REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 14, número 35 – 2021 DOI: 10.46312/pem.v14i35.13258

Formação matemática na licenciatura e demandas da prática docente escolar: o caso da Álgebra

Prospective Teacher Education and school teaching practice: the case of Algebra

Juliano Pereira da Silva[1]

Plinio Cavalcanti Moreira[2]

RESUMO

Relatamos parte de uma pesquisa em que se discute a formação matemática no curso de Licenciatura em Matemática. O foco é a relação entre os conhecimentos veiculados no processo de formação e as demandas de conhecimento da prática docente na Educação Básica. Desenvolvemos uma análise comparativa dos conhecimentos algébricos recomendados pelo currículo de formação de uma universidade federal em Minas Gerais e os conhecimentos algébricos demandados pela prática docente escolar. Os resultados apontam um forte distanciamento entre os saberes da formação e as demandas de conhecimento da prática, indicando que a formação prioriza a construção de um ponto de vista acadêmico da álgebra escolar, enquanto os conhecimentos algébricos demandados pela prática são específicos e situados: temporalmente (diferentes idades dos estudantes; diferentes estágios de desenvolvimento do pensamento algébrico etc.) e contextualmente (o contexto é a educação geral e básica, não o ensino de matemática para formar especialistas na disciplina).

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Educação Algébrica Escolar. Demandas da Prática. Formação Matemática na Licenciatura. Currículo.

ABSTRACT

We report research on Prospective Mathematics Teacher Education, focusing on how well the kind of algebra knowledge presented in a Teacher Education Program fits the corresponding knowledge required in school teaching practice. We compared the subject-matter knowledge recommended by a prescribed curriculum of a Mathematics Teacher Education Program in Brazil with the algebra knowledge usually required in school teaching practice. Results pointed to a significant gap between the demands of school teaching practice and knowledge prescribed by the examined curriculum. Data analysis indicates a prioritization of strictly academic mathematics by the Teacher Education Program,

[1] Docente do Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). E-mail: juliano.coltec@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4405-0152.

[2] Professor Associado do Departamento de Educação Matemática Universidade Federal de Ouro Preto DEEMA/ UFOP. E-mail: pliniocavalcantim@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9576-2769.

while school teaching practice demands a more temporally and contextually situated algebra knowledge.

KEYWORDS: Mathematics Education. School Algebra Education. School Teaching Practice. Prospective Teacher Education. Curriculum.

Introdução

Ser estrela é bem fácil,
sair do Estácio é que é o x do problema!
(Noel Rosa)

O trabalho com a educação algébrica escolar vem sendo objeto de atenção da comunidade nacional e internacional no campo da Educação Matemática há décadas e diferentes aspectos envolvidos no trabalho com a álgebra escolar têm sido identificados. Por exemplo, se temos uma situação-problema cuja tradução para a linguagem matemática conduz a uma equação algébrica a ser resolvida, a letra x na equação simboliza uma incógnita, ou seja, um valor fixo, porém desconhecido, a ser determinado. E a resolução faz uso de conhecimentos algébricos cujos fundamentos se associam ao aspecto estrutural dado pelas operações realizáveis no conjunto em que a equação deve ser resolvida (no caso da escola básica brasileira, quase sempre o conjunto dos números reais). Quando, por outro lado, referimo-nos à fórmula da área de um círculo de raio r, dada por $A(r) = \pi r^2$ as letras A e r desempenham o papel de variáveis, que se vinculam através de uma relação funcional. O aspecto associado ao trabalho com a álgebra pode se referir ao estudo das funções e, eventualmente, à resolução de equações ou inequações. Em outros casos, o aspecto em destaque se referirá ao desenvolvimento do pensamento algébrico, em associação com questões que envolvem a linguagem, a percepção de regularidades, padrões e simetrias em sequências e arranjos numéricos e/ou geométricos, por exemplo. Há ainda questões que se referem à generalização das operações aritméticas com os naturais a outros campos numéricos (inteiros, racionais, reais) e não numéricos (matrizes, polinômios, frações algébricas etc.). Em todos os aspectos envolvendo o trabalho com a álgebra na escola, a habilidade na resolução de problemas utilizando o raciocínio analítico (em suma, trabalhando com valores desconhecidos como se fossem conhecidos) está presente, ainda que em diferentes níveis e buscando alcançar objetivos educacionais ora imediatos, ora de médio/longo prazo. Assim, fica claro que a educação algébrica escolar é um trabalho complexo e sofisticado, do ponto de vista da docência (e da formação para a docência), envolvendo, por um lado, muito mais do que ensinar regras para “operar com letras” e, por outro, muito mais do que conhecer a chamada álgebra elementar a partir de uma perspectiva universitária.

No Brasil, a álgebra escolar percorre os documentos orientadores dos currículos básicos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, possuindo lugar de destaque no espaço de conhecimentos recomendados para esses dois níveis da Educação Básica (p. ex., PCN, 1998; PCNEM, 2000; BNCC, 2017). Pelo menos duas características fundamentais da álgebra são consensualmente reconhecidas como parte importante da formação escolar: a) ela simultaneamente promove e demanda o desenvolvimento da habilidade de lidar com quantidades genéricas e indeterminadas, como se fossem conhecidas (raciocínio analítico); b) é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas, tanto nas diversas áreas da própria matemática como também em outras disciplinas escolares.

Assim, dada a importância da álgebra na educação matemática básica, há um crescente número de pesquisas que procuram jogar luz sobre aspectos relativos ao seu ensino e aprendizado escolar, bem como sobre a formação profissional para o trabalho docente com o tema. Entraremos nos detalhes de alguns desses estudos na seção 3.2, mais adiante. Abaixo, apresentamos algumas ideias gerais sobre a formação profissional para o trabalho docente em matemática na escola, as quais compõem uma espécie de pano de fundo teórico que nos orientou no planejamento e desenvolvimento desta pesquisa.

Como se sabe, o ato de ensinar matemática nos diferentes estágios do processo de escolarização básica coloca o professor diante de situações que demandam saberes profissionais diversificados e multidimensionais (SHULMAN, 1987; BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BEDNARZ; PROULX, 2009). O docente passa por uma formação universitária inicial que o prepara (ou deveria preparar) para se situar no ambiente escolar em termos de gestão da classe, de planejamento das aulas, de avaliação do processo de ensino e de aprendizagem, de conhecimento das normas de funcionamento da escola, seus espaços e tempos etc. Cada um desses aspectos da atividade docente demanda conhecimentos específicos, ainda que, por vezes, imbricados (GAUTHIER; MARTINEAU; DESBIENS; MALO; SIMARD,1998). No que concerne o conhecimento matemático para o ensino escolar, há uma série de estudos que vêm contribuindo para ampliar a visão tradicional que o concebe como contido nos limites estreitos da disciplina (MOREIRA; DAVID, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BEDNARZ; PROULX, 2009, entre outros). Tais estudos alargam o horizonte puramente disciplinar do conhecimento matemático requerido na docência escolar, de modo a amalgamá-lo com saberes que se encontram na interface com a didática da matemática, com teorias de aprendizagem matemática, com saberes sobre o currículo escolar global da matemática etc. Assim, sobretudo ao longo das últimas duas décadas, toma corpo a ideia de que existe um tipo de conhecimento matemático específico para o ofício de ensinar na escola básica e que, em princípio, deveria estar fortemente presente na formação matemática do professor nos cursos de Licenciatura (ver, por exemplo, Moreira; Ferreira, nesta edição).

No que diz respeito particularmente à álgebra, estudos indicam pontos cruciais a serem trabalhados na formação do professor, devido às especificidades que envolvem o ensino e a aprendizagem escolar do tema. Como um exemplo importante, destaca-se a questão do desenvolvimento do pensamento algébrico, um processo longo e complexo, envolvendo formas de raciocínio e de domínio de linguagem que vão se aprofundando em diferentes etapas e níveis, no decorrer de todo o Ensino Básico (RADFORD, 2009). Outros trabalhos de pesquisa se referem ao estudo das dificuldades e erros cometidos pelos alunos em tarefas de natureza algébrica (p.ex., KUCHEMANN, 1981; BOOTH, 1994; EGODAWATTE, 2011). A ideia de que a aprendizagem da álgebra nos anos finais da escolarização básica se apoia num domínio eventual das sutilezas sintático-semânticas da linguagem algébrica padrão também sugere um trabalho específico sobre essa temática na formação do professor.

Outro ponto importante é a relação do ensino da álgebra escolar com a resolução de problemas. Embora seja grande e diversificada, respectivamente, o número e a natureza das dificuldades dos alunos da escola na resolução de problemas (uma das maiores refere-se à interpretação dos enunciados e à transposição deles para a linguagem operacional da matemática escolar - GRANELL, 1997; OLIVEIRA, 2018), a resolução de problemas pode estabelecer uma relação de duas vias com a aprendizagem algébrica. Uma dessas vias seria a utilização do domínio do conhecimento algébrico e da fluência nos procedimentos (já estabelecidos) para avançar nas habilidades associadas à resolução de problemas. A outra seria no sentido contrário: utilizar a própria resolução e elaboração de problemas como forma de desenvolver o raciocínio analítico, observar os conceitos e os procedimentos algébricos “em situação”, promovendo a necessária fluência nos procedimentos e a percepção mais clara do sentido dos conceitos.

