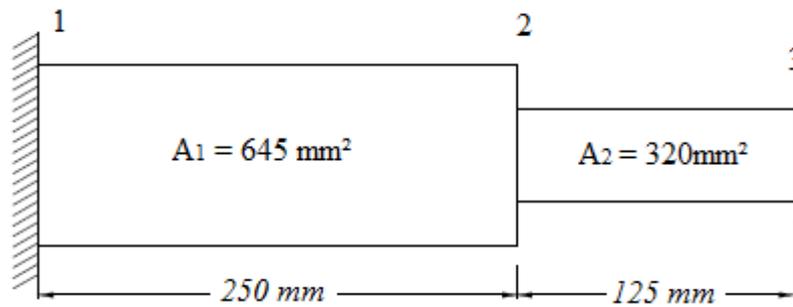
Figura 4.55: Deslocamento no nó 4 da treliça plana em aço.



Fonte: autor.

4.12 – Barra escalonada de aço

Nesta aplicação foi determinado as frequências (ω_0) e os modos de vibração livre (ϕ) não amortecido de uma barra de aço escalonada conforme mostrado na Figura 4.41. As barras escalonadas possuem seção circular $A_1 = 645 \text{ mm}^2$ e $A_2 = 320 \text{ mm}^2$, e o aço utilizado possui $E = 207 \text{ GPa}$ e $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$.

Figura 4.56: Barra circular de aço escalonada.

Fonte: autor.

A Tabela 4.19 mostra os valores das frequências e os modos de vibração obtidos pelo presente trabalho e os resultados encontrados por CHANDRUPLATA & BELENGUDU (2013).

Tabela 4.19: Frequência e modos de vibração da barra escalonada.

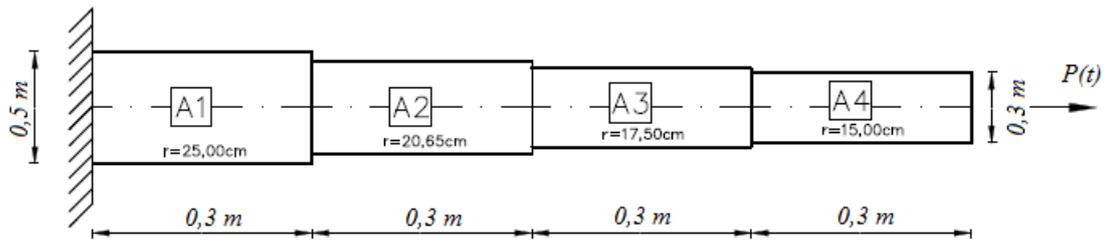
Modo de Vibração	Presente Trabalho		CHANDRUPLATA & BELENGUDU (2013)	
	ω_0 (Hz)	ϕ	ω_0 (Hz)	ϕ
1 ^o	4118,5	{1,108 1,371}	4118,5	{1,108 1,371}
2 ^o	14093	{0,881 -2,864}	14093	{0,881 -2,864}

Fonte: autor.

4.13 – Análise dinâmica de uma barra axial com seção circular

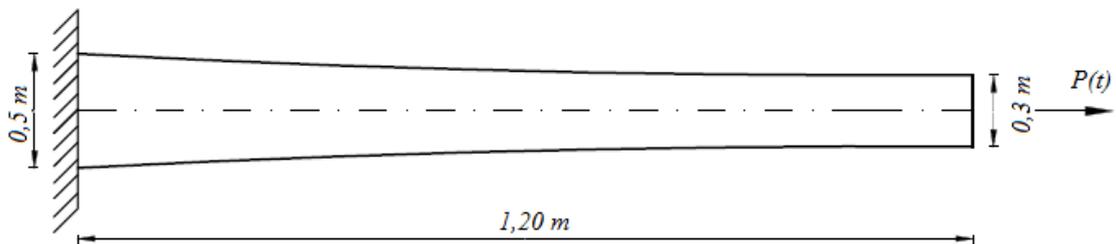
Nesse caso foi analisado dinamicamente uma barra axial com seção circular variando em mística parabólica e com seções escalonadas. A barra apresenta um dos seus apoios engastado e o outro livre, onde foi submetida a um carregamento horizontal $P(t) = P_0 \text{sen}(0,5t)$, com carregamento inicial P_0 igual a 1200 kN. Nas Figura 4.42 e 4.43 pode-se verificar a discretização da barra escalonada e variando em mística parabólica, respectivamente.

Figura 4.57: Barra axial com seção transversal variando de forma escalonada.



Fonte: autor.

