

Carolina Rodrigues Fonseca

**Índices de Poder para Jogos de Votação com
Peso na Presença de Incompatibilidade entre os
Jogadores**

Mariana

2018

Carolina Rodrigues Fonseca

Índices de Poder para Jogos de Votação com Peso na Presença de Incompatibilidade entre os Jogadores

Dissertação apresentada para obtenção do
título de Mestre.

Universidade Federal de Ouro Preto- UFOP
Departamento de Ciências Econômicas-DEECO
Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada

Orientador: Antônio Francisco Neto

Mariana
2018

F676i Fonseca, Carolina Rodrigues .
Índices de Poder para Jogos de Votação com Peso na Presença de
Incompatibilidade entre os Jogadores [manuscrito] / Carolina Rodrigues
Fonseca. - 2018.
86f.: il.: tabs.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Francisco Neto.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Sociais Aplicadas. Departamento de Ciências Econômicas e
Gerenciais. Programa de Pós-Graduação em Economia.
Área de Concentração: Economia Aplicada.

1. Poder - Teses. 2. Banzhaf, Wolfgang, 1955- - Teses. 3. Análise
combinatória - Teses. 4. Processo decisório - Teses. I. Francisco Neto, Antônio .
II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 330.101.8

Carolina Rodrigues Fonseca

ÍNDICES DE PODER PARA JOGOS DE VOTAÇÃO COM PESO
NA PRESENÇA DE INCOMPATIBILIDADE ENTRE OS JOGADORES.

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada do Instituto de Ciências Sociais e Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia Aplicada, aprovado em 26 de abril de 2018.

Banca Examinadora:



Prof.(a). Dr.(a). Antônio Francisco Neto - Orientador (UFOP)



Prof.(a). Dr.(a). Adécio Carlos de Oliveira (UFSJ)



Prof.(a). Dr.(a). Martin Harry Vargas Barrenechea (UFOP)

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Antônio, por toda dedicação e conhecimento compartilhado. À banca pela disponibilidade para a avaliação desse trabalho. Aos colegas de turma, em especial Jordana e Ariane, por todos os momentos de superação e companheirismo. À prof. Fernanda por todos os conselhos durante o curso. Aos novos amigos que o programa me proporcionou, Marcos e Juliana. A minha família e ao Marcos pela compreensão e apoio.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma nova abordagem algébrica-combinatória para analisar certos aspectos dos Jogos de Votação com Peso (JVP). Nosso primeiro resultado, compreende um método baseado em função geratriz para calcular os índices de poder de Shapley-Shubik e Banzhaf em JVP com jogadores incompatíveis, ou seja, os jogadores que estão conectados por elos em um grafo não podem cooperar. Nosso método é baseado em coalizões vencedoras mínimas e usa função geratriz definida em certos quocientes polinomiais de módulos de ideais de anéis polinomiais. O método é suficientemente geral para incluir Jogos de Votação com Peso Múltiplos (JVPM). Usando a função geratriz para os polinômios simétricos elementares, mostramos que nossa abordagem unifica trabalhos anteriores sobre o cálculo dos índices de Banzhaf e Shapley para JVP em termos de coalizões vencedoras mínimas.

Nosso segundo resultado, compreende o uso da análise de partição, mais precisamente o cálculo Omega de MacMahon, para construir função geratriz que, para um determinado conjunto prescrito de coalizões vencedoras mínimas, constrói todos os JVPM associados. Isto é de especial relevância para a construção de jogos de votação com ou sem jogadores incompatíveis.

Terminamos este trabalho com um estudo de caso a cerca da distribuição de poderes nas capitais dos estados brasileiros para estimar o índice de poder regional dos dois últimos partidos correspondentes aos dois últimos presidentes, i.e., PT e MDB.

Palavras-chave: Índices de Poder, Shapley-Shubik, Banzhaf, Função Geratriz, Análise de Partição.

Abstract

In this work, we introduce a new algebraic-combinatorial framework to analyse certain aspects of weighted voting games. Our first result comprises a generating function based method to compute the Shapley-Shubik and Banzhaf power indices of weighted voting games with incompatible players, i.e., players connected by edges of a graph are not allowed to cooperate. Our method is based on minimal winning coalitions and uses a couple of generating functions defined in certain quotients of polynomial rings module polynomial ideals. The method is sufficiently general to include multiple voting games. Using the generating function for the elementary symmetric polynomials, we show that our approach unifies previous work concerning the computation of the Banzhaf and Shapley indices of simple games in terms of minimal winning coalitions.

Our second result comprises the use of partition analysis, more precisely MacMahon's Omega calculus, to construct generating functions which, for a given prescribed set of minimal winning coalitions, construct all multiple weighted voting games. This is of special relevance to the design of voting games with or without incompatible players.

We close this work with a case study concerning the distribution of power in the capitals of all the Brazilian states in order to estimate the regional power index of the last two parties corresponding to the last two presidents, i.e., PT e MDB.

Keywords: Power Indices, Shapley-Shubik, Banzhaf, Generating Function, Partition Analysis.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Preferência de cooperação dos jogadores	43
--	----

Lista de tabelas

Tabela 1 – Índice de Poder	64
--------------------------------------	----

Lista de abreviaturas e siglas

JS	Jogos Simples
JVP	Jogos de Votação com Peso
JVPM	Jogos de Votação com Peso Múltiplos
APM	Análise de partição de MacMahon
\mathcal{W}	Coalizões vencedoras
\mathcal{M}	Coalizões mínimas vencedoras
IP	Índice de Poder
CMV	Coalizões Mínimas Vencedoras
S	Índice de Shapley
B	Índice de Banzhaf

Lista de símbolos

λ	Letra grega minúscula lambda
μ	Letra grega minúscula mu
ν	Letra grega minúscula nu
ϕ	Letra grega minúscula phi
ρ	Letra grega minúscula rho
σ	Letra grega minúscula sigma
Ω	Letra grega Omega
\in	Pertence
\notin	Não Pertence
\subseteq	Está contido
Π	Produto
Σ	Soma
\mathbb{R}	Números Reais
\cup	União
\cap	Interseção
\emptyset	Conjunto vazio
\mathbb{N}_0	Conjunto dos números inteiros não-negativos

Sumário

	Introdução	21
	1 BREVE REVISÃO SOBRE CONCEITOS MATEMÁTICOS	24
1.1	Função geratriz	24
1.2	Breve revisão sobre Análise de Partição de MacMahon	24
1.3	A recorrência fundamental	30
1.4	A prática do pacote Omega no programa Mathematica	34
1.4.1	O pacote Omega	34
1.4.2	Como usar o Pacote Omega	35
1.5	Quocientes de anéis polinomiais	36
	2 JOGOS DE VOTAÇÃO	40
2.1	Definição de Jogos Simples	40
2.2	Definição de Jogos de Votação com Peso	41
2.2.1	Coalizões mínimas	42
2.3	Incompatibilidade de jogadores	42
	3 ÍNDICE DE PODER	45
3.1	Definição dos Índices	45
3.1.1	Índice de poder Banzhaf-Coleman	45
3.1.2	Índice de poder de Shapley-Shubik	47
3.1.3	Índice de poder de Deegan Packel	47
3.1.4	Índice de poder Public Good	48
3.2	Calculando Índices de poder a partir de coalizões mínimas	48
3.2.1	Fundamentos da álgebra elementar	49
3.3	Funções geratrizes para calcular os índices de Banzhaf e Shapley-Shubik de jogos de votação múltiplos com peso e jogadores incompatíveis	51
3.4	Problema Inverso de Índices de Poder usando APM	58
	4 ESTUDO DE CASO: CÂMARA DE VEREADORES	61
4.1	Câmara Municipal- Capitais dos Estados brasileiros	61
	5 CONCLUSÃO	65

REFERÊNCIAS	67
ANEXOS	71
A – COMPOSIÇÃO DOS JOGOS PARA AS CAPITALS BRASILEI- RAS	72
B – PACOTE OMEGA	83

Introdução

Um dos maiores problemas em relação aos Índices de Poder (IP) na teoria dos jogos cooperativos é o dispositivo de métodos eficientes para sua computação. De fato, como é bem conhecido, começando com a definição dos IP de Shapley-Shubik (SS) ou Banzhaf (B), é necessário $\mathcal{O}(n!)$ passos para a computação com n sendo o número de jogadores. Portanto, torna-se impraticável calcular os índices acima mencionados começando com suas definições quando um grande número de jogadores estão envolvidos e outras rotas são necessárias. Desta forma, função geratriz, uma ferramenta recorrente de análise combinatória (WILF, 1990), mostrou ser uma maneira eficiente de calcular IP em Jogos de Votação com Peso (JVP). Mais precisamente, as funções geratrizes foram usadas para calcular eficientemente vários IP, como Banzhaf e Shapley-Shubik (BILBAO et al., 2000; ALGABA et al., 2003), Deegan-Packel e Public Good (ALONSO-MEIJIDE; FREIXAS; MOLINERO, 2012), etc. Recordamos que o cálculo de IP relativos às restrições na formação da coalizão podem ser reformulados no contexto de função geratriz, por exemplo, grafos e cooperação em jogos (FERNÁNDEZ et al., 2002), IP e jogadores incompatíveis (ALONSO-MEIJIDE; CASAS-MÉNDEZ; FIESTRAS-JANEIRO, 2015), IP e formação de blocos (ALONSO-MEIJIDE; BOWLES, 2005), (ALONSO-MEIJIDE et al., 2009), (RODRÍGUEZ-VEIGA; NOVOA-FLORES; CASAS-MÉNDEZ, 2016), etc.

Além do método de função geratriz, existem outros métodos que calculam IP de maneira simples. De especial relevância para este trabalho, mencionamos o cálculo do valor de Banzhaf (B) e Shapley (S) de jogos simples em termos de Coalizões Mínimas Vencedoras (CMV). Na verdade, em Einy (1988), os valores de B e S foram calculados usando uma estrutura de rede subjacente a jogos simples. Kirsch e Langner (2010), utilizaram uma combinação de filtros principais e o princípio de inclusão-exclusão para obter representações mínimas dos índices B e S. Em Lange e Kóczy (2013), a fórmula de inversão Möbius, juntamente com a representação dos índices B e S usando dividendos, foi a chave para obter a representação acima dos índices B e S. Esta abordagem é especialmente útil quando o conjunto de jogadores é grande e o conjunto de CMV (\mathcal{M}) é pequeno. Das considerações acima, observamos a diversidade de métodos utilizados para obter a representação dos

índices B e S a partir de \mathcal{M} .

Caso exista incompatibilidade entre os jogadores no sentido de [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#), enfrentamos o problema fundamental de obter um jogo restrito que pode não ser ponderado, portanto, invalidando a aplicação direta da metodologia de [Bilbao et al. \(2000\)](#) para JVP com incompatibilidade em um amplo contexto. Embora, como já foi observado anteriormente ([ALONSO-MEIJIDE; CASAS-MÉNDEZ; FIESTRAS-JANEIRO, 2015](#)), pode acontecer que os jogos iniciais e restritos sejam ponderados ou apenas o jogo restrito seja ponderado. Em ambos os casos, a abordagem de [Bilbao et al. \(2000\)](#) pode ser aplicada diretamente. Portanto, para abordar o cálculo de IP através de função geratriz na presença de incompatibilidade é necessário uma nova construção. [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#) apresentaram uma abordagem que utiliza função geratriz de uma forma mais avançada, o que requer o cálculo dos cliques máximos do grafos de incompatibilidades e somas múltiplas elaboradas associadas (ver Proposições 9 e 12 de [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#)). Neste trabalho, apresentaremos uma nova abordagem para calcular IP com jogadores incompatíveis no sentido de [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#). Nossa abordagem compreende a construção de novas funções geratrizes para obter representações dos IP B e S para jogos simples em termos de coalizões mínimas vencedoras ([EINY, 1988](#); [KIRSCH](#); [LANGNER, 2010](#); [LANGE](#); [KÓCZY, 2013](#)). Nossa abordagem combina ideias de [Alonso-Meijide, Freixas e Molinero \(2012\)](#), [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#), [Einy \(1988\)](#), [Kirsch e Langner \(2010\)](#), [Lange e Kóczy \(2013\)](#), [Cox, Little e O'shea \(2007\)](#). Observamos que a abordagem apresentada por este trabalho fornece uma obtenção direta dos índices B e S e estabelece uma estreita conexão entre os trabalhos [Einy \(1988\)](#), [Kirsch e Langner \(2010\)](#), [Lange e Kóczy \(2013\)](#). Mais precisamente, vamos construir uma estrutura unificada para as representações dos índices B e S de [Einy \(1988\)](#), [Kirsch e Langner \(2010\)](#), [Lange e Kóczy \(2013\)](#) mostrando que são consequências da função geratriz para os polinômios simétricos elementares ([COX; LITTLE; O'SHEA, 2007](#)). Além disso, essa abordagem acomoda Jogos de Votação com Peso Múltiplos (JVPM) no sentido de [Algaba et al. \(2003\)](#) com incompatibilidade e não há necessidade de calcular cliques máximos do grafo dual ao grafo que descreve a incompatibilidade entre os jogadores como feito por [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#).

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 1, é apresentado o método de Análise de Partição de MacMahon (APM) e alguns conceitos matemáticos. No capítulo 2, apresentamos a parte conceitual de JVP. No capítulo 3, é apresentado a definição dos índices de poder, incompatibilidade de jogadores, provamos uma representação dos IP B e S para jogos simples em termos de Coalizões Mínimas Vencedoras (CMV) e mostramos como a construção de função geratriz que, para um determinado conjunto prescrito de coalizões vencedoras mínimas, constrói todos os JVPM associados. No capítulo 4, um

estudo de caso é apresentado ilustrando o método exposto. Este trabalho finaliza no capítulo 5 com algumas observações finais.

Capítulo 1

Breve Revisão sobre Conceitos Matemáticos

1.1 Função geratriz

Uma sequência de números reais $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ pode ser representada pela função na variável em t

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

Esta função, $f(t)$, é chamada de função geratriz da sequência, e pode ser um polinômio em t envolvendo uma soma finita ou uma série em t envolvendo uma soma infinita. Note que nessa função o termo da sequência na posição j , i.e., a_j é o coeficiente de t^j . Por exemplo, considere o produto finito $\prod_{j=1}^n (1 + b_j t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$, com $b_j \in \mathbb{R}$, onde $a_0 = 1$ e para $j > 0$, a_j é dado por:

$$a_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_j}$$

Se todos os valores de b_j são iguais a 1, temos que $(1 + t)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j$. Assim sendo, a função $f(t) = (1 + t)^n$ gera a sequência binomial $a = \left(\binom{n}{j} \right)_{j=0,1,\dots,n}$. Funções geratrizes são muito utilizadas em problemas de contagem ([WILF, 1990](#)) e fornecem uma representação conveniente do ponto de vista computacional, e.g., funções geratrizes têm uma complexidade de espaço baixa ([ALONSO-MEIJIDE; FREIXAS; MOLINERO, 2012](#)).

1.2 Breve revisão sobre Análise de Partição de MacMahon

Uma partição de um número inteiro positivo n é um multiconjunto $\{n_1, \dots, n_i\}$, i.e., um conjunto onde repetições de elementos são permitidas, tal que $n = n_1 + \dots + n_i$ ([BECK; ROBINS, 2007](#)). Os números n_1, \dots, n_i são denominados partes da partição. Por

exemplo, o número quatro pode ser escrito de cinco maneiras distintas $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ e temos as partições $\{4\}$, $\{3, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 1, 1\}$, $\{1, 1, 1, 1\}$.

MacMahon introduziu o método de Análise de Partições, em [MacMahon \(1960\)](#). Este método está baseado no uso de um operador linear Omega agindo em funções geratrizes. Este método computacional pode ser usado para resolver sistemas envolvendo desigualdades e equações lineares homogêneas e diofantinas. Nesse capítulo mostraremos o método de APM fazendo uso dos operadores lineares Ω_{\geq} e $\Omega_{=}$, juntamente com a implementação da álgebra computacional por meio do uso do pacote Omega¹.

Apresentamos a seguir um exemplo que pode ser tratado usando o método de análise de partições.

Teorema 1.1. *De uma forma geral, o número de partições de um número inteiro positivo n pode ser escrito na forma: $n = b_j + b_{j-1} + \dots + b_1$ onde*

$$\frac{b_j}{j} \geq \frac{b_{j-1}}{j-1} \geq \dots \geq b_1 \geq 0$$

e

$$b_j - b_{j-1} + \dots + (-1)^{j-1} b_1 = m$$

é igual ao número de partições possíveis de n em exatamente m partes ímpares cada uma menor ou igual a $2j - 1$.

O método de Análise de Partições de MacMahon (APM) consiste na aplicação do operador linear Omega Ω_{\geq} , eliminando a variável λ que contenha expoentes não negativos. Este método é eficiente para descrever soluções de um sistema de equações e desigualdades diofantinas.²

Definição do operador Omega Ω_{\geq} segundo [Andrews, Paule e Riese \(2001\)](#) :

Definição 1.2. O operador Ω_{\geq} é definido em função de expansões múltiplas convergentes

$$F = \sum_{a_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{a_i=-\infty}^{\infty} f_{a_1 \dots a_i} \lambda_1^{a_1} \dots \lambda_i^{a_i} \quad (1.1)$$

numa vizinhança aberta do círculo $|\lambda_i| = 1$. A ação do operador Ω_{\geq} é dada por

$$\frac{\lambda}{\Omega_{\geq}} F = \sum_{a_1=0}^{\infty} \dots \sum_{a_i=0}^{\infty} f_{a_1 \dots a_i} \quad (1.2)$$

¹ Ver seção 1.2

² Equações e desigualdades diofantinas são sistemas que envolvem variáveis inteiras e não negativas.

