

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Dimensionamento Otimizado de Vigas Mistas Aço-Concreto

Tatiana Aparecida Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

Ouro Preto, Março de 2018

R696d

Rodrigues, Tatiana Aparecida.

Dimensionamento otimizado de vigas mistas aço-concreto [manuscrito] /
Tatiana Aparecida Rodrigues. - 2018.

97f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de
Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Otimização. 2. Dimensionamento. 3. Vigas Mistas. 4. Método Simplex. 5.
Programação Linear Sequencial. I. Silva, Amilton Rodrigues da. II. Universidade
Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.014

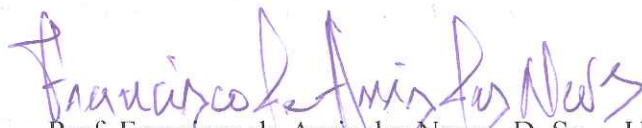
DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO

AUTORA: TATIANA APARECIDA RODRIGUES

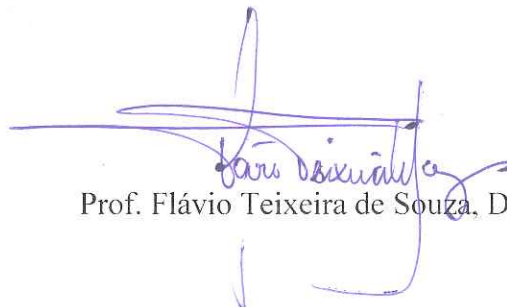
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 02 de março de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Francisco de Assis das Neves, D. Sc. – UFOP



Prof. Flávio Teixeira de Souza, D. Sc. – IFMG

*A Deus,
a minha família e ao meu orientador.*

Agradecimentos

A Deus por iluminar a minha vida, por me dar forças e permitir que eu chegasse até aqui.

Aos meus amados pais, Avelar e Maria das Graças, que são exemplos para mim, que sempre me apoiaram incondicionalmente e lutaram por minhas conquistas. A vocês, minha eterna gratidão.

Ao meu marido Júnior, por sempre acreditar em minha capacidade, por todo incentivo, amor e compreensão.

As minhas irmãs, Fabiana e Rosana, pelo apoio, carinho e companheirismo.

Ao meu sobrinho Pedro Henrique, por sempre tornar meus dias mais alegres e divertidos.

Aos meus avós, pela fé e pelas orações.

Ao meu orientador Amilton, pela excelente orientação, dedicação, paciência e principalmente por dividir comigo seus conhecimentos.

À CAPES e a UFOP pelo auxílio financeiro.

*“Dai graças ao Senhor porque ele é bom,
eterna é a sua misericórdia.”*

Salmo 117

Resumo da dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO

Tatiana Aparecida Rodrigues

Março, 2018

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

As seções mistas aço-concreto estão cada vez mais sendo utilizadas nas obras de engenharia civil, tanto no cenário mundial quanto no Brasil. O trabalho conjunto do perfil de aço e da laje de concreto aumenta consideravelmente o desempenho do elemento estrutural misto devido ao aproveitamento das vantagens de cada material. Nesse trabalho, é utilizado um elemento de barra em conjunto com um elemento de interface para análise não linear de vigas mistas aço-concreto com interação parcial. O objetivo é montar um algoritmo que utilize essas ferramentas de análise para dimensionar vigas mistas aço-concreto buscando um projeto otimizado em termos de gastos dos materiais. Definido os vãos, apoios, carregamentos para verificação última e de serviço, para a viga analisada, um algoritmo de otimização é utilizado para definir as dimensões da seção transversal retangular da laje de concreto e do perfil de aço do tipo I e a quantidade e diâmetro das barras de reforço da laje de concreto, de forma que, a quantidade desses materiais sejam as mínimas necessárias para resistirem aos esforços solicitantes e garantirem a segurança estrutural, considerando os estados limites último e de serviço. As restrições de projeto são aquelas definidas em normas referentes ao dimensionamento de elementos lineares de concreto, aço ou misto, assim como restrições laterais referentes às dimensões limites das peças e do tamanho do passo do algoritmo de otimização não linear. A função objetivo é definida como sendo o custo por metro linear da viga mista, obtida a partir do custo de cada material, aço, concreto e armadura. No processo de otimização é utilizado o método iterativo de programação linear sequencial, no qual o problema não linear de definição das variáveis de projeto que atenda a todas as restrições de projeto é aproximado por uma sequência de problemas lineares, que tem seu ponto ótimo definido a cada passo com a utilização do método Simplex. Exemplos de vigas mistas para as quais foram definidas suas cargas últimas foram utilizados para validação das implementações. Outros exemplos foram analisados para os quais foram controlados a cada iteração as restrições e função objetivo, verificando a funcionalidade do algoritmo.

Palavras-Chave: Otimização, Dimensionamento, Vigas Mistas, Método Simplex, Programação Linear Sequencial.

Abstract of dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

OPTIMIZED DIMENSIONING OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE BEAMS

Tatiana Aparecida Rodrigues

March, 2018

Advisor: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

The steel-concrete composite sections are increasingly being used in civil engineering works, both in the world context and in Brazil. The joint work of the steel profile and the concrete slab considerably increases the performance of the composite structural element due to the advantage of the advantages of each material. In this work, a bar element is used in conjunction with an interface element for nonlinear analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction. The goal is to assemble an algorithm that uses these analysis tools to scale concrete steel composite beams for an optimized design in terms of material expenditures. Defining the spans, supports, loads for verification ultimate and service, for the beam analyzed, an optimization algorithm is used to define the dimensions of the rectangular cross section of the concrete slab and the steel profile of type I and the quantity and diameter of the reinforcement bars of the concrete slab so that the quantity of these materials are the minimum necessary to withstand the loading and to ensure structural safety considering the limit states design (ultimate and serviceability). The design constraints are those defined in norms concerning the dimensioning of concrete, steel or mixed linear elements, as well as lateral constraints referring to the limit dimensions of the parts and the step size of the nonlinear optimization algorithm. The objective function is defined as the cost per linear meter of the composite beam, obtained from the cost of each material, steel, concrete and reinforcement. In the optimization process, the iterative method linear sequential programming is used, in which the nonlinear problem of defining the design variables that meets all design constraints is approximated by a sequence of linear problems, which has its optimum point defined by each step using the Simplex method. Examples of composite beams for which their final loads were defined were used for validation of the implementations. Other examples were analyzed for which it was controlled at each iteration the constraints and objective function verifying the functionality of the algorithm.

Keywords: Optimization, Sizing, Composite Beams, Simplex Method, Sequential Linear Programming.

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - Seção transversal típica de uma viga mista aço-concreto..... | 3 |
| Figura 1.2 - Tipos de conectores e comportamento na interface..... | 4 |
| Figura 1.3 - Tipos de otimização: a) otimização paramétrica, b) otimização de forma e c) otimização topológica..... | 6 |
| Figura 3.1 - Deformada de um segmento de viga de Euler-Bernoulli | 23 |
| Figura 3.2 - Deformação de um segmento de viga mista..... | 27 |
| Figura 3.3 - Deslocamento horizontal relativo no elemento de interface | 28 |
| Figura 3.4 - Deslocamento vertical relativo no elemento de interface..... | 28 |
| Figura 3.5 - Graus de liberdade do elemento de interface utilizado na implantação | 29 |
| Figura 4.1 - Variáveis de projeto do problema..... | 35 |
| Figura 5.1 - Viga mista com interação parcial: viga contínua e seção transversal..... | 53 |
| Figura 5.2 - Leis constitutivas utilizadas por Dall'Asta e Zona (2004): (a) concreto, (b) aço (perfil e barras de reforço) e (c) conexão da interface | 53 |
| Figura 5.3 - Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista | 54 |
| Figura 5.4 - Leis constitutivas utilizadas neste exemplo: (a) concreto, (b) aço do perfil, (c) barras de reforço e (d) conexão da interface..... | 55 |
| Figura 5.5 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm) | 56 |
| Figura 5.6 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 56 |
| Figura 5.7 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 58 |
| Figura 5.8 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)..... | 59 |
| Figura 5.9 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 60 |
| Figura 5.10 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)..... | 60 |
| Figura 5.11 - Variação da área de aço na seção mista durante o processo de otimização | 61 |
| Figura 5.12 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm) | 62 |
| Figura 5.13 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 62 |
| Figura 5.14 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 63 |
| Figura 5.15 - Variação das restrições no processo de otimização (laje de concreto)..... | 64 |
| Figura 5.16 - Viga mista com interação parcial: viga contínua e seção transversal..... | 65 |
| Figura 5.17 - Leis constitutivas utilizadas por Salari e Spacone (2001), respectivamente: concreto, aço (perfil e barras de reforço) e conexão da interface | 65 |
| Figura 5.18 - Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista | 66 |
| Figura 5.19 - Leis constitutivas utilizadas neste exemplo..... | 67 |
| Figura 5.20 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm) | 68 |
| Figura 5.21 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 68 |
| Figura 5.22 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 69 |

| | |
|---|----|
| Figura 5.23 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)..... | 70 |
| Figura 5.24 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 70 |
| Figura 5.25 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)..... | 71 |
| Figura 5.26 - Variação da área de aço na seção mista durante o processo de otimização | 72 |
| Figura 5.27 - Seção definida pelo usuário e seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm) | 73 |
| Figura 5.28 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 74 |
| Figura 5.29 - Variação das restrições no processo de otimização (laje de concreto)..... | 74 |
| Figura 5.30 - Piso formado por laje de concreto e vigas de aço simplesmente apoiadas..... | 75 |
| Figura 5.31 - Leis constitutivas utilizadas neste exemplo: (a) concreto, (b) aço, (c) barras de reforço e (d) conexão da interface | 76 |
| Figura 5.32 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm) | 77 |
| Figura 5.33 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 77 |
| Figura 5.34 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 78 |
| Figura 5.35 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)..... | 78 |
| Figura 5.36 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil simétrico) | 79 |
| Figura 5.37 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 80 |
| Figura 5.38 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 80 |
| Figura 5.39 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)..... | 81 |
| Figura 5.40 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil não simétrico) | 81 |
| Figura 5.41 - Viga mista contínua com interação parcial | 82 |
| Figura 5.42 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm) | 83 |
| Figura 5.43 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 83 |
| Figura 5.44 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 84 |
| Figura 5.45 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)..... | 84 |
| Figura 5.46 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil simétrico)..... | 85 |
| Figura 5.47 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)..... | 85 |
| Figura 5.48 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm) | 86 |
| Figura 5.49 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)..... | 87 |
| Figura 5.50 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil não simétrico) | 88 |

Lista de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 5.1 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 57 |
| Tabela 5.2 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 63 |
| Tabela 5.3 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 68 |
| Tabela 5.4 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 73 |
| Tabela 5.5 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 77 |
| Tabela 5.6 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 80 |
| Tabela 5.7 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 83 |
| Tabela 5.8 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm ²)..... | 86 |

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1. | Considerações Iniciais | 1 |
| 1.2. | Vigas Mistas | 2 |
| 1.3. | Otimização | 4 |
| 1.4. | Motivação e Objetivos | 7 |
| 1.5. | Metodologia | 8 |
| 1.6. | Apresentação..... | 9 |
| 2 | Revisão Bibliográfica..... | 11 |
| 2.1. | Otimização no Dimensionamento de Estruturas..... | 11 |
| 2.2. | Análise Numérica de Vigas Mistas..... | 15 |
| 2.3. | Considerações Normativas..... | 18 |
| 2.3.1. | Comportamento estrutural | 19 |
| 2.3.2. | Verificação ao momento fletor | 20 |
| 3 | Elementos Para Análise Não Linear de Vigas Mistas Aço-Concreto | 22 |
| 3.1. | Elemento Unidimensional de Barra | 22 |
| 3.1.1. | Formulação numérica para o elemento de barra | 23 |
| 3.2. | Elemento de Interface | 26 |
| 3.2.1. | Formulação numérica para o elemento de interface | 26 |
| 4 | Otimização..... | 32 |
| 4.1. | Considerações Referentes ao Problema | 32 |
| 4.1.1. | Função objetivo..... | 33 |
| 4.1.2. | Variáveis de projeto | 34 |
| 4.1.3. | Restrições de projeto..... | 35 |
| 4.1.3.1. | Verificação do estado limite último..... | 36 |
| 4.1.3.2. | Verificação do estado limite de serviço | 36 |
| 4.1.3.3. | Verificação da esbeltez da mesa e alma..... | 37 |
| 4.1.3.4. | Restrições laterais | 37 |
| 4.2. | Programação Linear Sequencial | 38 |
| 4.3. | Simplex | 40 |
| 4.3.1. | Ponto viável para o Simplex | 41 |
| 4.4. | Forma Padrão para o Problema Analisado | 43 |
| 4.5. | Ponto de Partida | 45 |
| 4.6. | Algoritmo..... | 46 |
| 4.7. | Implementação Computacional | 47 |
| 5 | Aplicações | 52 |
| 5.1. | Exemplo 1 | 52 |
| 5.1.1. | Otimizando o perfil I de aço | 55 |
| 5.1.2. | Otimizando a laje de concreto | 61 |

| | | |
|----------|-------------------------------------|-----------|
| 5.2. | Exemplo 2 | 64 |
| 5.2.1. | Otimizando o perfil I de aço | 67 |
| 5.2.2. | Otimizando a laje de concreto | 72 |
| 5.3. | Exemplo 3 | 74 |
| 5.4. | Exemplo 4 | 82 |
| 6 | Considerações Finais | 89 |
| 6.1. | Síntese do Trabalho | 89 |
| 6.2. | Conclusões | 91 |
| 6.3. | Trabalhos Futuros | 91 |

Capítulo 1

Introdução

1.1. Considerações Iniciais

Um dos grandes desafios para os engenheiros estruturais é realizar projetos eficientes e econômicos sem que comprometam a integridade da estrutura. Logo, o principal objetivo de um projetista, é obter a solução mais vantajosa, com menores custos em um menor tempo, mas com a certeza de que a estrutura seja capaz de cumprir satisfatoriamente as funções dela requerida durante sua vida útil.