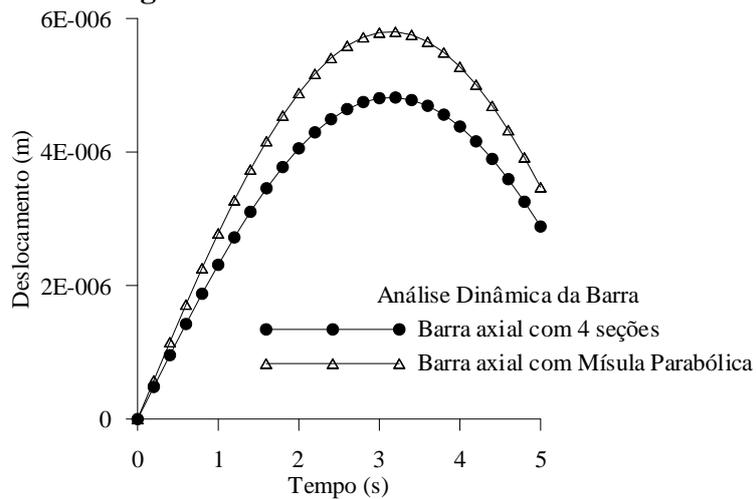
Figura 4.58: Barra axial com seção transversal variando em mísula parabólica.



Fonte: autor.

Na Figura 4.44 é apresentado, de forma gráfica, a comparação dos deslocamentos gerados no bordo livre da barra axial quando a barra possuía seção transversal variando de forma escalonada e em mísula parabólica.

Figura 4.59: Deslocamento da barra axial.



Fonte: autor

Por fim, foi realizada uma comparação tabular para avaliar a precisão dos resultados dos deslocamentos gerados na estrutura com os dois tipos de variação da seção transversal ao longo do tempo de análise. Essa comparação pode ser verificada na Tabela 4.20.

Tabela 4.20: Deslocamentos com seções escalonadas e variando em mística parabólica.

Tempo (s)	Deslocamento nos nós em mística parabólica (m)	Deslocamento nos nós em seção escalonada (m)	Desloc. Mística parabólica/Seção escalonada
1	$2,784 \times 10^{-5}$	$2,445 \times 10^{-5}$	1,1387
2	$4,886 \times 10^{-5}$	$4,293 \times 10^{-5}$	1,1381
3	$5,792 \times 10^{-5}$	$5,089 \times 10^{-5}$	1,1381
4	$5,280 \times 10^{-5}$	$4,639 \times 10^{-5}$	1,1382
5	$3,475 \times 10^{-5}$	$3,053 \times 10^{-5}$	1,1382

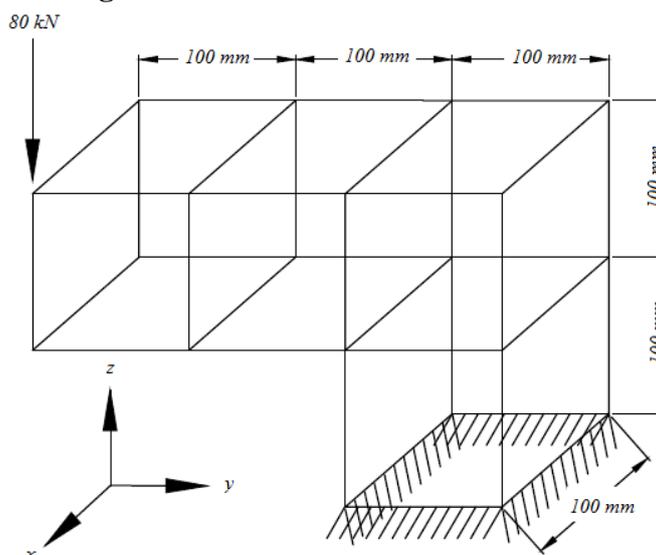
Fonte: autor.

4.14 – Elementos sólidos

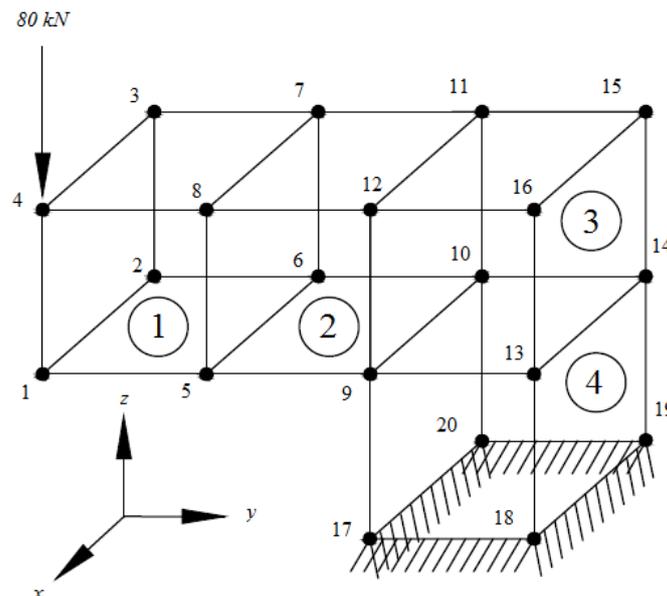
4.14.1 Pórtico em L (H₈)

Nesta aplicação analisou-se um pórtico de aço discretizado com quatro elementos finitos hexaédricos de 8 nós (H₈). A estrutura foi submetida a uma carga pontual $P = 80 \text{ kN}$ no nó 4, sendo $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. A Figura 4.45 apresenta as dimensões da estrutura e na Figura 4.46 é possível visualizar a discretização utilizada.