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_a)$. Note que o operador é linear e

$$\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda} F = \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda_1} \left(\dots \left(\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda_a} F \right) \dots \right) = \underset{\geq}{\Omega}^{\sigma\lambda} F$$

onde σ é uma permutação dos componentes de λ .

Portanto, no que se segue, restringimos nossa análise à eliminação de uma única variável λ , pois o caso geral pode ser deduzido eliminando uma variável de cada vez.

Nas aplicações, existe outro operador útil.

Definição 1.3. Para F como na Eq. (1.1) definimos

$$\underset{=}{\Omega}^{\lambda} F = f_{0\dots 0} \quad (1.3)$$

Observação 1.4. Nos restringimos neste trabalho à análise dos operadores $\underset{=}{\Omega}$ e $\underset{\geq}{\Omega}$ já que os outros casos são recuperados partindo destes casos. De fato, temos $\underset{\geq}{\Omega} F(\lambda) = \underset{=}{\Omega} F(\lambda^{-1})$ e $\underset{>}{\Omega} F(\lambda) = \underset{\geq}{\Omega} F(\lambda) - \underset{=}{\Omega} F(\lambda)$.

Como apontado por [Andrews, Paule e Riese \(2001\)](#) é importante trabalhar com expressões convergentes para evitar ambiguidades. De fato, por um lado temos

$$\underset{\geq}{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

O operador $\underset{\geq}{\Omega}$ elimina a variável λ , por apresentar expoente positivo, e pela soma infinita de uma série geométrica³ temos como resultado o termo $1/(1-q)$. Por outro lado, se considerarmos expressões formais teríamos

$$0 = -\underset{\geq}{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n} \lambda^{-n} = -\underset{\geq}{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{-1} \lambda^{-1}}{1 - \frac{1}{q\lambda}} = \underset{\geq}{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q\lambda} = \frac{1}{1-q},$$

o que é um absurdo. Para obter a primeira igualdade usamos a Definição 1.2. No nosso caso, quando trabalhamos com somas finitas nossas funções satisfazem automaticamente as Definições 1.2 e 1.3.

Para evitar possíveis confusões que podem ser feitas com a atuação do $\underset{\geq}{\Omega}$ faremos a seguinte distinção: os parâmetros onde se tem a atuação do operador $\underset{\geq}{\Omega}$ serão representados pelas letras do meio do alfabeto grego (λ, μ, ν), já os parâmetros onde não tem atuação do operador $\underset{\geq}{\Omega}$ serão representados pelas letras do alfabeto latino. Podemos garantir que a Definição 1.2 esteja matematicamente bem posta, desde que estabeleçamos que as funções

³ Série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

onde o operador Ω_{\geq} seja aplicado não apresentem singularidades para o termo λ_i . Na prática, os argumentos que surgem a partir do Ω_{\geq} equivalem a

$$\frac{P(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_r)}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i \lambda_1^{v_1(i)} \dots \lambda_r^{v_r(i)})} \quad (1.4)$$

onde P é um polinômio de Laurent nas variáveis $n + r$ e $v_h(i)$ são inteiros não necessariamente positivos. Enquanto x_i (que pode ser o produto de potência em outra variável) assume valores próximos a 0 e os λ 's como na Definição 1.2, garantimos que a expressão em 1.4 não apresente qualquer singularidade e, desta forma APM pode ser aplicada.

Consideremos $j = 3$ no Teorema 1.1 para obtermos

$$\frac{1}{(1 - qx)(1 - q^3x)(1 - q^5x)} \quad (1.5)$$

O coeficiente de $x^m q^n$ representam as partições de n em m partes ímpares cada uma menor ou igual a 5. Portanto, o coeficiente de $x^m q^n$ em:

$$\Omega_{\geq} \sum_{b_1, b_2, b_3 \geq 0} \lambda_1^{2b_3 - 3b_2} \lambda_2^{b_2 - 2b_1} x^{b_3 - b_2 + b_1} q^{b_1 + b_2 + b_3} \quad (1.6)$$

gera exatamente o número de partições quando fixamos $j = 3$, pois o operador Ω_{\geq} viabiliza apenas as partições $b_1 + b_2 + b_3 = n$ por ter todos os expoentes positivos, inserimos então condições para que $2b_3 - 3b_2 \geq 0$ e $b_2 - 2b_1 \geq 0$. A série geométrica obtida ao somar os termos da expressão anterior é dada por

$$\Omega_{\geq} \sum_{b_1 \geq 0} \left(\frac{qx}{\lambda_2^2} \right)^{b_1} \sum_{b_2 \geq 0} \left(\frac{\lambda_2 q}{\lambda_1^3 x} \right)^{b_2} \sum_{b_3 \geq 0} (\lambda_1^2 qx)^{b_3}.$$

Podemos reescrever como

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{\left(1 - \frac{qx}{\lambda_2^2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2 q}{\lambda_1^3 x}\right) (1 - \lambda_1^2 qx)} \quad (1.7)$$

Temos então $n = 3$, $x_1 = x_3 = qx$, $x_2 = q/x$. Para provar o Teorema 1.1 temos que mostrar a igualdade das expressões geradas em (1.5) e (1.7). Para isso usamos o seguinte Lema:

Lema 1.5. Para qualquer $s \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x) \left(1 - \frac{y}{\lambda^s}\right)} = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^s y)}$$

Demonstração. Ao aplicar o operador Omega, temos a eliminação dos λ 's com expoentes negativos:

$$\underset{\geq}{\Omega} \sum_{b_1, b_2 \geq 0} (x\lambda)^{b_1} \left(\frac{y}{\lambda^s}\right)^{b_2} = \underset{\geq}{\Omega} \sum_{b_1, b_2 \geq 0} \lambda^{b_1 - sb_2} x^{b_1} y^{b_2}.$$

Fazendo a mudança $b_3 = b_1 - sb_2$ obtemos

$$\underset{\geq}{\Omega} \sum_{b_2, b_3 \geq 0} \lambda^{b_3} x^{b_3 + sb_2} y^{b_2} = \sum_{b_2, b_3 \geq 0} x^{b_3} (x^s y)^{b_2} = \frac{1}{(1-x)(1-x^s y)}.$$

□

Aplicamos o Lema 1.5 para eliminar o parâmetro λ_2 . De forma similar, podemos eliminar o parâmetro λ_2 . Dessa forma, chegamos a expressão dada por (1.5). Essa eliminação dos parâmetros pode ser feita de forma automática pelo Pacote Omega como descreveremos em mais detalhes na seção 1.3. A aplicação do pacote Omega permite que o método de MacMahon possa ser implementado facilmente no computador, possibilitando, desta forma, a execução de cálculos computacionais de maior porte.

Em termos gerais, dado o sistema linear diofantino $\mathbf{Ac} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{Bc} \geq \mathbf{b}$ com $\mathbf{A}_{j \times n}$ e $\mathbf{B}_{k \times n}$ usamos a expressão Omega

$$F(\mathbf{x}) = \underset{\geq}{\Omega} \underset{\geq}{\Omega} \sum_{\mathbf{c} \geq \mathbf{0}} \lambda^{Ac - \mathbf{a}} \mu^{Bc - \mathbf{b}} \mathbf{x}^{\mathbf{c}} \quad (1.8)$$

em nossos cálculos. Neste trabalho, as desigualdades para os vetores são entendidas em termos das componentes do vetor, i.e., $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ significa $a_i \leq b_i$ para $i = 1, \dots, n$ e $\lambda^{\mathbf{a}} = \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}$.

Deixe-nos explicar a principal ideia por trás equação (1.8). Ao somar \mathbf{c} apenas os termos $\mathbf{Ac} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{Bc} \geq \mathbf{b}$ serão considerados pelos operadores $\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda}$ e $\underset{\geq}{\Omega}^{\mu}$, respectivamente. Finalmente, usando as Definições 1.2 e 1.3, obtemos um polinômio em \mathbf{x} cujo coeficiente conta o número de soluções do sistema diofantino linear $\mathbf{Ac} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{Bc} \geq \mathbf{b}$. Usamos também a notação $\mathbf{i} = (i, \dots, i)$, e.g., $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, etc.

Aqui é dada uma aplicação simples da expressão (1.8) antes de considerar JVP no próximo capítulo. Consideramos agora o número de soluções de uma equação diofantina apresentado em Faaland (1972) que é particularmente relevante na programação inteira. O resultado principal de Faaland (1972) é uma generalização do resultado de Mignosi ao obter uma relação de recursiva para o número de soluções $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ da equação diofantina

$$\mathbf{a}^T \mathbf{c} = a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n = a$$

com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ sujeito a $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}$.

Proposição 1.1. O número de soluções $\mathbf{a}^T \mathbf{c} = a$ sujeito a $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ é dado pelo coeficiente x^a em

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{b_i} x^{ja_i} \right).$$

Demonstração. Temos

$$F(x) = \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}} \lambda^{\mathbf{a}^T \mathbf{c} - a} x^{\mathbf{a}^T \mathbf{c}} = \lambda^{-a} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{b_i} (\lambda x)^{ja_i} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{b_i} x^{ja_i} \right),$$

onde os únicos termos que sobrevivem são aqueles que o expoente de x é a . \square

Corolário 1.6. O número de soluções de $\mathbf{a}^T \mathbf{c} = a$ é dado pelo coeficiente x^a de

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{ja_i} \right).$$

Demonstração. Considere $b_i \rightarrow \infty$ na Proposição 1.1. \square

Exemplo 1.7. Consideramos o sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = n \\ a_1 \geq a_2 \\ a_2 \leq a_3. \end{cases}$$

Então, a função geratriz do sistema é dada por

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{n}} \lambda^{a_1 + a_2 + a_3 - n} \mu_1^{a_1 - a_2} \mu_2^{a_3 - a_2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \\ &= \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \leq \mathbf{n}} \lambda^{b + 2a_2 + a_3 - n} \mu_1^b \mu_2^{a_3 - a_2} x_1^{a_2 + b} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \\ &= \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \leq \mathbf{n}} \lambda^{b + 2a_2 + a_3 - n} \mu_2^{a_3 - a_2} x_1^{a_2 + b} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \\ &= \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{c} \leq \mathbf{n}} \lambda^{b + 3a_2 + c - n} \mu_2^c x_1^{a_2 + b} x_2^{a_2} x_3^{c + a_2} \\ &= \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{c} \leq \mathbf{n}} \lambda^{b + 3a_2 + c - n} x_1^{a_2 + b} x_2^{a_2} x_3^{c + a_2} \\ &= \sum_{b + 3a_2 + c = n} x_1^{a_2 + b} x_2^{a_2} x_3^{c + a_2}, \end{aligned}$$

usando Definições 1.2 e 1.3 e fazendo as substituições $a_1 - a_2 = b$ na primeira linha e $a_3 - a_2 = c$ na terceira linha.

1.3 A recorrência fundamental

Nessa seção mostraremos o uso de APM com o objetivo de generalizar o método para um algoritmo puro. Para esse fim, começamos por uma lista de uma versão condensada de seu livro [MacMahon \(1960\)](#). A primeira igualdade da lista a seguir refere-se ao Lema 1.5:

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x) \left(1 - \frac{y}{\lambda^s}\right)} = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^s y)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda^s x) \left(1 - \frac{y}{\lambda}\right)} = \frac{1 + xy \frac{1 - y^{s-1}}{1 - y}}{(1 - x)(1 - xy^s)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x) \left(1 - \frac{y}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)} = \frac{1}{(1 - x)(1 - xy)(1 - xz)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x)(1 - \lambda y) \left(1 - \frac{z}{y}\right)} = \frac{1 - xyz}{(1 - x)(1 - y)(1 - xz)(1 - yz)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x)(1 - \lambda y) \left(1 - \frac{z}{\lambda^2}\right)} = \frac{1 + xyz - x^2 yz - xy^2 z}{(1 - x)(1 - y)(1 - x^2 z)(1 - y^2 z)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda^2 x) \left(1 - \frac{y}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)} = \frac{1 + xy + xz + xyz}{(1 - x)(1 - xy^2)(1 - xz^2)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda^2 x)(1 - \lambda y) \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)} = \frac{1 + xz - xyz - xyz^2}{(1 - x)(1 - y)(1 - yz)(1 - xz^2)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x)(1 - \lambda y)(1 - \lambda z) \left(1 - \frac{w}{z}\right)} = \frac{1 - xyw - xzw - yzw + xyzw + xyzw^2}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - xw)(1 - yw)(1 - zw)},$$

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x)(1 - \lambda y) \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{w}{\lambda}\right)} = \frac{1 - xyz - xyw - xyzw + xy^2 zw + x^2 yzw}{(1 - x)(1 - y)(1 - xz)(1 - xw)(1 - yz)(1 - yw)}.$$

De um forma geral, a verificação das igualdades expostas são feitas pela seguinte expressão geral, onde m e n são números inteiros não negativos e a é qualquer número inteiro:

$$\frac{\Omega}{\geq} \frac{\lambda^a}{(1 - x_1 \lambda) (1 - x_2 \lambda) \cdots (1 - x_n \lambda) \left(1 - \frac{y_1}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{y_2}{\lambda}\right) \cdots \left(1 - \frac{y_m}{\lambda}\right)}. \quad (1.9)$$

Quando analisamos as nove igualdades mostradas acima pode parecer à primeira vista que a expressão geral (1.7) não pode ser aplicada. No entanto podemos fazer uso de algumas das identidades para reescrevermos termos do tipo $(1 - X\lambda^r)$ ou $(1 - Y\lambda^{-s})$ de

tal forma que colocamos nossas expressões em um formato adequado para ser considerado como um caso especial da (1.7). De fato, temos as identidades

$$(1 - x\lambda^r) = \prod_{j=0}^{r-1} (1 - \rho^j X^{1/r} \lambda) \quad \text{e} \quad (1 - Y\lambda^{-s}) = \prod_{j=0}^{s-1} (1 - \sigma^j Y^{1/s} \lambda^{-1}), \quad (1.10)$$

onde $\rho = e^{2\pi i/r}$ e $\sigma = e^{2\pi i/s}$. O teorema das funções simétricas assegura que as raízes fracionadas de X e Y não aparecem na resposta final. Observamos no numerador de (1.7) um polinômio de Laurent em λ . Previamente ao resultado final, lembramos a função geratriz das funções simétricas homogêneas denotadas por $h_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e definidas pela função geratriz a seguir

$$\sum_{j=0}^{\infty} h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) t^j = \frac{1}{(1 - tx_1)(1 - tx_2) \cdots (1 - tx_n)}.$$

Por fim, eliminamos os termos em que n e m sejam iguais a 0:

Lema 1.8. Para qualquer número inteiro a

$$\begin{aligned} \Omega_{\geq} \frac{\lambda^a}{(1 - x_1 \lambda)(1 - x_2 \lambda) \cdots (1 - x_n \lambda)} &= \Omega_{\geq} \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \lambda^{a+j} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)}, & \text{se } a \geq 0 \\ \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)} - \sum_{j=0}^{-a-1} h_j(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{se } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos:

Lema 1.9. Para qualquer a inteiro,

$$\begin{aligned} \Omega_{\geq} \frac{\lambda^a}{\left(1 - \frac{y_1}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{y_2}{\lambda}\right) \cdots \left(1 - \frac{y_m}{\lambda}\right)} &= \Omega_{\geq} \sum_{j=0}^{\infty} h_j(y_1, y_2, \dots, y_m) \lambda^{a-j} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } a < 0, \\ \sum_{j=0}^a h_j(y_1, y_2, \dots, y_m), & \text{se } a \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

O teorema a seguir nos mostra como ocorre a reincidência do operador Ω_{\geq} :

Teorema 1.10. ("Recorrência Fundamental"): Para n e m positivos inteiros e qualquer a inteiro

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega}{\geq} \frac{\lambda^a}{(1-x_1\lambda)(1-x_2\lambda)\cdots(1-x_n\lambda)\left(1-\frac{y_1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y_2}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{y_m}{\lambda}\right)} \\ &= \frac{P_{n,m,a}(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)}{\prod_{i=1}^n(1-x_i)\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m(1-x_iy_j)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para $n > 1$, temos

$$\begin{aligned} P_{n,m,a}(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m) &= \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \\ &\times \left(x_n(1-x_{n-1})\prod_{j=1}^m(1-x_{n-1}y_j)P_{n-1,m,a}(x_1,\dots,x_{n-2},x_n;y_1,\dots,y_m) \right. \\ &\quad \left. - x_{n-1}(1-x_n)\prod_{j=1}^m(1-x_ny_j)P_{n-1,m,a}(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1};y_1,\dots,y_m) \right), \end{aligned}$$

e para $n = 1$

$$P_{1,m,a}(x_1;y_1,\dots,y_m) = \begin{cases} x_1^{-a}, & \text{se } a \leq 0, \\ x_1^{-a} + \prod_{j=1}^m(1-x_1y_j)\sum_{j=0}^a h_j(y_1,\dots,y_m)(1-x_1^{j-a}), & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

Demonstração. Temos como ponto de partida a seguinte identidade

$$\frac{1}{(1-x_n\lambda)(1-x_{n-1}\lambda)} = \frac{1}{(x_n - x_{n-1})} \left(\frac{x_n}{1-x_n\lambda} - \frac{x_{n-1}}{1-x_{n-1}\lambda} \right). \quad (1.12)$$

É suficiente considerarmos o caso $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$), pois o caso geral é uma consequência do fato

$$\frac{\Omega}{\geq} \lim_{x_i \rightarrow x_j} T(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_r) = \lim_{x_i \rightarrow x_j} \frac{\Omega}{\geq} T(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_r),$$

já que $\frac{\Omega}{\geq}$ é linear. O limite é entendido como sendo tomado dentro do domínio de convergência. Sendo assim, consideramos $n > 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega}{\geq} \frac{\lambda^a}{(1-x_1\lambda)(1-x_2\lambda)\cdots(1-x_n\lambda)\left(1-\frac{y_1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y_2}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{y_m}{\lambda}\right)} \\ &= \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \\ &\times \left(\frac{\Omega}{\geq} \frac{x_n\lambda^a}{(1-x_1\lambda)\cdots(1-x_{n-2}\lambda)(1-x_n\lambda)\left(1-\frac{y_1}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{y_m}{\lambda}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Omega}{\geq} \frac{x_{n-1}\lambda^a}{(1-x_1\lambda)\cdots(1-x_{n-2}\lambda)(1-x_{n-1}\lambda)\left(1-\frac{y_1}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{y_m}{\lambda}\right)} \right). \end{aligned}$$

Essa é exatamente a recorrência fundamental, uma vez que as expressões envolvendo $P_{n,m,a}$ sejam determinadas.