Nos últimos anos, com a crescente competitividade existente no mercado da construção civil, tem-se incentivado a elaboração de projetos que buscam a redução de consumo de material utilizado, reduzindo os custos dos empreendimentos.

Com o uso progressivo dos dispositivos computacionais e o aumento da utilização da mecânica computacional para a resolução de problemas de análise estrutural, os processos de otimização têm se tornado uma importante ferramenta à disposição da engenharia. Essas facilidades computacionais existentes atualmente, podem auxiliar os engenheiros estruturais a elaborarem projetos com mais qualidade e competitivos, uma vez que a segurança estrutural, associado à economia, será alcançada com maior precisão.

As técnicas de otimização têm como objetivo extrair do produto ou serviço seu rendimento máximo. Na engenharia estrutural elas podem ser aplicadas com o intuito de encontrar, entre as inúmeras soluções possíveis, a que melhor atende critérios previamente definidos, de forma a encontrar a estrutura mais econômica, atendendo às condições arquitetônicas, de segurança e construtivas.

Como uma das condições necessárias para o menor custo de uma estrutura é o peso do material ser o menor possível, o que está geralmente associado à máxima eficiência estrutural, este trabalho propõe a contribuição na busca da solução ótima no dimensionamento de vigas mistas aço-concreto.

1.2. Vigas Mistas

Denomina-se sistema misto aço-concreto, o sistema híbrido no qual um perfil de aço (laminado, dobrado ou soldado) trabalha em conjunto com o concreto formando um pilar misto, uma viga mista, uma laje mista ou uma ligação mista. A interação entre os materiais é garantida por meio mecânicos, conectores, mossas, ressaltos, por atrito ou por simples aderência e repartição de cargas (Queiroz *et al.*, 2001).

Segundo Queiroz *et al.* (2001), as principais vantagens ligadas a utilização dos elementos estruturais mistos aço e concreto quando comparadas com elementos de concreto armado são: a redução do peso próprio e do volume de materiais da estrutura, a velocidade na execução das obras dispensando o uso de formas e escoramentos, e o aumento da precisão dimensional da construção. Já em relação ao uso apenas do aço, as principais vantagens são as seguintes: a redução considerável do aço estrutural (de 20% a 40% no caso de vigas mistas), o aumento da rigidez da estrutura, e as proteções contra incêndio e corrosão nos casos onde o aço estiver envolvido pelo concreto.

Segundo Malite (1990), as pesquisas relacionadas aos sistemas mistos iniciaram na Inglaterra, em 1914. Entre os anos de 1922 e 1939, pontes e edifícios que utilizam o sistema de vigas compostas foram construídos. No Brasil, as edificações mistas restringiram-se a alguns edifícios e pequenas pontes que foram construídas entre os anos de 1950 e 1960. Devido ao aumento considerável da produção de aço no país e objetivando novas soluções arquitetônicas e estruturais, nos últimos anos, sua utilização vem crescendo significativamente na construção de pontes, edifícios industriais e comerciais, tal como pesquisas sobre o tema em questão que ampliou a partir do final da década de 80.

As vigas mistas de aço e concreto, objeto de estudo deste trabalho, são elementos estruturais compostos por um perfil metálico, laminado, dobrado ou soldado, ligado a uma laje de concreto, convencional ou do tipo steel-deck, por meio de elementos metálicos denominados conectores de cisalhamento. É ilustrada na Figura 1.1 a representação da seção transversal de uma viga mista do tipo aço-concreto.

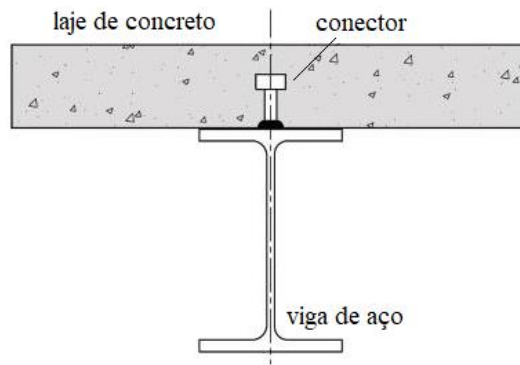


Figura 1.1 - Seção transversal típica de uma viga mista aço-concreto

Segundo Oehlers e Bradford (1999), para se alcançar um comportamento estrutural misto, torna-se necessário que os elementos sejam unidos de maneira eficiente. De acordo com Queiroz *et al.* (2001), o comportamento misto é desenvolvido quando dois elementos estruturais são ligados de tal forma a se deformarem como um único elemento. Os conectores de cisalhamento unem esses dois elementos permitindo uma transferência de esforço cortante da laje para a viga e da viga para a laje e também impedem a separação vertical dos componentes.

Existem diferentes formas de conectores de cisalhamento disponíveis, sendo o mais utilizado o do tipo pino com cabeça (*stud*), que consiste numa cabeça, sustentada por uma haste simples, conectada ao elemento de aço por um colar de solda. Esse tipo de conector é o mais utilizado pois é de fácil execução, além de fornecer à curva força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento na interface da viga mista um comportamento com patamar plástico. Esse comportamento plástico permite a redistribuição de esforços e adverte grandes deslocamentos antes do colapso. É apresentada na Figura 1.2 a curva força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento variando com o acréscimo de carga para três tipos de conectores diferentes.

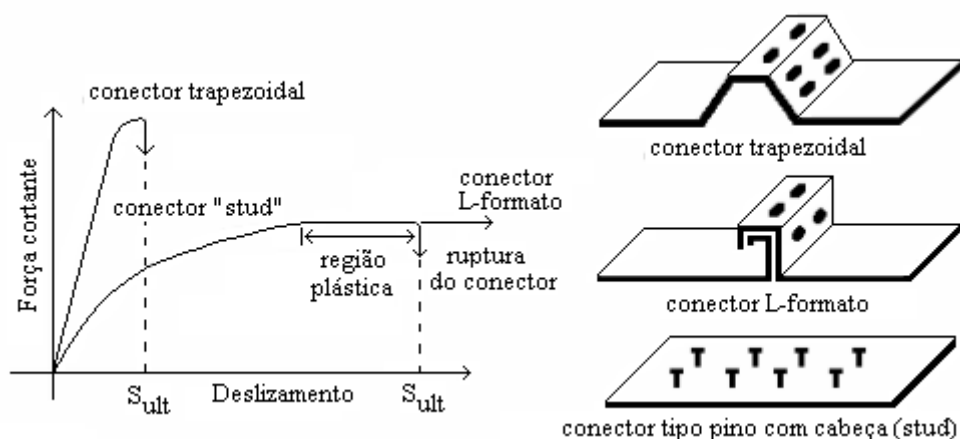


Figura 1.2 - Tipos de conectores e comportamento na interface

Fonte: adaptada de Oehlers e Bradford (1995)

Queiroz *et al.* (2001) afirma que em piso de edifícios a utilização do sistema estrutural de viga mista consegue uma redução do peso da viga de aço, da ordem de 20% a 40% em relação à viga com interação livre (sem a presença de conectores mecânicos). Isso faz com que, na maioria dos casos, a solução de vigas mistas seja escolhida em sistema estruturais que utilizam o elemento de aço.

1.3. Otimização

Ao longo dos últimos anos, o campo da otimização estrutural vem se desenvolvendo em grande escala, mostrando-se ser uma ferramenta importante e atrativa para tornar as empresas mais competitivas. Essa ferramenta hábil e eficaz não permite apenas diminuir custos de fabricação, mas também diminuir custos de operação quando melhora a performance dos componentes e sistemas criados.

Segundo Cheng (1922), a otimização estrutural tem por objetivo a busca dos melhores valores de certas variáveis que levem a projetos ótimos, ao passo que todas as restrições impostas sejam satisfeitas.

Um problema de otimização consiste em extremizar uma função objetivo, ou seja, determinar um conjunto de variáveis das quais essa função é dependente, de modo a encontrar seu valor máximo ou mínimo, sujeita a algumas restrições que a partir de um processo sistemático de busca, podem-se encontrar os melhores resultados e buscar a melhor solução.

Os primeiros estudos relacionados à otimização estrutural originaram-se com Maxwell em 1872 e, posteriormente, com Michell em 1904, onde buscavam o critério de máxima rigidez com mínimo material para configuração estrutural de treliça submetidas a esforços de tração e

compressão, empregando a teoria da elasticidade. Até os anos 60 seus estudos ficaram esquecidos pois tornaram-se complexos, sendo difícil aplicação naquela realidade, restando apenas como resultados acadêmicos e não práticos (Castelani, 2012).

Segundo Silva (2003), somente com o desenvolvimento da computação e do método dos elementos finitos, a otimização de estruturas voltou a ser estudada promovendo o surgimento de novas formulações e tornando possível a solução de problemas que eram complexos para serem solucionados de forma analítica.

De acordo com Coutinho (2006), nos anos 60 a otimização estrutural foi retomada por Schmit, mas ainda sendo limitada apenas à otimização dimensional de estruturas de treliça. Na década de 70, Hemp (1973) e Prager (1974) resolveram alguns problemas de *layout* para uma classe muito restrita de estruturas a partir de uma extensão do conceito de otimização desenvolvida por Michell.

Nos anos 80, várias publicações foram realizadas, podendo citar Cheng e Olhoff em 1981, como também Rozvany *et al.* em 1982 e Khon e Strang em 1986, que estudaram a maximização da rigidez de placas delgadas considerando a espessura como variável de projeto, através da utilização do método dos elementos finitos (Simonetti, 2016).

Devido alguns resultados terem apresentados grandes problemas quando se alterava a topologia ou a distribuição de material, surgiram, em meados dessa mesma década, vários questionamentos sobre os resultados das otimizações de forma e paramétricas. Isso porque a mudança da topologia implica constante alteração durante o processo de otimização do modelo do elemento finito associado a estrutura no início do processo, isto é, a cada iteração o problema físico é alterado e o algoritmo deve prever a atualização da malha de elementos finitos, o que é complexo (Simonetti, 2009).

Devido a necessidade de aperfeiçoar a otimização de forma, surge no fim da década de 80 a otimização topológica, surgindo a classificação da otimização quanto ao tipo, dividida em três: otimização paramétrica ou dimensional, otimização de forma e otimização topológica.

Segundo Parente Jr. (2000) a otimização paramétrica ou de dimensões tem por finalidade, a partir da forma e da topologia fixas, determinar os tamanhos de cada componente de uma estrutura, como por exemplo a área da seção transversal de barras ou a espessura de placas. A otimização de forma, visa determinar a geometria ótima de uma estrutura quando as dimensões e topologia são fixas, ou seja, a forma do contorno dos segmentos e a posição de furos é modificada para extremar uma função objetivo. A otimização topológica tem por objetivo determinar a topologia ótima de uma estrutura através da eliminação de elementos desnecessários ou também da criação de furos. Por exemplo, no dimensionamento de uma

treliça pode-se modificar sua topologia, treliça do tipo Pratt, Warren, Howe, entre outras, como também, a forma da seção transversal dos elementos da treliça, cantoneira, U, T, entre outras e as dimensões da seção transversal. Este conceito dos tipos de otimização são ilustrados na Figura 1.3.

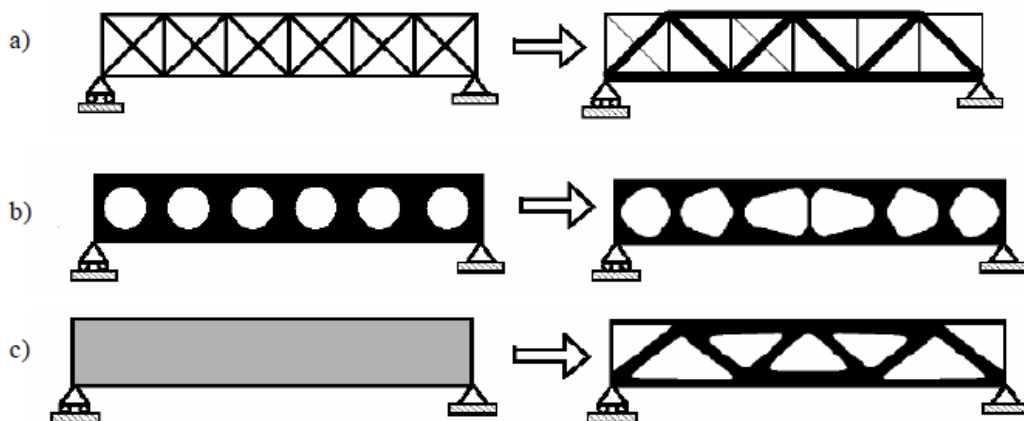


Figura 1.3 - Tipos de otimização: a) otimização paramétrica, b) otimização de forma e c) otimização topológica

Fonte: Bendsøe e Sigmund (2002)

Durante os anos 90, os programas de cálculo estrutural passaram a incluir algoritmos de otimização como parte integrante de seus programas. Desde então, um grande número de pesquisadores tem contribuindo para a programação de diferentes maneiras, incluindo desenvolvimento teóricos, aspectos computacionais e novas aplicações (Sommer, 2010).

Para solucionar uma imensa variedade de problemas de otimização, existem diversos métodos de programação matemática definidos de acordo com as características da função objetivo e das suas restrições, podendo destacar a programação linear e a programação não-linear.

Segundo Castalani (2012), na programação linear tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares em relação as variáveis de projeto. O principal método e com maior aplicação é o método Simplex, o qual apresenta uma boa eficiência e é adaptável ao cálculo computacional. Na programação não-linear, ou a função objetivo ou pelo menos uma das restrições não são funções lineares das variáveis de projeto. Neste tipo de programação, encontram-se vários métodos podendo ser com ou sem restrições.