Figura 4.60: Pórtico em L – dimensões.



Fonte: autor.

Figura 4.61: Pórtico em L – discretização utilizada.

Fonte: autor.

Analisando estaticamente a estrutura em questão, nas Tabelas 4.21, 4.22 e 4.23 é possível comparar os deslocamentos nodais obtidos pelo presente trabalho e os resultados encontrado na literatura por CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014).

Tabela 4.21: Pórtico em L - Deslocamentos nodais em x.

Nó	Presente Trabalho (mm)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014) (mm)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
1	-0,0216	-0,0215	1,0047
2	-0,0253	-0,0253	1,0000
3	0,0574	0,0573	1,0017
4	0,0578	0,0577	1,0017
5	-0,0068	-0,0068	1,0000
6	-0,0108	-0,0107	1,0093
7	0,0491	0,0490	1,0020
8	0,0428	0,04279	1,00023
9	0,0136	0,0136	1,0000
10	-0,0001	-0,0001	1,0000
11	0,0325	0,0325	1,0000
12	0,0279	0,0278	1,0036
13	0,0037	0,0036	1,0278
14	0,0119	0,0118	1,0085
15	0,0266	0,0266	1,0000
16	0,0206	0,0206	1,0000
17	0,0000	0,0000	1,0000
18	0,0000	0,0000	1,0000
19	0,0000	0,0000	1,0000
20	0,0000	0,0000	1,0000

Fonte: autor.

Tabela 4.22: Pórtico em L - Deslocamentos nodais em y.

Nó	Presente Trabalho (mm)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014) (mm)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
<i>1</i>	-0,0038	-0,0037	1,0270
<i>2</i>	-0,0033	-0,0033	1,0000
<i>3</i>	-0,1790	-0,1789	1,0006
<i>4</i>	-0,1845	-0,1844	1,0005
<i>5</i>	-0,0105	-0,0104	1,0096
<i>6</i>	-0,0117	-0,0116	1,0086
<i>7</i>	-0,1725	-0,17249	1,0000
<i>8</i>	-0,1738	-0,1737	1,0006
<i>9</i>	-0,0337	-0,0336	1,0030
<i>10</i>	-0,0326	-0,0325	1,0031
<i>11</i>	-0,1495	-0,1495	1,0000
<i>12</i>	-0,1480	-0,1480	1,0000
<i>13</i>	-0,0383	-0,0383	1,0000
<i>14</i>	-0,0414	-0,0414	1,0000
<i>15</i>	-0,1384	-0,1384	1,0000
<i>16</i>	-0,1349	-0,1349	1,0000
<i>17</i>	0,0000	0,0000	1,0000
<i>18</i>	0,0000	0,0000	1,0000
<i>19</i>	0,0000	0,0000	1,0000
<i>20</i>	0,0000	0,0000	1,0000

Fonte: autor.

Tabela 4.23: Pórtico em L - Deslocamentos nodais em z.

Nó	Presente Trabalho (mm)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014) (mm)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
<i>1</i>	-0,4098	-0,4098	1,0000
<i>2</i>	-0,3323	-0,3322	1,0003
<i>3</i>	-0,3268	-0,3267	1,0003
<i>4</i>	-0,4278	-0,4277	1,0002
<i>5</i>	-0,2231	-0,2230	1,0004
<i>6</i>	-0,1671	-0,1671	1,0000
<i>7</i>	-0,1671	-0,1670	1,0006
<i>8</i>	-0,2174	-0,2173	1,0005
<i>9</i>	-0,0479	-0,0478	1,0021
<i>10</i>	-0,0293	-0,0293	1,0000
<i>11</i>	-0,0374	-0,0373	1,0027
<i>12</i>	-0,0630	-0,0630	1,0000
<i>13</i>	0,0291	0,0290	1,0034
<i>14</i>	0,0397	0,0396	1,0025
<i>15</i>	0,0558	0,0557	1,0018
<i>16</i>	0,0396	0,0395	1,0025
<i>17</i>	0,0000	0,0000	1,0000
<i>18</i>	0,0000	0,0000	1,0000
<i>19</i>	0,0000	0,0000	1,0000
<i>20</i>	0,0000	0,0000	1,0000

Fonte: autor.

Já as Tabelas 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27 mostram os resultados obtidos para as tensões de von Mises em cada elemento comparados com os resultados de CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014).

Tabela 4.24: Elemento 1 – Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm²)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014) (N/mm²)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
σ_1	23,3600	23,3590	1,0000
σ_2	29,9300	29,9290	1,0000
σ_3	40,5800	40,5820	1,0000
σ_4	43,4000	43,3960	1,0001
σ_5	18,5400	18,5450	0,999
σ_6	14,8500	14,8490	1,0001
σ_7	15,9800	15,9840	0,9997
σ_8	17,9100	17,9100	1,0000

Fonte: autor.