Para $n = 1$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \frac{P_{1,m,a}(x_1; y_1, \dots, y_m)}{(1-x_1)(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_m)} &= \Omega \frac{\lambda^a}{(1-x_1\lambda)\left(1-\frac{y_1}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{y_m}{\lambda}\right)} \\ &= \Omega \sum_{\geq n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^n \lambda^{n+a-j}. \end{aligned}$$

Se $a \leq 0$, então esta expressão é

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j-a}^{\infty} h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^n &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^{j-a}}{1-x_1} \\ &= \frac{x_1^{-a}}{(1-x_1)(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_m)}, \end{aligned}$$

e então para $a \leq 0$

$$P_{1,m,a}(x_1; y_1, \dots, y_m) = x_1^{-a}.$$

Se $a > 0$, temos

$$\begin{aligned} &\Omega \sum_{\geq n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^n \lambda^{n+a-j} \\ &= \Omega \sum_{\geq n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^a + \sum_{j=a+1}^{\infty} \right) h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^n \lambda^{n+a-j} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^a h_j(y_1, \dots, y_m)}{1-x_1} + \sum_{j=a+1}^{\infty} \sum_{n=j-a}^{\infty} h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^n \\ &= \frac{\sum_{j=0}^a h_j(y_1, \dots, y_m)}{1-x_1} + \frac{\sum_{j=a+1}^{\infty} h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^{j-a}}{1-x_1} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^a h_j(y_1, \dots, y_m)}{1-x_1} + \frac{x_1^{-a}}{(1-x_1)(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_m)} \\ &\quad - \frac{\sum_{j=0}^a h_j(y_1, \dots, y_m) x_1^{j-a}}{1-x_1} \\ &= \frac{1}{1-x_1} \sum_{j=0}^a h_j(y_1, \dots, y_m) (1-x_1^{j-a}) + \frac{x_1^{-a}}{(1-x_1)(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_m)} \\ &= \frac{x_1^{-a} + \prod_{j=1}^m (1-x_1y_j) \sum_{j=0}^a h_j(y_1, \dots, y_m) (1-x_1^{j-a})}{(1-x_1)(1-x_1y_1)\cdots(1-x_1y_m)}, \end{aligned}$$

que gera a fórmula necessária para $P_{1,m,a}$. □

1.4 A prática do pacote Omega no programa Mathematica

Essa seção é dedicada à apresentação do pacote Omega do programa Mathematica. De forma a ilustrar como o pacote Omega é usado, alguns exemplos tutoriais serão apresentados.

1.4.1 O pacote Omega

O pacote⁴ Omega consiste em um arquivo para ser usado no programa Mathematica⁵, a aquisição do pacote é dada por meio de download no endereço eletrônico:

<http://www.risc.jku.at/research/combinat/software/ergosum/RISC/Omega.html>

O pacote Omega é uma implementação para o programa Wolfram Mathematica para Análise de Partição de MacMahon realizada por Axel Riese, um Postdoc do grupo RISC⁶ Combinatorics. Foi desenvolvido junto com George E. Andrews e Peter Paule (ANDREWS; PAULE; RIESE, 2001). O objetivo do pacote Omega é implementar no Mathematica o método de MacMahon na pesquisa de análise combinatória.

O pacote proporciona, para a realização deste trabalho, um menor custo computacional reduzindo o tempo de resolução dos problemas e espaço para armazenamento dos resultados obtidos, além de permitir a introdução de estruturas de coalizões entre os jogadores conforme descreveremos em maiores detalhes ao longo deste trabalho.

Após a instalação do pacote Omega, ao iniciar o Mathematica, o pacote é carregado com o comando `<<Omega.m`, e estão disponíveis as funções `OR` (para $\Omega \geq 0$) e `OEqR` (para $\Omega = 0$). Ao inserir a expressão (`expr`), a eliminação das variáveis com expoente positivo é dada por:

$$\text{OR}[\text{expr}, \lambda] \text{ e } \text{OEqR}[\text{expr}, \lambda]$$

onde λ é uma variável e `expr` é uma função polinomial racional na forma

$$\frac{L(\lambda)}{(1 \pm p_1(\lambda)) \cdots (1 \pm p_d(\lambda))}$$

com:

$L(\lambda)$ um polinômio de Laurent em λ sobre $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_i)$ em que z_i são variáveis diferentes de λ ,

$p_i(\lambda)$ apresentam expoentes inteiros em λ e z_1, \dots, z_i .

⁴ Disponível para pesquisadores

⁵ Disponível para download no endereço: <https://www.wolfram.com/mathematica/>

⁶ Research Institute for Symbolic Computation

A saída de `OR` e `OEQR` é uma função racional livre de λ . O denominador pode ser lido a partir de (1.11), porém para o numerador é necessário calcular e adicionar todos os termos correspondentes às diferentes potências de λ que aparecem em $L(\lambda)$. Além disso, se `expr` estiver na forma

$$\frac{L(\lambda)}{(1 \pm p_1(\lambda_1, \dots, \lambda_r)) \cdots (1 \pm p_d(\lambda_1, \dots, \lambda_r))}$$

então o Teorema 2.1 juntamente com a condição Ω_{\geq} garante que todo λ_i possa ser eliminado na `expr`. Em outras palavras, cada aplicação de `OR` (ou `OEQR`) produz uma entrada válida para uma eliminação.

1.4.2 Como usar o Pacote Omega

Para que o programa Mathematica execute o pacote Omega, é necessário que o arquivo se encontre no mesmo diretório dos pacotes do Mathematica. Ao iniciar a opção notebook (no Mathematica), carregamos o pacote:

```
In[1]:= << Omega.m
Omega Package version 2.49
written by Axel Riese
(in cooperation with George E. Andrews and Peter Paule)
Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),
Johannes Kepler University, Linz, Austria
```

Demonstraremos o Teorema 1.1 no caso em que $j = 3$ usando o pacote Omega:

$$\begin{aligned} \text{In[2]} := f &= 1 / \left(1 - qx/\lambda_2^2\right) \left(1 - \lambda_2 q / (\lambda_1^3 x)\right) \left(1 - \lambda_1^2 qx\right) \\ \text{Out[2]} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_2 q}{\lambda_1^3}\right) (1 - \lambda_1^2 qx) \left(1 - \frac{qx}{\lambda_2^2}\right)} \end{aligned}$$

Através do comando `OR` eliminamos as variáveis λ_1 e λ_2 :

$$\begin{aligned} \text{In[3]} &:= \text{OR}[f, \lambda_1] \\ \text{Out[3]} &= \frac{1 + \lambda_2 q^3 x}{(1 - qx) \left(1 - \frac{qx}{\lambda_2^2}\right) (1 - \lambda_2^2 q^5 x)} \\ \text{In[4]} &:= \text{OR}[\%, \lambda_2] \\ \text{Out[4]} &= \frac{1}{(1 - qx) (1 - q^3 x) (1 - q^5 x)}. \end{aligned}$$

□

1.5 Quocientes de anéis polinomiais

Nesta subseção seguimos Cox, Little e O'shea (2007). Vamos rever a construção de quociente de um anel polinomial módulo um ideal polinomial. Esta construção é uma ferramenta fundamental em álgebra comutativa e geometria algébrica.

Ao longo do trabalho usaremos a notação $k[x_1, \dots, x_n]$ para representar o conjunto dos polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_n com coeficientes no corpo $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definição 1.11. Seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, $f, g \in I$ e $h \in k[x_1, \dots, x_n]$. Então, I é um ideal se

- $0 \in I$.
- $f + g \in I$.
- $hf \in I$.

Ressaltamos aqui que existe um forte paralelo entre o conceito de ideal e subespaço vetorial em álgebra linear. A diferença é que no contexto de espaço vetorial a operação de multiplicação de um vetor por um escalar envolve conjuntos que podem ser diferentes, ao passo que, no contexto apresentado aqui a multiplicação envolve elementos do mesmo conjunto.

Definição 1.12. Um ideal é gerado por f_1, \dots, f_m se

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^m h_i f_i \mid h_i \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

Neste caso escrevemos $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

Definição 1.13. Seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ e $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. Dizemos que f e g são módulo congruente I , sendo

$$f \equiv g \pmod{I}$$

se $f - g \in I$.

Por exemplo, se $I = \langle x^2 - y^2, x + y^3 + 1 \rangle \subseteq k[x, y]$, então $f = x^4 - y^4 + x$ e $g = x + x^5 + x^4 y^3 + x^4$ são módulo congruente I desde que

$$\begin{aligned} f - g &= x^4 - y^4 - x^5 - x^4 y^3 - x^4 \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - x^4(x + y^3 + 1) \in I. \end{aligned}$$

Definição 1.14. Sejam $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Uma variedade afim \mathbf{V} é definida por

$$\mathbf{V} = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall 1 \leq i \leq s\}.$$

Neste caso escrevemos $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ e dizemos que \mathbf{V} é definida por f_1, \dots, f_s .

Definição 1.15. Seja $V \subseteq k^n$ uma variedade afim. Então, definimos

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall (a_1, \dots, a_n) \in V\}$$

Definimos agora relação de equivalência antes de introduzir uma importante propriedade do quociente de polinômios.

Definição 1.16. Uma relação binária em um conjunto S é uma coleção de pares ordenados de elementos de S . Uma relação de equivalência é uma relação binária, denotada por \equiv , que satisfaz três propriedades: $a \equiv a$ (reflexiva), $a \equiv b \rightarrow b \equiv a$ (simétrica) e $a \equiv b \wedge b \equiv c \rightarrow a \equiv c$ (transitiva).

Toda relação de equivalência resulta na partição de S em classes de equivalência. A classe de equivalência de $a \in S$ em relação a \equiv , denotada por $[a]$, é definida por $[a] = \{b \in S : a \equiv b\}$. Por exemplo, se $S = \{a, b, c\}$, então temos a relação de equivalência $\{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$. Neste caso temos duas classes de equivalência, i.e., $[a] = \{a\}$ e $[b] = [c] = \{b, c\}$.

A propriedade mais importante da relação de congruência no contexto de anéis polinômiais é dada pela proposição a seguir.

Proposição 1.2. *Seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então, congruência módulo I é uma relação de equivalência em $k[x_1, \dots, x_n]$.*

Demonstração. Congruência módulo I é reflexivo desde que $f - f = 0 \in I$ para todo $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Para provar a simetria, suponha que $f \equiv g \pmod{I}$. Então $f - g \in I$ implica que $g - f = (-1)(f - g) \in I$. Consequentemente, $g \equiv f \pmod{I}$. Finalmente, é necessário considerar a transitividade. Se $f \equiv g \pmod{I}$ e $g \equiv h \pmod{I}$, então $f - g, g - h \in I$. Uma vez que I é fechado para adição, temos $f - h = f - g + g - h \in I$. Portanto $f \equiv h \pmod{I}$. \square

Como vimos acima, para qualquer $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, a classe de f é representada pelo conjunto

$$[f] = \{g \in k[x_1, \dots, x_n] \mid g \equiv f \pmod{I}\}.$$

A definição de congruência faz sentido para todo $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. No caso especial $I = \mathbf{I}(V)$ é o ideal da variedade de V então segue que $f \equiv g \pmod{\mathbf{I}(V)}$ se e apenas se f e g definem a mesma função em V . Em outras palavras, o agrupamento de polinômios que definem a mesma função em uma variedade V é realizado passando para as classes de equivalência para a relação de congruência módulo $\mathbf{I}(V)$. Mais formalmente, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3. *As funções polinomiais distintas $\phi : V \rightarrow k$ estão em correspondência um-para-um com as classes de equivalência de polinômios sob congruência módulo $I(V)$.*

Demonstração. Note que para cada ϕ distinta a função $\phi \mapsto [\phi]$ é 1-1 e o resultado segue. \square

A partir desse momento podemos introduzir os quocientes mencionados no título dessa seção.

Definição 1.17. O quociente de $k[x_1, \dots, x_n]$ módulo I , é o conjunto de classes de

$$k[x_1, \dots, x_n]/I = \{[f] \mid f \in k[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Por exemplo, considere $k = \mathbb{R}$, $n = 1$ e $I = \langle x^2 - 2 \rangle$. Aqui, procuramos se existe uma maneira de descrever todas as classes de equivalência para o módulo de congruência I . Pelo algoritmo de divisão, cada $f \in \mathbb{R}[x]$ pode ser escrito como $f = q \cdot (x^2 - 2) + r$, onde $r = ax + b$ para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$. Por definição, $f \equiv r \pmod{I}$ desde que $f - r = q \cdot (x^2 - 2) \in I$. Dessa forma, cada elemento de $\mathbb{R}[x]$ pertence a uma das classes de equivalência $[ax + b]$, e $\mathbb{R}[x]/I = \{[ax + b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Por $k[x_1, \dots, x_n]$ ser um anel, dividido em duas classes $[f], [g] \in k[x_1, \dots, x_n]/I$, definimos a soma e as operações em classes, usando as operações correspondentes em elementos de $k[x_1, \dots, x_n]$. Ou seja

$$[f] + [g] = [f + g] \quad (\text{soma em } k[x_1, \dots, x_n]) \quad (1.13)$$

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g] \quad (\text{produto em } k[x_1, \dots, x_n]). \quad (1.14)$$

Está claro que se $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$, então as classes $[f' + g']$ são as mesmas que $[g + f]$. Similarmente, temos que $[f' \cdot g'] = [f \cdot g]$.

Proposição 1.4. *As operações definidas em (1.13) produzem as mesmas classes em $k[x_1, \dots, x_n]/I$ do lado direito, não importa qual representante $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$ será usado.*

Demonstração. Se $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$, então $f' = f + A$ e $g' = g + B$, onde A e $B \in I$. Portanto,

$$f' + g' = (f + A) + (g + B) = (f + g) + (A + B).$$

Como também temos $A + B \in I$ (I é um ideal), segue-se que $f' + g' \equiv f + g \pmod{I}$, então $[f' + g'] = [f + g]$. Similarmente,

$$f' \cdot g' = (f + A) \cdot (g + B) = fg + Ag + fB + AB.$$

Desde que $A, B \in I$, temos $Ag + fB + AB \in I$. Portanto, $f' \cdot g' \equiv f \cdot g \pmod{I}$, que implica em $[f' \cdot g'] = [f \cdot g]$. \square

Capítulo 2

Jogos de Votação

Um Jogo de Votação com Peso (JVP) é um exemplo de jogo simples. Os JVP possuem diversas aplicações, dentre elas destacamos comissões, assembleias, parlamentos, comitês de acionistas dentre outros. [Laruelle e Valenciano \(2003\)](#) estabelecem que um ambiente de votação pressupõem a existência de duas características importantes: uma regra de votação; e a presença de jogadores. Nesse caso é possível apresentar o que é definido como JVP, onde cada jogador possui quantidade específica de votos e para aprovação de um projeto a soma de todos os votos deve ser superior a um valor de referência denominado por cota de aprovação ([SHAPLEY; SHUBIK, 1954](#));([BANZHAF, 1964](#)).

Neste capítulo apresentaremos uma definição precisa de JVP.

2.1 Definição de Jogos Simples

Em Teoria dos Jogos (TJ) um jogo cooperativo apresenta cooperação entre os jogadores, de modo que para aumentar a chance de ganho, jogadores com interesses em comum se unem formando coalizões, i.e., blocos de jogadores. Formalmente, um jogo cooperativo é definido pelo par (N, v) onde $N = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto dos jogadores, chamado de grande coalizão, e v é a função característica definida por $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ e satisfazendo $v(\emptyset) = 0$. A função $v(S)$ descreve a recompensa que um conjunto de jogadores pode ganhar ao formar a coalizão S . Em jogos cooperativos a competição passa a ser entre grupos ao invés de uma competição entre indivíduos como acontece em jogos não cooperativos.

Um jogo simples ([NEUMANN; MORGENSTERN, 2007](#)) é um jogo cooperativo em que v é monótona, i.e., $v(S) \leq v(T)$ sempre que $S \subseteq T$. A condição de monotonicidade nos mostra que se uma coalizão T contendo uma subcoalizão S que é vencedora implica que T também seja vencedora, ou seja, se $S \in \mathcal{W}$ e $S \subseteq T$, então $T \in \mathcal{W}$.

2.2 Definição de Jogos de Votação com Peso

Jogos de Votação com Peso (JVP) são sistemas onde os membros que possuem o direito a voto podem possuir ou não o mesmo poder de decisão. Um JVP apresenta três importantes elementos: os jogadores, o peso de cada jogador, e a cota a ser alcançada. Por exemplo, os jogadores podem ser representados pela n -upla: $(1, 2, \dots, n)$ onde n denota o número total de jogadores desse jogo. O peso w_i de um jogador i é o número de votos que i controla, com $i = 1, \dots, n$. A cota q é o número mínimo de votos necessários para aprovar uma proposta. Seguindo [Friedman, Mcgrath e Parker \(2006\)](#) ou [Taylor e Zwicker \(1999\)](#), sem perda por generalidade, podemos considerar os pesos w_i dos jogadores como números naturais. Um JVP é um jogo simples com a função característica definida a seguir

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{se } w_S \geq q \\ 0, & \text{se } w_S < q. \end{cases}$$

Sendo assim, qualquer número inteiro é uma escolha possível para alcançar a cota. Cada sistema de votação ponderado pode ser descrito usando a representação genérica $v = [q; w_1, w_2, \dots, w_n]$. Um subconjunto (próprio ou não) do conjunto dos n jogadores é chamado de coalizão, e.g., $S = \{1, 3, 4\}$ é uma coalizão para $N = \{1, \dots, 30\}$. Os pesos são geralmente listados em ordem não crescente, começando pelo mais elevado. Dessa forma, a matemática de sistemas de votação ponderado visa descrever a noção de poder dos jogadores. Para ilustrar considere o seguinte jogo abaixo.