Evidencia-se, assim, mais uma vez, a extensão e a complexidade do trabalho com a álgebra na escola básica. Isso sugere outro elemento crucial nessa equação que relaciona a aprendizagem e o ensino escolar da álgebra: o tipo de formação que o professor vivencia nos cursos de Licenciatura.

Vários estudos sobre formação de professores de matemática nos dão evidências de que a atividade de ensino escolar da matemática demanda conhecimentos específicos, muitas vezes distintos daqueles tradicionalmente trabalhados nas disciplinas universitárias do currículo da Licenciatura. Fiorentini e Castro (2003), por exemplo, referem-se à experiência de Estágio Supervisionado do licenciando Allan como uma vivência concreta que o levou à seguinte conclusão: conhecer matemática para se dar bem no curso de Licenciatura é diferente de conhecer matemática para exercer bem a profissão docente na escola. Outros trabalhos reforçam a conclusão de Allan e ajudam a compreender mais profundamente a diferença por ele afirmada (p. ex., MOREIRA; DAVID, 2005).

Ball e seus colegas pesquisadores da University of Michigan introduzem na literatura o conceito de Conhecimento Matemático para o Ensino (em inglês, *Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT). Ball, Thames e Phelps (2008) descrevem o MKT a partir tanto de estudos diretos da prática docente escolar, como de referências da literatura de pesquisa sobre os conhecimentos matemáticos demandados nessa prática. Os autores identificam quatro domínios de conhecimento como os principais constituintes do MKT: o conhecimento comum do conteúdo (CCK - *Common Content Knowledge*), o conhecimento especializado do conteúdo (SCK - *Specialized Content Knowledge*), o conhecimento do conteúdo e do aluno (KCS - *Knowledge of Content and Students*), o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT - *Knowledge of Content and Teaching*). O primeiro (CCK) seria basicamente aquilo que o professor de matemática ensina aos alunos, de acordo com o currículo escolar (operações com frações, equações e inequações de primeiro e segundo graus, teorema de Tales etc.). O segundo (SCK) se refere aos saberes matemáticos que o professor tem que conhecer para ensinar, mas que não ensina diretamente ao aluno. Por exemplo, conhecimentos que permitam ao professor compreender a natureza e a dimensão do erro cometido por um aluno numa tarefa de sala de aula, mas que não precisa necessariamente ensinar a seus alunos. O terceiro domínio do MKT, o KCS, engloba o conhecimento do professor a respeito das relações dos alunos com a aprendizagem matemática. Inclui, por exemplo, o professor saber antecipar que um determinado problema matemático pode ser motivador para os alunos e/ou que estes terão maior ou menor dificuldade ao realizar uma determinada tarefa matemática etc. Por fim, o quarto domínio (KCT) refere-se, por exemplo, aos conhecimentos do professor a respeito de uma determinada sequência didática ser ou não adequada (e os porquês, em cada caso) para o trabalho com um conceito ou tópico matemático particular. Em suma, a ideia de constituição do MKT seria uma espécie de amálgama dos componentes do saber docente citados acima, formando, então, um corpo de conhecimentos específico para o trabalho profissional de ensinar matemática na escola, em seus diferentes níveis de ensino (para maiores detalhes ver Moreira; Ferreira, nesta edição).

Há uma gama de estudos e pesquisas que podem ajudar a nortear a discussão sobre a formação matemática na Licenciatura, focalizando diferentes aspectos. O aspecto que selecionamos neste estudo refere-se às relações entre os conhecimentos matemáticos prescritos no currículo do curso e os conhecimentos matemáticos diretamente associados às questões que se apresentam ao professor na prática da educação algébrica escolar. Moreira e David (2005) abordam a natureza do distanciamento entre os saberes trabalhados na Licenciatura e os saberes demandados pela prática docente escolar, focando especificamente o caso dos sistemas numéricos e o currículo do curso de Licenciatura em Matemática de uma grande universidade pública brasileira. Os autores sintetizam a conclusão geral do trabalho da seguinte forma:

> a formação matemática na licenciatura, ao adotar a perspectiva e os valores da matemática acadêmica, desconsidera importantes questões da prática docente escolar que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores. As formas do conhecimento matemático associado ao tratamento escolar dessas questões não se identificam — algumas vezes chegam a se opor — à forma com que se estrutura o conhecimento matemático veiculado no processo de formação. Diante disso, coloca-se claramente a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da matemática científica e da matemática escolar nesse processo. (MOREIRA; DAVID, 2005, p.103).

No caso desta nossa pesquisa, o objetivo foi compreender as formas segundo as quais o distanciamento comentado acima por Moreira e David se manifesta na preparação do licenciando para o trabalho docente com a educação algébrica na escola básica. Para isso, formulamos duas questões de pesquisa, quais sejam:

a) Que conhecimentos matemáticos diretamente associados à preparação para o trabalho de educação algébrica escolar compõem a formação matemática no curso de Licenciatura da UFMG?

b) Que conhecimentos matemáticos são demandados do professor na sua prática de educação algébrica escolar?

A partir daí, traçamos um paralelo entre o conhecimento algébrico prescrito pelo currículo de formação e aquele requerido na prática da educação algébrica escolar. Na impossibilidade de efetivar esse paralelo considerando o processo de formação em sua generalidade, no Brasil, tomamos como parâmetro o currículo prescrito do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Para identificar o conhecimento (algébrico) relevante para a prática docente na Educação Básica, reportamo-nos a (parte da) literatura especializada sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra na escola, selecionando elementos suficientes para o desenvolvimento de uma análise comparativa rica e adequada aos nossos propósitos de pesquisa.

Procedimentos Metodológicos

Como se sabe, as licenciaturas têm suas disciplinas, ementas, programas e carga horária regulados por diversos documentos nacionais do Conselho Nacional de Educação (CNE), bem como normativas específicas da universidade em que o curso é ministrado. Um desses documentos, no âmbito de cada curso, é o Projeto Pedagógico, em que se apresentam, entre outros elementos da formação, os conhecimentos considerados fundamentais na preparação para o exercício profissional docente. Considerando que o elemento norteador básico das ações pedagógicas dos professores formadores são as ementas das disciplinas, e que este elemento normalmente permanece fixo pelo menos durante um ciclo de formação, entendemos serem essas ementas uma fonte de dados adequada e suficientemente confiável para a discussão que nos propusemos desenvolver neste trabalho. Observamos, ainda, que as ementas são objeto de discussão em várias instâncias da instituição até serem incorporadas ao Projeto Pedagógico do curso. Pode-se inferir, então, que a "resultante" dos debates sobre a concepção de formação do professor que a instituição promoveu esteja expressa no Projeto Pedagógico do seu curso de Licenciatura incluindo aí a grade curricular e as ementas das disciplinas. Assim, neste estudo aqui relatado, selecionamos o currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais para servir de base de comparação, na análise das relações entre os saberes da formação e os saberes da prática. A escolha dessa universidade se deve, entre outros motivos, ao acesso facilitado, no caso de eventual necessidade de contato mais frequente na coleta e análise dos dados, tendo em vista que ambos os pesquisadores residem em

Belo Horizonte. Além disso, é importante considerar que a UFMG se destaca como uma das mais conceituadas universidades brasileiras, aparecendo relativamente bem cotada inclusive em rankings internacionais[3]. Na avaliação de cursos superiores brasileiros pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o de Licenciatura em Matemática da UFMG recebe a nota máxima.

Inicialmente, procuramos identificar, através de um exame da grade curricular, as disciplinas (obrigatórias) cujas ementas prescrevem o trabalho com conhecimentos matemáticos relevantes para este estudo. Não é fácil, em princípio, separar, em disciplinas estanques, o conhecimento algébrico veiculado no processo de formação inicial, pois este conhecimento pode ser utilizado e/ou trabalhado em praticamente todas as disciplinas do curso. Para resolver essa questão metodológica, concentramos nossas análises nas ementas das disciplinas que se propõem especificamente a ensinar conhecimentos algébricos, desconsiderando aquelas em que a álgebra é suposta conhecida e, então, utilizada apenas como ferramenta para a resolução de problemas relevantes para o prosseguimento do trabalho na própria disciplina.

Assim, selecionadas as disciplinas importantes para o estudo, examinamos detalhadamente as respectivas ementas e programas, procurando identificar o que elas oferecem para a formação algébrica do futuro professor de matemática da Educação Básica, segundo as perspectivas apresentadas no Projeto Pedagógico do curso. Para maior precisão, examinamos também a bibliografia indicada nas ementas.

Quanto às demandas de conhecimento (em álgebra) da prática docente escolar, estas foram detectadas a partir de uma revisão da literatura especializada. É claro que não seria possível esgotar a literatura sobre esse tema, por isso fomos examinando artigos de autores reconhecidos na comunidade até construirmos um volume de dados que permitisse a produção de uma resposta consistente e fundamentada para a questão de pesquisa correspondente. Nesse processo, tivemos que fazer algumas escolhas e esse fato se mostra claramente no final da seção 3.2 (subseção 3.2.4), quando apenas citamos, sem elaboração, alguns elementos expressivos de demanda de conhecimento algébrico associado à prática do professor de matemática da escola.