Tabela 4.25: Elemento 2 – Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm²)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014) (N/mm²)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
σ_1	31,4200	31,4160	1,0001
σ_2	61,1700	61,1740	0,9999
σ_3	28,2700	28,2720	0,9999
σ_4	51,6100	51,6080	1,0000
σ_5	35,7200	35,7220	0,9999
σ_6	35,9500	35,9480	1,0001
σ_7	26,1900	26,1930	0,9999
σ_8	38,6100	38,6150	0,9999

Fonte: autor.

Tabela 4.26: Elemento 3 – Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014) (N/mm ²)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
σ_1	45,4600	45,4620	1,0000
σ_2	30,8700	30,8720	0,9999
σ_3	32,5300	32,5300	1,0000
σ_4	21,8500	21,8520	0,9999
σ_5	34,4900	34,4860	1,0001
σ_6	26,1500	26,1550	0,9998
σ_7	52,3900	52,3930	0,9999
σ_8	41,0900	41,0900	1,0000

Fonte: autor.

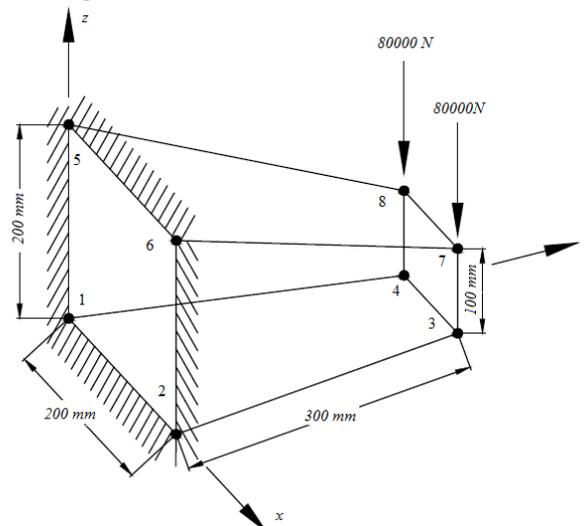
Tabela 4.27: Elemento 4 – Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)	CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (N/mm ²)	Presente Trabalho / CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014)
σ_1	58,5900	58,5900	1,0000
σ_2	51,1500	51,1480	1,0000
σ_3	41,4100	41,4070	1,0001
σ_4	38,9400	38,9360	1,0001
σ_5	48,4800	48,4820	1,0000
σ_6	49,3900	49,3910	1,0000
σ_7	46,4000	46,3980	1,0000
σ_8	38,8500	38,8530	0,9999

Fonte: autor.

4.14.2 Mísula com voute reta (H₈)

Nessa segunda aplicação com os elementos sólidos, analisou-se estaticamente uma mísula de aço com voute reta discretizada com apenas um elemento finito hexaédrico de 8 nós (H₈). A estrutura foi submetida a uma carga pontual $P = 80000\text{ N}$ no nós 7 e 8, sendo $E = 200\text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. Na Figura 4.47 é possível verificar as dimensões da estrutura, pontos de aplicação dos carregamentos, nós engastados, além da numeração utilizada para realizar a discretização da estrutura via Método dos Elementos Finitos.

Figura 4.62: Mísula com voute reta.

Fonte: autor.

A Tabela 4.28 mostra os deslocamentos nodais obtidos pelo presente trabalho nos eixos principais.

Tabela 4.28: Mísula com voute reta - Deslocamentos nodais.

Nó	Deslocamento em x (mm)	Deslocamento em y (mm)	Deslocamento em z (mm)
1	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0026	-0,0070	-0,0436
4	-0,0026	-0,0070	-0,0436
5	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000
7	-0,0007	0,0143	-0,0473
8	0,0007	0,0143	-0,0473

Fonte: autor.

Já as Tabelas 4.29 e 4.30 mostram os resultados obtidos para as tensões elementares e de von Mises, respectivamente.

Tabela 4.29: Mísula com voute reta - Tensões elementares.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)
σ_x	3,0630
σ_y	7,8030
σ_z	2,4050
τ_{yx}	0,0125
τ_{xz}	-9,9690
τ_{xy}	-0,1757

Fonte: autor.

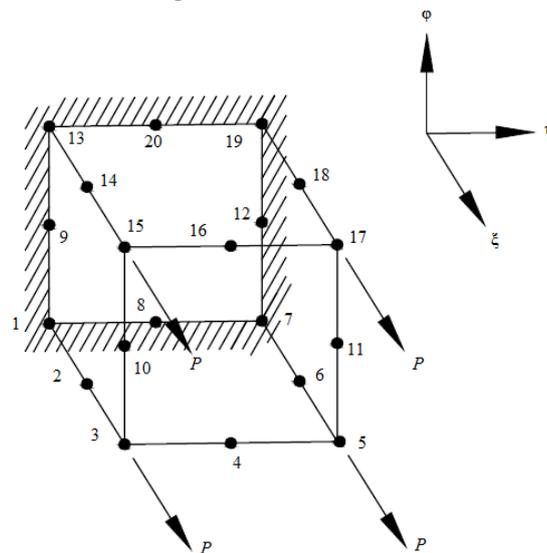
Tabela 4.30: Mísula com voute reta - Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)
σ_1	16,4500
σ_2	18,0100
σ_3	9,7750
σ_4	6,7170
σ_5	9,7750
σ_6	6,7170
σ_7	16,4500
σ_8	18,0100

Fonte: autor.