Exemplo 2.1. Dado o jogo

$$[5; 3, 2, 2, 1]$$

temos então:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Listando todas as coalizões vencedoras desse jogo, podemos ver que se uma coalizão formada pelos jogadores 1 e 2 é vencedora, está claro que a adição de qualquer jogador a essa coalizão também retorna um resultado vencedor, e.g., $\{1, 2\} \in \mathcal{W} \Rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{W}$.

Muitas vezes são necessárias vários JVP para aprovar um dada proposta, como no caso da União Européia (UE) ([ALONSO-MEIJIDE et al., 2009](#)). Neste caso, definimos um Jogo Simples (JS) com as funções características v_1, \dots, v_m onde cada $v_i = [q_i; w_{i,1}, \dots, w_{i,n}]$ ($i = 1, \dots, m$) é um JVP a seguir.

Definição 2.2. ([ALGABA et al., 2003](#)) Um jogo ponderado de maioria- m é um jogo simples $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ onde $v_i = [q_i; w_{i,1}, \dots, w_{i,n}]$, $1 \leq i \leq m$, são jogos de votação. Então:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_m(S) = \min\{v_i(S) : 1 \leq i \leq m\} = \begin{cases} 1, & \text{se } w_i(S) \geq q_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ 0, & \text{se } w_j(S) < q_j. \end{cases}$$

Neste caso escrevemos $[q; \mathbf{W}]$ onde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)^T$, $\mathbf{w}_j = (w_{1,j}, \dots, w_{d,j})^T$ e $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$.

2.2.1 Coalizões mínimas

Dentre todas as coalizões vencedoras (\mathcal{W}) que podem ser formadas a partir de um determinado jogo existem as coalizões que são minimamente vencedoras (\mathcal{M}), em que $\mathcal{M} = \{S \in \mathcal{W} : T \subset S \implies T \notin \mathcal{W}\}$. Desta forma, entendemos por coalizões minimamente vencedoras todas as coalizões formadas por k jogadores que alcançam a cota, e a saída de qualquer jogador i da coalizão $S \ni i$ não mais alcança a cota necessária para vencer, i.e., $w_S \geq q$, mas $w_{S \setminus \{i\}} < q$, $\forall i \in S$.

Para ilustrar, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 2.3.

$$[9; 5, 4, 3, 2, 1]$$

As coalizões vencedoras são formadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \\ & \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Das coalizões vencedoras (\mathcal{W}) temos as mínimas $\mathcal{M} = \{1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$. A saída de qualquer jogador de uma dessas coalizões listadas em \mathcal{M} impossibilita a aprovação (rejeição) de uma determinada proposta.

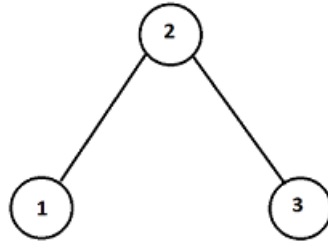
2.3 Incompatibilidade de jogadores

Seja N um conjunto finito. Um grafo em N é um conjunto de pares não ordenados, e.g., $\{i, j\} = \{j, i\}$ com $i, j \in N$, de diferentes membros de N . Um par de jogadores $i, j \in N$, sendo i e j jogadores incompatíveis, ou seja, jogadores que não cooperam entre si, temos $\{i, j\} \in G$.

Um importante aspecto da Teoria dos Jogos Cooperativos é a formação de coalizões. Neste trabalho será usado o conceito de grafo para descrever uma estrutura de cooperação. De forma a ilustrar a cooperação entre os jogadores e as estruturas de coalizões formadas tomemos o jogo elaborado por Myerson (1977) composto por 3 jogadores onde o jogador 1 coopera com o jogador 2, mas não com o jogador 3, o jogador 2 coopera com 1 e 3, e o jogador 3 coopera com 2, mas não coopera com 1, temos então como coalizões possíveis $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ou $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Na representação pelo grafo teremos um elo entre o jogador 1 e o jogador 2, outro elo entre o jogador 2 e jogador 3, e nenhum elo entre jogador 1 e 3.

Outra abordagem que utiliza grafos na descrição de estruturas de coalizão é Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro (2015) e que será utilizada ao longo deste

Figura 1 – Preferência de cooperação dos jogadores



Fonte: Elaboração própria

trabalho. Esta abordagem consiste no conceito de incompatibilidade entre jogadores. Uma coalizão S será um subconjunto de jogadores compatíveis se e somente se $\{i, j\} \notin G$ para todo $i, j \in S$. Quando $G = \emptyset$, temos uma situação em que não existe incompatibilidade entre os jogadores. Chamamos de \mathcal{C} o conjunto de todos os subconjuntos máximos de jogadores compatíveis. Para cada $i \in N$, definimos o conjunto de jogadores compatíveis com o jogador i , $C(i)$, como:

$$C(i) = \{j \in N \mid \{i, j\} \notin G\}.$$

Para toda coalizão $S \subseteq N$, chamamos de $P(S, G)$ o conjunto de todas as partições de S onde as classes são subconjuntos de jogadores compatíveis.

Desta forma definimos

$$v_G(S) = \max_{P \in P(S, G)} \sum_{U \subseteq P} v(U), \quad \forall S \subseteq N.$$

Para provar a proposição a seguir vamos supor que o jogo simples (N, v) é próprio, i.e., dadas duas coalizões $S, T \in \mathcal{M}$ temos que $S \cap T = \emptyset$. Esta suposição não é restritiva, pois se considerarmos um JVP como quota q associada e conforme discutido em [Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#), se temos $q \geq \lfloor w_N/2 \rfloor + 1$ (onde $\lfloor a \rfloor$ é a parte inteira do número a) então o JVP é próprio. Crucial na prova a seguir é que se o jogo (N, v) é próprio, então $v = 0, 1$, pois como os elementos de P são disjuntos então no máximo podemos ter $v_G = 1$.

Proposição 2.1. *Suponha que (N, v) é um jogo próprio. Seja \mathcal{W} coalizões vencedoras e \mathcal{M} coalizões mínimas vencedoras. Consideramos que, se para $S \in \mathcal{W}$ existe algum jogador i, j tal que $\{i_s, j_s\} \in G$, então o jogo (N, v_G) é um jogo nulo, ou seja, $v_G(s) = 0$. No entanto, se o jogo g -restrições (N, v_G) é um jogo simples com $\mathcal{M}_G = \{S \in \mathcal{M} \mid \{i, j\} \notin G, \forall i, j \in S\}$.*

Demonstração. Primeiro, vamos provar que se para todo $S \in \mathcal{M}$ existe $i, j \in S$ tal que $\{i, j\} \in G$ o jogo é nulo, i.e., $v_G(S) = 0, \forall S \subseteq N$. Dessa forma, coalizões formadas pelos jogadores i e j não são válidas por serem dois jogadores incompatíveis no sentido de não

cooperarem entre si, nesse ponto consideramos que todas as coalizões vencedoras mínimas formadas apresentam incompatibilidade entre os jogadores. Dessa forma, considere uma partição de N representado pelo conjunto R , de forma que $R \subseteq N$, para todo $P \in P(R, G)$ e $T \in P$, não existe um subconjunto S que pertença as coalizões mínimas vencedoras, logo considerando $S \subseteq T$ temos $v(T) = 0$ e $v_G(R) = 0$.

A ausência de incompatibilidade entre os jogadores em coalizões mínimas vencedoras, ou seja, os jogadores cooperam entre si, gera $A = \{S \in \mathcal{W} \mid \{i, j\} \notin G, \forall i, j \in S\}$ que é um conjunto não vazio. Sendo assim, $\forall S \in A \Rightarrow v_G(S) = 1$. Considere $R \subseteq N$ em um jogo (N, v) próprio, i.e., $S_1, S_2 \in A$ e $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Para todo $P \in P(R, G)$ existe pelo menos uma coalizão $T \in P$ com $v(T) = 1$. Se existe algum $S \in A$ com $S \subseteq R$, temos $v_G(R) = 1$, por outro lado, a inexistência de pelo menos uma coalizão $T \in P$ temos $v_G(R) = 0$. Agora verificamos que o jogo (N, v_G) é simples. De fato, precisamos mostrar que $v_G(R_1) \leq v_G(R_2)$ para todo $R_1, R_2 \subseteq N$ e $R_1 \subseteq R_2$. Se $v_G(R_1) = 0$, é fácil de ver que $v_G(R_1) \leq v_G(R_2)$, já que $v_G(R_2) \in \{0, 1\}$. E se $v_G(R_1) = 1$, então existe $S \in A$ com $S \subseteq R_1 \subseteq R_2$ tal que $v_G(R_2) = 1$.

Agora vamos descrever as CMV para (N, v_G) . As coalizões vencedoras de (N, v_G) serão denotadas por \mathcal{W}_G . Temos que $A \subseteq \mathcal{W}_G$. Se $S \in A$ e $\forall i \in S$, temos $v(S \setminus \{i\}) = v_G(S \setminus \{i\}) = 0$ e então $A \subseteq \mathcal{M}_G$. Agora, tome $R \in \mathcal{M}_G$. Então, $v_G(R) = 1$ e para todo $S \subset R$ temos $v_G(S) = 0$. Então, existe $P \in P(G, R)$ e $T \in P$ com $v(T) = 1$. Note que $T \in \mathcal{W}$, $T \in \mathcal{W}$, $T \subseteq R$ e não existe jogadores incompatíveis em T . Finalmente, existe $S \in A$ tal que $S \subseteq T \subseteq R$ e $S = R$, pois $S, R \in \mathcal{M}_G$.

□

Para ilustrar, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4.

$$[3; 1, 1, 1, 1]$$

Nesse jogo, temos quatro CMV:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

A saída de um jogador de qualquer dessas coalizões, não mais alcança a cota desse jogo, que é igual a 3. Considere $G = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Dessa forma, a incompatibilidade dos jogadores leva a inexistência de coalizões mínimas vencedoras nesse jogo.

Capítulo 3

Índice de Poder

O poder de voto de cada jogador pode ser medido por Índices de Poder (IP) que correspondem a medidas quantitativas do grau de influência dos jogadores. Na literatura encontram-se vários IP, este trabalho se concentra nos dois índices mais citados pela literatura: o Índice de [Shapley e Shubik \(1954\)](#) e o Índice de [Banzhaf \(1964\)](#). Esses IP dependem da função característica de um jogo, e sua ideia é indicar como um determinado jogador em um JVP pode ser fundamental em uma votação, no sentido de que esse jogador seria capaz de tornar uma coalizão perdedora em vencedora e vice-versa.

De um modo geral uma solução de um jogo cooperativo (N, v) envolve o conceito de imputação, i.e., uma n -upla de números reais (x_1, \dots, x_n) satisfazendo racionalidade individual, i.e., $x_i \geq v(\{i\})$ e racionalidade coletiva $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. A seguir, descreveremos formas de calcular imputações para os jogadores conhecidas como índices de poder ([STRAFFIN, 1993](#)).

3.1 Definição dos Índices

3.1.1 Índice de poder Banzhaf-Coleman

O índice de Banzhaf, foi descrito por [Banzhaf \(1964\)](#) em um artigo publicado na revista científica “Rutgers Law Review” sob o título de “Weighted Voting Doesn’t Work: A Mathematical Analysis”. Em outro estudo publicado com o título de “One Man, 3312 Votes: A Mathematical Analysis of Electoral College” [Banzhaf \(1968\)](#) tenta descrever os desvios existentes no Colégio Eleitoral Americano. Para o autor alguns estados possuem maior representação do que é assegurado pela população de eleitores.

Em determinados congressos nacionais é assegurado a distribuição proporcional de cadeiras em uma comissão, porém segundo [Banzhaf \(1964\)](#) a distribuição proporcional de cadeiras não é justa. Uma distribuição proporcional fere o axioma do Jogador Nulo,

onde é possível a existência de um jogador não decisivo nas coalizões formadas. Ou seja, o jogador nulo presente em uma coalizão não possui poder de decisão.

Por outro lado, temos o jogador denominado como jogador crítico. Um jogador é considerado crítico quando ao retiramos esse jogador de uma coalização vencedora, essa coalizão não mais alcança a cota, i.e., torna-se perdedora. A presença de um jogador crítico em uma coalizão S vencedora será chamada de votante *swing* para S . Se uma coalizão vencedora apresentar k jogadores críticos, temos então k votantes *swing* nessa coalizão. Isto posto, o índice de Banzhaf para um jogador i determina a razão entre o número de coalizões em que i é crítico e o número de coalizões que apresentam *swings* gerados por k jogadores. Essa razão é indicada por B_i . O objetivo do IP de Banzhaf é medir o percentual de poder de cada jogador. Esse poder é caracterizado pela capacidade de um jogador ser capaz de imputar votos decisivos, se há um jogador inapto para tal imputação, então esse jogador não possui poder efetivo. É possível caracterizar o índice de Banzhaf, assumindo que $\eta_i(v)$ é o número de coalizões em que o jogador i é um votante *swing* considerando o conjunto de coalizões que o jogador i faça parte:

$$\eta_i(v) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

De forma equivalente, podemos escrever

$$\eta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Para um jogo um simples, observamos que:

- i - Se a coalizão S não for vencedora temos que $v(S) = 0$, logo $S \setminus \{i\}$ também será $v(S \setminus \{i\}) = 0$.
- ii - Se S for uma coalizão vencedora ($v(S) = 1$), e a coalizão $S \setminus \{i\}$ seja também uma coalizão vencedora ($v(S \setminus \{i\}) = 1$), temos então que $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$.
- iii - Se a coalizão S é vencedora ($v(S) = 1$), e a coalizão $S \setminus \{i\}$ não, ($v(S \setminus \{i\}) = 0$).

O número total de *swings* é definido por $\sum_{j=1}^n \eta_j(v)$. O percentual de poder de um determinado jogador pelo índice de Banzhaf (normalizado) é encontrado em:

$$B_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\sum_{j=1}^n \eta_j(v)}. \quad (3.1)$$

Dado que cada B_i é um valor percentual, temos então a normalização $B_1 + \dots + B_n = 1$.

Outro índice utilizado baseado no número de *swings* é o índice de Banzhaf (não-normalizado)

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{2^{n-1}}. \quad (3.2)$$

No que segue faremos uso apenas do índice (3.2).

3.1.2 Índice de poder de Shapley-Shubik

Apresentado inicialmente por [Shapley e Shubik \(1954\)](#) no artigo “A method for evaluating the distribution of power in a committee system”, os autores procuravam investigar a distribuição de poder presente no congresso americano. As regras de votação para a aprovação de uma proposta consistiam em um apoio de metade da Câmara de Deputados, metade do Senado e aprovação do Presidente do Congresso Americano. Assim como cada membro do congresso possuía um voto, a conclusão do trabalho era que cada deputado possuía um peso menor em seu voto, comparando com os membros do Senado, que por sua vez possuíam poder menor comparando com o poder do presidente do congresso.

Desde então, muitos trabalhos procuraram descrever com maior robustez o método de Shapley-Shubik para a distribuição do poder entre os membros de uma comissão. No entanto o índice descrito de forma intuitiva por [Shapley e Shubik \(1954\)](#) está com maior robustez definido em [Shapley \(1953\)](#) como um caso específico. Desta maneira, as discussões propostas nos estudos que se seguiram, baseiam-se na reinterpretação dos axiomas de [Shapley \(1953\)](#).

O valor de Shapley é a única imputação que satisfaz os seguintes axiomas:

A_1 - Simetria: se i e j são jogadores com papéis simétricos, então $\phi_i = \phi_j$.

A_2 - Elemento Nulo: se $v(S - i) = v(S) \forall S \subseteq N$, então $\phi_i = 0$.

A_3 - Transferência: $\phi[v + w] = \phi[v] + \phi[w]$.

Seguindo a definição do valor de Shapley temos:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i)) \quad (3.3)$$

onde s representa a cardinalidade da coalizão S e n é a cardinalidade do conjunto N de eleitores. Pela equação (3.3) é possível perceber que o índice de Shapley considera apenas as coalizões em que o jogador i é fundamental para a aprovação de uma proposta.

3.1.3 Índice de poder de Deegan Packel

O IP Deegan-Packel ([DEEGAN; PACKEL, 1978](#)) fornece uma medida de poder que satisfaz as seguintes condições:

1. Minimalidade: CMV.
2. Equiprobabilidade: cada CMV tem a mesma probabilidade de se formar.
3. Solidariedade : os jogadores em uma CMV dividem o poder igualmente.

Todos os jogadores racionais querem maximizar o poder. Dessa forma, apenas as CMV são formadas (minimalidade). Todas as coalizões mínimas (equiprobabilidade) e todos os jogadores dentro de cada coalizão mínima (solidária) desempenham o mesmo papel.

O índice de poder Deegan-Packel de um jogador i no jogo simples (N, \mathcal{W}) é dado por:

$$\rho_i(N, \mathcal{W}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{S \in \mathcal{M}_i} \frac{1}{|S|} \quad (3.4)$$

com $\mathcal{M}_i = \{S \in \mathcal{M} : i \in S\}$.

Com o índice Deegan-Packel, os jogadores devem procurar CMV que são mínimas na cardinalidade do número de jogadores.