[3] Disponível em: http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/brasil-tem-6-universidades-em-ranking-de-500-melhores-do-mundo.html. Acesso em: 06 de julho de 2021.

A partir dessas escolhas e procedimentos metodológicos, o que fizemos então, como já mencionado, foi uma comparação entre o que encontramos como conhecimentos relevantes para o processo de formação, segundo o Projeto Pedagógico do curso, e os conhecimentos relevantes para a prática, segundo nossa revisão da literatura especializada sobre o tema.

Dados, análise e resultados

O currículo prescrito do curso de Licenciatura da UFMG

O curso de Licenciatura em Matemática da UFMG é ofertado em dois turnos, noturno e diurno. A carga horária e as disciplinas são as mesmas, as diferenças entre os turnos se reduzem à distribuição das disciplinas ao longo dos semestres. O currículo que examinamos neste trabalho, em vigência a partir de 2008, foi ligeiramente modificado em 2013, sem afetar significativamente, para os nossos propósitos, o Projeto Pedagógico do curso. Uma nova mudança curricular estava em andamento quando terminamos esta pesquisa, mas a referência para este estudo é o PP de 2008. Infelizmente, esse Projeto Pedagógico de 2008 não está, hoje, data em que finalizamos a redação deste texto, acessível pela internet.

Como já comentado, interessou-nos analisar as ementas das disciplinas (obrigatórias) que visam diretamente a preparação do futuro professor para o trabalho com a educação algébrica escolar. A partir deste critério, as disciplinas selecionadas para exame mais detalhado de suas ementas e programas foram as seguintes:

- Cálculo Diferencial e Integral I
- Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL)
- Iniciação à Matemática
- Resolução de Problemas
- Fundamentos de Álgebra
- Álgebra e Funções na Educação Básica

Sintetizamos a seguir os dados relativos aos conhecimentos algébricos (relevantes para a pesquisa) prescritos nas ementas de cada uma dessas disciplinas, acompanhando-os de comentários analíticos, de modo a conjugar a apresentação dos dados com o destaque de observações que consideramos importantes para a construção de nossa resposta à (primeira) questão de pesquisa.

a) Cálculo Diferencial e Integral I é ofertada no primeiro período do curso e é integrante do chamado Ciclo Básico dos cursos da área de Exatas. É obrigatória para os cursos de Matemática (Bacharelado e Licenciatura), Física, Química, todos os cursos de Engenharia, entre outros. O foco principal é o estudo das funções reais de uma variável real, suas propriedades de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos locais e globais, a construção dos gráficos usando a noção de derivada. A ementa inclui ainda a integral de Riemann e aplicações.

Observa-se que o estudo das funções está presente no currículo da escola, mas a ideia fundamental no desenvolvimento desta disciplina é revisar rapidamente esse tópico da Educação Básica, com a finalidade de preparar o aluno para o trabalho com funções em geral, usando o conceito de derivada. Não se trata, então, de preparar o licenciando para a prática docente escolar em álgebra (até porque a ementa é a mesma para todos os cursos – Engenharias, Bacharelado em Matemática etc.).

b) Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL) é ofertada também no primeiro período do curso. A ementa é a seguinte: Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Álgebra Vetorial. Equação do plano. A Reta no Plano e no Espaço.

O programa apresenta dois itens (matrizes e determinantes; sistemas lineares) que são também tratados no Ensino Médio. Vejamos como esses itens são detalhados no programa da disciplina: Matrizes: Definição. Operações Matriciais: adição, multiplicação, multiplicação por escalar, transposta. Propriedades das Operações Matriciais. Sistemas de Equações Lineares: Matrizes Escalonadas. O processo de Eliminação de Gauss-Jordan. Sistemas Homogêneos. Inversa de uma matriz: definição e cálculo. Determinantes: Definição por cofatores. Propriedades. Regra de Cramer.

Assim, pela descrição dos itens no programa e pela bibliografia básica indicada para o tratamento deles na disciplina, verifica-se que Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL) responde apenas, no que se refere aos dois itens citados, àquilo que Ball, Thames e Phelps (2008) denominam Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), ou seja, a matemática que vai ser ensinada na escola (e que, por isso, obviamente, deve ser parte do conhecimento matemático do licenciando). Não há menção a nenhum conhecimento (associado a esses dois tópicos) que se refira aos demais subdomínios do MKT (SCK, KCS, KCT), isto é, a nenhum conhecimento matemático específico para o ensino escolar, além do CCK restrito a esses dois tópicos.

c) Iniciação à Matemática é uma disciplina obrigatória para as modalidades Bacharelado e Licenciatura. A ementa é explícita em relação à sua finalidade:

estabelecer o contato do estudante recém-ingresso no curso com a matemática de nível superior, esclarecendo a utilização da lógica formal dedutiva como linguagem básica. Apresentar ao estudante a natureza e a necessidade das hipóteses, dos sistemas axiomáticos e das demonstrações em matemática. Em associação com essa finalidade, a disciplina é recomendada para o primeiro semestre do curso.

Alguns tópicos do programa desta disciplina se fazem presentes no currículo da escola, principalmente no que diz respeito a aspectos básicos dos sistemas numéricos. Quanto ao trabalho com a álgebra escolar, temos apenas o item 2 do programa: Funções: Domínio, contradomínio e imagem; funções injetivas e sobrejetivas; composição de funções. Mas a ideia enfatizada nos objetivos e no programa da disciplina, como já comentado, é fazer um tratamento formal e lógico-dedutivo, preparando os alunos para outros encontros com essa abordagem, em outras disciplinas, na sequência do curso. Assim, nem mesmo o CCK (Conhecimento Comum do Conteúdo) estaria contemplado, em princípio, nessa disciplina.

d) Resolução de Problemas tem como finalidade, explicitada no Projeto Pedagógico do curso, desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos que versam sobre conteúdo da Educação Básica, proporcionando a oportunidade de argumentar e justificar em Matemática, tanto oralmente como por escrito. Esta disciplina faz parte do currículo da Licenciatura e do Bacharelado, sendo ofertada no primeiro semestre para o Bacharelado e para a Licenciatura diurna (conjuntamente), e no segundo semestre, para a Licenciatura noturna. Observa-se que a disciplina não visa propriamente trabalhar conhecimentos específicos de álgebra ou questões relativas à educação algébrica na Educação Básica, nem uma preparação do licenciando para o trabalho com a resolução de problemas em sua prática docente na escola. Nesse sentido, não se trata de um curso sobre Resolução de Problemas, vista como uma abordagem de ensino. É claro que se o licenciando desenvolve sua própria habilidade para resolver problemas matemáticos, bem como sua habilidade de argumentar e de justificar, terá maiores condições de trabalhar o desenvolvimento dessas habilidades junto aos seus futuros alunos na escola. Entretanto, é importante observar que existe uma ampla literatura, específica sobre o trabalho com resolução de problemas na escola, que não é nem mesmo mencionada na bibliografia da disciplina. Os problemas a serem trabalhados na disciplina envolvem conhecimentos matemáticos da Educação Básica (isto está na ementa) porque a ideia é que se usem esses conhecimentos, já ensinados (e supostamente aprendidos) na própria escola, para a resolução de problemas e não, inversamente, que se use a resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem matemática na Educação Básica. Uma leitura atenta dos objetivos da disciplina deixa claro que não se trata de uma preparação específica para o trabalho na escola básica. Observa-se, ainda, que a disciplina atende aos alunos da Licenciatura e do Bacharelado ao mesmo tempo, o que dificulta uma abordagem específica visando a formação para o trabalho docente na escola com a resolução de problemas.

e) Fundamentos de Álgebra é obrigatória tanto para a Licenciatura, como para o Bacharelado. Os nomes dos tópicos do programa sugerem vínculos com a matemática trabalhada na Educação Básica: números inteiros, propriedades das operações com inteiros, o algoritmo da divisão, múltiplos e divisores, m.d.c., m.m.c., fatoração em primos. Além disso, consta do programa o estudo dos polinômios, incluindo fatoração e o algoritmo de Briot-Ruffini. Entretanto, como destacado na descrição dos objetivos da disciplina, a ideia é proporcionar uma visão unificada do conjunto dos polinômios sobre um corpo e do conjunto dos números inteiros, através da teoria abstrata de anéis. Isto significa projetar uma visão desses dois conjuntos como essencialmente idênticos, em termos da estrutura algébrica associada (ambos são anéis euclidianos), o que se distancia fortemente da abordagem escolar. Não consta do programa, de acordo com a bibliografia sugerida, uma discussão sobre a lógica do algoritmo da divisão com resto (nem de números inteiros, nem de polinômios com coeficientes reais). Não consta, igualmente, nenhuma justificativa (utilizável no trabalho escolar) para a validade das propriedades estruturais das operações com inteiros (como se justifica o fato de que a multiplicação e a adição são comutativas e associativas? Por que devo acreditar que a primeira é distributiva em relação à segunda?). O que consta nas referências bibliográficas é a prova da existência e unicidade do quociente e do resto (de fato, a demonstração, por indução, do Lema de Euclides), assim como suas consequências estruturais: daí deduz-se que vale a decomposição única em fatores primos, a possibilidade de se escrever o m.d.c. de dois números (ou polinômios) como combinação linear deles etc. É importante lembrar que, também nesse caso, a disciplina é ministrada conjuntamente para licenciandos e bacharelandos, o que dificulta uma abordagem específica visando a preparação do licenciando para o tratamento escolar dos tópicos do programa da disciplina. Em suma, o exposto no objetivo da disciplina indica que não se trata de desenvolvê-la com um olhar voltado para o que acontece na sala de aula da escola, ou seja, para os problemas do ensino escolar dos números inteiros e dos polinômios, mas de valorizar a percepção de que a natureza dos elementos que constituem uma estrutura algébrica não importa, frente à própria estrutura. Isso constitui, a nosso ver, um importante aspecto da formação do bacharel em termos de sua prática profissional futura, mas não em termos da preparação do licenciando para a sua futura prática docente na Educação Básica.

f) A disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica tem como objetivo explícito preparar o professor para o ensino de álgebra na escola, através do contato com textos científicos que abordam o tema. Os textos indicados na bibliografia podem fomentar discussões interessantes acerca de situações de sala de aula escolar no trabalho com a álgebra, entre outros elementos do saber profissional docente. Os objetivos e o programa da disciplina são assim apresentados:

Objetivos:

1) Aprofundar o conhecimento que o futuro professor já tem de suas vivências anteriores sobre álgebra e funções, visando a preparação para a docência na escola básica.