4.14.3 Cubo (H₂₀)

Nesta aplicação analisou-se um cubo de aço utilizando em sua discretização um elemento finito hexaédrico de 20 nós (H₂₀). A estrutura foi submetida a uma carga pontual horizontal $P = 80 \text{ kN}$ aplicada nos nós dos vértices situados no bordo livre da estrutura, sendo $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. A Figura 4.48 apresenta as dimensões da estrutura e a discretização utilizada.

Figura 4.63: Cubo.

Fonte: autor.

A Tabela 4.31 mostra os deslocamentos nodais obtidos pelo presente trabalho nos eixos principais.

Tabela 4.31: Cubo H₂₀ - Deslocamentos nodais.

Nó	Deslocamento em x (mm)	Deslocamento em y (mm)	Deslocamento em z (mm)
1	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0007	-0,0007	-0,0007
3	0,0038	0,0010	0,0011
4	-0,0010	0,0001	0,0013
5	0,0042	-0,0013	0,0008
6	0,0003	0,0004	-0,0008
7	0,0000	0,0000	0,0000
8	-0,0007	-0,0003	-0,0012
9	-0,0008	-0,0011	-0,0003
10	-0,0008	0,0012	0,0002
11	-0,0001	-0,0019	0,0003
12	-0,0010	0,0006	-0,0003
13	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0005	-0,0009	0,0004
15	0,0042	0,0007	-0,0011
16	-0,0008	0,0004	-0,0012
17	0,0048	-0,0016	-0,0012
18	-0,0001	0,0001	0,0001
19	0,0000	0,0000	0,0000
20	-0,0010	-0,0004	0,0005

Análogo ao exemplo anterior, as Tabelas 4.32 e 4.33 mostram os resultados obtidos para as tensões elementares e de von Mises, respectivamente.

Tabela 4.32: Cubo H₂₀ - Tensões elementares.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)
σ_x	0,3709
σ_y	0,9678
σ_z	1,2890
τ_{yx}	0,6740
τ_{xz}	-0,2144
τ_{xy}	1,9180

Fonte: autor.

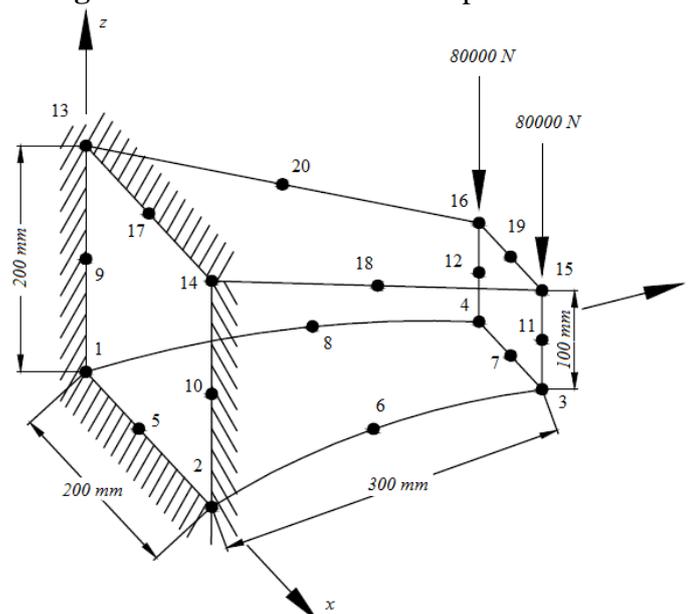
Tabela 4.33: Cubo H₂₀ - Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)
σ_1	3,9440
σ_2	2,4810
σ_3	4,3550
σ_4	2,6690
σ_5	4,3280
σ_6	3,5100
σ_7	4,6530
σ_8	3,6320

Fonte: autor.

5.14.4 Mísula com voute parabólica (H₂₀)

Por fim, foi analisado estaticamente uma mísula de aço com voute parabólica discretizada com apenas um elemento finito hexaédrico de 20 nós (H₂₀). A estrutura foi submetida a uma carga pontual $P = 80000\text{ N}$ nos nós 15 e 16, sendo $E = 200\text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. Na Figura 4.49 é possível verificar as dimensões da estrutura, pontos de aplicação dos carregamentos, nós engastados, além da numeração utilizada dos nós para realizar a discretização da estrutura via Método dos Elementos Finitos.

Figura 4.64: Mísula com voute parabólica.

Fonte: autor.

A Tabela 4.34 mostra os deslocamentos nodais obtidos pelo presente trabalho nos eixos principais.

Tabela 4.34: Mísula com voute parabólica - Deslocamentos nodais.