3.1.4 Índice de poder Public Good

Um índice diferente baseado em coalizões vencedoras mínimas é o índice Public Good (HOLLER, 1982). Para este índice, o tamanho da coalizão mínima vencedora não é considerado para medir o poder. Desta forma, definimos o índice Public Good

$$h_i(v) = \frac{c_i(v)}{\sum_{j \in N} c_j(v)} \quad (3.5)$$

onde $c_i(v)$ é o número de CMV em que $i \in N$, ou seja, $c_i(v) = |\{S \in \mathcal{M} : i \in S\}|$.

Para mais detalhes sobre esses índices incluindo outras propriedades o leitor interessado pode consultar Felsenthal, Machover et al. (1998).

3.2 Calculando Índices de poder a partir de coalizões mínimas

Para o cálculo dos IP de Shapley e Banzhaf mostrados na seção 3.1.1 e 3.1.2 é necessário a listagem de todas as coalizões vencedoras em um jogo. Nesta seção será apresentado uma nova forma de se calcular esses IP utilizando apenas as CMV.

O computo do IP usando coalizões vencedoras se torna cada vez mais complexo a medida que se aumenta o número de jogadores em um jogo de votação. O índice proposto é uma medida normalizada do número de vezes que um jogador é membro de uma CMV.

3.2.1 Fundamentos da álgebra elementar

Os polinômios simétricos elementares e_k têm a função geratriz (COX; LITTLE; O'SHEA, 2007)

$$f(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^n (1 + t_k) = \sum_{k=1}^n e_k(\mathbf{t}) \quad (3.6)$$

com $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ e $e_k(\mathbf{t}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} t_{j_1} \cdots t_{j_k}$.

Podemos extrair o coeficiente do termo $t_S = t_{i_1} \cdots t_{i_n}$ com $S = \{i_1, \dots, i_n\}$. Dessa forma, temos

$$[t_S] f(\mathbf{t}) = \prod_{k \notin S} (1 + t_k). \quad (3.7)$$

De uma forma mais geral, podemos indicar o seguinte Lema:

Lema 3.1. Os termos contendo múltiplos de polinômios do conjunto $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_i\}$ em $\prod_{j \in S_1 \cup \dots \cup S_i} (1 + t_j)$ é dado por

$$\sum_{1 \leq j \leq i} t_{S_j} \prod_{m \notin S_j} (1 + t_m) - \sum_{1 \leq j < k \leq i} t_{S_j \cup S_k} \prod_{m \notin S_j \cup S_k} (1 + t_m) + \cdots + (-1)^{i-1} t_{S_1 \cup \dots \cup S_i}.$$

Demonstração. Seja χ_S uma função linear que extrai os termos em $f(\mathbf{t})$ múltiplos de polinômios indexados por elementos de \mathcal{S} . O resultado segue observando que

$$(\chi_S - \chi_{S_1}) \cdots (\chi_S - \chi_{S_i}) f(\mathbf{t}) = 0.$$

De fato, decompor $f = g + h$ com g (h) contendo (não contendo) múltiplos de elementos indexados por \mathcal{S} . Observe que $(\chi_S - \chi_{S_j})g = 0$ pelo menos um j e $(\chi_S - \chi_{S_k})h = 0 \forall k \in \{1, \dots, i\}$. Assim sendo, obtemos

$$\chi_S f(\mathbf{t}) = \left(\sum_{1 \leq j \leq i} t_{S_j} [t_{S_j}] - \sum_{1 \leq j < k \leq i} t_{S_j \cup S_k} [t_{S_j \cup S_k}] + \cdots + (-1)^{i-1} t_{S_1 \cup \dots \cup S_i} [t_{S_1 \cup \dots \cup S_i}] \right) f(\mathbf{t}),$$

e o resultado segue usando (3.7). □

Para complementar, damos uma prova direta de uma identidade combinatória (cf. (1.49)) em (GOULD, 1972)) necessária na prova do Teorema 3.4, i.e.,

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{m}. \quad (3.8)$$

Usando uma representação integral Cauchy para o coeficiente binomial (ver, e.g., Egorychev (1984)), i.e.,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz, \quad (3.9)$$

com $\oint = \int_{|z|=r}$ e $0 < r < \infty$ a prova é direta. A representação (3.9) segue diretamente, aplicando a expansão binomial em $(1+z)^n$. Claro, a representação em (3.9) é analítica e como o foco deste trabalho é combinatório-algébrico, usamos métodos pertencentes à álgebra comutativa em vez da representação analítica em (3.9).

Apresentamos o espaço do quociente $\mathbb{R}[\mathbf{u}]/I$ com $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ com $f_i = u_i^2$.

Uma representação algébrica do coeficiente binomial é dada a seguir

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} [u_K] (1+h_k)^n, \quad (3.10)$$

onde $h_k = u_1 + \dots + u_k$ e $K = \{1, \dots, k\}$ que novamente segue facilmente a partir da expansão binomial como

$$\frac{1}{k!} [u_K] (1+h_k)^n = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \underbrace{[u_K] h_k^l}_{=l! \delta_{kl}} = \binom{n}{k}.$$

O próximo Lema nos fornece a prova de (3.8).

Lema 3.2. A identidade (3.8) segue da representação algébrica (3.10).

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \binom{m+n+1}{m} &= \frac{1}{m!} [u_M] (1+h_m)^{m+n+1} \\ &= \frac{1}{m!} [u_M] (1+h_m)^{m+n} + \frac{1}{m!} [u_M] (1+h_m)^{m+n} h_m \\ &= \underbrace{\frac{1}{m!} [u_M] (1+h_m)^{m+n}}_{= \binom{m+n}{m}} + \frac{1}{(m-1)!} [u_{M \setminus \{m\}}] (1+h_{m-1})^{m+n} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k}, \end{aligned}$$

usando (3.10).

□

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^n}{z} \left(\sum_{k=0}^m \frac{(1+z)^k}{z^k} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^n}{z} \left(\frac{(1+z)^{m+1}}{z^m} - z \right) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^{m+n+1}}{z^{m+1}} dz = \binom{m+n+1}{m},
 \end{aligned}$$

usando (3.9)

Usando as representações em (3.9) ou (3.10), a prova de (3.8) é direta. No caso (3.9) começamos com o lado esquerdo de (3.8). Dessa forma, a soma de k pode ser feita facilmente e (3.8) segue. Um paralelo entre os métodos algébrico-combinatório e analítico-combinatório é discutido em Neto e Anjos (2014).

3.3 Funções geratrizes para calcular os índices de Banzhaf e Shapley-Shubik de jogos de votação múltiplos com peso e jogadores incompatíveis

Nesta seção, vamos nos concentrar em JVS com jogadores incompatíveis no sentido de Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro (2015) apresentando a aplicação do método de função geratriz de modo a possibilitar o computo de índices de poder quando existe incompatibilidade entre os jogadores. Nem todos os jogos com incompatibilidade são JVS. Na verdade, como mostrado em Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro (2015), existem jogos simples, de modo que o G - restrição de v seja o jogo nulo se cada coalizão mínima vencedora contiver um elemento de E , caso contrário, v_G é um jogo simples. Referimos o leitor à Proposição 6 em Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro (2015) para mais detalhes. De agora em diante, supomos que v_G é um jogo simples e $\mathcal{M}_G = \{S \in \mathcal{M} : \{i, j\} \notin E \forall i, j \in S\}$ o conjunto associado de CMV.

Os jogos JVPM podem ser representados por $[\mathbf{q}; \mathbf{W}]$ com $\mathbf{W} = (w_{ij})_{i \in D; j \in N} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$, $D = \{1, \dots, d\}$, $\mathbf{w}_j = (w_{1j}, \dots, w_{dj})^T$ com $v(S) = 1$ se $\mathbf{w}_S \geq \mathbf{q}$, onde $\mathbf{w}_S = \mathbf{w}_{i_1} + \dots + \mathbf{w}_{i_j}$ se $S = \{i_1, \dots, i_j\}$, e $v(S) = 0$ de outra forma. Como de costume, nos referiremos à especialização do valor S para CMV como índice Shapley-Shubik (SS). Observe que se S é uma CMV em v , em v_G S pode não ser uma CMV. Veja, por exemplo, a discussão no Exemplo 7 em Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro (2015). Portanto, não podemos aplicar o método de função geratriz no sentido de Bilbao et al. (2000) diretamente para v_G , mas é possível aplicar Teorema 3.4 a v_G para calcular os índices B e SS de CMV com jogadores incompatíveis.

Definição 3.3. Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ com $\mathbf{x}^{\mathbf{w}_j} = x_1^{w_{1j}} \cdots x_d^{w_{dj}}$. Introduzimos a função geratriz da seguinte forma

$$G_q(\mathbf{f}_{n-1}) = F_q(\cdots(F_q(F_q(F_q(f_1, f_2), f_3), f_4)\cdots), f_{n-1}), \quad (3.11)$$

onde $f_j = 1 + y_j \mathbf{x}^{\mathbf{w}_j}$, para qualquer $j \in D$,

$$\begin{aligned} R \times R &\longrightarrow R \\ ([f], [g]) &\mapsto F_q([f], [g]) = [f_{<q_j}] [g] + [f_{\geq q}] \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] / \langle \{y_i^2 - y_i\}_{i=1}^n, \{y_i y_j\}_{\{i,j\} \in E} \rangle, \\ [f_{<q_j}] &= \{[f] \in R : \deg_{x_j}(f) < q_j\} \end{aligned}$$

e

$$[f_{\geq q}] = \{[f] \in R : \deg_{\mathbf{x}}(f) \geq \mathbf{q}\}.$$

O cálculo de coalizões vencedoras mínimas usando funções geratrizes é descrito na proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Os coeficientes dos termos $\mathbf{x}^{\geq \mathbf{q}}$ são indexados pelo conjunto de coalizões vencedoras mínimas do jogo v_G*

$$G_q(\mathbf{f}_{n-1}) = F_q(\cdots(F_q(F_q(F_q(f_1, f_2), f_3), f_4)\cdots), f_{n-1}), \quad (3.12)$$

com F_q dado pela Definição 3.3, $f_j = 1 + y_j \mathbf{x}^{\mathbf{w}_j}$ e $y_{i,j} = y_i y_j$.

Demonstração. A prova segue as linhas de [Chessa \(2014\)](#) adaptadas à extensão introduzida aqui. Mais precisamente, as variáveis y_S são indexadas por $S \in \mathcal{M}_G$ usando

$$y_S y_T = y_{S \setminus T} y_{S \cap T} y_{T \setminus S} y_{S \cap T} = y_{S \setminus T} y_{T \setminus S} y_{S \cap T}^2 = y_{S \setminus T} y_{T \setminus S} y_{S \cap T} = y_{S \cup T}$$

e $y_{i,j} = 0$ e $\{i, j\} \in E$.

□

Teorema 3.4. *O índice de poder de B e S para o jogo simples v é dado por*

$$\beta_i(v) = v_i^B(f_S) \quad (3.13)$$

e

$$\phi_i(v) = v_i^S(f_S), \quad (3.14)$$

respectivamente, onde

$$f_S = f(t_{S_1}, \dots, t_{S_m}) = (1 - t_{S_1}) \cdots (1 - t_{S_m}), \quad (3.15)$$

com $\mathcal{M} = \{S_1, \dots, S_m\}$ o conjunto de todas as coalizões mínimas em v ,

$$v_i^X : \mathbb{R}[\mathbf{t}] / \langle f_1, \dots, f_n \rangle \rightarrow \mathbb{Q}$$

($X = B, S$) com

$$v_i^B(t_S) = \begin{cases} -1/2^{s-1} & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S \end{cases} \quad e \quad v_i^S(t_S) = \begin{cases} -1/s & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S. \end{cases}$$

Demonstração. Definimos $v_i = t_i - 1$ e $v_i : \mathbb{R}[\mathbf{t}] / \langle f_1, \dots, f_n \rangle \rightarrow \{0, 1\}$ tal que

$$v_i(t_S) = \begin{cases} v(S) & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S. \end{cases}$$

Dessa forma, usando (3.13), obtemos

$$\beta_i(v) = v \left(v_i \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{v_j}{2} \right) \right). \quad (3.16)$$

E com (3.6), temos

$$\beta_i(v) = v \left(v_i \left(1 + \frac{e_1(\mathbf{v}_{-i})}{2} + \frac{e_2(\mathbf{v}_{-i})}{4} + \cdots + \frac{e_{n-1}(\mathbf{v}_{-i})}{2^{n-1}} \right) \right). \quad (3.17)$$

Observamos que apenas o produto de termos pertencentes a alianças vencedoras mínimas contribui. Na verdade, temos $|V| = v$, $|W| = w$, t_j elementos indexados por uma coalizão mínima vencedora e u_k elementos indexados por coalizões que não são mínimos vencedoras.

Observe que

$$\begin{aligned} v \left(\prod_{j \in T} (1 - t_j) \prod_{k \in U} (1 - t_k) \right) &= v \left(\sum_{V \subseteq T \cup U: V \notin \mathcal{W}} (-1)^v t_V \right. \\ &\quad \left. + \sum_{W \subseteq T: W \in \mathcal{W}} (-1)^w t_W \prod_{k \in U} (1 - t_k) \right) = 0. \end{aligned}$$

Note que $v(t_V) = 0$ se $V \notin \mathcal{W}$, já que todos os termos u_V são indexados por coalizões que não contêm coalizões vencedoras mínimas e, portanto, não estão vencendo. Em seguida, desde u_W é indexado por uma coalizão vencedora, obtemos $v(t_W \prod_{k \in U} (1 - t_k)) = 0$. Para obter o resultado desejado, observamos que apenas os termos que contêm uma coalizão mínima vencedora contribuem, i.e.,

$$v \left(\prod_{k \in S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_j}} (1 - t_k) \right) = v \left(\chi_{S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_j}} \left(\prod_{k \in S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_j}} (1 - t_k) \right) \right).$$

Para ter em conta os termos acima mencionados, precisamos do Lema 3.2 para obter

$$\begin{aligned} v \left(\prod_{k \in S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_j}} (1 - t_k) \right) &= \sum_{1 \leq l \leq j} v \left((-1)^{s_{i_l}} u_{S_{i_l}} \prod_{k_l \notin S_{i_l}} (1 - t_{k_l}) \right) \\ &- \sum_{1 \leq l < m \leq j} v \left((-1)^{s_{i_l i_m}} t_{S_{i_l} \cup S_{i_m}} \prod_{k_{lm} \notin S_{i_l} \cup S_{i_m}} (1 - t_{k_{lm}}) \right) \\ &+ \dots + (-1)^{j-1} v \left((-1)^{s_{i_1 \dots i_j}} t_{S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_j}} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

com $s_{i_1 \dots i_k} = |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}|$. Observamos que se $T \in \mathcal{W}$ e $S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_j} \setminus T \neq \emptyset$, então $v(t_T \prod_{k \notin T} (1 - t_k)) = 0$. Em seguida, observe que os termos não nulos em (3.18) tem o fator multiplicador $(-1)^{s_{i_1 \dots i_k}} = (-1)^{s_{i_1 \dots i_j}}$ que é cancelado com o fator multiplicativo $(-1)^{k+1}$ de e_k em (3.17), desde que $s_{i_1 \dots i_j} = k + 1$. Finalmente, obtemos

$$\beta_i(v) = \sum_{k=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} (-1)^{k-1} 2^{1-|S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_k}|} v_i(t_{S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_k}}), \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{1} - \mathbf{t}_{-i} = (1 - t_1, \dots, 1 - t_{i-1}, 0, 1 - t_{i+1}, \dots, 1 - t_n)$.

Agora, voltamos nossa atenção para o índice de S do jogador i . Usando (3.14), temos

$$\phi_i(v) = v \left(v_i \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} a_j (1 + v_{i_1}) \dots (1 + v_{i_j}) \right). \quad (3.20)$$

Para j fixo, o número de vezes que o produto $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ em (3.20) com $k < j$ aparece em $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} (1 + v_{i_1}) \dots (1 + v_{i_j})$ é dado por $\binom{n-1-k}{j-k}$ então obtemos

$$\phi_i(v) = v \left((1 - t_i) (b_1 e_1 (\mathbf{1} - \mathbf{t}_{-i}) - b_2 e_2 (\mathbf{1} - \mathbf{t}_{-i}) + \dots + b_{n-1} (-1)^n e_{n-1} (\mathbf{1} - \mathbf{t}_{-i})) \right), \quad (3.21)$$

onde

$$b_k = \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1-k}{j-k} a_j.$$

Observamos que

$$b_k = \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1-k}{j-k} \frac{j!(n-j-1)!}{n!} = \frac{1}{k+1}. \quad (3.22)$$

De fato, fazendo a alteração das variáveis $j - k = l$ e reorganizando os termos em (3.22), obtemos

$$\sum_{l=0}^{n-1-k} \binom{k+l}{l} = \frac{n!}{(k+1)!(n-1-k)!},$$

que segue de Lema 3.2. Portanto,

$$\phi_i(v) = v \left((1-t_i) \left(\frac{e_1(\mathbf{1}-\mathbf{t}_{-i})}{2} - \frac{e_2(\mathbf{1}-\mathbf{t}_{-i})}{3} + \dots + (-1)^n \frac{e_{n-1}(\mathbf{1}-\mathbf{t}_{-i})}{n} \right) \right). \quad (3.23)$$

Agora, o procedimento é semelhante ao índice B para obter

$$\phi_i(v) = \sum_{k=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} \frac{(-1)^{k-1}}{|S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_k}|} v_i(t_{S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_k}}). \quad (3.24)$$

Usando as funções de geratrizes (3.6) e (3.15) temos

$$\begin{aligned} f_S = (1-t_{S_1}) \cdots (1-t_{S_m}) &= \sum_{k=1}^m (-1)^k e_k(t_{S_1}, \dots, t_{S_m}) \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} t_{S_{j_1}} \cdots t_{S_{j_k}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} t_{S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_k}}. \quad (3.26)$$

Portanto, aplicando v_i^X com $X = B, S$ para f_S em (3.26) recuperamos (3.19) e (3.24), respectivamente, e o resultado segue. □

Nossa abordagem para calcular os índices B e SS de CMV com jogadores incompatíveis com as entradas $[\mathbf{q}; \mathbf{W}]$ e F podem ser resumidas da seguinte maneira:

- Usamos a Proposição 3.1 para determinar o conjunto \mathcal{M}_G de CMV.
- Usamos o Teorema 3.4 para definir o índice de poder de B e SS.