O método Simplex foi desenvolvido por George B. Dantzig, um matemático americano, no final da década de 40 com o objetivo de resolver problemas lineares indeterminados

produzindo soluções que minimizassem uma determinada função objetivo marcando o início de uma nova era na otimização. Nos anos seguinte, Dantzig e outros matemáticos foram aperfeiçoando-o, com o objetivo de torná-lo mais eficiente do ponto de vista computacional (Nocedal e Wright, 2006).

O desenvolvimento dos computadores permitiu a aplicação deste método em problemas de grande porte, consolidando-se como um importante instrumento de otimização no campo da economia, administração e engenharia e atualmente é o principal método de otimização dentro da programação linear ganhando notoriedade por sua eficiência e simplicidade.

Segundo Eiras *et al.* (1996), o Simplex é um método de fácil implementação, sendo sua aplicação relativamente fácil, rápida, permitindo com boa margem de segurança, localizar a região ótima. A ideia desse método é reduzir continuamente o valor da função objetivo, indo de uma solução básica viável para outra até que seja alcançado o valor mínimo.

1.4. Motivação e Objetivos

Na atualidade, é significativo o aumento da utilização de estruturas de aço no Brasil. O uso desse elemento na construção civil permite o emprego de elementos mistos, principalmente as vigas mistas aço-concreto. A ação conjunta desses dois materiais, garantida pela presença dos conectores mecânicos, faz com que esses dois componentes atuem juntos formando uma única seção, aumentando o desempenho do elemento estrutural misto em relação ao do elemento de aço atuando separadamente.

A utilização de sistemas estruturais mistos aço-concreto se torna viável e vantajoso quando é projetado aproveitando as melhores características de cada material, ou seja, a excelente capacidade do aço em resistir esforços de tração e ao bom comportamento do concreto para absorver esforços de compressão. Por isso, tanto no contexto mundial, quanto no Brasil, os sistemas estruturais mistos aço-concreto têm sido amplamente utilizados nas obras de engenharia civil.

Outra indicação da utilização significativa de sistemas estruturais misto aço-concreto é o crescente desenvolvimento de diversas formulações numéricas para análise estrutural de sistemas mistos com foco em aço-concreto, dentre essas formulações destaca-se o desenvolvimento de elementos finitos de barra para análise numérica não linear de vigas mistas aço-concreto com interação parcial.

Na maioria dos problemas de dimensionamento tem-se um número maior de variáveis do que equações relacionando essas variáveis. Dessa forma, é necessária a atribuição de valores

a algumas variáveis para que se possa calcular as outras. Ou seja, existe um número ilimitado de soluções para o problema, quando considera as variáveis contínuas, ou um número grande de soluções, quando considera as variáveis discretas. Diante desse contexto, visando o dimensionamento de vigas mistas aço-concreto com interação parcial, tem-se como objetivo desse trabalho criar um algoritmo que utilize ferramentas de análise estrutural de vigas mistas aço-concreto buscando um projeto otimizado em termos de gastos dos materiais.

Definido os vãos, apoios, carregamentos para verificação última e serviço, para a viga analisada, um algoritmo de otimização é utilizado para definir as dimensões de um perfil de aço do tipo I, dimensões da seção transversal retangular da laje de concreto e a quantidade e diâmetro das barras de reforço, de forma que, a quantidade desses materiais sejam as mínimas necessárias para resistirem aos esforços solicitantes e garantirem a segurança estrutural, considerando os estados limites último e de serviço.

Na verificação dos estados limites último e de serviço é necessária uma análise estrutural da viga mista com interação parcial. Para isso é usado o método dos elementos finitos por meio do programa FEMOOP e dos elementos finitos de barra e de interface desenvolvidos por Silva (2006, 2010). Nessa simulação numérica, os elementos de barra simulam a laje de concreto e a viga de aço enquanto que o elemento de interface faz a ligação entre os elementos de barra e simula a conexão deformável na interface de contato entre a laje de concreto e o perfil de aço.

1.5. Metodologia

A metodologia da pesquisa consiste na criação de um algoritmo de otimização para o dimensionamento de vigas mistas aço-concreto através da aplicação do software comercial Visual Studio 2015, utilizando-se de elementos para análise numérica não linear com formulações implementadas dentro do programa de elemento finitos FEMOOP (*Finite Element Method Object Oriented Program*). A programação orientada a objetos tem relação de classe e herança onde objetos de uma mesma classe possuem as mesmas características, e classes derivadas são criadas herdando e definindo suas próprias características. Pode-se dizer que esse tipo de representação fornece um modo intuitivo de ver o processo de programação, isto é, modelar objetos do mundo real, seus atributos e seus comportamentos (Deitel e Deitel, 2001). Já a linguagem de programação C++ tem um nível de padronização que permite a utilização em diferentes plataformas e compiladores possibilitando sua portabilidade, como por exemplo, MS-Windows e Linux. É considerada uma linguagem de nível médio que combina características de linguagem de alto e baixo nível. Foi desenvolvida por Bjarne Stroustrup em

1983 como um adicional à linguagem C, onde originalmente foi nomeada como *C with Classes*, ou seja, o C com a inclusão de *classes*.

O programa FEMOOP originou-se de trabalhos acadêmicos desenvolvidos na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, no início dos anos 90, onde foi desenvolvido utilizando uma estrutura básica da Programação Orientada a Objetos (POO), fundamentando-se em uma hierarquia de classes que são responsáveis por cada particularidade do sistema desenvolvido (Guimarães, 1992). A representação de cada elemento em termos de um objeto ou classe é uma característica deste tipo de programação que será utilizada nesse trabalho.

A preferência pelo uso desse programa deve-se ao fato de seu código ser aberto e estar disponível para alterações e novas implementações. Outra vantagem da utilização desse programa é o fato da linguagem C++ orientada a objeto utilizada no código permitir a inclusão de novos elementos finitos, novos modelos de análise, entre outros, sem a necessidade do conhecimento detalhado e de alterações na estrutura geral do programa. Essas inclusões são geralmente feitas através da criação de classes filhas de classes já existentes do programa.

1.6. Apresentação

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. No primeiro capítulo faz-se uma introdução expondo conceitos relevantes sobre vigas mistas e otimização, apresentando também os objetivos e a metodologia da pesquisa.

No segundo capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica de trabalhos encontrados na literatura relacionados a otimização no dimensionamento de estruturas, como também trabalhos sobre análise numérica de vigas mistas. Tem-se também apresentadas nesse capítulo, as considerações normativas prescritas na NBR 8800 (2008) que rege o dimensionamento de vigas mistas.

O capítulo 3 expõe as formulações usadas para desenvolvimento do elemento unidimensional de barra e do elemento de interface que foram utilizados para análise não linear de vigas mistas aço-concreto com interação parcial.

No quarto capítulo são apresentadas as considerações referentes ao problema estudado, como a função objetivo, restrições e as variáveis de projeto. Em seguida, para o problema de otimização não linear com restrições, é descrito o método de otimização aplicado nesse trabalho, que é o método de programação linear sequencial juntamente com o método Simplex.

Para validar e comprovar a eficiência do programa desenvolvido neste trabalho, no capítulo 5 são resolvidos alguns exemplos de otimização de vigas mistas aço-concreto com interação parcial.

O capítulo 6 apresenta uma síntese de todo o trabalho desenvolvido, trazendo as conclusões e contribuições adquiridas ao longo da dissertação. Finalizando, são expostas algumas sugestões para trabalhos futuros, além das referências bibliográficas que auxiliaram no desenvolvimento do trabalho e foram citadas ao longo do texto.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O processo de otimização visa encontrar a melhor solução entre as inúmeras possíveis, buscando tornar ótimo o rendimento nos mais diversos campos de atividades, tendo como base, por exemplo, menor custo e critério de resistência. Devido a essa característica aplicável da otimização, existem muitos trabalhos na literatura sobre esse assunto nas mais diversas áreas, onde é possível encontrar atualmente uma variedade de pesquisas acadêmicas visando a otimização de produtos, processos ou serviços.

A seguir são apresentados resumidamente alguns trabalhos realizados por diferentes autores sobre otimização e dimensionamento de estruturas, no intuito da procura pelo ótimo através da busca de soluções mais viáveis e eficazes. Incluem-se trabalhos não só relacionados ao método Simplex, como também algumas pesquisas que utilizaram outros métodos para otimização.

Também são apresentados neste capítulo, de forma sucinta, trabalhos relacionados a análise numérica de vigas mistas aço-concreto, no qual os autores desenvolveram e implementaram formulações capazes de simular satisfatoriamente os elementos que a compõem (laje de concreto, perfil de aço e conectores de cisalhamento). Os diferentes e variados modelos desenvolvidos e aqui citados, segundo os autores, representaram perfeitamente o comportamento do elemento estrutural em análise.

2.1. Otimização no Dimensionamento de Estruturas

Kravanja *et al.* (2001) otimizaram vigas mistas compostas pela laje de concreto armada conectadas a um perfil de aço I soldado. A técnica utilizada foi MINLP (Mixed Integer Nonlinear Programming) que soluciona problemas de otimização não linear com variáveis discretas e contínuas. Para esta análise, o autor verificou os estados limites último e serviço e a função objetivo considera os custos da mão de obra (soldagem, corte de chapa e pintura) e dos materiais (concreto, aço do perfil e aço da armadura). Em seu artigo, o autor apresenta de maneira bem simples um exemplo para validar seu modelo proposto e conclui que o mesmo foi capaz de otimizar e minimizar o custo do elemento estrutural analisado.

Adeli *et al.* (2001) apresentaram uma formulação geral para otimizar o custo de pisos compostos. O problema não linear é resolvido pelo modelo de dinâmica neural patenteado por Adeli e Park em 1998 e a função objetivo inclui os custos do concreto, do aço e dos conectores de cisalhamento. Todas as restrições de projetos são baseadas nas especificações da AISC-LRFD. Os autores concluíram que o uso do algoritmo de otimização de custos aplicado para pisos compostos aço-concreto apresentado neste artigo resultou em uma economia substancial.

Kravanja *et al.* (2003) investigaram dois tipos de vigas mistas biapoiadas de acordo com as especificações da Eurocode 4. Foram analisadas vigas compostas formadas pela laje de concreto conectadas ao perfil de aço do tipo I soldado duplamente simétrico e vigas compostas pela laje de concreto conectadas a uma estrutura treliçada. O estudo foi realizado aplicando otimização estrutural através da programação não linear de forma que as condições de estado limite último e de serviço fossem totalmente exploradas e que não houvesse reserva de resistência. Os autores propuseram uma função objetivo para minimizar o custo de fabricação da estrutura, incluindo custo de materiais e mão de obra.

Em 2004, Klanšek *et al.* realizaram um estudo otimizado para a comparação de três diferentes sistemas de vigas mistas biapoiadas, sendo estas: composta por uma laje de concreto conectada a um perfil de aço do tipo I, conectada a uma estrutura treliçada e conectada a dois tipos de seções tubulares. A programação não linear (PNL) foi realizada pelo método do gradiente reduzido e as estruturas compostas foram projetadas de acordo com a Eurocode 1, 2, 3 e 4 afim de satisfazer tanto o estado limite último quanto o estado limite de serviço.

Klanšek *et al.* (2006a, 2006b), comparam o custo otimizado de pisos compostos formados pelos sistemas estudados em 2004. O objetivo neste trabalho foi propor uma ferramenta precisa para cálculo otimizado da produção deste tipo de piso, incluindo o custo do material e de energia, além dos custos trabalhistas, de engenharia, transporte, montagem e custos de manutenção. A otimização paramétrica foi realizada pelo mesmo método que os autores utilizaram em 2004 e as restrições de projeto foram consideradas levando em conta as prescrições normativas da Eurocode 4.

Klanšek *et al.* (2007) objetivaram a otimização dos custos de sistemas de pisos de vigas compostas projetados para serem construídos com uma laje de concreto e vigas de aço soldadas duplamente simétricas. A otimização foi realizada pela programação não linear (PNL) e as restrições de projeto foram definidas de acordo com a Eurocode 4 respeitando os estados limites último e de serviço. A função objetivo considera todos os custos do material, energia e mão de obra. Os custos dos materiais incluíram o aço, concreto, aço de reforço da laje de concreto, conectores de cisalhamento, eletrodos e materiais de proteção ao fogo e corrosão. Um

exemplo foi apresentado e mostrou a aplicabilidade proposta pelos autores que concluíram que o modelo teve sucesso e alcançou seu melhor resultado economicamente.

Neto (2008) apresentou um modelo numérico-computacional para a otimização do custo de elementos (vigas e pilares) metálicos e mistos (aço-concreto) em temperatura ambiente e em situação de incêndio, que atenda às condições de carregamento do estado limite último por meio dos métodos simplificados presentes nas normatizações vigentes, tendo como variáveis de projeto: perfis metálicos, armaduras e materiais de proteção térmica disponíveis comercialmente. O modelo é baseado no método dos algoritmos genéticos e todas as rotinas para o dimensionamento e pós-processamento dos resultados foram programadas em linguagem FORTRAN. Os resultados obtidos indicaram que modelos numéricos de otimização podem ser facilmente incorporados à prática de dimensionamento de estruturas metálicas.

Senouci *et al.* (2009) desenvolveram um modelo de algoritmo genético para a otimização do custo de vigas mistas, incluindo o custo do concreto, da viga de aço e dos conectores de cisalhamento, de acordo com as especificações da AISC-LRFD. Para este fim, o presente modelo foi formulado em duas etapas principais: a primeira é determinar as principais variáveis que afetam na decisão no projeto de vigas mistas e a segunda é formular a otimização do custo total das vigas mistas. O modelo proposto foi projetado também para quantificar e medir o impacto das variáveis de projeto que afetam no custo final da viga mista, que são: resistência a compressão do concreto, espessura da laje de concreto, seção transversal do perfil de aço, o diâmetro e o número de conectores de cisalhamento. Os autores concluíram que o modelo desenvolvido é capaz de gerar soluções ótimas e alcançar reduções no custo do elemento estrutural misto.