Nó	Deslocamento em x (mm)	Deslocamento em y (mm)	Deslocamento em z (mm)
1	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0200	0,0055	-0,0101
4	-0,0009	0,0020	0,0004
5	-0,0113	-0,0043	0,0136
6	-0,0037	-0,0019	-0,0016
7	-0,0061	-0,0075	0,0008
8	0,0037	0,0000	0,0054
9	0,0035	0,0023	-0,0083
10	-0,0126	-0,0003	0,0135
11	-0,0037	-0,0022	-0,0068
12	0,0015	-0,0019	0,0020
13	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,0020	-0,0007	-0,0102
16	0,0200	0,0015	-0,0284
17	-0,0092	0,0007	0,0134
18	0,0002	0,0050	-0,0025
19	0,0097	0,0061	-0,0102
20	-0,0143	-0,0034	0,0308

Fonte: autor.

Por fim, as Tabelas 4.35 e 4.36 mostram os resultados obtidos para as tensões elementares e de von Mises, respectivamente.

Tabela 4.35: Cubo H₂₀ - Tensões elementares.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm ²)
σ_x	-11,1200
σ_y	-12,2500
σ_z	-32,2200
τ_{yx}	3,6670
τ_{xz}	-3,7860
τ_{xy}	14,9700

Fonte: autor.

Tabela 4.36: Cubo H₂₀ - Tensões de von Mises.

Tensão	Presente Trabalho (N/mm²)
σ_1	5,8590
σ_2	5,7430
σ_3	14,3600
σ_4	28,2300
σ_5	137,2000
σ_6	15,8300
σ_7	17,5300
σ_8	34,3300

Fonte: autor.

5 Conclusões

5.1 Introdução

No presente trabalho foi realizada a análise dinâmica e estática de estruturas de madeira e aço com seções genéricas e inércias variáveis em mísulas com voutes parabólicas, por meio de implementação computacional via Método dos Elementos Finitos. Neste contexto, objetivou-se determinar os valores de deslocamentos, cargas, acelerações e velocidades considerando que os materiais apresentam comportamento elástico-linear. Desenvolveu-se um programa computacional implementado em linguagem FORTRAN 90/95 (CHAPMAN, 2003) e utilizou-se como ferramenta auxiliar para a obtenção de alguns resultados o Software MAPLE 18.2, e através de ambos foi possível a realização das análises estáticas e dinâmicas, respectivamente. Para validar as implementações computacionais realizadas, os resultados foram comparados com análises via método da superposição modal, método de Newmark e com as respostas encontradas na literatura.

Além das análises realizadas, foram calculados os fatores de forma e os fatores de cargas para diversos tipos de carregamentos aplicados nas estruturas. Por fim, realizou-se a análise estática de estruturas de aço utilizando os elementos finitos sólidos hexaédricos de 8 nós (H_8) e 20 nós (H_{20}). Os resultados encontrados foram comparados com valores encontradas na literatura.

5.2 Conclusões

Em todas as aplicações apresentadas nesse trabalho, observou-se uma ótima convergência entre os resultados obtidos e as respostas utilizadas para comparação. Nas análises realizadas para determinação dos fatores de forma e de carga para os diversos tipos de carregamentos aplicados, verificou-se que a aproximação realizada utilizando a Regra de Simpson proporciona respostas similares aos resultados encontrados nas tabelas de Van Langendonk.

Com relação à análise realizada para o cálculo da flexibilidade de barras via método de Gauss-Legendre com inércia variável em mísula parabólica, verificou-se o que o método

apresenta resultados com cerca de 100% de precisão comparados com resultados obtidos pelo MAPLE 18.2. A variação do número de pontos de Gauss de 11 para 16 não apresentou grandes melhoras no resultado, visto que a análise com menos pontos de Gauss já apresentava bons resultados.

Na análise da viga de madeira em balanço sujeita à carga senoidal, com seção transversal e momento de inércia constante, observou-se de forma gráfica, uma boa aproximação entre os resultados dos deslocamentos obtidos pelo Método de Newmark e a partir do Método da superposição modal. A velocidade, aceleração e carregamento apresentaram comportamento dinâmico conforme o esperado para estruturas sujeitas à carga senoidal.

Para a análise da viga de madeira em balanço submetida à função dente de serra, função constante, função decrescente e função crescente aproximada por série de Fourier, conforme esperado, o carregamento apresentou uma melhor concordância com as funções à medida que se utilizaram mais pontos na expansão. Os valores dos momentos de inércia obtidos pelo presente trabalho apresentaram boa aproximação quando comparados com os encontrados por meio do software AutoCAD. Assim, como no exemplo anterior, o deslocamento e o carregamento apresentaram comportamento dinâmico conforme o esperado para estruturas sujeitas à uma função dente de serra.

Na análise dinâmica da viga de madeira biapoiada sujeita a duas cargas verticais concentradas aplicadas a um terço e dois terços do comprimento da estrutura sujeita à função dente de serra, a série de Fourier com maior número de termos se aproximou melhor dos resultados com a função modular.