Nosso próximo exemplo mostra como calcular os índices de poder de B e SS para JVPM's usando o procedimento descrito acima.

Exemplo 3.5. Considere os seguintes jogos $v_1 = [8; 5, 3, 2, 2]$ e $v_2 = [3; 1, 1, 1, 1]$ de Algaba et al. (2003). Para (3.11), temos

$$F_q(\mathbf{f}_4) = F_{(8,3)} \left(F_{(8,3)} \left(F_{(8,3)}(f_1, f_2), f_3 \right), f_4 \right)$$

com $f_1 = 1 + y_1x_1^5x_2$, $f_2 = 1 + y_2x_1^3x_2$, $f_3 = 1 + y_3x_1^2x_2$ e $f_4 = 1 + y_4x_1^2x_2$.

Temos

$$G_{(8,3)}(\mathbf{f}_2) = 1 + y_2x_1^3x_2 + y_1x_1^5x_2 + y_{1,2}x_1^8x_2^2,$$

$$\begin{aligned} G_{(8,3)}(\mathbf{f}_3) &= 1 + y_3x_1^2x_2 + y_2x_1^3x_2 + y_1x_1^5x_2 + y_{2,3}x_1^5x_2^2 \\ &\quad + y_{1,3}x_1^7x_2^2 + y_{1,2}x_1^8x_2^2 + y_{1,2,3}x_1^{10}x_2^3 \end{aligned}$$

e

$$\left[x_1^{\geq 8} x_2^{\geq 3} \right] G_{(8,3)}(\mathbf{f}_4) = y_{1,2,3} + y_{1,2,4} + y_{1,3,4}.$$

Portanto, o conjunto de coalizões vencedoras mínimas é $\mathcal{M} = \{S_1, S_2, S_3\}$ com $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2, 4\}$, e $S_3 = \{1, 3, 4\}$. Dessa forma,

$$f(t_{S_1}, t_{S_2}, t_{S_3}) = (1 - t_{123})(1 - t_{124})(1 - t_{134}) = 1 - t_{123} - t_{124} - t_{134} + 2t_{1234}.$$

Finalmente, temos

$$\beta_1(v) = -\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{8}\right) = \frac{1}{2} \quad e \quad \phi_1(v) = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Observação 3.6. A função geratriz de (3.11) com $d = 1$ equivale a

$$F_q(\cdots(F_q(F_q(F_q(f_1, f_2), f_3), f_4)\cdots), f_{n-1}) \tag{3.27}$$

onde $f_j = 1 + y_jx^{w_j}$ e

$$\begin{aligned} R \times R &\longrightarrow R \\ ([f], [g]) &\mapsto F_q([f], [g]) = [f_{<q}] [g] + [f_{\geq q}] \end{aligned}$$

com $R = \mathbb{R}[x, \mathbf{y}] / \langle \{y_i^2 - y_i\}_{i=1}^n, \{y_i y_j\}_{\{i,j\} \in E} \rangle$, $[f_{<q}] = \{[f] \in R : \deg_x(f) < q\}$, $[f_{\geq q}] = \{[f] \in R : \deg_x(f) \geq q\}$.

Exemplo 3.7. Tomamos $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$ como em [Alonso-Meijide, Freixas e Molinero \(2012\)](#). Nesse caso temos $f_1 = 1 + y_1x^{28}$, $f_2 = 1 + y_2x^{16}$, $f_3 = 1 + y_3x^5$, $f_4 = 1 + y_4x^4$, $f_5 = 1 + y_5x^3$ e $f_6 = 1 + y_6x^3$. Portanto, obtemos

$$G_{30}(\mathbf{f}_2) = 1 + y_2x^{16} + y_1x^{28} + y_{1,2}x^{44},$$

$$G_{30}(\mathbf{f}_3) = 1 + y_3x^5 + y_2x^{16} + y_1x^{28} + y_{2,3}x^{21} + y_{1,3}x^{33} + y_{1,2}x^{44}$$

$$G_{30}(\mathbf{f}_4) = 1 + y_4x^4 + y_3x^5 + y_{3,4}x^9 + y_2x^{16} + y_{2,4}x^{20} + y_1x^{28} \\ + y_{1,4}x^{32} + y_{2,3}x^{21} + y_{2,3,4}x^{25} + y_{1,3}x^{33} + y_{1,2}x^{44}$$

$$G_{30}(\mathbf{f}_5) = 1 + y_4x^4 + y_3x^5 + y_{3,4}x^9 + y_2x^{16} + y_{2,4}x^{20} + y_1x^{28} \\ + y_{1,4}x^{32} + y_{2,3}x^{21} + y_{2,3,4}x^{25} + y_{1,3}x^{33} + y_{1,2}x^{44}$$

e

$$[x^{\geq 30}] G_{30}(\mathbf{f}_6) = y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{1,5} + y_{1,6} + y_{2,3,4,5,6}.$$

O conjunto de coalizões vencedoras mínimas é dado por $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Finalmente, consideramos um exemplo levando em consideração a incompatibilidade entre os jogadores no contexto da nossa estrutura.

Exemplo 3.8. Seja $G = (V, E)$ com $V = N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ e $v = [5; 3, 2, 2, 1, 1]$ retirado de [Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#). Temos $v_G = (v, G)$ e

$$G_5(\mathbf{f}_2) = 1 + y_2x^2 + y_1x^3,$$

$$G_5(\mathbf{f}_3) = 1 + (y_2 + y_3)x^2 + y_1x^3 + y_{2,3}x^4 + y_{1,3}x^5,$$

$$G_5(\mathbf{f}_4) = 1 + y_4x + (y_2 + y_3)x^2 + (y_1 + y_{2,4})x^3 + (y_{1,4} + y_{2,3})x^4 + y_{1,3}x^5,$$

e

$$[x^{\geq 5}] G_5(\mathbf{f}_5) = y_{1,3} + y_{1,4,5} + y_{2,3,5}.$$

O conjunto de coalizões mínimas para o jogo restrito é dado por $\mathcal{M}_G = \{S_1, S_2, S_3\}$ com $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{1, 4, 5\}$, e $S_3 = \{2, 3, 5\}$. Temos

$$f(t_{S_1}, t_{S_2}, t_{S_3}) = (1 - t_{13})(1 - t_{145})(1 - t_{235}) = 1 - t_{13} - t_{145} - t_{235} + t_{1345} + t_{1235}.$$

Portanto,

$$\beta_1(v_G) = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } \phi_1(v_G) = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 3.9. Usaremos o seguinte exemplo para ilustrar o exposto supracitado $v_1 = [8; 5, 3, 2, 2]$ e $v_2 = [3; 1, 1, 1, 1]$. Para encontrar os índices de Shapley e Banzhaf usaremos o método, demonstrado anteriormente, que gera a função geratriz a partir das coalizões mínimas. Vale lembrar que, por se tratar de jogos múltiplos, a condição de coalizão mínima vencedora deve ser satisfeita para v_1 e v_2 concomitantemente.

O conjunto de CMV para o jogo múltiplo é $\mathcal{W} = \{S_1, S_2, S_3\}$ com $S_1 = \{1, 2, 4\}$, $S_2 = \{1, 3, 4\}$ e $S_3 = \{1, 2, 3\}$ como obtivemos no Exemplo 3.5. Então a função geratriz é dada por:

$$f(t_{S_1}, t_{S_2}, t_{S_3}) = (1 - t_{123})(1 - t_{124})(1 - t_{134}) = 1 - t_{123} - t_{124} - t_{134} + 2t_{1234}.$$

O IP S e B para 1 é:

$$\phi_1(v) = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad e \quad \beta_1(v) = -\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{8}\right) = \frac{1}{2}.$$

E o valor de SS e B para 1, 2, 3, 4:

$$\phi(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \quad e \quad \beta(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

3.4 Problema Inverso de Índices de Poder usando APM

Esta seção abordaremos a construção de todos os JVP com um determinado conjunto prescrito de coalizões vencedoras mínimas do ponto de vista de Análise de Partição de MacMahon (APM). Antes de prosseguirmos, introduziremos uma representação de coalizões em termos de vetores de \mathbb{B}^n com $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Associamos $S = \{i_1, \dots, i_j\}$ com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S. \end{cases}$$

Por exemplo, se $|N| = 7$, associamos $S = \{1, 3, 5, 6\}$ com $\alpha = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$. Para cada coalizão S escrevemos $\mathbf{w}_S = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n$. Note que $\mathbf{w}_\emptyset = 0$.

Teorema 3.10. *Seja $v = (N, \mathcal{M})$ um jogo simples e $S_{1, \dots, l_1}^{(n)}, \dots, S_{1, \dots, l_j}^{(n-j+1)}, \dots, S_1^{(1)}$ um possível conjunto vazio cuja união é \mathcal{M} com $n - j + 2, \dots, n$ satisfazendo $\notin S_i^{(n-j+1)} \ni n - j + 1$ $i \in \{1, \dots, l_j\}$. Então, é possível obter a função geratriz, usando o pacote Omega, com todos os pesos associados a \mathcal{M} .*

Demonstração. Precisamos construir um sistema diofantino para que (1.8) possa ser aplicado. Para garantir que a ordenação dos pesos esteja correta introduzimos

$$\mathbf{w}_1 \geq \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_{n-1} \geq \mathbf{w}_n.$$

Usando este ordenamento, está claro que $S_i^{(n-j+1)} \in \mathcal{M}$ se

$$\mathbf{w}_{S_i^{(n-j+1)}} \geq \mathbf{q}$$

e

$$\begin{aligned} w_{k_i^{(n-j+1)}, S_i^{(n-j+1)} \setminus \{n-j+1\}} &= w_{k_i^{(n-j+1)}, S_i^{(n-j+1)}} - w_{k_i^{(n-j+1)}, n-j+1} \\ &< q_{k_i^{(n-j+1)}} \end{aligned}$$

para qualquer $k_i^{(n-j+1)} \in D$. Suponha que a n -upla

$$\left(\alpha_{i,1}^{(n-j+1)}, \dots, \alpha_{i,n-j}^{(n-j+1)}, \alpha_{i,n-j+1}^{(n-j+1)}, 0, \dots, 0 \right)$$

representa a coalizão $S_i^{(n-j+1)}$. Portanto, o sistema diofantino que descreve toda cota \mathbf{q} e peso $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ possíveis, i.e., a JVPM $[\mathbf{q}; \mathbf{W}]$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{S_1^{(n)}} &= \alpha_{1,1}^{(n)} \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{1,n-1}^{(n)} \mathbf{w}_{n-1} + \alpha_{1,n}^{(n)} \mathbf{w}_n \geq \mathbf{q}, \\ w_{k_1^{(n)}, S_1^{(n)} \setminus \{n\}} &= \alpha_{1,1}^{(n)} w_{k_1^{(n)}, 1} + \dots + \alpha_{1,n-1}^{(n)} w_{k_1^{(n)}, n-1} \leq q_{k_1^{(n)}} - 1, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{S_{l_1}^{(n)}} &= \alpha_{l_1,1}^{(n)} \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{l_1,n-1}^{(n)} \mathbf{w}_{n-1} + \alpha_{l_1,n}^{(n)} \mathbf{w}_n \geq \mathbf{q}, \\ w_{k_{l_1}^{(n)}, S_{l_1}^{(n)} \setminus \{n\}} &= \alpha_{l_1,1}^{(n)} w_{k_{l_1}^{(n)}, 1} + \dots + \alpha_{l_1,n-1}^{(n)} w_{k_{l_1}^{(n)}, n-1} \leq q_{k_{l_1}^{(n)}} - 1, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{S_1^{(n-j+1)}} &= \alpha_{1,1}^{(n-j+1)} \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{1,n-j}^{(n-j+1)} \mathbf{w}_{n-j} + \alpha_{1,n-j+1}^{(n-j+1)} \mathbf{w}_{n-j+1} \geq \mathbf{q}, \\ w_{k_1^{(n-j+1)}, S_1^{(n-j+1)} \setminus \{n-j+1\}} &= \alpha_{1,1}^{(n-j+1)} w_{k_1^{(n-j+1)}, 1} + \dots \\ &+ \alpha_{1,n-j}^{(n-j+1)} w_{k_1^{(n-j+1)}, n-j} \leq q_{k_1^{(n-j+1)}} - 1, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{S_{l_j}^{(n-j+1)}} &= \alpha_{l_j,1}^{(n-j+1)} \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{l_j,n-j}^{(n-j+1)} \mathbf{w}_{n-j} + \alpha_{l_j,n-j+1}^{(n-j+1)} \mathbf{w}_{n-j+1} \geq \mathbf{q}, \\ w_{k_{l_j}^{(n-j+1)}, S_{l_j}^{(n-j+1)} \setminus \{n-j+1\}} &= \alpha_{l_j,1}^{(n-j+1)} w_{k_{l_j}^{(n-j+1)}, 1} + \dots \\ &+ \alpha_{l_j,n-j}^{(n-j+1)} w_{k_{l_j}^{(n-j+1)}, n-j} \leq q_{k_{l_j}^{(n-j+1)}} - 1, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{S_1^{(1)}} &= \alpha_1^{(1)} \mathbf{w}_1 \geq \mathbf{q}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.11. *Pode acontecer que o jogo restrito não seja ponderado. Neste caso, é claro, a função geratriz fornece como resultado zero. Por exemplo, vamos considerar o*

jogo $[5; 3, 2, 2, 1, 1]$ e $E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Assim sendo, $\mathcal{M}_G = \{\{1, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$. Temos o sistema linear diofantino

$$w_1 + w_3 \geq 5, \quad w_1 + w_4 + w_5 \geq 5, \quad w_1 + w_4 \leq 4, \quad w_2 + w_3 + w_5 \geq 5 \text{ e } w_2 + w_3 \leq 4$$

com $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq w_4 \geq w_5$ para obter $F(\mathbf{x}) = 0$.

Exemplo 3.12. Considere a CMV para 4 jogadores $v = v_1 \wedge v_2$ com $v_1 = [4; 3, 2, 2, 1]$ e $v_2 = [3; 1, 1, 1, 1]$. Note que $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ é o conjunto de coalizões mínimas associadas a v . Uma aplicação direta do pacote Omega ao sistema diofantino

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 \geq (4, 3)^T, \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4 \geq (4, 3)^T \text{ e } w_{2,1} + w_{2,2} \leq 2,$$

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4 \geq (4, 3)^T \text{ e } w_{2,1} + w_{2,3} \leq 2,$$

$$\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4 \geq (4, 3)^T \text{ e } w_{2,2} + w_{2,3} \leq 2$$

com $\mathbf{w}_1 \geq \mathbf{w}_2 \geq \mathbf{w}_3 \geq \mathbf{w}_4$ gerando todas as CMV associadas (incluindo o jogo v), i.e.,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = & \frac{y_{1,2,3,4}}{(1-x_1)(1-x_{1,2})(1-x_{1,2,3})(1-x_{1,2,3,4})} \left(x_1^4 x_2^4 + x_1^3 x_2^3 x_3 - x_1^5 x_2^5 x_3 \right. \\ & + x_1^2 x_2^2 x_3^2 - x_1^4 x_2^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3 - x_1^5 x_2^5 x_3 x_4 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4 - x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4 \\ & - x_1^4 x_2^4 x_3^2 x_4 + x_1^6 x_2^6 x_3^2 x_4 - x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4 + x_1^5 x_2^5 x_3^3 x_4 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 \\ & \left. - x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4^2 - x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^2 + x_1^4 x_2^4 x_3^3 x_4^2 \right) \end{aligned}$$

com $x_{1,i} = x_i$ e $x_{2,i} = y_i$.

Exemplo 3.13. Considere o jogo (N, \mathcal{M}) com $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$$\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}.$$

Como resultado da aplicação direta do pacote Omega obtemos a seguinte função geratriz

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = & x_1^3 x_2^3 x_3 x_4 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + (x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4) (1 + x_4) \\ & + x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4 (1 + x_4 + x_4^2). \end{aligned}$$

Note que o jogo $[4; 3, 2, 2, 1]$ aparece no Exemplo 3.12.

Capítulo 4

Estudo de Caso: Câmara de Vereadores

4.1 Câmara Municipal- Capitais dos Estados brasileiros

Uma aplicação do método exposto por este trabalho pode ser apresentado pelas câmaras de vereadores das capitais dos estados brasileiros. Campanhas municipais representam uma ligação central na lógica eleitoral. A vitória de aliados nas urnas apontam para um impacto nas eleições subsequentes.

Eleições municipais não possuem relação direta com eleições federais, mas, para partidos e parlamentares, as disputas municipais são fundamentais na composição do legislativo federal. Vitória ou derrota nas urnas podem levar a uma série de efeitos, que, na definição de [Fleischer \(2002\)](#), faz parte de uma “correia de transmissão” tanto de votos quanto de poder político. Segundo [Fleischer \(2002\)](#), quanto mais prefeitos e vereadores são eleitos por um partido ou coligação, dois anos depois se elegem mais deputados desse mesmo partido ou coligação. Se eleger menos, terá menos deputados também.

Para entender a relevância das eleições municipais dentro da caracterização política e partidária, é importante lembrar que, dos quase 65 mil cargos eletivos disputados no Brasil, a maior partes destes estão nas cidades.