2) Abordar os conceitos, métodos e técnicas matemáticos referentes à álgebra e às funções, do ponto de vista das questões do ensino e aprendizagem escolares.

3) Analisar propostas curriculares e recursos didáticos para a escola básica no que se refere aos conteúdos sobre álgebra e funções.

Programa:

A linguagem algébrica e a compreensão matemática. Concepções de álgebra e o papel das variáveis. Demonstração e justificação em álgebra. A ideia de função. Representação analítica, gráfica e verbal de funções. A definição formal de função. Questões do ensino-aprendizagem de funções (lineares, quadráticas, polinomiais, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas) como modelos matemáticos de alguns fenômenos. Propostas curriculares atuais e recursos didáticos para a abordagem da álgebra e das funções na escola básica.

Como se vê, o programa da disciplina explicita a ideia de uma abordagem específica para o ensino na escola e recomenda a discussão de questões relacionadas diretamente com a educação algébrica escolar. A bibliografia é composta de textos que constituem importante contribuição para o ensino e para a aprendizagem da álgebra na escola. No entanto, talvez por ser a única disciplina obrigatória (de todo o currículo) que tem o objetivo explícito de formação algébrica do licenciando para o trabalho docente escolar, seu programa e a bibliografia indicada são demasiado amplos, considerando que a disciplina é de apenas 60 horas.

A seguir, apresentamos, nos três itens abaixo, uma síntese da nossa resposta à primeira questão de pesquisa. Mas antes, uma observação importante: das seis disciplinas examinadas, que comporiam, potencialmente, a formação matemática que prepara o futuro professor para o trabalho de educação algébrica escolar, cinco (Cálculo I, GAAL, Iniciação à Matemática, Resolução de Problemas, Fundamentos de Álgebra) são também obrigatórias, com a mesma ementa, para o Bacharelado. Isso faz com que todo o conhecimento algébrico específico para o trabalho docente escolar (Conhecimento Especializado do Conteúdo - SCK, Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes – KCS, e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino - KCT, nos termos de Ball, Thames e Phelps, 2008) se reduza a uma disciplina de 60 horas. A exceção é para alguns tópicos restritos do Conhecimento Comum do Conteúdo - CCK, que fazem parte das ementas de algumas disciplinas, as quais, por sinal, são obrigatórias também para o Bacharelado. Assim, nossa resposta sintetizada à primeira questão de pesquisa pode ser posta nos seguintes termos:

Num grupo de três disciplinas da Licenciatura em Matemática (Cálculo I, Iniciação à Matemática, Resolução de Problemas) apresentam-se alguns tópicos, cujos nomes parecem relacionados com a docência escolar em álgebra. Entretanto, em todos os casos, não se trata de tópicos a serem trabalhados com vistas à preparação do licenciando para o ensino escolar, embora de maneira indireta, possam, talvez, contribuir para o CCK do futuro professor.

Noutro grupo de duas disciplinas (Fundamentos de Álgebra e GAAL) temos, em parte de seus programas, tópicos cujos nomes sugerem um vínculo estreito com o currículo da Educação Básica (números inteiros, o algoritmo da divisão, critérios de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, números primos, fatoração; polinômios sobre um corpo: divisibilidade, o algoritmo de divisão, raízes, irredutibilidade e fatoração sobre Q, R e C, o algoritmo de Briot-Ruffini; matrizes, operações com matrizes, sistemas lineares, inversa de uma matriz, determinantes, regra de Cramer). No entanto, de acordo com os objetivos expressos na ementa de Fundamentos de Álgebra (e confirmada pelas referências bibliográficas nela relacionadas), a ideia básica é proporcionar, nesta disciplina, uma visão avançada da matemática escolar. Enfatiza-se uma visão unificada do conjunto dos inteiros e o dos polinômios com coeficientes racionais ou reais como exemplos concretos de uma mesma estrutura abstrata (anel euclidiano). Assim, por exemplo, na bibliografia indicada, fica claro que as demonstrações dos resultados enunciados para os números inteiros são aquelas que poderão se repetir, *mutatis mutandis*, para a obtenção dos resultados correspondentes para os polinômios sobre um corpo e não aquelas mais adequadas ao estágio de desenvolvimento da aprendizagem matemática em que se encontram os estudantes da Educação Básica ao serem apresentados ao conjunto dos números inteiros. Assim, entendemos que essa disciplina oferece alguma contribuição para a formação em Álgebra do licenciado, mas restrita apenas ao domínio CCK. No que diz respeito aos tópicos Matrizes e Determinantes, Sistemas Lineares, da disciplina GAAL, podemos dizer que contribuem para a docência no Ensino Médio, fazendo parte, igualmente, apenas do domínio CCK (Conhecimento Comum do Conteúdo). Em suma, podemos dizer que a preparação do licenciando para o trabalho com a educação algébrica escolar nesse grupo de disciplinas fica reduzido a alguns tópicos restritos do currículo escolar. São ignoradas uma gama de questões relacionadas ao trabalho docente escolar com esses mesmos tópicos, como, por exemplo, justificativas escolares para as propriedades comutativa e associativa da multiplicação de inteiros, para a unicidade da decomposição em primos, uma discussão da lógica dos algoritmos para as operações etc.

Por fim, consideramos a disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica. É importante observar que, como já mencionado, essa é a única disciplina obrigatória do curso que tem como objetivo trabalhar conhecimentos algébricos vinculados diretamente às questões que o professor de matemática enfrenta em sua prática docente. Todos os itens do programa fazem parte do que Ball, Thames e Phelps (2008) denominam Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), em seus quatro diferentes subdomínios (CCK, SCK, KCS, KCT). A bibliografia indicada inclui textos que são referências reconhecidas internacionalmente, quando se discute o ensino e a aprendizagem de álgebra na escola básica. Entretanto, a disciplina utiliza apenas 60 horas das mais de 2.800 que compõem o total do curso e, portanto, não é possível abarcar, com a amplitude e profundidade minimamente desejáveis, o que está proposto na ementa e no programa. Mesmo a bibliografia a ser efetivamente utilizada teria que passar por um forte processo de seleção por parte do professor que leciona a disciplina, pois entre os 25 textos indicados, há livros inteiros que tratam de variados aspectos da educação algébrica escolar e dos saberes docentes associados.

A seguir, passamos aos dados, cuja análise nos possibilitou a construção de uma resposta à segunda questão de pesquisa (referente aos conhecimentos algébricos demandados pela prática da educação algébrica escolar). Do mesmo modo que na apresentação dos dados relativos à primeira questão de pesquisa, faremos alguns comentários no sentido de antecipar a análise comparativa das respostas que obtivemos a partir desses dados.

Demandas da prática docente na educação algébrica escolar

Sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico

De modo geral, a literatura acerca da educação algébrica escolar ressalta a necessidade do combate a uma ênfase exagerada nos procedimentos, em detrimento do entendimento dos significados dos símbolos e da lógica geral que permite manipulá-los corretamente (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992; COXFORD; SHULTE, 1994; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; BRANCO; PONTE, 2012; COELHO; AGUIAR, 2018). A ideia é que o professor promova a fluência nos procedimentos, em consonância com o domínio da lógica que os fundamenta, fazendo com que este domínio contribua para o desenvolvimento daquela fluência. Isso põe em relevo a demanda, para o professor, de trabalhar com seus alunos o que se tem chamado de desenvolvimento do pensamento algébrico, um processo complexo e gradativo que, para muitos autores, deve começar nos anos iniciais de escolarização e prosseguir por todo o ensino básico (cf. CAI; KNUTH, 2011; DRIJVERS, 2011). Segundo os estudos, é preciso levar os alunos, desde cedo, a perceber a necessidade do uso dos símbolos, oferecer a eles a oportunidade de criá-los, na forma que lhes for possível e lhes fizer sentido, a cada momento do seu desenvolvimento cognitivo, até que, gradativamente, vão sendo percebidas as vantagens e as necessidades do uso de uma linguagem mais compacta e universal, da adequada apropriação dessa linguagem, juntamente com seus fundamentos.