Abadi *et al.* (2010) estudaram a otimização de custos de um sistema de pisos compostos utilizando algoritmo de busca harmônica. Na função objetivo, os autores consideraram apenas os custos dos materiais (concreto, aço e conectores) e as restrições de projeto são aquelas definidas de acordo com a AISC-LRFD. Dois exemplos de pisos compostos foram avaliados para estudar o modelo desenvolvido e os autores concluíram que o método é eficiente e com sua utilização pode-se encontrar a melhor solução em problemas de otimização estrutural.

Silva *et al.* (2010) apresentaram um processo para a determinação das dimensões do perfil de aço do tipo I de vigas mistas aço-concreto, de forma que a área da seção transversal de aço fosse mínima e as restrições de projeto definidas por normas fossem atendidas. O objetivo principal deste trabalho consistia na implementação de uma rotina de otimização dentro de um programa de elementos finitos e para simular o comportamento de vigas mistas com interação parcial foram utilizados elementos de viga e elementos de interface. As

dimensões da seção de concreto e suas barras de reforço são definidas pelo projetista. As dimensões do perfil I de aço são consideradas como variáveis de projeto e otimizadas através de um processo iterativo que tem o passo controlado a cada iteração, aproximando o problema não linear de variação do comportamento estrutural da viga mista em relação às dimensões do perfil I de aço em um problema linear, o qual tem seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

Silva *et al.* (2011) apresentaram a otimização de vigas mistas aço-concreto modeladas e discretizadas em elementos finitos de barra empregando o método da programação linear sequencial associado ao método Simplex. As variáveis de projetos foram consideradas sob duas abordagens. Na primeira, só os parâmetros que definem a seção transversal do perfil I do aço variam e na segunda abordagem, além desses parâmetros, consideram-se também aqueles que definem a seção do concreto. Também foi verificada a distribuição ótima dos conectores de cisalhamento ao longo da viga mista, assim, a rigidez longitudinal da conexão deformável também foi considerada como variável de projeto. As restrições de projeto são aquelas definidas em normas referentes ao dimensionamento de elementos lineares de concreto, aço ou misto, assim como restrições referentes às dimensões limites das peças e do tamanho do passo do algoritmo de otimização não linear.

Kaveh *et al.* (2012) retrataram um modelo de sistema de colônia de formiga desenvolvido no início dos anos 90 por Dorigo e Gambardella para otimização de custos de um sistema composto baseado nas especificações da AISC-LRFD. A formulação do modelo inclui o custo do concreto, da viga de aço e dos conectores de cisalhamento. Além do processo de otimização, os autores ainda realizaram um estudo paramétrico para investigar os efeitos dos espaçamentos entre as vigas mistas sob este. Os autores concluíram que o modelo exposto é simples, porém eficiente sendo capaz de alcançar economia considerável no que se refere a pisos compostos.

Lemes *et al.* (2013) desenvolveram um software com rotinas em linguagem C++ destinado ao dimensionamento de estruturas de aço e de vigas mistas aplicadas a perfis laminados, utilizando a NBR 8800 (2008) como principal referência. Neste programa computacional apresentado, é possível dimensionar elementos sujeitos à tração, compressão simples, flexão simples, flexão composta e vigas mistas (apenas vigas biapoiadas com interação total). Para tornar a utilização do software intuitiva, os autores criaram uma interface gráfica onde o usuário escolhe o elemento a ser dimensionado e então, a partir daí o software altera sua interface buscando os dados de entrada e de saída específicos para cada esforço. Por fim, são impressos o nome do perfil que apresenta a seção mais econômica e seu aproveitamento.

Andrade *et al.* (2016) automatizaram o dimensionamento de vigas mistas aço-concreto através do software Matlab baseado nas especificações da NBR 8800 (2008). O programa elaborado teve por objetivo mecanizar o dimensionamento a fim de deixá-lo mais interativo e instantâneo, valendo-se de uma linguagem clara e direta, tanto para o usuário quanto para futuros programadores. O programa foi idealizado para o cálculo apenas de vigas mistas biapoiadas de edifícios, nos casos de seções compactas e semicompactas, que apresentam interação total ou parcial. Os autores incluíram no programa uma biblioteca própria com alguns dos perfis de aço mais utilizados no mercado, restando ao usuário apenas a função de optar pelo perfil que lhe seja mais vantajoso.

2.2. Análise Numérica de Vigas Mistas

Baskar *et al.* (2002) por meio do método dos elementos finitos, formularam uma modelagem tridimensional através do programa ABAQUS para análise de viga mista submetida a momento fletor negativo e força cortante. Foi utilizado para a laje de concreto elementos sólidos e para o perfil de aço, elementos do tipo casca. Para simular os conectores os autores utilizaram elementos de viga com seção circular com área modificada de modo que pode representar a rigidez dos conectores e a aderência do concreto.

Dall'Asta *et al.* (2004) sugeriram um elemento misto com características de possuir aproximações independentes para os campos de deslocamento, deformação e tensão para solucionar problemas de vigas mistas aço-concreto com interação parcial na interface. Os autores mostraram uma solução utilizando o método dos elementos finitos com elemento baseado em deslocamento e através da solução numérica de um exemplo os autores comparam seus resultados.

Queiroz *et al.* (2005) apresentaram dois diferentes modelos numéricos para análise e simulação de vigas mistas aço-concreto fundamentado no método dos elementos finitos através do ANSYS. O primeiro modelo é bidimensional onde foram utilizados elementos planos para discretizar a laje de concreto e o perfil de aço. O segundo modelo é tridimensional e utilizou-se de elementos sólidos para simular a laje de concreto enquanto que para o perfil utilizou-se elementos planos. Através do elemento de mola, o comportamento da interface foi reconhecido nos dois modelos descritos, com relação força-deslocamento obtido através do ensaio push-out.

Silva (2006) propõe o desenvolvimento de modelos numéricos, baseados no método dos elementos finitos, para simulação do comportamento de vigas com interação parcial entre seus componentes, com ênfase nas vigas mistas de aço e concreto. Para tal, desenvolveu-se e

implementou-se uma formulação baseada em deslocamento, bem como uma formulação com o emprego de elementos de interface (modelo retangular de espessura nula capaz de simular o deslizamento ao longo da interface). O autor concluiu que os procedimentos e formulações desenvolvidos foram capazes de modelar os problemas de vigas mistas com interação parcial, admitindo o comportamento não linear dos materiais que compõe o elemento misto, assim como da relação carga-deslizamento da conexão na interface de deslizamento.

Kotinda (2006) apresentou modelos numéricos tridimensionais de vigas mistas que permitiu simular satisfatoriamente o seu comportamento estrutural, principalmente no que se refere à interface entre viga de aço e laje de concreto. Os estudos expostos pelo autor foram admitidos em temperatura ambiente e direcionados apenas aos casos de vigas mistas simplesmente apoiadas com laje de faces planas e conectores de cisalhamento do tipo pino com cabeça. As simulações foram realizadas por meio do código de cálculo ANSYS, que tem como base o método dos elementos finitos. Os resultados obtidos foram comparados com valores experimentais extraídos de trabalhos apresentados por outros pesquisadores.

Fernandes (2008) propôs a análise e dimensionamento de vigas contínuas mistas aço-concreto, constituídas por perfis I, em pontes rodoviárias através de um programa de computador desenvolvido em linguagem Delphi. Como resultado, o programa realiza o dimensionamento das vigas principais para momentos fletores e esforços cortantes, calculando conectores de cisalhamento do tipo pino com cabeça e enrijecedores de alma para estas vigas, com suas dimensões e espaçamentos. Para comparação de resultados, utilizou-se o programa SAP2000 para modelagem e análise numérica via método dos elementos finitos.

Marconcini *et al.* (2010) apresentaram modelos numéricos tridimensionais de vigas mistas aço-concreto para simular seu comportamento estrutural com ênfase na interface laje-viga. As simulações desenvolvidas foram feitas através do programa ANSYS baseado no método dos elementos finitos e o objetivo foi verificar a influência da quantidade, do diâmetro e altura dos conectores de cisalhamento em vigas compostas. Os autores compararam os resultados obtidos com os previstos pela norma vigente e também com referências encontradas na revisão bibliográfica e concluíram que a modelagem numérica é uma ferramenta válida e pode ser bem representada quando se trata de análise de vigas mistas aço-concreto.

Silva (2010), desenvolveu e implementou ferramentas numéricas baseadas no método dos elementos finitos para a simulação computacional de estruturas onde há conexão deformável. Primeiramente o autor desenvolveu formulações de elementos unidimensionais de interface, onde estes acoplados com elementos de viga, permitiram a solução do problema de conexão deformável, tanto no sentido longitudinal quanto no sentido transversal.

Posteriormente, com o objetivo de obter soluções mais precisas no caso de vigas mistas aço-concreto, desenvolveu-se elementos finitos de interface específicos para a conexão entre elementos de viga e elementos de placa. Para o elemento da viga de aço, desenvolveu-se, com base na teoria de Timoshenko, uma formulação não linear unidimensional e para o elemento de placa com o objetivo de representar a não linearidade do concreto, empregou-se um modelo de camadas superpostas baseado na teoria de Reissner-Mindlin. Estas implementações possibilitaram a simulação de pavimentos mistos de aço e concreto e a análise de larguras efetivas de vigas mistas.

Tamayo (2011) formulou e implementou um modelo matemático através de um código computacional capaz de representar com confiabilidade vigas mistas aço-concreto para cargas de curta duração. Para isso, o autor utilizou a teoria da plasticidade associada a um algoritmo dentro de um processo incremental iterativo baseado num critério de convergência de forças ou deslocamentos. Para modelagem da laje de concreto criou-se o elemento finito quadrilátero de casca de oito nós. Para modelar a viga de aço, implementou-se um elemento de casca poliédrica e para os conectores foram modelados elementos de barra tridimensional viga-coluna. O trabalho em conjunto desses três elementos desenvolvidos possibilitou a abordagem de qualquer estrutura complexa do tipo viga mista.

Jiang *et al.* (2014) desenvolveram um novo elemento de vigas mistas com dois nós baseado no método dos elementos finitos, na qual a matriz de rigidez considera os efeitos de deslizamento na interface e a deformação dos conectores de cisalhamento. Os resultados foram comparados com um modelo encontrado na literatura e também com um resultado de análise experimental. Os autores comprovaram que o modelo proposto é capaz de calcular com eficiência e precisão tanto a deflexão quanto o deslizamento na interface, podendo ser aplicado com sucesso.

Moreno (2016) apresenta um modelo numérico que avalia o comportamento de vigas mistas através do método dos elementos finitos, levando em conta os efeitos de longa duração do concreto (fluência e retração) e a inclusão da protensão interna aplicada a laje de concreto. Foram implementados seis modelos para os fenômenos de longa duração. A validação da simulação numérica foi realizada a partir da modelagem de quatorze vigas, tanto simplesmente apoiadas como vigas contínuas. O autor conclui que o programa desenvolvido é capaz de modelar adequadamente estruturas do tipo viga mista com protensão considerando os efeitos da fluência e retração que afetam o concreto.

Lou *et al.* (2016) desenvolveram uma modelagem numérica através do método dos elementos finitos para analisar vigas mistas aço-concreto submetidas a cargas de curto prazo

considerando o estado limite último e cargas de longo prazo considerando o estado limite de serviço. O efeito geométrico não linear foi considerado introduzindo a flexão e o esforço axial na formulação do elemento finito. Os autores empregaram uma técnica em camadas para descrever as propriedades dos materiais da seção composta e ilustraram com exemplos numéricos para demonstrar a confiabilidade e aplicabilidade do modelo proposto.

2.3. Considerações Normativas

As normas técnicas são documentos elaborados por pesquisadores e especialistas na área e são aprovadas por um órgão nacional ou internacional que visa a padronização dos processos produtivos. Estas servem como uma referência para auxiliar os profissionais que quando seguem, são orientados da melhor forma de se realizar determinado procedimento, minimizando falhas no processo produtivo, melhorando a produtividade em seus negócios e aumentando a qualidade do produto final. Vale ressaltar que os profissionais não são obrigados a cumprirem algumas normas, mas, contudo, quando estes seguem fielmente as prescrições normativas, ficam assegurados tecnicamente pelas mesmas. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) é o órgão responsável pela normalização técnica no Brasil, sendo responsável pela elaboração de novas normas, revisão de normas já existentes, além de publicação e distribuição das mesmas.

A norma brasileira que rege o dimensionamento de vigas mistas aço-concreto é a NBR 8800 (2008) – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios – onde traz em seu Anexo O o conteúdo referente a vigas mistas de aço e concreto.

Para efeitos da NBR 8800 (2008), de acordo com o item 4.6.2 que trata dos estados limites, devem ser considerados os estados limites últimos (ELU) e os estados limites de serviços (ELS). Os estados limites últimos estão relacionados com a segurança da estrutura sujeita as combinações mais desfavoráveis de ações previstas em toda a vida útil, durante a construção ou quando atuar uma ação especial ou excepcional. Os estados limites de serviço estão relacionados com o desempenho da estrutura sob condições normais de utilização. O método dos estados limites utilizado para o dimensionamento de uma estrutura exige que nenhum estado limite aplicável seja excedido quando a estrutura for submetida a todas as combinações apropriadas de ações. Se um ou mais estados limites forem excedidos, a estrutura não atende mais aos objetivos para os quais foi projetada.

A NBR 8800 (2008) ainda traz que a combinação das ações deve ser feita de forma que possam ser determinados os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura; a verificação dos

estados limites últimos e dos estados limites de serviço deve ser realizada em função de combinações últimas e combinações de serviço, respectivamente.

2.3.1. Comportamento estrutural

O dimensionamento de vigas mistas submetidas à flexão depende da caracterização do comportamento na interface do perfil metálico ligado a laje de concreto por meio dos conectores de cisalhamento que está diretamente relacionado a capacidade da seção mista trabalhar em conjunto. O grau de interação de uma viga mista aço-concreto varia entre o nulo e a unidade.