No sistema eleitoral brasileiro, os deputados federais são eleitos a partir dos votos de seus Estados. As campanhas, normalmente, se concentram na cidade de origem dos candidatos ou nas regiões em que são mais conhecidos. Por esse motivo a questão territorial é bastante significativa.

Conseqüentemente participar das campanhas municipais é uma maneira de deputados continuarem próximos da base eleitoral que os elegeram, de intensificar relações com seus aliados e, dessa maneira, se manter em destaque. Portanto, se aqueles aliados

se elegerem, deputados conseguem manter um canal político estreito com a sua região e poderá, por exemplo, intervir em repasse de recursos federais. Uma lógica fundamental para quem pretende buscar votos dois anos depois - seja para reeleição ou para novos cargos, como senador ou governador.

Quanto maior o número de votos no pleito municipal, maior será a bancada eleita na Câmara dois anos depois. Para os partidos, especialmente, o tamanho da bancada de deputados federais é considerada importante pelos seguintes motivos: a partir desse número é calculado o percentual a que a sigla tem direito do Fundo Partidário, que se refere ao dinheiro público destinado às eleições, e o tempo de propaganda em rádio e TV.

Em vista disso, construímos os IP dos partidos PT e MDB, que são os dois últimos partidos correspondentes aos dois últimos presidentes, nas câmaras municipais para as capitais dos estados brasileiros.

Esta seção é dedicada a demonstrar a aplicação do pacote Omega no exemplo apresentado por esse trabalho: Câmaras Municipais.

Câmara: Belo Horizonte

Quota:21

Total de vereadores: 41

- PHS e PODE: 4 votos
- AVANTE, PNM, PSB e PSDB:3 votos
- MDB, PRB, PSD,PSOL e PT: 2 votos
- DEM, NOVO, PCdoB, PP, PPS, PR, PROS, PSC, PSDC, PSL e PTC: 1 voto

Para esse exemplo temos o seguinte jogo: $[21; 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Nesse caso em especial, temos 2 partidos com 4 representantes cada um, 4 partidos com 3 representantes, 5 partidos com 2 representantes e 11 partidos com apenas 1 representante. Dessa forma, utilizando a abordagem descrita em [Bilbao et al. \(2000\)](#), a função geratriz desse jogo é dada por:

$$(1 + x_1^4)^2 (1 + x_2^3)^4 (1 + x_3^2)^5 (1 + x_4)^{11}$$

Queremos encontrar o índice de poder para o partido PT e MDB (que nesse caso será o mesmo valor). Dessa forma, para a representação da função geratriz eliminamos o fator que representa o partido, que nesse jogo possui peso igual a 2.

$$(1 + x_1^4)^2 (1 + x_2^3)^4 (1 + x_3^2)^4 (1 + x_4)^{11}$$

e consideramos apenas os expoentes com valores entre $q - 1$ e $q - w_i$. Acontece que este procedimento pode ser automatizado usando a APM e o pacote omega como descrevemos a seguir.

Para utilizarmos o pacote Omega no contexto de JVP, procedemos da seguinte forma. O jogador i é um votante *swing* para S se $w_S + w_i \geq q$ e $w_S \leq q - 1$, sendo w_i o peso do jogador i e w_S a soma dos pesos dos jogadores em $N \setminus \{i\}$. Seja $v = [q; w_1, \dots, w_n] = [q; \mathbf{v}]$. Vamos utilizar a mesma representação do Capítulo 3.4, i.e., $w_S = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{v}$, onde $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{B}^n$ com $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ representando a coalizão S . Por exemplo, se $S = \{1, 2, 5\}$ e $|N| = 7$, então $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$. Definimos também $\boldsymbol{\alpha}_{-i} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Neste caso, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.1. *Os IP de B e SS associados ao JVP $[q; \mathbf{v}]$ podem ser obtidos pelas expressões Omega abaixo*

$$\sum_{\geq}^{\lambda, \mu} \mu^{w_i - q} \lambda^{q-1} \prod_{j \neq i} \left(1 + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{w_j} \right)$$

e

$$\sum_{\geq}^{\lambda, \mu} \mu^{w_i - q} \lambda^{q-1} \prod_{j \neq i} \left(1 + t \left(\frac{\mu}{v} \right)^{w_j} \right),$$

respectivamente. O fator t na expressão associada ao índice SS foi inserido para levar em conta o tamanho das coalizões, já que este deve ser levado em conta no cálculo do índice de SS.

Demonstração. Precisamos considerar as soluções do sistema diofantino $w_{S \setminus \{i\}} + w_i \geq q$ e $w_{S \setminus \{i\}} \leq q - 1$. Desta forma, a expressão Omega correspondente é dada por (com $w_{S \setminus \{i\}} = \boldsymbol{\alpha}_{-i}^T \mathbf{v}$)

$$\begin{aligned} \sum_{\geq}^{\lambda, \mu} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \mu^{w_S + w_i - q} \lambda^{q-1 - w_S} &= \sum_{\geq}^{\lambda, \mu} \sum_{\boldsymbol{\alpha}_{-i}} \mu^{\boldsymbol{\alpha}_{-i}^T \mathbf{v} + w_i - q} \lambda^{q-1 - \boldsymbol{\alpha}_{-i}^T \mathbf{v}} \\ &= \sum_{\geq}^{\lambda, \mu} \sum_{\boldsymbol{\alpha}_{-i}} \mu^{\boldsymbol{\alpha}_{-i}^T \mathbf{v} + w_i - q} \lambda^{q-1 - \boldsymbol{\alpha}_{-i}^T \mathbf{v}} \\ &= \sum_{\geq}^{\lambda, \mu} \mu^{w_i - q} \lambda^{q-1} \prod_{j \neq i} \left(1 + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{w_j} \right). \end{aligned}$$

A prova para o valor de SS é similar e omitimos os detalhes. □

A seguir, a Tabela 1 apresenta os valores encontrados para as demais capitais dos estados brasileiros.

Composição do Índice de Banzhaf e Shapley-Shubik

Tabela 1 – Índice de Poder

Capital	Nº de vereadores	β -PT	β -MDB	ϕ -PT	ϕ -MDB
Belo Horizonte	41	166.421	166.421	0,048229846	0,048229846
Rio de Janeiro	51	51.592	328.760	0,037029684	0,227023585
São Paulo	55	28.185	5.885	0,17581193	0,033985058
Vitória	15	-	-	-	-
Curitiba	38	9.724	19614	0,20114018	0,153465501
Florianópolis	25	376	2.236	0,037162834	0,225330222
Porto Alegre	36	10.076	13.080	0,114051669	0,147746695
Campo Grande	29	576	1.148	0,031203976	0,066835938
Goiânia	35	7.144	107.794	0,050855888	0,300372824
Cuiabá	25	824	-	0,037717834	-
Distrito Federal	24	26.094	16.458	0,133322556	0,084421456
Manaus	41	162.852	328.756	0,023489198	0,048116238
Rio Branco	17	1.380	254	0,278787876	0,054545452
Macapá	23	7.060	7.060	0,042428157	0,042428157
Belém	35	201.530	631.286	0,02779476	0,088630482
Porto Velho	21	-	1.606	-	0,151165499
Boa Vista	15	-	76	-	0,133333331
Palmas	19	-	554	-	0,050388497
Maceió	21	-	200	-	0,19285714
Salvador	43	53.586	53.586	0,069349548	0,069349548
Fortaleza	43	16.951	5.644	0,063378936	0,020745914
São Luís	31	25.680	-	0,03119804	-
João Pessoa	27	57.436	28.212	0,074036803	0,035661452
Recife	39	129.078	129.078	0,048932944	0,048932944
Teresina	29	55.584	55.584	0,069001685	0,069001685
Natal	29	53.588	53.588	0,068609019	0,068609019
Aracaju	24	4.046	8.302	0,040462313	0,084537681

Fonte: Elaboração própria.

Esse estudo de caso pode ser considerado uma extensão do trabalho de [Lima e Ramos \(2010\)](#), que apresentaram a distribuição de poder entre os representantes da Câmara Federal. A ideia de [Lima e Ramos \(2010\)](#) era verificar se existe uma sub ou sobre-representatividade das regiões brasileiras. Esta discussão tem importante valor político e econômico, pois uma parcela dos recursos públicos é definida na instância federal. A aplicação em [Lima e Ramos \(2010\)](#) mostra que para o atual sistema, a região Sudeste é a mais favorecida em termos de transferência de recursos. Em relação aos Estados, os mais desenvolvidos e populosos possuem maior poder de voto em ambas situações. Com a metodologia apresentada por esse trabalho, é possível implementar estruturas de coalizões e o cálculo dos IP usando função geratriz a partir de coalizões mínimas.

Capítulo 5

Conclusão

Construímos uma nova abordagem baseada no conceito de função geratriz para calcular IP a partir de CMV com jogadores incompatíveis. A abordagem compreende o uso da função geratriz (3.11) para determinar CMV juntamente com o cálculo de IP através do Teorema 3.4.

Acreditamos que a abordagem aqui é de interesse por uma variedade de razões. Primeiro, lembramos de [Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#) que, mesmo que o jogo v seja ponderado, o jogo restrito v_G pode não ser um JVP. Portanto, a aplicação da metodologia da função geratriz para calcular IP a partir de CMV na presença de incompatibilidade é um problema complexo. Ao reformular o cálculo dos IP com incompatibilidade em termos de CMV, foi possível resolver esse problema usando a Proposição 6 de [Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#), (3.11) e (3.15).

Em segundo lugar, a abordagem introduzida aqui acomoda facilmente cálculos envolvendo CMV no sentido de [Algaba et al. \(2003\)](#) e fornece uma maneira fácil de calcular IP com incompatibilidade. Em particular, JVP de grandes tamanhos, mas com um pequeno grupo de CMV são particularmente adequados para a abordagem introduzida aqui. Além disso, é bem sabido que um JVP pode ser equivalentemente representado pelo par (N, \mathcal{M}) . Portanto, se a representação (N, \mathcal{M}) for usada em vez de $[\mathbf{q}; \mathbf{W}]$, podemos usar diretamente a função geratriz (3.15) para calcular os índices B e S com incompatibilidade. Mais precisamente, calculamos $f_{\text{mathcal{S}}}$ em (3.15) e desprezamos os termos t_S com $E \ni \{i, j\} \subseteq S$, pois pela Proposição 6 de [Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#) temos $v_G = (N, \mathcal{M}_G)$ com $G = (N, E)$.

Terceiro, como já apresentado por [Alonso-Mejide, Freixas e Molinero \(2012\)](#), o método de função geratriz é um procedimento eficiente para calcular IP. O método tem baixa complexidade espacial (começando com $[\mathbf{q}; \mathbf{W}]$ lembrando que essa abordagem compreende o cálculo de (3.11) e (3.15)) e, em relação à complexidade do tempo, nossa abordagem requer um tempo $\mathcal{O}(\max\{|\mathcal{L}_G \cup \mathcal{M}_G|, 2^m\})$ com $|\mathcal{M}_G| = m$ e \mathcal{L}_G o conjunto

de coalizões perdedoras por v_G , onde uma função $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se $|f(n)| \leq c|g(n)|$ para $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Note que se excluimos o caso desinteressante de CMV com um único jogador, ou seja, não há ditadores, então nosso limite é estritamente inferior a 2^n , melhorando o limite do pior caso possível em [Alonso-Meijide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro \(2015\)](#).

Em quarto lugar, é importante lembrar que funções geratrizes podem ser facilmente implementadas no computador usando pacotes de computação simbólica, como o pacote Omega do Wolfram Mathematica.

Em quinto lugar, os resultados obtidos (veja o Teorema 3.4) também incluem uma prova independente da representação dos IP B e S de jogos simples que unifica trabalhos anteriores ([EINY, 1988](#); [KIRSCH; LANGNER, 2010](#); [LANGE; KÓCZY, 2013](#)). Crucial para a nossa prova é a função geratriz f_S de (3.15) definida em um certo quociente de anéis por um ideal polinomial que é de grande valor do lado computacional, uma vez que apenas os termos lineares aparecem nos cálculos deste trabalho.

Finalmente, o estudo de caso desse trabalho pode ser considerado uma extensão do trabalho de [Lima e Ramos \(2010\)](#), que apresenta a distribuição de poder entre os representantes da Câmara Federal. A ideia de [Lima e Ramos \(2010\)](#) era verificar se existe uma sub ou sobre-representatividade das regiões brasileiras. Esta discussão tem importante valor político e econômico, pois uma parcela dos recursos públicos é definida na instância federal. A aplicação em [Lima e Ramos \(2010\)](#) mostra que para o atual sistema, a região Sudeste é a mais favorecida em termos de transferência de recursos. Em relação aos Estados, os mais desenvolvidos e populosos possuem maior poder de voto em ambas situações. Com a metodologia apresentada por esse trabalho, é possível implementar estruturas de coalizões, incluindo incompatibilidade entre os jogadores, e o cálculo dos IP usando função geratriz a partir de coalizões mínimas.

Referências

ALGABA, E. et al. Computing power indices in weighted multiple majority games. *Mathematical Social Sciences*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 63–80, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 21, 22, 41, 55 e 65.

ALONSO-MEIJIDE, J. M. et al. Weighted multiple majority games with unions: Generating functions and applications to the european union. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 198, n. 2, p. 530–544, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 41.

ALONSO-MEIJIDE, J. M.; BOWLES, C. Generating functions for coalitional power indices: An application to the imf. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 137, n. 1, p. 21–44, 2005. Citado na página 21.

ALONSO-MEIJIDE, J. M.; CASAS-MÉNDEZ, B.; FIESTRAS-JANEIRO, M. G. Computing banzhaf–coleman and shapley–shubik power indices with incompatible players. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 252, p. 377–387, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 21, 22, 42, 43, 51, 57, 65 e 66.

ALONSO-MEIJIDE, J. M.; FREIXAS, J.; MOLINERO, X. Computation of several power indices by generating functions. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 219, n. 8, p. 3395–3402, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 21, 22, 24, 56 e 65.

ANDREWS, G. E.; PAULE, P.; RIESE, A. Macmahon’s partition analysis: the omega package. *European Journal of Combinatorics*, Elsevier, v. 22, n. 7, p. 887–904, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 34.

BANZHAF, J. F. Weighted voting doesn’t work: A mathematical analysis. *Rutgers L. Rev.*, HeinOnline, v. 19, p. 317, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 45.

BANZHAF, J. F. One man, 3.312 votes: a mathematical analysis of the electoral college. *Vill. L. Rev.*, HeinOnline, v. 13, p. 304, 1968. Citado na página 45.

BECK, M.; ROBINS, S. *Computing the continuous discretely*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 24.

BILBAO, J. et al. Generating functions for computing power indices efficiently. *Top*, Springer, v. 8, n. 2, p. 191–213, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 51 e 62.

- CHESSA, M. A generating functions approach for computing the public good index efficiently. *Top*, Springer, v. 22, n. 2, p. 658–673, 2014. Citado na página 52.
- COX, D.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Ideals, varieties, and algorithms*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 22, 36 e 49.
- DEEGAN, J.; PACKEL, E. W. A new index of power for simple-person games. *International Journal of Game Theory*, Springer, v. 7, n. 2, p. 113–123, 1978. Citado na página 47.
- EGORYCHEV, G. P. *Integral representation and the computation of combinatorial sums*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1984. v. 59. Citado na página 50.
- EINY, E. The shapley value on some lattices of monotonic games. *Mathematical Social Sciences*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 1–10, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 66.
- FAALAND, B. On the number of solutions to a diophantine equation. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 170–175, 1972. Citado na página 28.
- FELSENTHAL, D. S.; MACHOVER, M. et al. The measurement of voting power. *Books*, Edward Elgar Publishing, 1998. Citado na página 48.
- FERNÁNDEZ, J. R. et al. Generating functions for computing the myerson value. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 109, n. 1, p. 143–158, 2002. Citado na página 21.
- FLEISCHER, D. As eleições municipais no brasil: uma análise comparativa (1982-2000). *Opinião Pública*, Universidade Estadual de Campinas, v. 8, n. 1, 2002. Citado na página 61.
- FRIEDMAN, J.; MCGRATH, L.; PARKER, C. Achievable hierarchies in voting games. *Theory and Decision*, Springer, v. 61, n. 4, p. 305–318, 2006. Citado na página 41.
- GOULD, H. W. *Combinatorial Identities: A standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations*. [S.l.]: Morgantown, W Va, 1972. Citado na página 49.
- HOLLER, M. J. Forming coalitions and measuring voting power. *Political studies*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 30, n. 2, p. 262–271, 1982. Citado na página 48.
- KIRSCH, W.; LANGNER, J. Power indices and minimal winning coalitions. *Social Choice and Welfare*, Springer, v. 34, n. 1, p. 33–46, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 66.
- LANGE, F.; KÓCZY, L. Á. Power indices expressed in terms of minimal winning coalitions. *Social Choice and Welfare*, Springer, p. 1–12, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 66.
- LARUELLE, A.; VALENCIANO, F. Semivalues and voting power. *International Game Theory Review*, World Scientific, v. 5, n. 01, p. 41–61, 2003. Citado na página 40.
- LIMA, A. C. d. C.; RAMOS, F. d. S. Há desigualdade de poder entre os estados e regiões do brasil? uma abordagem utilizando o índice de poder de banzhaf e a penrose square root law. *Economia Aplicada*, SciELO Brasil, v. 14, n. 2, p. 225–249, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 66.