Radford (2011) chega a afirmar que

> o simbolismo alfanumérico não é uma condição necessária nem suficiente para a construção do pensamento algébrico. [...] O que caracteriza o pensamento como algébrico é que ele lida com quantidades indeterminadas, concebidas numa forma analítica. Em outras palavras, você considera as quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas e faz cálculos com elas como faz com números. (p. 310).

Esse autor entende que o pensamento algébrico pode se desenvolver passando por diferentes níveis ao longo da trajetória escolar do aluno, incluindo os anos iniciais do Ensino Fundamental. Para ele, os símbolos formais padronizados (as letras) que costumam funcionar como os objetos principais no ensino tradicional da álgebra na escola, deveriam ceder lugar, num primeiro momento, a formas e recursos de linguagem tais como gestos, palavras, desenhos etc.

A ideia é a de que uma criança que ainda não sabe representar uma "fórmula" utilizando a linguagem algébrica padrão possa ter seu pensamento algébrico aguçado, por exemplo, a partir do envolvimento em tarefas de reconhecimento de regularidades e padrões em sequências (numéricas ou não numéricas). Os padrões percebidos podem, num primeiro momento, ser descritos para os colegas (e para si mesmo) através de recursos, gestos e símbolos criados pela própria criança, já que esses recursos são, nestes casos, repletos de significados para quem os cria. Radford (2010) identifica pelo menos três níveis de generalização nesses processos, os quais, por sua vez, vinculam-se a diferentes estágios de desenvolvimento do pensamento algébrico e de domínio de linguagem:

- Factual ─ nesse nível, as operações sobre valores indeterminados são expressas através de ações, gestos e outras formas não discursivas.
- Contextual ─ A indeterminação já é expressa na forma discursiva, mas utilizando-se uma linguagem não universal, com recurso a termos dêiticos, isto é, "palavras com as quais descrevemos, contextualmente, objetos no espaço" (RADFORD, 2009, p. 9).
- Padrão ─ nesse nível utiliza-se a linguagem algébrica compacta já sistematizada, incluindo as letras e demais símbolos matemáticos.

Assim, recomenda-se que o estudo de regularidades e padrões, dependendo do nível de generalização em que se situam os alunos, inicie-se com atividades que explorem a manipulação de objetos ou o uso de desenhos e gestos para, em seguida, alcançar etapas em que se trabalhem aspectos mais sutis do pensamento algébrico. Nesses estágios mais avançados, a ênfase estaria na criação de fórmulas; na resolução de equações ou inequações (em diferentes níveis de formalismo); na percepção e uso das simetrias e de aspectos estruturais; na construção de argumentos e justificativas; nas comparações de soluções e de formas de raciocínio etc. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; DRIJVERS, 2011; BRANCO; PONTE, 2012; MASON, 2018).

Essas considerações sobre o trabalho com a iniciação à álgebra e com o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional na Educação Básica mostram que há conhecimentos matemáticos importantes associados à construção, seleção e condução de atividades e tarefas específicas de sala de aula, apropriadas a cada estágio de desenvolvimento da educação algébrica dos alunos na escola básica. No entanto, de acordo com os dados descritos na subseção anterior (3.1), as questões teóricas e estudos empíricos sobre essa temática passam praticamente ao largo do processo de formação, no caso do currículo prescrito do curso que examinamos. Apenas a disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica (4 créditos, programa e bibliografia extremamente abrangentes) menciona em sua ementa e/ou programa um ponto relacionado com o desenvolvimento do pensamento algébrico na escola. Pode-se inferir, em tais circunstâncias, que esse ponto nem sempre é trabalhado no processo de formação e que, quando é, talvez não o seja com a profundidade e extensão desejáveis. Observa-se ainda, para reforçar essa inferência, que não consta, na bibliografia da disciplina, nenhum texto específico em que esse tema seja tratado com a abrangência teórica e prática adequada.

Aliás, é interessante observar que o licenciado não passa por esse processo de desenvolvimento do seu próprio pensamento algébrico em sua formação profissional na Licenciatura. Muito provavelmente, também não passou por um - bem conduzido - em sua formação escolar. Tal constatação sugere fortemente que o licenciando seja levado a vivenciar, em sua formação inicial, essa “passagem” por diferentes estágios de expressão de generalizações, desde a utilização de recursos semióticos correspondentes aos níveis factual e contextual, num primeiro momento, até o domínio efetivo da linguagem algébrica padrão. Um professor que não vivenciou nem refletiu sobre esse processo na sua formação, dificilmente terá condições de conduzi-lo adequadamente em sua prática profissional, com seus alunos na escola. Nesse sentido, é relevante considerar que as conclusões de um estudo de Demonty, Vlassis e Fagnant (2018) indicam que os professores têm dificuldades de atuar adequadamente em tais situações, além de não possuírem uma ideia clara dos objetivos das tarefas e das atividades voltadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico, especialmente na transição dos anos iniciais para o sexto-nono ano, que denominamos, no Brasil, segundo segmento do Ensino Fundamental.

Sobre os erros e *misconceptions* na álgebra escolar

No processo de introdução dos alunos da escola ao uso mais frequente da linguagem algébrica padrão, é preciso que o professor esteja alerta para os diferentes modos com que os alunos entendem o papel das letras em diferentes contextos. Kuchemann (1981) identificou seis categorias em que se poderiam enquadrar as maneiras com que os alunos ingleses lidaram com letras em tarefas matemáticas que lhes foram propostas (chegando tanto a respostas corretas, como a incorretas):

a) O aluno atribui um valor à letra na tarefa. Por exemplo, se a tarefa pede o perímetro de um triângulo equilátero de lado c, o aluno atribui um valor a c e multiplica esse valor por 3. Noutra tarefa, se é pedido o valor de c para que c+7 = 12, o aluno vai dando valores a c até que a igualdade se verifique.

b) O valor da letra não é usado na solução. Exemplo: se a+b = 6, quanto vale a+b+10? A tarefa pode ser resolvida sem se preocupar com quanto valem a e b. Essa maneira de lidar com letras não funciona bem se temos uma tarefa do tipo: a+b = 6. Quanto vale a+b+c? Nesse caso o aluno tem que construir algum entendimento do que seja somar c a um número (no caso, o 6). Para muitos, 6+c não constitui uma resposta aceitável.

c) A letra é entendida como um objeto ou como representando um objeto. Exemplo: quanto vale 3a-a? Pode-se entender a como abacaxi e, então, ter-se-ia: 3 abacaxis –1 abacaxi = 2 abacaxis = 2a. Tal uso da letra pode gerar dificuldades no caso seguinte: quanto é (2a-b) + b? Retirar uma banana de 2 abacaxis para depois acrescentar uma banana não parece fazer sentido.

d) A letra é entendida como um valor fixo, mas desconhecido. Exemplo: adicione 5 a n+4. Nesse caso, é como somar 9 ao valor de n, qualquer que seja esse valor. Entretanto, numa tarefa do tipo “somar 5 a 4n”, o aluno costuma ter dificuldade com a resposta 5+4n, porque pensa que não fez o que foi pedido, apenas indicou. É preciso ter claro que isso é o máximo que é possível fazer (comparar com a categoria b).

e) A letra é entendida como um número genérico, que pode tomar valores diferentes dentro de um conjunto determinado. Exemplo: se c e d são números naturais e c+d = 20 o que você pode dizer do valor de c? Observe-se que o significado da letra vai se ajustando cada vez mais a situações gerais.

f) A letra é entendida como variável, no sentido de uma relação funcional. Exemplo: qual número é maior: 2n ou n+2? Aqui a ideia é a de que a relação entre as duas expressões depende do valor que n assume. Se n=1, 2n é menor. Se n=2, as duas expressões têm o mesmo valor. Se n é maior que 2 a primeira é maior.

Note-se que as três primeiras formas de lidar com a letra podem, muito frequentemente, levar a erros, dependendo da tarefa proposta, ainda que possam acarretar acertos em alguns casos particulares. As três últimas, no entanto, se aproximam dos significados da letra usada na linguagem algébrica padrão e indicam um estágio mais avançado do pensamento algébrico.

Ainda com relação à questão dos erros dos alunos da escola em álgebra, Booth (1994) identifica e interpreta alguns dos mais comuns, cometidos em atividades realizadas por estudantes ingleses (de um estágio de escolaridade que corresponderia, no Brasil, aos ciclos finais do Ensino Fundamental). Muitos alunos mostraram dificuldade em dar como resposta (a uma pergunta ou a um problema matemático) uma expressão que possuía mais de uma parcela, o que parece provir de uma sensação de incompletude da resolução, de não se ter chegado a uma resposta final. Por exemplo, uma expressão do tipo x + 7 seria inadmissível como resposta para esses alunos, uma vez que x + 7 não é visto como um objeto, mas como uma operação a ser feita (veja as categorias b) e d) de Kuchemann, logo acima; ver também GRAY; TALL, 1993; FERREIRA, 2014, cap.4). Assim, internalizada a ideia de que deve sempre processar a operação indicada, o aluno pode se sentir forçado a inventar interpretações mais ou menos arbitrárias, como achar um "resultado" para 2b + 5c na forma 7bc (BOOTH, 1994).