Analisando o pórtico de madeira com dois pavimentos e pilares constantes submetido a uma carga senoidal, observou-se uma boa convergência dos deslocamentos do presente trabalho. Logo, verifica-se que a Regra de Simpson apresenta resultados satisfatórios quando utilizados nas análises de estruturas. Na análise do pórtico com os pilares variando em mísula parabólica, o comportamento gráfico dos deslocamentos foi similar ao pórtico com seção constante, porém com valores absolutos menores.

Na aplicação referente à análise de vibrações mecânicas forçadas com amortecimento, nota-se uma boa aproximação entre os resultados via Transformada de Laplace e a Equação do Movimento para deslocamento, velocidade e aceleração. Comprovando dessa forma a eficiência da Transformada de Laplace para solução de problemas dinâmicos.

Para as estruturas hiperestáticas analisadas (viga com seção genérica de madeira com dois tramos variando em Mísula Parabólica e treliça de aço e madeira com seção retangular) o comportamento dos deslocamentos utilizando a análise modal foi semelhante às aplicações anteriores.

Para a análise dinâmica da barra axial com seção circular, houve uma variação de cerca de 13% do resultado obtido escalonando a seção transversal em quatro seções constantes em comparação com os resultados obtidos variando a seção transversal em mísula parabólica. Para que os resultados tenham uma maior convergência é necessário refinar a peça com um maior número de barras com seções constantes.

Com relação às análises estáticas em estruturas de aço tridimensionais, verificou-se por meio do Pórtico em L discretizado com elementos hexaédricos de 8 nós (H_8), que a implementação foi bem-sucedida. Visto que os resultados para os deslocamentos e as tensões apresentam boa convergência com as respostas encontradas por CHANDRUPLATA & BELEGUNDU (2014). Desta forma, validando as modelagens realizadas com os elementos hexaédricos de 8 nós (H_8).

5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Vários trabalhos podem ser elaborados a partir da base computacional desenvolvida nesta tese. Com o objetivo de dar continuidade ao tema proposto, são sugeridas as seguintes pesquisas:

- Realizar a discretização das seções transversais utilizando elementos finitos quadrilaterais de 4 nós (Q_4), quadrilaterais de 8 nós (Q_8) e quadrilaterais de 9 nós (Q_9), com o propósito de melhorar a aproximação das propriedades geométricas das seções e conseqüentemente a aumentar a convergência dos resultados numéricos;
- Inserir no código computacional as aproximações dos carregamentos de excitação obtidos a partir da Série de Fourier;
- Realização da análise dinâmica não linear dos elementos estruturais estudados;
- Realização da análise estática e dinâmica de elementos de madeira (com características ortotrópicas) utilizando os elementos finitos tridimensionais. É

importante ressaltar que as análises estáticas realizadas até o momento são bastantes satisfatórias para modelagens de estruturas de aço (com características isotrópicas);

- Realizar a comparação dos resultados obtidos nessa pesquisa com as modelagens através do Software ANSYS 18.2;
- Introduzir no código computacional referente ao elemento finito tridimensional de oito nós (H_8) a possibilidade do uso de três pontos de Gauss, uma vez que foram realizadas aproximações com apenas dois pontos de Gauss;
- Introduzir no código computacional referente ao elemento finito tridimensional de vinte nós (H_{20}) a possibilidade do uso de cinco pontos de Gauss, uma vez que foram realizadas aproximações com apenas dois pontos de Gauss;
- Com a realização dessas intervenções no código computacional referente à modelagem de elementos sólidos, será possível uma melhor aproximação em as respostas encontradas no presente trabalho e os modelos realizados com o auxílio do Software ANSYS.

6 Referências Bibliográficas

ABDEL-RAHMAN, E. M., NAYFEH, A. H., & MASOUD, Z. N., 2003. *Dynamics and control of cranes: A review. Journal of Vibration and Control*, 9(7):863_908.

ADOLFS, D. A., 2011. *Análise de confiabilidade de peças de madeira fletidas dimensionadas segundo a NBR 7190/97*. 92p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

AMANCIO, D. T., 2016. *Avaliação da integridade estrutural de elementos de concreto armado a partir das propriedades modais obtidas por técnicas de excitações aleatórias e transientes*. 163 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ANDRADE, V.S., 2009. *Análise Dinâmica de uma Viga Engastada Excitada por uma Fonte Não Ideal. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.

ANSYS, 2012. *Inc. theory reference* , version 18.2.

ARAÚJO, F. A., 2003. *Contribuição ao emprego da Mecânica do Dano para a análise do comportamento dinâmico não-linear de vigas em concreto armado*. Dissertação (Mestrado) –Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.

ASSUNÇÃO, T. R. M. C., 2009. *Considerações sobre Efeitos Dinâmicos e Carregamentos Induzidos por Fontes de Excitação em Estruturas Industriais*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

BATELO, E. A. P., 2014. *Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto, MG.

BATELO, E. A. P., 2018. *Análise dinâmica avançada de estruturas de aço com ligações semirrígidas e interação com solo*. Tese de doutorado. Universidade Federal de Ouro Preto, Departamento de Engenharia Civil – PROPEC. Ouro Preto, MG.