O grau de interação nulo se dá quando a laje de concreto está simplesmente apoiada a viga de aço surgindo na interface de contato aço-concreto uma força cortante resistente devido somente ao atrito ou, no caso do perfil de aço servir como fôrma para a concretagem da laje de concreto existirá também uma força de adesão química. Essas forças são pequenas e geralmente desprezadas no dimensionamento considerando que os elementos trabalhem de forma independentemente um do outro, com deslocamentos verticais e rotações iguais. A interação neste caso é conhecida como interação livre. Quando se tem a unidade, dá-se o nome de interação total ou completa e acontece quando forças desenvolvidas ao longo da interface do elemento misto (força de atrito, forças mecânicas e forças de ligação química entre os materiais), são capazes de impedir os deslizamentos na interface, fazendo com que o elemento misto trabalhe como um só elemento de seção mista. E a interação parcial acontece quando o grau de interação está entre os limites do intervalo.

Na interação completa, considera-se que existe uma “ligação perfeita” entre o aço e concreto e neste caso não existe deslocamentos relativos nas direções longitudinal e transversal do elemento, ou seja, deslizamento e separação vertical entre os elementos. O fator condicionante para que a viga mista apresente interação completa entre os elementos é a utilização de uma determinada quantidade de conectores de cisalhamento. Neste caso existe uma única linha neutra plástica (LNP), que pode estar na seção plastificada da laje de concreto, ou na seção plastificada no perfil de aço, ou na interface dos elementos que compõem a viga mista.

Quando ocorre o deslocamento longitudinal relativo na interface aço-concreto, o diagrama de tensões sofre uma descontinuidade, caracterizando o regime de interação parcial. Isso acontece quando a força cortante na interface de ligação supera as forças devido a ligação química entre os materiais e a força de atrito, sendo então tal força cortante resistida por conectores que irão deformar-se provocando deslizamentos relativos na interface. Como consequência, a seção transversal da viga em análise apresenta duas linhas neutras. Neste caso,

o escorregamento afeta a distribuição de tensões na seção, a distribuição do fluxo de cisalhamento longitudinal na conexão e, com isso, a viga mista sofre deformação que é um fator relevante na verificação do estado limite de serviço.

2.3.2. Verificação ao momento fletor

As equações de momento fletor resistente, M_{Rd} variam de acordo com a posição da linha neutra e com as condições de interação da viga mista, com isso a posição da LNP é determinante na resistência da seção mista.

Os melhores resultados são obtidos quando o concreto trabalha exclusivamente a compressão e o aço trabalha exclusivamente a tração. Esta situação ocorre quando a LNP passa exatamente pela interface entre a laje de concreto e o perfil metálico. Para obter apenas compressão no concreto e tração no aço ao longo de toda a viga mista, ela deve estar submetida a efeito de flexão positiva, obviamente, considerando que a laje de concreto esteja apoiada sobre o perfil de aço.

Uma viga biapoiada com interação total é o caso mais prático e simples e exemplifica essa situação de elementos estruturais submetidos a momentos fletores positivos. Caso a linha neutra plástica passar pela alma, a estabilidade da mesa superior é garantida pela sua ligação à laje de concreto por meio dos conectores. Para determinar o momento fletor positivo resistente de cálculo, deve-se primeiramente determinar a posição da linha neutra plástica na seção transversal do elemento misto e então calcular o valor do momento fletor seguindo as orientações da NBR 8800 (2008), em seu anexo O item O.2.3 e subitens que determina o cálculo do momento fletor resistente de cálculo em regiões de momentos positivos.

De acordo com a NBR 8800 (2008), como é desconsiderado a contribuição do concreto quando este é tracionado, considera-se para o cálculo do momento fletor resistente negativo, apenas a contribuição do perfil de aço associado a seção de armadura longitudinal que, necessariamente, deverá existir na largura efetiva da laje de concreto.

As vigas mistas contínuas, além de serem submetidas a momentos fletores positivos nos trechos intermediários, nas regiões dos apoios internos elas se encontram submetidas a momentos fletores negativos. A existência dessas regiões de momentos negativos causa uma perda na eficiência do sistema misto pois diminuem a resistência a flexão provocada pela fissuração do concreto tracionado.

Como para o caso da determinação do momento fletor positivo, para determinar o momento fletor negativo resistente de cálculo, a solução requer primeiramente a determinação da posição da linha neutra plástica na seção transversal do elemento misto e então calcular o

valor do momento fletor seguindo as orientações da NBR 8800 (2008), em seu anexo O item O.2.4 e subitens, que determina o cálculo do momento fletor resistente de cálculo em regiões de momentos negativos.

Elementos Para Análise Não Linear de Vigas Mistas Aço-Concreto

Para a verificação das restrições de projeto referentes ao dimensionamento otimizado de vigas mistas aço-concreto é necessária a realização de análise estrutural de vigas mistas. Para isso, são utilizados nesse trabalho dois elementos finitos, um elemento unidimensional de barra e um elemento de interface. Esses elementos são apresentados nessa seção e foram desenvolvidos por Silva (2006, 2010). O elemento de interface tem como função simular a conexão deformável na interface de contato entre a laje de concreto e o perfil de aço e ligar os elementos unidimensionais de barra que simulam o comportamento das seções acima e abaixo da interface de deslizamento.

Vários trabalhos relacionados a solução do problema de viga mista com interação parcial através de métodos numéricos podem ser encontrados na literatura, alguns desses são apresentados na revisão bibliográfica, capítulo 2 dessa dissertação. A utilização desses tipos de elementos se torna bastante interessante e aplicável uma vez que a solução numérica converge para a solução teórica à medida que se refina a malha de elementos finitos. A convergência do método numérico deve ser garantida de tal forma que com o aumento da discretização do contínuo, a solução da formulação se aproxima cada vez mais da solução real do problema.

3.1. Elemento Unidimensional de Barra

Considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, nesta seção é apresentada a formulação de um elemento de barra para análise numérica de vigas submetidas a esforços de flexão, cortante e axial. Como nesse trabalho esse elemento é uma ferramenta utilizada para conclusão dos objetivos, o autor achou interessante a apresentação de sua formulação, no entanto, essa formulação é apresentada de forma sucinta sugerindo que para maiores detalhes consultar a referência Silva (2010).

3.1.1. Formulação numérica para o elemento de barra

É mostrada na Figura 3.1 uma seção plana em um elemento de viga de Euler-Bernoulli antes e após a deformação. A partir desta figura, as Equações 3.1 e 3.2 são determinadas para os deslocamentos axiais e transversais, respectivamente, de um elemento unidimensional de viga com eixo de referência sobre a linha tracejada.

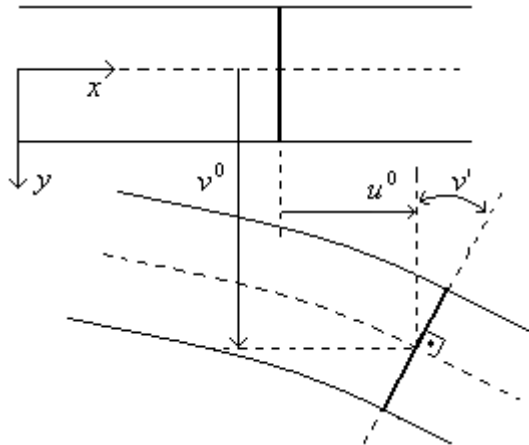


Figura 3.1 - Deformada de um segmento de viga de Euler-Bernoulli
Fonte: Silva (2010)

$$u(x, y) = u^0(x) - yv'(x) \quad (3.1)$$

$$v(x, y) = v^0(x) \quad (3.2)$$

Nas Equações 3.1 e 3.2 o sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado para representar a viga tridimensional por um elemento unidimensional de barra. Esse índice será omitido nas próximas expressões.

Na formulação do elemento é utilizado o princípio dos trabalhos virtuais. A Equação 3.3 apresenta o trabalho virtual interno para vigas analisadas segundo teoria de Euler-Bernoulli. Nessa equação, σ_x é a tensão normal na seção transversal da viga, $\delta\epsilon_x$ é a deformação axial que surge devido a um campo de deslocamento virtual aplicado ao elemento de viga, δ é o operador variacional e V é o volume da viga indeformada.

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta\epsilon_x dV \quad (3.3)$$

Do tensor de deformação de Green-Lagrange obtém-se, a partir das equações dos deslocamentos, a equação para deformação axial no elemento de barra. Aplicando o operador variacional nessa equação chega-se a Equação 3.4 para o campo de deformação virtual.

$$\delta \varepsilon_x = \delta u' - y \delta v'' \quad (3.4)$$

Os deslocamentos u' e v' da Equação 3.4 variam apenas ao longo do eixo do elemento. Dessa forma, substituindo a Equação 3.4 em 3.3, e definindo os esforços internos $N = \int_A \sigma_x dA$ (esforço axial) e $M = \int_A \sigma_x y dA$ (momento fletor), chega-se a Equação 3.5 para o trabalho virtual interno.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [N \delta u' - M \delta v''] dx. \quad (3.5)$$

A Equação 3.5 apresenta a formulação forte para o trabalho virtual interno. Na formulação fraca é admitido não se conhecer apenas os deslocamentos e suas derivadas nas extremidades das barras, ou em alguns pontos definidos. Já a forma como eles variam ao longo do elemento é admitido conhecer e depende das funções de forma usadas na formulação fraca. Nessa formulação são usadas funções de forma polinomiais de terceiro grau para o deslocamento vertical e sua derivada, e polinômios do primeiro grau para os deslocamentos axiais. Chamando de \mathbf{q} o conjunto de incógnitas de deslocamentos e rotações (deslocamentos nodais) e Φ_u e Φ_v , vetores coluna com termos dados pelas funções polinomiais interpoladoras, chega-se as Equações 3.6 e 3.7 para os deslocamentos axial e vertical.

$$u = [\Phi_u^T \quad \mathbf{0}_v^T] \mathbf{q} \quad (3.6)$$

$$v = [\mathbf{0}_u^T \quad \Phi_v^T] \mathbf{q} \quad (3.7)$$

Considerando elemento de barra de 2 nós, $\mathbf{q} = [u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad v'_1 \quad v_2 \quad v'_2]^T$, $\mathbf{0}_u$ e $\mathbf{0}_v$ são vetores coluna nulos com 2 e 4 elementos, respectivamente. Como os deslocamentos são funções dos deslocamentos nodais é necessária a utilização da regra da cadeia da derivação para

a obtenção dos seus variacionais. Levando esses até a Equação 3.5 para o trabalho virtual, chega-se a Equação 3.8 para a formulação fraca do trabalho virtual interno do elemento de viga de Euler-Bernoulli.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L \left(N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) dx \quad (3.8)$$

Sendo \mathbf{f}_{ext} o vetor de forças externas aplicadas diretamente nas direções dos deslocamentos nodais, tem-se $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$ como sendo o trabalho virtual externo. Pelo princípio dos trabalhos virtuais aplicado a um sólido deformável em equilíbrio ($\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$), chega-se a equação $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela Equação 3.9.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} N \Phi_u' \\ -M \Phi_v'' \end{array} \right\} dx \quad (3.9)$$

Para a formulação analisada, o problema $\Psi(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ é não linear quando a relação tensão deformação do material for não linear. Dentre os diferentes métodos numéricos para análise de problemas não lineares o mais utilizado na solução de problemas de análise estrutural é o método de Newton-Rapshon. Este método na sua forma padrão, aproxima a função não linear em uma função linear a cada passo do processo iterativo usando a matriz de rigidez tangente dada por $\mathbf{K}_T(\mathbf{q}) = \frac{\partial(\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}}$. Logo, a matriz de rigidez tangente utilizada no processo de solução do problema não linear é obtida através da derivada do vetor de forças internas da Equação 3.9 em relação aos deslocamentos nodais, como mostra a Equação 3.10.

$$\mathbf{K}_T = \int_L \left[\begin{array}{c} \Phi_u' \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_v'' \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right] dx \quad (3.10)$$

Na expressão 3.10, as derivadas do esforço axial e momento em relação aos deslocamentos nodais são dadas por 3.11 e 3.12, respectivamente. Nessas equações, E_T é dada pela inclinação da tangente à curva tensão-deformação do material.

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_u' \int_A E_T dA \\ -\Phi_v'' \int_A E_T y dA \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_u' \int_A E_T y dA \\ -\Phi_v'' \int_A E_T y^2 dA \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

As expressões dos esforços internos N e M , bem como, das rigidezes, $\int_A E_T dA$, $\int_A E_T y dA$ e $\int_A E_T y^2 dA$, são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um polígono fechado qualquer, para maiores detalhes consultar Caldas (2004).

3.2. Elemento de Interface

Considerando viga mista simulada por um elemento de barra para a seção acima da interface de deslizamento, e outro elemento de barra para a seção abaixo dessa interface, é apresentada nesse item a formulação de um elemento de interface que tem a função de conectar os elementos de barra que simulam a viga mista e representar a conexão deformável na interface de deslizamento. Assim como o elemento de barra do item anterior, esse elemento é uma ferramenta utilizada para conclusão dos objetivos desse trabalho, sendo, por isso, apresentada a sua formulação, no entanto, essa formulação é apresentada de forma sucinta sugerindo para maiores detalhes consultar a referência Silva (2006).

3.2.1. Formulação numérica para o elemento de interface

É apresentada na Figura 3.2 a deformação de um segmento de viga mista considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. Em um elemento de interface retangular de espessura nula, os deslocamentos considerados são os movimentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento retangular na direção horizontal e vertical em relação ao eixo do elemento.