No trabalho com o cálculo e simplificação de expressões algébricas, especialmente aquelas que envolvem o uso de parênteses, colchetes e chaves, muitos alunos da escola transferem mecanicamente, da aritmética para a álgebra, certos procedimentos que não fazem sentido na situação em que os símbolos abstratos substituem os números. Por exemplo, a regra "efetuar primeiro o que está dentro dos parêntesis", nem sempre é possível ou conveniente: na situação 5c[35(a+b) + 17(a+b)] não se pode efetuar a operação indicada dentro dos parêntesis. O mais eficiente, neste caso, seria somar as parcelas dentro dos colchetes e obter 5c[52(a+b)] e finalmente chegar a 260c(a+b), ou seja, o que está dentro dos parêntesis permanece intacto até o final, uma contradição com a "regra".

Em outras situações algébricas, o problema não é exatamente a questão da rigidez das regras transferidas da aritmética, mas o fato de que as propriedades das operações tomam uma importância que não têm, necessariamente, quando se está lidando com a aritmética dos números naturais ou mesmo dos racionais. Em muitos desses casos numéricos, não é essencial utilizar as propriedades das operações. Entretanto, ao lidar com as letras, pode ser imprescindível o uso dessas propriedades. Por exemplo, ao resolver uma equação do tipo 2x(x+1)/3 + (2x-1)/5 = x+2, usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de uma forma que não tem paralelo na aritmética dos naturais, embora costume ser essa aritmética dos naturais a referência crucial em que se fundamenta a justificativa do procedimento de “distribuir” o produto pelas parcelas, no caso de expressões algébricas. Além disso, como ainda, talvez, não tenha familiaridade suficiente com “fazer operações com letras”, o aluno tende, no contexto algébrico, a distribuir de forma inconsistente qualquer conjunto de operações a ser feito sobre expressões em que aparece uma soma, por exemplo. Assim, se tiver que multiplicar 2x(x+1) por 5, poderá chegar a 10x(5x+5). Ou, no caso da expressão x/(x+1), “distribuir” a divisão pelas parcelas do divisor, obtendo x/x +x/1 e, então, 1+x como resultado (BOOTH, 1994; ver também FERREIRA, 2014, cap.4). Uma classificação abrangente de erros comuns em álgebra, com uma variedade ampla de exemplos de cada classe, pode ser encontrada em Egodawatte (2011).

Na conclusão desse seu estudo, Booth (1994) – assim como Egodawatte (2011) - destaca a necessidade de se estudar os erros dos alunos em álgebra e suas possíveis origens, considerando esse tipo de saber (sobre os erros) como fundamental para o professor em sua prática profissional, devendo, portanto, integrar, de modo intensivo e detalhado, a sua formação como docente. Lochhead e Mestre (1994) mostram, em pesquisa com universitários, que os erros detectados não diferem muito dos erros cometidos por alunos da escola, em tarefas de natureza algébrica. Reforça-se, assim, a ideia de que os licenciandos precisam passar por testes diagnósticos específicos, a fim de que seus próprios erros sejam explicitados e discutidos, uma vez que é bem diferente analisar erros na condição de um aluno que os cometeu ou na condição de um (futuro) professor que irá conduzir uma discussão com seus (futuros) alunos que os cometeram. No primeiro caso, a discussão e análise dos erros constitui parte do processo de formação do aluno, enquanto no segundo caso é parte do processo de formação do (futuro) professor. Este é um ponto que pode ser crucial para o desenvolvimento da formação do profissional que ensina matemática, pois compreender onde se encontram as dificuldades dos alunos auxilia o professor a escolher exemplos adequados a cada turma, além de facilitar a elaboração de estratégias que possam auxiliar na (difícil) empreitada de superar concepções errôneas já internalizadas. Há uma literatura ampla (RADATZ, 1980; BORASI, 1985; GRAEBER, 1993; PINTO, 2000; CURY, 1995, 2008, 2013, entre outros) que estuda, sob diferentes perspectivas, os erros matemáticos cometidos pelos alunos da escola e as *misconceptions*, que muito frequentemente levam aos erros. O que se enfatiza, de modo geral, nessa literatura, é que não basta “explicar” para o aluno aquilo que é considerado matematicamente correto. Isso, em princípio, todo professor (bem ou mal) já faz. A questão, mais complicada do ponto de vista da docência escolar, é compreender os mecanismos que levam os alunos a validar um procedimento ou uma forma conceitual incorreta, expô-los a situações que potencialmente coloquem esses mecanismos em ação, ajudando-os a perceber seus próprios erros e identificar o que os levou a cometê-los. Esse tipo de ação docente em sala de aula da escola demanda claramente conhecimentos específicos que precisam ser trabalhados na formação. Cury (2012), com base em Ball, Thames e Phelps (2008), destaca esse tipo de saber profissional docente, dando-lhe o nome de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo dos Erros.

Contudo, a questão dos conhecimentos subjacentes ao trabalho docente de interpretação dos erros dos alunos em tarefas de natureza algébrica e de elaboração de estratégias de promoção da sua superação não consta do currículo de formação examinado. Identificamos, assim, mais um aspecto importante do distanciamento entre os saberes da formação e as demandas da prática docente escolar em álgebra.

Resolução de Problemas

A resolução de problemas, no campo da Educação Matemática, tem ocupado um lugar de destaque há algumas décadas (NCTM, 1980, 2000; MASON; BURTON; STACEY, 1982/2010; SCHOENFELD, 1992; PONTE; CANAVARRO, 1994; ONUCHIC, 1999; ALLEVATO; ONUCHIC, 2009; CHAPMAN, 2015; LILJEDHAL *et al*., 2016, entre outros). Como se sabe, há várias visões a respeito do desenvolvimento do trabalho com a resolução de problemas no ambiente de educação matemática escolar. Pode-se propor atividades de investigação, por exemplo, em que se demanda o uso de conhecimentos já estudados, com o objetivo, não apenas de revisar o entendimento do que foi ensinado, mas, também de desenvolver habilidades como conjecturar, argumentar, justificar, avaliar diferentes caminhos de resolução, comunicar os resultados etc. Alguns pesquisadores (e.g., ALLEVATO; ONUCHIC, 2009) trabalham com os problemas para ensinar matemática, invertendo, em certo sentido, o caminho usual da formação universitária, em que se aprende matemática para resolver problemas, nas aplicações. A introdução de conceitos e técnicas através da percepção da sua necessidade na resolução de um ou vários problemas pode facilitar a assimilação dessas técnicas e conceitos pelos alunos. Por exemplo, no estudo das funções, podem ser trabalhadas situações específicas em que faz sentido excluir valores que, em princípio, fariam parte do domínio da função, caso fosse considerada abstratamente. Isso contribui para uma compreensão mais operacional da noção de domínio de uma função. Mais geralmente, o trabalho com o conhecimento matemático "em situação" contribui, segundo Vergnaud (2009), para ampliar o campo de entendimento dos conceitos. Outra possibilidade, no ensino escolar de matemática, seria trabalhar a resolução de problemas com o objetivo de levar os alunos a desenvolver essa habilidade específica, ou seja, resolver problemas, o que é fundamental na formação escolar. De qualquer forma que se vá trabalhar com o tema na escola, o professor precisa se preparar especificamente para esse tipo de atividade, pois ela demanda uma gama de saberes entrelaçados: saberes matemáticos, pedagógicos, de gestão da sala, específicos sobre resolução de problemas etc.

Muitos problemas, ao serem traduzidos da linguagem natural do enunciado para a linguagem matemática, recaem em expressões algébricas que devem ser manipuladas e simplificadas, equações e sistemas de equações que devem ser resolvidos, funções que devem ser analisadas etc. Além disso, sabe-se que o aluno da escola carrega conhecimentos que podem lhe auxiliar (ou funcionar como obstáculos) na aprendizagem de álgebra e da matemática em geral. Aquilo que funciona como obstáculo na aprendizagem da álgebra pode vir à tona nos processos de interpretação dos enunciados dos problemas e de tradução desses enunciados para a linguagem algébrica, no modo de raciocinar para desenvolver estratégias de resolução, na própria execução do processo de resolução. Tudo isso oferece oportunidades ao professor (bem formado) de colocar eventuais *misconceptions* (e outros tipos de obstáculos à aprendizagem) em discussão e sob análise reflexiva dos alunos e do próprio professor.

O trabalho com a resolução de problemas na escola tem um grande potencial educativo em matemática, mas pode exigir mudanças de postura, tanto dos alunos, como do professor. Há que selecionar ou criar "bons" problemas, isto é, problemas que sejam, ao mesmo tempo, interessantes e motivadores para os alunos e adequados aos objetivos específicos do trabalho. Assim, é preciso que o professor tenha esses objetivos muito claros e isso demanda conhecimentos da parte do docente. É preciso também que o professor saiba lidar com o equivocado entendimento, comum entre os alunos, de que o papel do professor é "ensinar" (o que significa, para muitos alunos, explicar como se faz) e o do aluno "aprender" (saber reproduzir). No trabalho com a resolução de problemas, esse tipo de concepção, mecânica e puramente transmissiva, dos processos de ensino e de aprendizagem pode levar o aluno ao desinteresse, cabendo ao professor conduzir a atividade de modo a tornar possível o questionamento de tais concepções. No trabalho com a resolução de problemas, os alunos também precisam sair da condição de passividade e passar à de construtores ativos de seu próprio conhecimento. O professor, portanto, deve estar disposto a "correr riscos", enveredar por caminhos alternativos e não tradicionais, deixar de ter o controle do que acontece na sala de aula o tempo todo etc. Se os alunos se engajam na atividade de resolução de problemas (e isso é o que se deseja), podem surgir situações imprevisíveis, fora do alcance imediato dos saberes cristalizados do professor. Este precisaria, então, a cada momento, desenvolver formas positivas de lidar com essas situações, aproveitando pedagogicamente as oportunidades de aprendizagem profissional dele e de aprendizagem matemática dos alunos.