BHUSHAN, B., 2004. *Springer Handbook of Nanotechnology*. Springer.

BOTTURA, H. M., 1997. *Uma família de algoritmos hermitianos para a integração direta das equações de dinâmica das estruturas I*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo.

BRASIL, R. M. L.R. & DA SILVA, M. A., 2013. *Introdução à Dinâmica das Estruturas para a Engenharia Civil*. Editora Blucher.

CHANDRUPATLA, T. R. & BELEGUNDU, A. D., 2014. *Elementos Finitos*, 4ª edição, Editora: Pearson Universidades. 536 páginas, ISBN-10: 8543005930.

CHEN, Y.H. & HUANG, Y.H., 2004. “*Timoshenko beam with tuned mass dampers and its design curves.*” In: *Journal of Sound and Vibration*, 278, 873-888.

CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. 1995. *Dynamics of Structures*. Third Edition. University Avenue Berkeley, California 94704 . USA.: Computers and Structures, Inc.

CRAIG JR., R. R., 2006. *Fundamentals of Structural Dynamics*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

DEN HARTOG, P. J., 1956. “*Mechanical vibrations*”, 4th Edition. McGraw-Hill, New York, United States.

ELIAS, G.T. & AVILA, S.M., 2006. “*Metodologia para definição do melhor número e posição para dispositivos de controle estrutural.*” In: XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Belém, Brasil.

FORTRAN 90/95, 2003. CHAPMAN, S. J. *For Scientists and Engineers*. McGraw – Hill, 2nd ed.

FTOOL, 2018. *Two Dimensional Frame Analysis Tool*. Versão 4.00.04 – Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro – PUC-Rio de Janeiro, RJ.

GALVÃO, A. S., 2004. *Static and dynamic instability of plane frames with semi-rigid connections*. 245p. D.Sc. Thesis – Departamento de Engenharia Civil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.

HOUSNER, G.W. et al, 1997. “*Structural Control: Past, Present and future.*” In: Journal of Engineering mechanics, 123(9), 897-971.

JUNKINS & KIM 1993. *Introduction to dynamics and control of exible structures*. AIAA.

KZAM, A. K. L., 2016. *Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio*. 236 f. Tese de Doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LARA V., L. A., 2007. *Controle de Vibrações em Vigas Metálicas com Distintas Configurações de Apoio Utilizando Amortecedores de Massa Sintonizados*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - 008 A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 156 p.

LEE, C.L.; CHEN, Y.T.; CHUNG, L.L & WANG, Y.P., 2006. “*Optimal design theories and applications of tuned mass dampers.*” In: Engineering structures, 28, 43-53.

MAPLE 18.2, 2018. *Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc.*

MEIROVITCH, L., 1970. *Methods of analytical dynamics*. Courier Corporation.

MENDES, T. M. P., 2017. *Análise não linear física e geométrica de sistemas apertados com elementos de rigidez variável em concreto armado*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto, MG.

MORITA, S., 2009. *Noncontact Atomic Force Microscopy 2*. Springer-Verlag GmbH.

NÓBREGA, P.G.B., 2004. *Análise dinâmica de estruturas de concreto: estudo experimental e numérico das condições de contorno de estruturas pré-moldadas*. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, São Paulo.

PAULA, C.F., 2001. *Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas*. São Carlos. 128p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, São Paulo.

PEREIRA, R. A. T., 2015. *Análise de estruturas reticuladas espaciais com barras de seções variáveis*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil - PROPEC. Ouro Preto, MG.

PILLON, F., 2021. *Análise dinâmica transiente em pórticos planos com elementos não prismáticos de seção qualquer, descritos segundo a formulação de timoshenko*. Dissertação de Mestrado Acadêmico - Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto, MG.

POLLILO, A., 1977. *Exercícios de Hiperestática*. 4ª ed. Rio de Janeiro, Brasil.

RIBEIRO, I. S., 2016. *Análise não linear geométrica de sistemas apertados planos com elementos de rigidez variável: aplicações em estruturas de aço e de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto, MG.

ROSAS, L. R. B., 2016. *Análise dinâmica de sistemas estruturais reticulados com restrições de contato*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto, MG.

SILVA, A. R. D., 2009. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ouro Preto, MG.

SÜSSEKIND, J. C., 1980. *Curso de Análise Estrutural – Vol. 3: Método das Deformações e Processo de Cross*, 4ª ed., Editora Globo.

VILELA, P.C.S., 2008. *Soluções fundamentais para barras em mísula pela analogia da viga conjugada*. Artigo apresentado no XXIX CILAMCE, Maceió, Brasil.

WARBURTON, G.B. & AYONRIDE, E.O., 1980. “*Optimum absorber parameter for simple system.*” In: *Earthquake engineering and structural dynamics*, 8, 197-217.

WU, J. J., 2003. “*Use of effective stiffness matrix for the free vibration analyses of a nonuniform cantilever beam carrying multiple two degree-of-freedom spring-damper-mass systems.*” In: *Computers & structures*, 81, 2319-2330.