- MACMAHON, P. *Combinatory analysis, 1915-16, Two volumes (bound as one)*, Chelsea Pub. [S.l.]: Co, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 30.
- MYERSON, R. B. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of operations research, INFORMS*, v. 2, n. 3, p. 225–229, 1977. Citado na página 42.
- NETO, A. F.; ANJOS, P. H. dos. Zeon algebra and combinatorial identities. *SIAM Review*, SIAM, v. 56, n. 2, p. 353–370, 2014. Citado na página 51.
- NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior*. [S.l.]: Princeton university press, 2007. Citado na página 40.
- RODRÍGUEZ-VEIGA, J.; NOVOA-FLORES, G. I.; CASAS-MÉNDEZ, B. Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 214, p. 1–15, 2016. Citado na página 21.
- SHAPLEY, L. S. Stochastic games. *Proceedings of the national academy of sciences, National Acad Sciences*, v. 39, n. 10, p. 1095–1100, 1953. Citado na página 47.
- SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American political science review*, Cambridge Univ Press, v. 48, n. 03, p. 787–792, 1954. Citado 3 vezes nas páginas 40, 45 e 47.
- STRAFFIN, P. D. *Game theory and strategy*. [S.l.]: MAA, 1993. v. 36. Citado na página 45.
- TAYLOR, A. D.; ZWICKER, W. S. *Simple games: Desirability relations, trading, pseudoweightings*. [S.l.]: Princeton University Press, 1999. Citado na página 41.
- WILF, H. S. *Generatingfunctionology* academic press. *New York*, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 24.

Anexos

ANEXO A

Composição dos jogos para as capitais brasileiras

Região Sudeste

Câmara de vereadores: Belo Horizonte

Quota:21

Total de vereadores: 41

- PHS e PODE: 4 votos
- AVANTE, PNM, PSB e PSDB: 3 votos
- MDB, PRB, PSD,PSOL e PT: 2 votos
- DEM, NOVO, PCdoB, PP, PPS, PR, PROS, PSC, PSDC, PSL e PTC: 1 voto

[21; 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Rio de Janeiro

Quota: 26

Total de vereadores: 51

- MDB: 10 votos
- PSOL: 6 votos
- DEM: 4 votos

- PRB, PSC, PSDB, PTB: 3 votos
- PDT, PHS, PP, PSD, PT, SD: 2 votos
- AVANTE, NOVO, PEN, PMN, PNH, PODE, PROS: 1 voto

[26; 10, 6, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: São Paulo

Quota: 28

Total de vereadores: 55

- PSDB: 10 votos
- PT: 9 votos
- DEM: 5 votos
- PR, PRB, PSD: 4 votos
- PSB: 3 votos
- MDB, PPS, PTB, PV, PSOL: 2 votos
- PHS, PODE, PP, PSC, NOVO, PROS: 1 voto

[28; 10, 9, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Vitória

Quota: 8

Total de vereadores: 15

- PPS: 5 votos
- PTB, PSB, PDT: 2 votos
- PP, PV, PSD, PSDB: 1 voto

[8; 5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1]

Região Sul

Câmara de vereadores: Curitiba

Quota: 20

Total de vereadores: 38

- PDT: 5 votos
- PSD: 4 votos
- PSC, PSB, PSDB: 3 votos
- DEM, MDB, PSDC, PTB, PTN, PV: 2 votos
- PR, PT, PPS, PP, PRB, PROS, PRP, SD: 1 voto

[20; 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Florianópolis

Quota: 13

Total de vereadores: 25

- MDB: 5 votos
- PSDB, PSOL, PSD: 3 votos
- PP, PSB: 2 votos
- DEM, PDT, PR, PRB, PSC, PT, PTB: 1 voto

[13; 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Porto Alegre

Quota: 19

Total de vereadores: 36

- MDB: 5 votos
- PP,PT,PTB: 4 votos
- PDT, PSOL: 3 votos

- DEM, PRB, PSB: 2 voto
- NOVO,PR,PROS, PSD, PSDB, REDE, SD: 1 voto

[19; 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Região Centro-Oeste

Câmara de vereadores: Campo Grande

Quota: 15

Total de vereadores: 29

- PSDB: 7 votos
- PP: 3 votos
- PDT, PRB, PSB, PSD, MDB, SD: 2 votos
- PT, REDE, PODE, AVANTE, DEM, PMN, PTB: 1 voto

[15; 7, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Goiânia

Quota: 18

Total de vereadores: 35

- MDB: 11 votos
- PSDB: 3 votos
- PDT, PR, PRB, PRTB, PT: 2 votos
- PC do B, PMN, PSB, PSC, PSDC, PSL, PSOL, PT do B, PTB, PTC, PTN: 1 voto

[18; 11, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Cuiabá

Quota: 13

Total de vereadores: 25

- PV: 4 votos
- PP, PSB, PSDB: 3 votos
- PRP, PSC: 2 votos
- PR, PROS, PRTB, PSD, PSDC, PSL, PT do B, PTC: 1 voto

[13; 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Distrito Federal

Quota: 13

Total de vereadores: 24

- PT: 3 votos
- PDT, PR, PSB, MDB, PPS: 2 votos
- PHS, PODE, PRB, PROS, PSD, PV, SD, PSDB, PTB, REDE, sem partido: 1 voto

[13; 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Região Norte

Câmara de vereadores: Manaus

Quota: 21

Total de vereadores: 41

- PHS, PR, PTN: 4 votos
- DEM, PSB: 3 votos
- MDB, PMN, PSD, PSDB, PTC, PV: 2 votos
- PP, PC do B, PDT, PPL, PRB, PROS, PRP, PSC, PSDC, PT, PTB: 1 voto

[21; 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Rio Branco-AC

Quota: 9

Total de vereadores: 17

- PT: 4 votos
- PSL, PSDB: 2 votos
- MDB, PDT, PTN, PSD, DEM, PRB, PHS, PC do B, PSB: 1 voto

[9; 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Macapá- AP

Quota: 12

Total de vereadores: 23

- PDT, PR, PSDB, PRB, PV, REDE: 2 votos
- PROS, PSC, PSOL, PRP, PT do B, MDB, PPS, SD, PNT, PMB, PPL: 1 voto

[12; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Belém-PA

Quota: 18

Total de vereadores: 35

- MDB, PRB, PSOL: 3 votos
- PC do B, PDT, PSB, PSC, PSD, PT do B, PTC: 2 votos
- PEN, PHS, PMN, PP, PPS, PR, PSDB, PSDC, PSL, PT, PTB, SD: 1 voto

[18; 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Porto Velho- RO

Quota: 11

Total de vereadores: 21

- MDB, PSB: 3 votos
- PTB, PSDB, PP, PSDC: 2 votos
- PC do B, PRB, PMN, PR, PTC, PSD, PHS: 1 voto

[11; 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Boa Vista- RR

Quota: 8

Total de vereadores: 15

- PTB: 3 votos
- PR, MDB, PDT, PSDB: 2 votos
- PHS, PSB, PV, PSD: 1 voto

[8; 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Palmas- TO

Quota: 10

Total de vereadores: 19

- PSB: 3 votos
- SD, PSL, PSD, PSDC: 2 votos
- MDB, PROS, PTB, PR, PSC, PPL, PTC, PP: 1 voto

[10; 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Região Nordeste

Câmara de vereadores: Maceió- AL

Quota: 11

Total de vereadores: 21

- PSDB: 5 votos
- MDB: 4 votos
- PR, PP: 3 votos
- DEM, PV, PPL, PSDC, PEN, PNT: 1 voto

[11; 5, 4, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Salvador - BA

Quota: 22

Total de vereadores: 43

- DEM: 6 votos
- PV, PHS: 4 votos
- PRB, MDB, PT, PSDB, PTN: 3 votos
- PC do B, PPS, PSC: 2 votos
- PSD, SD, PTB, PDT, PSL, PSB, PSOL, PMB: 1 voto

[22; 6, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Fortaleza- CE

Quota: 22

Total de vereadores: 43

- PDT: 11 votos
- PR, PRTB: 4 votos
- PPL: 3 votos
- PSd, SD, PEN, PT, PTC, PPS, PRP: 2 votos
- PSDB, MDB, PPL, PNT, PC do B, PRB, PSDC: 1 voto

[22; 11, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: São Luís- MA

Quota: 16

Total de vereadores: 31

- PDT: 4 votos
- PC do B: 3 votos
- PEN, PHS, PP, PR, PRTB, PSDB, PSL: 2 votos
- DEM, PPS, PROS, PRP, PSB, PSC, PSD, PT, PTB, PTC: 1 voto

[16; 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: João Pessoa- PB

Quota: 14

Total de vereadores: 27

- PSB: 4 votos
- PSDB: 3 votos
- PMN, PP, PT do B: 2 votos
- PC do B, PHS, PMBD, PPS, PR, PRB, PRTB, PSC, PSD, PSDC, PSL, PT, PTB, SD : 1 voto

[14; 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Recife-PE

Quota: 20

Total de vereadores: 39

- PSB: 8 votos
- PP, PRTB, PSDB: 3 votos
- PEN, MDB, PRB, PSC, PT: 2 votos
- Pc do B, PDT, PPS, PROS, PRP, PSD, PSDC, PSL, PSOL, PTB, PTC, SD: 1 voto

[20; 8, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Teresina - PI

Quota: 15

Total de vereadores: 29

- PSDB: 4 votos
- PEN, MDB, PP, PRP, PSL, PT, PTC: 2 votos
- PC do B, PDT, PHS, PMB, PPS, PRB, PSD, PSDC, PT do B, PV, SD: 1 voto

[15; 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Natal- RN

Quota: 15

Total de vereadores: 29

- PDT: 4 votos
- PMB, SD: 3 votos
- PEN, MDB, PT: 2 votos

- PHS, PR, PRB, PROS, PSB, PSD, PSDB, PSDC, PSL, PSOL, PTB, PT do B, PTN: 1 voto

[15; 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Câmara de vereadores: Aracaju- SE

Quota: 13

Total de vereadores: 24

- DEM, REDE, PSB, PTB, PC do B, MDB, PSD, PPS: 2 votos
- PT, PRTB, PRB, PSDB, PEN, PHS, PDT, PMB: 1 voto

[13; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

ANEXO B

Pacote Omega

Usando o pacote Omega:

In [1] := << Omega.m

Omega Package version 2.49

written by Axel Riese

(in cooperation with George E. Andrews and Peter Paule)

Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),

Johannes Kepler University, Linz, Austria

$$\text{In [2]} := \lambda^{-19} \mu^{20} (1 + (\lambda/\mu)^4 * t)^2 (1 + (\lambda/\mu)^3 * t)^4 (1 + (\lambda/\mu)^2 * t)^3 (1 + (\lambda/\mu)^1 * t)^{11}$$

$$\mu^{20} \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 * t\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 * t\right)^4 \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 * t\right)^3 \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 * t\right)^{11}$$

$$\text{Out [2]} = \frac{\mu^{20} \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 * t\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 * t\right)^4 \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 * t\right)^3 \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 * t\right)^{11}}{\lambda^{19}}$$

In [3] := OR[% , \lambda]

$$\text{Out [3]} = \frac{t^{20}}{\mu^{17}} + \frac{11t^{19}}{\mu^{16}} + \mu^{20} \left(\left(\frac{55t^{18}}{\mu^{35}} + \frac{3t^{19}}{\mu^{35}} \right) + \left(\frac{165t^{17}}{\mu^{34}} + \frac{33t^{18}}{\mu^{34}} + \frac{4t^{19}}{\mu^{34}} \right) \right.$$

$$+ \left(\frac{330t^{16}}{\mu^{33}} + \frac{165t^{17}}{\mu^{33}} + \frac{47t^{18}}{\mu^{33}} + \frac{2t^{19}}{\mu^{33}} \right) + \left(\frac{462t^{15}}{\mu^{32}} + \frac{495t^{16}}{\mu^{32}} + \frac{253t^{17}}{\mu^{32}} + \frac{34t^{18}}{\mu^{32}} \right)$$

$$+ \left(\frac{462t^{14}}{\mu^{31}} + \frac{990t^{15}}{\mu^{31}} + \frac{825t^{16}}{\mu^{31}} + \frac{243t^{17}}{\mu^{31}} + \frac{12t^{18}}{\mu^{31}} \right)$$

$$+ \left(\frac{330t^{13}}{\mu^{30}} + \frac{1386t^{14}}{\mu^{30}} + \frac{1815t^{15}}{\mu^{30}} + \frac{1001t^{16}}{\mu^{30}} + \frac{144t^{17}}{\mu^{30}} + \frac{8t^{18}}{\mu^{30}} \right)$$

$$+ \left(\frac{165t^{12}}{\mu^{29}} + \frac{1386t^{13}}{\mu^{29}} + \frac{2838t^{14}}{\mu^{29}} + \frac{2695t^{15}}{\mu^{29}} + \frac{792t^{16}}{\mu^{29}} + \frac{112t^{17}}{\mu^{29}} + \frac{t^{18}}{\mu^{29}} \right)$$

$$+ \left(\frac{55t^{11}}{\mu^{28}} + \frac{990t^{12}}{\mu^{28}} + \frac{3234t^{13}}{\mu^{28}} + \frac{5049t^{14}}{\mu^{28}} + \frac{2640t^{15}}{\mu^{28}} + \frac{708t^{16}}{\mu^{28}} + \frac{39t^{17}}{\mu^{28}} \right)$$

$$+ \left(\frac{11t^{10}}{\mu^{27}} + \frac{495t^{11}}{\mu^{27}} + \frac{2706t^{12}}{\mu^{27}} + \frac{6798t^{13}}{\mu^{27}} + \frac{5940t^{14}}{\mu^{27}} + \frac{2684t^{15}}{\mu^{27}} + \frac{383t^{16}}{\mu^{27}} + \frac{15t^{17}}{\mu^{27}} \right)$$

$$+ \left(\frac{t^9}{\mu^{26}} + \frac{165t^{10}}{\mu^{26}} + \frac{1650t^{11}}{\mu^{26}} + \frac{6666t^{12}}{\mu^{26}} + \frac{9504t^{13}}{\mu^{26}} + \frac{6820t^{14}}{\mu^{26}} + \frac{1925t^{15}}{\mu^{26}} + \frac{201t^{16}}{\mu^{26}} + \frac{4t^{17}}{\mu^{26}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{33t^9}{\mu^{25}} + \frac{715t^{10}}{\mu^{25}} + \frac{4752t^{11}}{\mu^{25}} + \frac{11088t^{12}}{\mu^{25}} + \frac{12276t^{13}}{\mu^{25}} + \frac{6050t^{14}}{\mu^{25}} + \frac{1227t^{15}}{\mu^{25}} + \frac{84t^{16}}{\mu^{25}} \right) \\
& + \left(\frac{3t^8}{\mu^{24}} + \frac{209t^9}{\mu^{24}} + \frac{2420t^{10}}{\mu^{24}} + \frac{9504t^{11}}{\mu^{24}} + \frac{16104t^{12}}{\mu^{24}} + \frac{13002t^{13}}{\mu^{24}} + \frac{4521t^{14}}{\mu^{24}} + \frac{680t^{15}}{\mu^{24}} + \frac{20t^{16}}{\mu^{24}} \right) \\
& + \left(\frac{37t^8}{\mu^{23}} + \frac{847t^9}{\mu^{23}} + \frac{5940t^{10}}{\mu^{23}} + \frac{15576t^{11}}{\mu^{23}} + \frac{19998t^{12}}{\mu^{23}} + \frac{11220t^{13}}{\mu^{23}} + \frac{3080t^{14}}{\mu^{23}} + \frac{260t^{15}}{\mu^{23}} + \frac{6t^{16}}{\mu^{23}} \right) \\
& + \left(\frac{3t^7}{\mu^{22}} + \frac{189t^8}{\mu^{22}} + \frac{2640t^9}{\mu^{22}} + \frac{11088t^{10}}{\mu^{22}} + \frac{22506t^{11}}{\mu^{22}} + \frac{19800t^{12}}{\mu^{22}} + \frac{9020t^{13}}{\mu^{22}} + \frac{1544t^{14}}{\mu^{22}} + \frac{102t^{15}}{\mu^{22}} \right) \\
& + \left(\frac{23t^7}{\mu^{21}} + \frac{792t^8}{\mu^{21}} + \frac{5720t^9}{\mu^{21}} + \frac{18645t^{10}}{\mu^{21}} + \frac{25542t^{11}}{\mu^{21}} + \frac{18348t^{12}}{\mu^{21}} + \frac{5544t^{13}}{\mu^{21}} + \frac{741t^{14}}{\mu^{21}} + \frac{20t^{15}}{\mu^{21}} \right) \\
& + \left(\frac{t^6}{\mu^{20}} + \frac{144t^7}{\mu^{20}} + \frac{2068t^8}{\mu^{20}} + \frac{11275t^9}{\mu^{20}} + \frac{24354t^{10}}{\mu^{20}} + \frac{26928t^{11}}{\mu^{20}} + \frac{13420t^{12}}{\mu^{20}} + \frac{3135t^{13}}{\mu^{20}} + \frac{248t^{14}}{\mu^{20}} + \frac{4t^{15}}{\mu^{20}} \right) \\
& + \left(\frac{12t^6}{\mu^{19}} + \frac{492t^7}{\mu^{19}} + \frac{4851t^8}{\mu^{19}} + \frac{17127t^9}{\mu^{19}} + \frac{29040t^{10}}{\mu^{19}} + \frac{23100t^{11}}{\mu^{19}} + \frac{8745t^{12}}{\mu^{19}} + \frac{1409t^{13}}{\mu^{19}} + \frac{68t^{14}}{\mu^{19}} \right)
\end{aligned}$$

In [4] := OR[%, μ]

$$\text{Out [4]} = 13t^6 + 636t^7 + 6919t^8 + 28402t^9 + 53394t^{10} + 50028t^{11} + 22165t^{12} + 4544t^{13} + 316t^{14} + 4t^{15}$$

Com o resultado da saída (4), gerado pelo Omega, aplicamos a fórmula de Shapley conforme 3.3 e obtemos o índice de SS em conformidade com o valor apresentado pela Tabela 1.