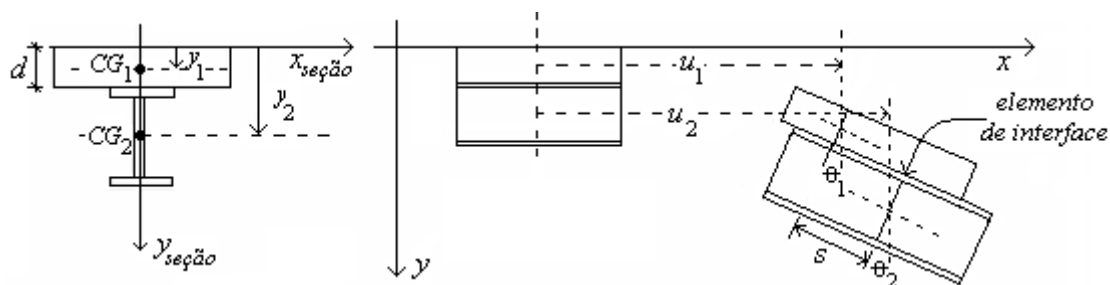


Figura 3.2 - Deformação de um segmento de viga mista

Fonte: Silva (2006)

Os deslocamentos axial e vertical dos pontos situados nas faces inferior ($\alpha = 1$) e superior ($\alpha = 2$) da interface de deslizamento são dados pelas equações 3.13 e 3.14, onde d é a distância da interface de deslizamento ao eixo x de referência para a definição da seção transversal da viga mista, como mostra a Figura 3.2.

$$u_{\alpha}(x, y = d) = u_{\alpha}^0(x) + (y_{\alpha} - d)\theta_{\alpha}(x) \quad (3.13)$$

$$v_{\alpha}(x, y = d) = v_{\alpha}(x) \quad (3.14)$$

Nas Equações 3.13 e 3.14, o sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado para representar a viga tridimensional por um elemento unidimensional de barra. Esse índice será omitido nas próximas expressões. θ é a rotação da seção, sendo que para teoria de viga de Euler-Bernoulli é igual a derivada do deslocamento vertical ($\theta = v'$). Os deslocamentos considerados em um elemento de interface retangular de espessura nula são os movimentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento retangular mostrado nas Figuras 3.3 e 3.4 na direção horizontal e vertical em relação ao eixo do elemento. Esses deslocamentos são apresentados nas Equações 3.15 e 3.16, onde w_h é o deslocamento horizontal relativo e w_v o deslocamento vertical relativo.

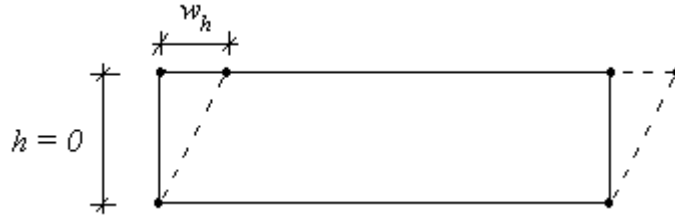


Figura 3.3 - Deslocamento horizontal relativo no elemento de interface
 Fonte: Silva (2006)

$$w_h(x) = u_2(x) - u_1(x) + (y_2 - d)\theta_2(x) - (y_1 - d)\theta_1(x) \quad (3.15)$$

$$w_v(x) = v_2(x) - v_1(x) \quad (3.16)$$

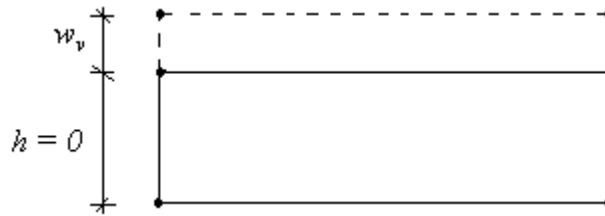


Figura 3.4 - Deslocamento vertical relativo no elemento de interface
 Fonte: Silva (2006)

Assim como no elemento de barra, é utilizado o princípio dos trabalhos virtuais para o desenvolvimento da formulação do elemento de interface retangular de espessura nula. Para esse elemento as deformações a serem consideradas são os deslocamentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento, e as forças por unidade de comprimento (S_b e N_b) que surgem nas direções desses deslocamentos, como mostra a Equação 3.17.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_l [S_b \delta w_h + N_b \delta w_v] dx \quad (3.17)$$

Na Equação 3.17, δw_h e δw_v são, respectivamente, a variação nos deslocamentos relativos horizontal e vertical do elemento devido a um campo de deslocamento virtual imposto ao elemento de comprimento l , S_b é a força cortante por unidade de comprimento que surge devido ao deslocamento relativo horizontal e N_b a força normal por unidade de comprimento que surge devido ao deslocamento relativo na direção vertical.

Aplicando o operador variacional às equações 3.15 e 3.16 dos deslocamentos relativos horizontal e vertical do elemento de interface e substituindo na equação 3.17, chega-se à Equação 3.18.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_l [S_b [\delta u_2 - \delta u_1 + (y_2 - d)\delta v_2' - (y_1 - d)\delta v_1'] + N_b (\delta v_2 - \delta v_1)] dx \quad (3.18)$$

A Equação 3.18 apresenta a formulação forte para o trabalho virtual interno. Para a formulação fraca é considerando como incógnitas os deslocamentos e rotações mostrados na Figura 3.5 e representados pelo vetor $\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{v_1}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_{v_2}^T]$. Nessa formulação são usadas funções de forma polinomiais de terceiro grau para o deslocamento vertical e sua derivada, e polinômios do primeiro grau para os deslocamentos axiais. Essas funções serão representadas pelos vetores Φ_u e Φ_v . Dessa forma, os deslocamentos nas faces acima e abaixo da interface de deslizamento obtidos a partir dos elementos de viga podem ser aproximados usando as funções de forma e os deslocamentos nodais como dados pelas Equações 3.19 a 3.22.

$$u_1 = [\Phi_u^T \quad \mathbf{0}_v^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_v^T] \mathbf{q} \quad (3.19)$$

$$u_2 = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_v^T \quad \Phi_u^T \quad \mathbf{0}_v^T] \mathbf{q} \quad (3.20)$$

$$v_1 = [\mathbf{0}_u^T \quad \Phi_v^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_v^T] \mathbf{q} \quad (3.21)$$

$$v_2 = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_v^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \Phi_v^T] \mathbf{q} \quad (3.22)$$

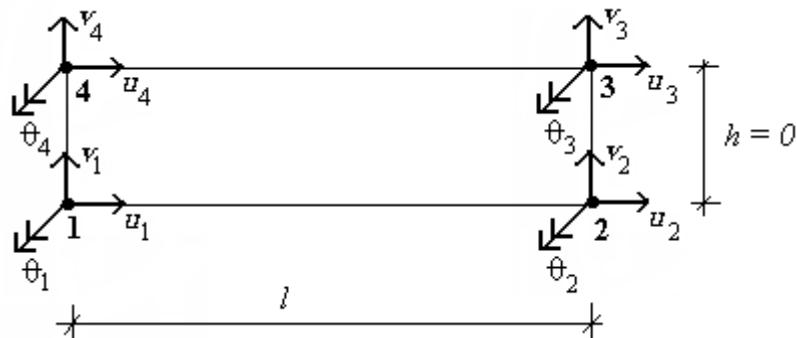


Figura 3.5 - Graus de liberdade do elemento de interface utilizado na implantação

Fonte: Silva (2006)

Como os deslocamentos são funções dos deslocamentos nodais é necessária a utilização da regra da cadeia da derivação para a obtenção dos seus variacionais. Levando esses até a Equação 3.18 para o trabalho virtual chega-se a Equação 3.23 para a formulação fraca do trabalho virtual interno do elemento de interface de espessura nula.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_l \left[S_b \left[\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} + (y_2 - d) \frac{\partial v_2'}{\partial \mathbf{q}} - (y_1 - d) \frac{\partial v_1'}{\partial \mathbf{q}} \right] + N_b \left(\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \quad (3.23)$$

Sendo \mathbf{f}_{ext} o vetor de forças externas aplicadas diretamente nas direções dos deslocamentos nodais, tem-se $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$ como sendo o trabalho virtual externo. Pelo princípio dos trabalhos virtuais aplicado a um sólido deformável em equilíbrio ($\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$), chega-se a equação $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela Equação 3.24.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_l \begin{Bmatrix} -S_b \Phi_u \\ (d - y_1) S_b \Phi_v' - N_b \Phi_v \\ S_b \Phi_u \\ (y_2 - d) S_b \Phi_v' + N_b \Phi_v \end{Bmatrix} dx \quad (3.24)$$

Para a formulação analisada, o problema $\Psi(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ é não linear quando a relação força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento longitudinal da conexão for não linear. Usando o método de Newton-Rapshon para análise do problema não linear obtém-se a matriz de rigidez tangente dada pela Equação 3.25.

$$\mathbf{K}_T = \int_l \begin{Bmatrix} -\Phi_u \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ (d - y_1) \Phi_v' \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_v \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_u \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ (y_2 - d) \Phi_v' \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_v \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dx \quad (3.25)$$

As derivadas dos esforços internos S_b e N_b em relação aos deslocamentos nodais generalizados \mathbf{q} são dadas pelas Equações 3.26 e 3.27. Nessas equações, E_{S_b} é o coeficiente angular da reta tangente a curva força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento longitudinal, e E_{N_b} é análogo a E_{S_b} só que definido em relação a curva força normal por unidade de comprimento versus separação vertical na interface.

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \begin{Bmatrix} -\Phi_u \\ (d - y_1)\Phi'_v \\ \Phi_u \\ (y_2 - d)\Phi'_v \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{N_b} \begin{Bmatrix} \Phi_u \\ -\Phi_v \\ \Phi_u \\ \Phi_v \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Segundo Silva (2006), para os casos em que se considere nula a possibilidade de separação vertical na interface de deslizamento, deve-se considerar para a rigidez da conexão em relação à separação vertical (E_{N_b}) valores numéricos elevados para se obter tal situação. Nos exemplos analisados verifica-se que o valor de 10^9 kPa é suficiente para impedir deslocamentos relativos na direção vertical do elemento de interface. O mesmo deve ser feito com os valores numéricos de E_{S_b} quando se deseja uma interação total na direção horizontal da interface.

Capítulo 4

Otimização

O objetivo principal do projeto estrutural é encontrar o ponto de equilíbrio entre a segurança necessária e a minimização dos custos. Geralmente existe uma quantidade ilimitada, ou grande, de soluções para um determinado problema estrutural. Dessa forma, os métodos de dimensionamento consistem em definir algumas das variáveis de projeto e determinar outras de tal forma que as equações de dimensionamento sejam satisfeitas. A otimização busca obter dentro desse grupo de soluções para o problema, aquela que minimiza uma função objetivo relacionada ao custo. Vianna (2003) define de forma sucinta a otimização de projetos estruturais como sendo a definição de uma série de variáveis de projeto que, juntas, vão extremar uma função objetivo definida.

São apresentados neste capítulo as considerações referentes ao problema estudado, como a função objetivo, restrições e variáveis de projeto. A definição desses é de extrema importância para um bom modelo do problema analisado e dessa forma obter resultados satisfatórios. É apresentado também o método de otimização aplicado para análise do problema de otimização não linear com restrições.

4.1. Considerações Referentes ao Problema

Segundo Bastos (2004) o projeto estrutural ótimo é obtido a partir de diversas análises, levando-se em consideração as inúmeras possibilidades das variáveis de projeto dentro de um conjunto viável de soluções, condicionado às restrições de norma e de desempenho.

O problema de otimização tratado nesta pesquisa é a definição das dimensões do perfil de aço do tipo I simétrico ou não, das dimensões da laje de concreto retangular, e da quantidade de armadura, de tal forma que a viga mista aço-concreto com interação parcial sujeita à flexão simples atenda as condições de projeto especificadas em normas técnicas, minimizando uma função objetivo custo definida a partir da quantidade de material e do custo desses.

Para Balling e Yao (1997), uma visão geral para um problema de otimização começa com a determinação das variáveis e parâmetros que definem um problema físico, e das restrições a que estão sujeitas essas variáveis. Em função destas variáveis, é definida a função

objetivo que, matematicamente, deverá ser maximizada ou minimizada e que deve obrigatoriamente satisfazer as restrições de projeto.

4.1.1. Função objetivo

Para um mesmo problema estrutural existem diversos projetos viáveis, sendo alguns melhores que outros em termo de algum parâmetro de comparação, como, por exemplo, a quantidade de material gasto. Assim estabelece um critério numérico que relacione um dado conjunto de variáveis de projeto. Esse critério é denominado função objetivo e é o que se deseja extremizar, ou seja, determinar o seu mínimo ou o seu máximo, de forma a avaliar o desempenho e eficiência do projeto em relação aos parâmetros selecionados como variáveis do projeto.

De acordo com Olivieri (2004), a função objetivo, também conhecida como função desempenho, pode ser classificada como multidimensional, quando se pretende otimizar mais de uma variável, ou unidimensional. Em relação aos objetivos, pode-se classificar em simples quando possui apenas um objetivo, ou em multiobjetivo quando a função possui vários objetivos. Na maioria dos problemas práticos essa função está relacionada com critério econômico, ou seja, custo total do produto ou processo e é a forma de medir ou avaliar o projeto a cada passo no progresso em busca pelo ponto ótimo.

Em problemas determinísticos de otimização estrutural, a função objetivo geralmente é o volume ou o peso da estrutura, e as restrições estão relacionadas aos requisitos normativos quanto a tensões e deslocamentos (Verzenhassi, 2008).