Assim, mais uma vez, cabe a observação de que o professor precisa estar muito bem-preparado para conduzir um processo como esse em sala de aula de matemática da escola. Tal preparação inclui o domínio de uma gama de conhecimentos matemáticos específicos, que permitam lidar com situações que exigem, entre outras competências, a de selecionar, criar e conduzir atividades escolares que promovam o desenvolvimento, por parte do aluno, da competência algébrica e matemática, em geral. Listamos a seguir alguns elementos a serem trabalhados com os alunos (LESTER, 2013), no processo de educação algébrica escolar através da resolução de problemas, observando que, no conjunto, esses elementos demandam saberes profissionais amplos e diversificados do professor (PIÑEIRO; CASTRO-RODRÍGUEZ; CASTRO, 2019), pois não se desenvolvem de modo "natural", mas, ao contrário, resultam do trabalho intencional e direcionado do professor. Eis a lista construída a partir das ideias de Lester (2013):

1. interpretação e análise crítica dos enunciados;

2. motivação, interesse e engajamento no processo de desenvolver a própria habilidade de resolver problemas;

3. desenvolvimento de habilidades metacognitivas, ou seja, aprender a controlar (e refletir sobre) o próprio processo cognitivo ao resolver problemas matemáticos;

4. habilidade de expor suas resoluções, analisar as de outros e discuti-las com os colegas;

5. argumentar a favor ou contra a adequação ou inadequação de uma dada solução;

6. comparar soluções, em termos das vantagens e desvantagens de umas sobre outras (menos ou mais gerais, do ponto de vista da estratégia; de que tipo de conhecimentos dependem ou em que tipo de conhecimento se apoiam etc.);

7. compreensão dos limites de uma dada solução, em termos do contexto em que se coloca a situação-problema;

8. capacidade de abstração suficiente para transitar entre contextos do mundo “real” ou “cotidiano” (sujeitos a limitações específicas, concretas, muitas vezes implícitas e de natureza não matemática) e do mundo dos modelos matemáticos (sujeitos basicamente a normas internas à disciplina, como impossibilidade de contradições, entre outras);

9. habilidade de formular problemas matemáticos consistentes, o que envolve a mobilização de conhecimento matemático e uso adequado da linguagem.

É preciso que fique bem claro, por outro lado, que não basta dizer ao futuro professor, no seu processo de formação, que deve trabalhar com a resolução de problemas e listar as vantagens teóricas desse tipo de atividade. O processo de formação tem que proporcionar ao licenciando experiências e saberes concretos que lhe permitam desenvolver, com o máximo possível de confiança e segurança, o trabalho com esse tema em sua prática docente escolar futura.

No currículo do curso examinado, há uma única disciplina com o nome Resolução de Problemas, em cuja ementa está explícito o (único) objetivo de fazer com que os alunos (licenciandos e bacharelandos) desenvolvam a habilidade de resolver problemas matemáticos. Não deixa de ser uma contribuição para a formação geral do licenciando, mas, como vimos, é uma contribuição bastante limitada, tendo em vista os desafios que o professor enfrenta ao conduzir esse tipo de atividade na escola. Lester (2013) chega a afirmar, como resultado de suas reflexões sobre mais de 20 anos de trabalho e estudo a respeito da resolução de problemas na escola (e os saberes docentes associados a essa temática), que “professores de matemática não precisam ser exímios resolvedores de problemas; eles precisam estudar seriamente o assunto Resolução de Problemas”[4] (LESTER, 2013, p. 250).

Outros tipos de saberes inerentes ao trabalho docente de educação algébrica escolar

[4] “Mathematics teachers needn’t be expert problem solvers; they must be serious students of problem solving”.

A seguir, listamos, sem maiores elaborações (em função do espaço disponível), alguns outros tipos de conhecimento profissional docente demandados na prática escolar de educação algébrica, segundo a literatura consultada:

- Conhecimentos sobre o uso das tecnologias digitais no ensino da álgebra escolar;
- Conhecimentos sobre o ensino das funções, em particular, sobre o trabalho escolar com a noção de proporcionalidade (direta e inversa) e o raciocínio proporcional;
- Conhecimentos sobre o trabalho docente com as equações e inequações na Educação Básica;
- Conhecimentos a respeito do trabalho escolar com o raciocínio combinatório;
- Conhecimentos sobre as relações entre aritmética e álgebra relevantes para o trabalho de educação algébrica escolar.

Apresentamos agora a nossa resposta à segunda questão de pesquisa. As contribuições da literatura especializada para o trabalho docente com a álgebra escolar são extensas. O que se procurou realizar neste estudo foi explicitar, a partir da literatura consultada, algumas formas de conhecimento matemático específico para o ensino de álgebra na Educação Básica, sem ter, evidentemente, a pretensão de cobrir tudo o que existe no campo da pesquisa nessa área. Observamos, no entanto, que os temas identificados na literatura se intersectam em vários pontos, conduzindo a uma percepção de que os conhecimentos algébricos requeridos ao professor da escola são amplos e entrelaçados.

Sabemos, por outro lado, que é impossível, em qualquer currículo de formação inicial docente, lidar com todas as demandas a que o professor de matemática deve dar resposta na sala de aula da escola. Sabemos também que cada aluno, cada escola, cada ambiente social em que a escola está inserida são, em certo sentido, únicos. Entretanto, tentamos buscar unidades que atravessam a literatura consultada e que identificamos como conhecimentos relevantes para a generalidade das práticas docentes escolares, em termos da promoção de uma educação algébrica de qualidade. Assim, concluímos que são relevantes para a prática docente de educação algébrica escolar, conhecimentos associados ao trabalho de desenvolvimento do pensamento algébrico; conhecimentos relativos aos erros dos alunos e suas origens, assim como conhecimentos associados à competência docente para lidar com as interpretações dos procedimentos e das estratégias dos alunos na realização de tarefas relacionadas com a álgebra;

conhecimentos relativos ao trabalho com a aritmética, de modo a favorecer a formação em álgebra e vice-versa, i.e., conhecimentos que promovam uma iniciação à álgebra ao mesmo tempo que reforce os saberes aritméticos; conhecimentos relativos ao desenvolvimento de trabalhos na linha de Resolução de Problemas, em suas várias potencialidades, com alunos de todas as idades e estágios escolares; saberes relacionados ao uso de tecnologias digitais no ensino da álgebra; saberes relacionados ao trabalho com funções e também com equações e inequações na escola; saberes relacionados ao trabalho escolar com o raciocínio combinatório (análise combinatória); saberes relacionados ao trabalho docente escolar com a ideia de proporcionalidade (direta e inversa), entre outros.

Conclusão

Ao estabelecermos um paralelo entre os saberes descritos acima e o que é prescrito no currículo de formação inicial em matemática examinado, verificamos que os nossos dados se intersectam, basicamente, apenas no que diz respeito a uma (pequena) parte daquilo que pertence ao subdomínio CCK, na linguagem de Ball, Thames e Phelps (2008). Essa interseção constitui, basicamente, a parte óbvia do saber profissional do professor, a qual consiste em "saber aquilo que vai ensinar a seus alunos" (resolver uma equação do segundo grau, multiplicar matrizes, calcular o determinante de uma matriz quadrada, fazer o gráfico de uma função linear etc.). Em suma, podemos dizer que o profissional licenciado pelo currículo examinado se forma, em princípio, sem ter passado por reflexões e experiências formativas importantes sobre vários aspectos fundamentais do conhecimento profissional associado ao trabalho de educação algébrica escolar[5].

Assim, concluímos que as relações por nós detectadas entre os saberes relevantes para a prática e os saberes da formação, são de forte distanciamento, intersectando-se apenas no trabalho desenvolvido na disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica e na parte correspondente ao CCK, em algumas das outras

[5] Para evitar repetição, mas sem deixar de registrar nesse momento final do relato, relembramos, nesta nota de rodapé, que a disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica apresenta em seu programa uma série de seis tópicos que transcendem o CCK e possuem interseção com o que identificamos como conhecimento relevante para a prática, de acordo com a literatura examinada. Entretanto, a carga horária dessa disciplina é de apenas 60 horas (frente a um total mais de 2800 do currículo) trabalhadas em um único dos oito semestres letivos do curso. Isso nos levou a identificar uma grande dificuldade de cobrir, com um mínimo de profundidade e amplitude, a parte de interseção potencial a que nos referimos, ainda que os temas apresentados na ementa sejam todos de alta relevância, de acordo com a literatura analisada. Em suma, poderíamos dizer que toda a preparação efetiva para o trabalho de educação algébrica escolar (além do CCK) se concentra praticamente em uma disciplina obrigatória de 60 horas.

disciplinas do currículo, observando que estas são obrigatórias também para o Bacharelado e, quase sempre, são trabalhadas em conjunto com licenciandos e bacharelandos.