Nesse trabalho o objetivo é determinar o custo mínimo de vigas mistas aço-concreto sujeitas a flexão simples, sendo assim, deve-se determinar o mínimo da função objetivo dada pela Equação 4.1, onde: b largura da laje de concreto, h altura da laje de concreto, b_{fi} largura da mesa inferior, t_{fi} espessura da mesa inferior, b_{fs} largura da mesa superior, t_{fs} espessura da mesa superior, b_w largura da alma, t_w espessura da alma, A_{s1} e A_{s2} áreas de armadura de reforço da laje de concreto superior e inferior, C_a custo do aço do perfil, C_c custo do concreto, e por fim C_b custo do aço das barras de reforço da laje de concreto.

$$f(\mathbf{x}) = (b.h)C_c + (b_{fi}.t_{fi} + b_{fs}.t_{fs} + b_w.t_w)C_a + (A_{s1} + A_{s2})C_b \quad (4.1)$$

A primeira parcela da função objetivo refere-se a laje de concreto, a segunda parcela refere-se ao perfil de aço, e a terceira parcela refere-se as barras de aço de reforço da laje de

concreto. Considerando que a área da seção transversal da viga mista só pode ser positiva, assim como os custos dos materiais, o valor possível para a função objetivo é maior que zero. Essa função foi definida para o caso de perfil I não simétrico, no caso do perfil I simétrico tem-se

$$b_f = b_{fi} \cdot = b_{fs} \text{ e } t_f = t_{fi} \cdot = t_{fs} \cdot$$

4.1.2. Variáveis de projeto

Segundo Arora (1989), a seleção das variáveis de projeto é um importante passo, visto que toda formulação do problema depende dessa escolha. Deve-se proceder de tal forma que o processo de cálculo seja flexível e o projeto final seja prático para se ter bons resultados na otimização. O domínio viável para a solução de um determinado problema aumenta proporcionalmente ao aumento da quantidade das variáveis de projeto. Isso quer dizer que o aumento das variáveis de projeto resulta em um melhor modelo, mas como desvantagem pode causar dificuldade numérica.

As variáveis de projeto são parâmetros que descrevem o projeto de um sistema ou estrutura. Elas sofrem alterações durante todo o processo de otimização e determinam a função objetivo. Estas podem ser de dois distintos tipos: as variáveis discretas ou inteiras (valores compreendidos dentro de um certo conjunto fixo) e as variáveis contínuas (reais). As variáveis discretas podem assumir apenas valores inteiros e são previamente especificados, ou seja, índices que são associados a descrição do problema, como, por exemplo, a quantidade de barras de armadura necessárias no reforço da laje de concreto. As variáveis contínuas, podem assumir um valor real qualquer dentro de um determinado intervalo, como, por exemplo, o diâmetro de uma armadura pode ser considerado um valor real qualquer maior que zero.

As variáveis de projeto devem ser independentes umas em relação as outras para evitar complicações adicionais no problema e com a utilização de um programa computacional específico vão assumindo valores a cada iteração dentro de uma faixa especificada pelo usuário, até que se obtenha a solução ótima.

De acordo com Sommer (2010), de um ponto de vista físico, as variáveis de projeto podem representar as seguintes informações sobre a estrutura: propriedades mecânicas ou físicas do material, como módulo de elasticidade e tensões admissíveis; a topologia da estrutura, isto é, o padrão de conexão dos elementos ou o seu número de elementos; a configuração ou a forma geométrica da estrutura e também dimensões de seções transversais ou comprimento dos elementos como o caso desta pesquisa.

Neste trabalho, no processo de otimização as variáveis de projeto são contínuas sendo elas os parâmetros que definem a seção transversal da viga de aço de perfil I, a seção retangular de concreto e a área das barras de reforço da laje de concreto, como são mostradas na figura 4.1. Na formulação do problema nos itens seguintes desse capítulo essas variáveis são agrupadas dentro de um vetor \mathbf{x} como mostrado na Equação 4.2.

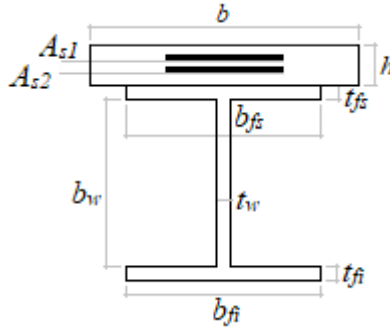


Figura 4.1 - Variáveis de projeto do problema

$$\mathbf{x}^T = [b \quad h \quad b_{fi} \quad t_{ft} \quad b_{fs} \quad t_{fs} \quad b_w \quad t_w \quad A_{s1} \quad A_{s2}] \quad (4.2)$$

No método Simplex, as variáveis são consideradas contínuas com restrições laterais, ou seja, não podem ser menores que zero e nem maior que um valor limite especificado pelo usuário no arquivo de entrada. O ponto de ótimo provavelmente definirá um perfil de aço com dimensões não comerciais, assim como dimensões da laje de concreto não usuais. Para evitar isso, foi implementado um algoritmo que, após a definição do ponto de ótimo, fixa o valor de uma variável conforme uma lista disponível e mais próximo do valor obtido pelo método Simplex. Logo após, essa variável é eliminada do problema e este é reanalisado, definindo novos valores para as outras variáveis, e assim sucessivamente até que todas as variáveis de projetos sejam definidas conforme seus valores comerciais e usuais.

4.1.3. Restrições de projeto

De acordo com Sias (2014), para a completa definição do problema devem-se determinar as restrições do problema analisado, definindo assim limites aos valores das variáveis nos quais o algoritmo desenvolvido irá trabalhar para achar o ponto de ótimo.

As restrições são um conjunto de requisitos especificados e condições que devem ser satisfeitas para que o projeto seja aceitável. Pode-se dizer também que são equações ou inequações das variáveis de projeto que descrevem situações de projeto que devem ser

atendidas. Elas podem ser de dois tipos: restrições laterais e restrições de comportamento. As restrições laterais são aquelas que limitam os valores das variáveis de projeto, como, por exemplo, valores superiores e inferiores da geometria de elementos estruturais ou resistências nominais dos materiais. Já as restrições de comportamento são as que definem as condições limites desejáveis, por exemplo, tensões, flexibilidades ou deslocamentos.

Definidas as propriedades dos materiais de acordo com especificações técnicas (NBR6118, 2014, NBR8800, 2008) deve-se determinar a carga limite última e de serviço que a viga mista suporta. Esses dois valores são comparados com parâmetros de entrada do usuário e definem duas restrições de projeto, onde para o estado limite último é verificado o momento resistente e para o estado limite de serviço, a flecha máxima. Nesse trabalho serão utilizados apenas perfis compactos, dessa forma, a esbeltez da mesa e alma do perfil I será limitada através das restrições referentes a flambagem local da mesa e flambagem local da alma. Outras restrições que devem ser consideradas são referentes às restrições laterais, as quais são os limites inferiores e superiores das dimensões da laje de concreto, do perfil I de aço, das áreas de armadura de reforço da laje de concreto e o tamanho do passo. Essa última restrição lateral é definida para que seja válida as aproximações lineares das funções objetivo e restrições usadas no método da programação sequencial linear.

4.1.3.1. Verificação do estado limite último

Definido os valores para as variáveis de projeto, ou seja, definida uma seção transversal para a viga mista, determina-se o fator f_u que multiplica o carregamento obtido por uma combinação última das ações, dado pelo usuário, para o qual a viga mista está em eminência de ruína. A Equação 4.3 fornece a restrição relacionada ao estado limite último da viga mista.

$$C_1(\mathbf{x}) = f_u - 1 \geq 0 \quad (4.3)$$

Se f_u igual a unidade implica que a seção analisada suporta no limite um carregamento igual ao carregamento definido pelo usuário. Caso seja maior que a unidade a seção está com uma folga em relação à restrição de estado limite último.

4.1.3.2. Verificação do estado limite de serviço

Definido os valores para as variáveis de projeto, ou seja, definida uma seção transversal para a viga mista, determina-se a flecha máxima, para cada vão da viga, considerando na análise o carregamento obtido por uma combinação de serviço das ações dadas pelo usuário. Para os

diferentes vãos da viga verifica-se o mais suscetível à verificação do estado limite de serviço de deformação excessiva determinando o valor da flecha máxima nesse vão (δ). Esse valor é comparado com a flecha limite δ_{lim} especificada pelo usuário. A Equação 4.4 fornece a restrição relacionada ao estado limite de serviço de deformação excessiva da viga mista.

$$C_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\delta}{\delta_{lim}} \geq 0 \quad (4.4)$$

Se $\delta = \delta_{lim}$ implica que a seção analisada satisfaz a condição de flecha máxima no limite. Caso $\delta < \delta_{lim}$ a seção analisada está com uma folga em relação à restrição de estado limite de serviço de deformação excessiva.

4.1.3.3. Verificação da esbeltez da mesa e alma

Definido os valores para as variáveis de projeto referente às dimensões da mesa inferior e da alma do perfil I, verifica-se as restrições referente à esbeltez da mesa inferior e da alma. Nesse projeto é admitido apenas perfil compacto, ou seja, segundo NBR 8800 (2008) que estabelece as relações largura-espessura da mesa e da alma, a esbeltez limite para elementos do tipo AL é de $\lambda_f = \frac{b_f}{2t_f}$ não superior a $0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$ e do tipo AA é de $\lambda_w = \frac{b_w}{t_w}$ não superior a $3,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$. Sendo assim, pode-se definir as Equações 4.5 e 4.6 para as restrições referentes à esbeltez da mesa e alma, respectivamente.

$$C_3(\mathbf{x}) = \lambda_f t_{fi} - 0,5b_{fs} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$C_4(\mathbf{x}) = \lambda_w t_w - b_w \geq 0 \quad (4.6)$$

4.1.3.4. Restrições laterais

As restrições laterais, também chamadas de restrições de fronteiras, são limites práticos inferiores e superiores para as variáveis. Por exemplo, uma variável referente ao diâmetro das barras de aço, não pode ser menor que o menor diâmetro comercial das barras e nem maior do que o maior diâmetro comercial, logo esses diâmetros limites são barreiras laterais para a

variável prática diâmetro da barra. Esse tipo de restrição é comum a todos os problemas de otimização com restrição.

No item 4.1.2 foi definido o vetor \mathbf{x} das variáveis de projeto. Definindo os vetores $\bar{\mathbf{l}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ como sendo os limites inferiores e superiores dessas variáveis, define-se o conjunto de restrições dados pelas Equações 4.7 e 4.8 para as restrições laterais das variáveis de projeto. Nessas equações, $i = 1, 2, \dots, n$ com n sendo o número de variáveis, ou seja, $n = 8$ para o caso simétrico e $n = 10$ para o caso não simétrico.

$$C_{i+4}(\mathbf{x}) = x_i - \bar{l}_i \geq 0 \quad (4.7)$$

$$C_{i+n+4}(\mathbf{x}) = \bar{u}_i - x_i \geq 0 \quad (4.8)$$

No método de busca do ponto de ótimo apresentado no item seguinte desse capítulo, define-se um ponto de partida \mathbf{X}_0 e obtém-se o próximo ponto que atenda as restrições de projeto e gere uma redução na função objetivo a partir da equação iterativa $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$, onde \mathbf{d} é o tamanho do passo. Dessa forma, o problema não linear analisado transforma-se em uma sequência de problemas lineares com as variáveis dadas pelo vetor \mathbf{d} . Para que seja válida a aproximação linear usada no método implementado nesse trabalho, devem-se impor restrições laterais para o tamanho do passo, ou seja, $|\mathbf{d}| \leq \Delta$. Assim, chega-se ao conjunto de restrições dadas pelas equações 4.9 e 4.10, onde i varia de 1 até n , com n dado da mesma forma do parágrafo anterior.

$$C_{i+2n+4}(\mathbf{d}) = \Delta_i + d_i \geq 0 \quad (4.9)$$

$$C_{i+3n+4}(\mathbf{d}) = \Delta_i - d_i \geq 0 \quad (4.10)$$

4.2. Programação Linear Sequencial

A programação matemática é uma poderosa ferramenta para solucionar problemas na área da engenharia. Como já mencionado brevemente no capítulo 1, de acordo com as restrições do problema, os métodos de otimização podem ser divididos em dois grupos principais: a programação linear e a programação não linear.

O método da programação linear é uma solução matemática que é destinada a otimização e visa encontrar os valores mínimos ou máximos em problemas onde a função objetivo e todas as restrições representadas por equações ou inequações das variáveis de projeto, são lineares em relação a essas variáveis.

Segundo Castalani (2012), a programação linear é extremamente efetiva porque exige apenas derivadas de primeira ordem, tanto para função objetivo quanto para as restrições. Apesar de resolver apenas problemas lineares, a programação linear é também aplicada nos algoritmos de otimização não linear baseados em métodos sequencias.

Os problemas não lineares, ou seja, aqueles em que a função objetivo ou pelo menos uma das restrições não são funções lineares em relação as variáveis de projeto, podem ser determinados pela programação linear sequencial (PLS). A PLS é um método bastante simples e tem por objetivo estabelecer restrições dos problemas não lineares, aproximando do problema inicial, uma série de subproblemas lineares equivalentes. Essa aproximação é possível através da utilização do artifício da linearização da função, onde os termos da função são desenvolvidos em série de Taylor até o termo de primeira ordem, assim as restrições e a função objetivo são expressas na forma linear.

A seguir, apresenta-se a Equação 4.11 para o problema geral de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Nessa equação, f é a função objetivo que se deseja minimizar, \mathbf{x} é o vetor das variáveis de projeto e C e D são funções das variáveis de projeto que definem, nesta ordem, as restrições de desigualdade e igualdade do problema analisado.

$$\min_x f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } D_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.11)$$

O problema analisado nesta pesquisa possui apenas restrições de desigualdade. Dessa forma a Equação 4.11 pode ser reduzida conforme a Equação 4.12 a seguir.

$$\min_x f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (4.12)$$

As Equações 4.13 e 4.14 apresentam a linearização das funções objetivo e restrições usando a expansão em série de Taylor truncadas no termo de primeira ordem, onde $\nabla^T f_k$ é um vetor linha com n termos e seus termos são dados pelas derivadas parciais de primeira ordem

da função objetivo em relação às variáveis de projeto avaliadas no ponto \mathbf{x}_k . O termo $\nabla^T C_{ik}$ é definido de forma análoga, considerando para esse as funções que definem as restrições.