Considerações Finais

A álgebra está presente, de uma forma ou de outra, em grande parte da trajetória de aprendizagem matemática dos estudantes da Educação Básica. Como vimos, desde os primeiros ciclos do Ensino Fundamental é possível trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, aprofundar esse desenvolvimento nos ciclos intermediários, até alcançar, em tese, plena familiaridade com a linguagem algébrica padrão e com os métodos e técnicas da álgebra escolar, no Ensino Médio. O professor tem um papel importante nesse longo processo, promovendo a gradual maturidade cognitiva de seus alunos, incentivando e educando, através da proposição de atividades próprias a cada estágio do desenvolvimento dessa forma fundamental de pensamento matemático.

Ao longo dos anos escolares, os estudos algébricos vão se tornando mais abstratos e o uso das letras para representar variáveis (ou valores indeterminados em geral) é introduzido. Essa passagem para uma álgebra que faz uso de simbologia universal e compacta nem sempre acontece de maneira satisfatória. Há que se lidar, então, com diversas dificuldades enfrentadas pelos alunos ao trabalhar com a linguagem algébrica padrão, dificuldades essas provenientes de diferentes fontes, mas que precisam da atenção permanente do professor. Há também que se trabalhar com a resolução de problemas, que demanda quase sempre conhecimentos algébricos, há que usar os recursos tecnológicos modernos no ensino da álgebra escolar etc.

É claro que, para realizar esse trabalho importante e necessário na educação algébrica escolar, é preciso que o professor tenha uma preparação adequada. Isso implica, a nosso ver, passar por um processo de formação que antecipe, na medida do possível, as dificuldades mais relevantes para o trabalho docente escolar e também por experiências de formação que promovam o domínio dos saberes fundamentais, demandados pela sua futura prática profissional docente. Nossos resultados mostram, no entanto, o seguinte: ao reduzir todo o conhecimento algébrico que ultrapassa aquilo que o professor vai ensinar na escola (ou seja, que ultrapassa o Conhecimento Comum do Conteúdo - CCK, na linguagem de Ball, Thames e Phelps (2008)) a uma disciplina obrigatória de apenas 60 horas; ao tratar sob a perspectiva acadêmica, e quase sempre conjuntamente com bacharelandos, os tópicos do currículo escolar relacionados à álgebra (CCK) contemplados em algumas disciplinas obrigatórias; e ao ignorar aspectos fundamentais do conhecimento matemático requerido no trabalho docente de educação algébrica escolar, o currículo do curso de Licenciatura examinado desconsidera a complexidade e a multidimensionalidade do conhecimento algébrico requerido para a atividade de ensino na escola. Assim, o currículo prescrito examinado dá indicações de que o foco do trabalho de formação matemática do licenciando, no que concerne à Álgebra, não é a preparação para a sua futura prática docente de educação algébrica na escola, mas sim a promoção de uma visão da álgebra escolar em que predominam os valores intrínsecos à matemática universitária. Sob certo ponto de vista, o licenciando poderia até dizer, parafraseando Noel Rosa, que aprender álgebra escolar deslocada do contexto de ensino e aprendizagem é fácil. Sair da Licenciatura adequadamente preparado para ensinar álgebra na escola é que é o x do problema.

Referências

ALLEVATO, Norma Gomes; ONUCHIC, Lourdes. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim Gepem**, v. 55, p. 133-154, 2009.

BALL, Deborah; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jerôme. Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. **For the Learning of Mathematics**, 29(3), 11–17, 2009.

BOOTH, Lesley. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: Coxford, Arthur; Shulte, Albert (org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 23-37, 1994.

BORASI, Rafaela. Using errors as springboards for the learning of mathematics: an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 7, n. 3-4, p. 1-14, 1985.

BRANCO, Neusa; PONTE, João Pedro. The study of pictorial sequences as a support to the development of algebraic thinking. **Far East Journal of Mathematical Education**, 8(2), 101-135, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN), 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCNEM), 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC), 2017.

CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (Eds.). **Early algebraization**: a global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, p. 5-23, 2011.

CHAPMAN, Olive. Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. **LUMAT**, 3(1), 19-36, 2015.

COELHO, Flávio Ulhôa; AGUIAR, Márcia. História da Álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, 32 (94), 2018

COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. **Zetetiké**, p.39-50, v. 3, n. 4, 1995.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erro**: *o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, Helena Noronha. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. (Org.) **Formação do professor de Matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz: Editora IPR, pp. 19-48, 2012.

CURY, Helena Noronha. Formação de professores de matemática e análise de erros: uma relação indissociável. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas, Rio Grande do Sul, 2013. **Anais**... Canoas: ULBRA, 2013.

DEMONTY, Isabelle.; VLASSIS, Joelle.; FAGNANT, Annick. Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. **Educational Studies in Mathematics**, 99:1–19, 2018.

DRIJVERS, Paul (ed.). **Secondary Algebra Education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2011.

EGODAWATTE, Gunawardena. **Secondary school students' misconceptions in algebra**. Doctor of Philosophy Dissertation. Department of Curriculum, Teaching and Learning, University of Toronto, Canada, 2011.

FERREIRA, Maria Cristina Costa. **Conhecimento Matemático específico para o ensino na Educação Básica**: a álgebra na escola e na formação do professor. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, UFMG, 2014.

FIORENTINI, Dario; CASTRO, Franciana Carneiro. Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. In: FIORENTINI, Dario (org.). **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras: 121-156, 2003.

GAUTHIER, Clermont et al. **Por uma teoria da pedagogia**: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí: Unijuí, 1998.

GRAEBER, Anna. Mathematics and the reality of the student: bringing the two together. In: DAVIS, Robert.; MAHER, Carolyn. (eds.) **Schools, Mathematics and the world of reality**. Boston: Allin and Bacon, p.213-236, 1993.

GRANELL, Carmen Gomez. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana.; TOLCHINSKY, Liliana**. Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 1997.

GRAY, Eddie; TALL, David. Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. **Mathematics Teaching**, n. 142, p. 6-10, 1993.

KUCHEMANN, Dietmar. Algebra. In: HART, Katherine. **Children's understanding of mathematics.** London: Murray, p.102 - 119, 1981.

LESTER, Frank Jr. Thoughts about research on mathematical problem- solving instruction. **The Mathematics Enthusiast**, volume 10 (nos. 1&2), p. 245-278, 2013.

LILJEDAHL, Peter et al. **Problem solving in mathematics education**. ICME-13 topical surveys. Berlin: Springer International Publishing, 2016.

LOCHHEAD, Jack.; MESTRE, José. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert (Org.). **As Ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, p.144-154, 1994.

MASON, John. Structuring Structural Awareness: A Commentary on Chapter 13. In: BUSSI, Maria Bartolini; SUN, Xu Hua (eds.), **Building the Foundation**: Whole Numbers in the Primary Grades, New ICMI Study Series, https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_14, 2018.

MASON, John; BURTON, Leone; STACEY, Kaye. **Thinking mathematically**. Harlow, England: Pearson, 1982/2010.

MIGUEL, Antonio.; FIORENTINI, Dario.; MIORIM, Mariangela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-posições**, vol. 3, n. 1, Campinas, SP, 1992.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor**: Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NCTM. **An agenda for action**: Recommendations for school mathematics of the l980's. Reston, VA, 1980.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA, 2000.

OLIVEIRA, Clarissa Alves**. Interpretação dos enunciados de problemas matemáticos**: um estudo com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior de Minas Gerais. Dissertação (Mestradoem Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, 2018.

ONUCHIC, Lourdes. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 199-218, 1999.

PIÑEIRO, Juan Luis; CASTRO-RODRIGUEZ, Elena; CASTRO, Enrique. Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. **PNA** 13(2), 104-129, 2019.

PINTO, Neusa Bertoni. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino da matemática elementar. Papirus: Campinas, 2000.

PONTE, João Pedro; CANAVARRO, Ana Paula. A resolução de problemas nas concepções e práticas dos professores. In: FERNANDES, Domingos; BORRALHO, Antonio; AMARO, Gertrudes. **Resolução de problemas**: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular. Évora: Instituto de

Inovação Educacional p.197-211, 1994. Disponível em http://hdl.handle.net/10174/17203 Acesso em: 31/07/2021

PONTE, João Pedro.; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/7105. Acesso em: 31/07/2021

RADATZ, Hendrik. Students' errors in the mathematical learning process: a survey. **For the Learning of Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 16-20, 1980.

RADFORD, Luis. Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotics perspective. Plenary 1, **Proceedings** of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon, France, 2009. Disponível em www.inrp.fr/editions/cerme6. Acesso em: 31/07/2021

RADFORD, Luis. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, 4(2), 37-62, 2010.

RADFORD, Luis. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, Jinfa.; KNUTH, Eric. (Eds.). **Early algebraization**: a global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, p. 303-322, 2011.

SCHOENFELD, Alan. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: Grows, D. (ed.) **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning** (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan, 1992.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

VERGNAUD, Gérard. The Theory of Conceptual Fields. **Human Development** 52:83–94, 2009.

Submetido em junho de 2021.

Aceito em julho de 2021.