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f_k \mathbf{d} \quad (4.13)$$

$$C_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong C_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T C_{ik} \mathbf{d} \quad (4.14)$$

Através da programação linear sequencial, o problema apresentado na Equação 4.12 pode ser analisado de forma iterativa, desde que se conheça um ponto de partida \mathbf{x}_0 que satisfaça todas as restrições de projeto. A PLS determina a cada iteração o passo \mathbf{d} que deve ser dado para encontrar o ponto de mínimo do problema em questão, isto é, a cada iteração deve-se definir \mathbf{d} de forma que $f(\mathbf{x}_{k+1})$ seja menor que $f(\mathbf{x}_k)$ e \mathbf{x}_{k+1} atenda todas as restrições impostas. Utilizando essas condições nas aproximações lineares das funções objetivo e restrições, tem-se o problema linear da Equação 4.15 para a determinação do passo \mathbf{d} .

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T f_k \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T C_{ik} \mathbf{d} \geq -C_i(\mathbf{x}_k) \quad (4.15)$$

O problema mostrado na Equação 4.15 apresenta funções objetivo e restrições lineares em relação à variável definida pelos termos do vetor \mathbf{d} . Dessa forma, será utilizado um algoritmo de otimização para problemas lineares para a determinação do passo \mathbf{d} na iteração k do método de programação linear sequencial. Nesse trabalho é aplicado o método Simplex para a solução do problema proposto.

4.3. Simplex

Como já descrito, o método Simplex é o método mais utilizado para resolver problemas lineares, onde as restrições e a função objetivo do problema são lineares em relação as variáveis de projeto. A seguir é apresentado o problema de programação linear e o algoritmo Simplex para solução deste.

A programação linear é iniciada e analisada na sua forma padrão dada pela Equação 4.16, onde \mathbf{c} e \mathbf{x} são vetores em \mathcal{R}^n , \mathbf{b} é um vetor em \mathcal{R}^m e \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$.

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{sujeita a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (4.16)$$

Qualquer problema de otimização linear com restrições de igualdade e desigualdade pode ser facilmente colocado na forma padrão dada pela Equação 4.16. Em Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985) e Nocedal e Wright (2006), pode-se encontrar as diferentes técnicas usadas para transformar um problema de programação linear qualquer na forma padrão.

Se o vetor \mathbf{x} satisfaz o problema da Equação 4.16 diz-se que ele é um ponto viável. \mathbf{x} é dito ser um ponto viável básico se tiver no máximo m componentes não nulas, e se $i \notin \beta(\mathbf{x})$ então $x_i = 0$, e a matriz quadrada dada por $\mathbf{B}_{m \times m} = [\mathbf{A}_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}$ formada por m colunas da matriz \mathbf{A} é não singular. Onde $\beta(\mathbf{x})$ é definido como um subconjunto de $\{1 \ 2 \ \dots \ n\}$ tal que, $\beta(\mathbf{x})$ contém exatamente m índices.

O método Simplex gera em seu processo iterativo uma sequência de pontos viáveis básicos, parando quando um destes pontos satisfazer a condição de otimalidade de primeira ordem de KKT (Karush, Kuhn e Tucker), o qual será o ponto viável básico ótimo do problema linear analisado.

O conjunto desses pontos viáveis forma um poliedro convexo onde suas faces são formadas por polígonos. Se o ponto de ótimo for único, ele será um dos vértices desse poliedro. No entanto, podem existir mais de um ponto de ótimo para o problema, nesse caso qualquer ponto sobre a aresta ou face do poliedro em que o ponto de ótimo se encontra, também será um ponto de ótimo do problema.

Nos problemas de otimização linear, o mínimo local é sempre o mínimo global. Essa característica também é atribuída aos problemas convexos, visto que o problema linear é um problema convexo.

Bazara e Shetty (1993) retratam em seu livro essas condições de otimalidade de KKT comprovando que se um ponto viável \mathbf{x}^* de um problema de programação linear satisfaz essas condições, então o menor valor que a função objetivo pode assumir respeitando todas as restrições é esse ponto, caso contrário, um novo ponto viável básico deve ser avaliado, ou seja, outro vértice do poliedro deve ser analisado.

4.3.1. Ponto viável para o Simplex

No algoritmo do método Simplex, é necessário fornecer um ponto viável básico para iniciar em seu processo iterativo a geração de uma sequência desses pontos até encontrar aquele

que é o ponto de ótimo do problema linear analisado, mais detalhes podem ser vistos em Nocedal e Wright (2006). Dependendo da complexidade do problema linear a ser analisado, a determinação desse ponto viável básico de partida não é tão simples. Nocedal e Wright (2006) mostram o método para determinar um ponto viável básico para um problema linear escrito na sua forma padrão dada pela Equação 4.16, como é descrito de forma resumida nos parágrafos seguintes.

Sendo as restrições do problema analisado linearmente independente, então a matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ tem posto linha completo (posto de $\mathbf{A} = m$), ou seja, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possui uma solução ($m = n$) ou infinitas soluções ($m < n$). No caso de se ter alguma restrição linearmente dependente, essa pode ser eliminada do problema já que pode ser escrita como uma combinação linear de outras restrições, logo, o atendimento dessas restrições garantem o atendimento da restrição eliminada da análise. Seja \mathbf{x} um ponto viável com no máximo m componentes não nulas. Seja $\beta(\mathbf{x})$ um subconjunto de $\{1, 2, \dots\}$ tal que, $\beta(\mathbf{x})$ contém exatamente m índices, se $i \notin \beta(\mathbf{x})$ então $x_i = 0$, e $\mathbf{B}_{m \times m} = [\mathbf{A}_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}$ (\mathbf{A}_i é a i -ésima coluna de \mathbf{A}) é não singular, então \mathbf{x} é um ponto viável básico. Os pontos viáveis básicos são os vértices dos polígonos que limitam os planos formados pelas interseções entre as restrições e a função objetivo, e entre duas ou mais interseções.

Como já dito, o método Simplex gera uma sequência de pontos viáveis básicos buscando aquele que é ótimo, ou seja, aquele que minimiza uma função objetivo. Dessa forma, é necessário que o ponto de ótimo do problema em análise seja um ponto viável básico. Nocedal e Wright (2006) demonstram que sempre que existe uma solução para o problema de otimização linear, pode-se definir um ponto viável básico que seja solução do problema.

Do problema de otimização linear mostrado na Equação 4.16, m é o número de equações correspondentes às restrições linearmente independentes do problema linear, n é o número de incógnitas referentes às variáveis de projeto. A otimização só faz sentido quando m menor que n , ou seja, quando se tem infinitas soluções e busca-se aquela que minimiza uma função objetivo. Um ponto viável básico pode ser definido por tentativas. Ou seja, escolhe da matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ m colunas (essa escolha é definida pelo conjunto $\beta(\mathbf{x})$) formando a matriz quadrada $\mathbf{B}_{m \times m}$. Resolve-se o sistema de equações lineares $\mathbf{By} = \mathbf{b}$. Se os termos de \mathbf{y} são positivos ou nulos, então o ponto de partida \mathbf{x} formado por esses valores e os restantes nulos é um ponto viável básico do problema linear analisado. Dependendo da complexidade do problema esse método pode ser lento, ou seja, tem-se que fazer muitas tentativas até encontrar um \mathbf{y} que atenda às condições exigidas.

4.4. Forma Padrão para o Problema Analisado

Para definir o passo seguinte do método da programação linear sequencial através do método Simplex, é necessário colocar o problema linear da Equação 4.15 na forma padrão da programação linear descrita na Equação 4.16. Fazendo isso obtém-se a Equação 4.17 para o problema de otimização linear que definirá o passo a ser dado em cada iteração do método da programação linear sequencial. A formulação nesse item é apresentada para o caso de perfil I não simétrico ($n = 10$ e $m = 44$), no caso perfil I simétrico ($n = 8$ e $m = 36$) a formulação é análoga.

$$\min_{\mathbf{d}^*} \begin{bmatrix} \nabla^T f_k & -\nabla^T f_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^* \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \nabla^T C & -\nabla^T C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{d}^* = -[C]_{m \times 1} \quad (4.17)$$

Na Equação 4.17, ∇f_k é como definido no item 4.2 desse trabalho,

$$\mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{+T} & \mathbf{d}^{-T} & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T, \text{ onde } \mathbf{d}^+ \text{ e } \mathbf{d}^- \text{ são dois vetores com } n \text{ termos (número de variáveis}$$

de projeto), \mathbf{u} é um vetor com m termos (número de restrições), $\mathbf{I}_{m \times m}$ é uma matriz identidade de ordem m , e $\mathbf{0}_{1 \times m}$ é um vetor linha nulo com m termos. Para maiores informações de como chegar nessa forma padrão consultar Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985).

As derivadas em relação às cargas última e serviço são obtidas usando o método aproximado das diferenças finitas. As derivadas em relação à função objetivo, as restrições de flambagem local da mesa inferior e da alma e as restrições laterais e de controle do tamanho do passo, são obtidas de forma analítica derivando essas expressões em relação às n variáveis de projeto, ou seja, $\mathbf{x}^T = [b \quad h \quad b_{f_i} \quad t_{f_i} \quad b_{f_s} \quad t_{f_s} \quad b_w \quad t_w \quad A_{s1} \quad A_{s2}]$.

A Equação 4.18 apresenta as derivadas da função objetivo em relação às n variáveis de projeto.

$$\nabla^T f_k = [hC_c \quad bC_c \quad t_{f_i}C_a \quad b_{f_i}C_a \quad t_{f_s}C_a \quad b_{f_s}C_a \quad t_wC_a \quad b_wC_a \quad C_b \quad C_b] \quad (4.18)$$

As Equações 4.19 a 4.26 apresentam as derivadas das m restrições de desigualdade em relação às n variáveis de projeto. No item 4.1.3 desse trabalho foram definidas as restrições de projeto identificando as variáveis que aparecem nas equações a seguir.

$$\nabla^T C_1 = \left[\frac{\partial f_u}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f_u}{\partial x_n} \right] \quad (4.19)$$

$$\nabla^T C_2 = -\frac{1}{\delta_{im}} \left[\frac{\partial \delta}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \right] \quad (4.20)$$

$$\nabla^T C_3 = \left[0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \lambda_f \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \quad (4.21)$$

$$\nabla^T C_4 = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad -1 \quad \lambda_w \quad 0 \quad 0 \right] \quad (4.22)$$

$$\nabla^T C_{i+4} = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{i\text{-ésima posição}}{\{1\}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.23)$$

$$\nabla^T C_{i+n+4} = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{i\text{-ésima posição}}{12\mathfrak{b}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.24)$$

$$\nabla^T C_{i+2n+4} = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{i\text{-ésima posição}}{\{1\}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.25)$$

$$\nabla^T C_{i+3n+4} = \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{i\text{-ésima posição}}{12\mathfrak{b}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

Nas Equações 4.19 e 4.20, as derivadas parciais do fator de carga que multiplica o carregamento último e da flecha máxima em um determinado vão da viga em relação às variáveis de projeto, são determinadas usando o método das diferenças finitas mostrado na Equação 4.27. Nessa equação, \mathbf{e}_j é um vetor com seus termos nulos, exceto o termo na posição j do vetor que é igual a unidade. Quanto menor o valor adotado para dx_j melhor a aproximação do método da diferença finita, no entanto, valores muito pequenos podem gerar erros devido à precisão da máquina na representação de valores numéricos (TOL), sendo recomendável na literatura que se utilize valores maiores ou iguais a raiz quadrada de TOL .

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x_j \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{\Delta x_j} \cong \frac{f(\mathbf{x} + dx_j \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{dx_j} \quad (4.27)$$

4.5. Ponto de Partida

A cada iteração do método de programação linear sequencial, um problema de programação linear é resolvido e um novo passo é determinado de forma que a função objetivo avaliada no passo definido seja menor que a função objetivo avaliada no passo anterior e as restrições sejam todas atendidas no passo definido. Assim, para utilizar o método apresentando, deve-se fornecer ao algoritmo de análise um ponto de partida que atenda a todas as restrições de projeto.

Definir o ponto de partida é assumir valores para todas as variáveis de projeto do problema analisado, desde que, todas as restrições sejam satisfeitas. Como já apresentado, neste estudo as variáveis de projeto são os parâmetros que definem a seção transversal da viga de aço de perfil I, a seção retangular de concreto e a área das barras de reforço da laje de concreto. Assim deve-se determinar valores para essas variáveis de forma que todas as restrições de projeto, definidas no item 4.1.3, sejam satisfeitas.

Como nem sempre é fácil definir valores para as variáveis de tal forma que atenda todas as restrições, o programa implementado nesse trabalho exige apenas que usuário forneça no arquivo de entrada de dados uma seção que satisfaça as exigências das dimensões limites da laje de concreto, do perfil de aço e da área de armadura inferior e superior da laje de concreto. Em seguida o programa verifica as restrições referentes à esbeltez da mesa e alma, caso as dimensões passadas não atendam a essas restrições, são definidas novas dimensões para a mesa e alma de tal forma que essas restrições sejam atendidas. Após isso são verificadas as restrições de carga última e de serviço, caso não sejam satisfeitas o programa aumenta os valores das variáveis de projeto em uma determinada proporção, respeitando as restrições de esbeltez, até que essas restrições sejam atendidas ou as dimensões atingem os limites superiores definidos para elas.

Como a verificação do estado limite último requer uma análise incremental e iterativa do problema de viga mista, antes da verificação dessa restrição, a seção dada no arquivo de entrada é aumentada em uma determinada proporção até que os valores dos momentos de plastificação positivo e negativo da viga mista sejam maiores ou iguais aos momentos solicitantes máximos positivo e negativo obtidos através da análise estrutural. Os momentos de plastificação da viga mista com interação parcial são calculados seguindo os procedimentos fornecidos pela NBR8800 (2008). A seção alterada pelo algoritmo e que atende a todas as exigências mencionadas torna-se um ponto de partida para o procedimento de otimização, assim a partir daí, inicia-se a rotina para otimizar a viga mista.

Nos exemplos analisados no capítulo 5 desse trabalho são fornecidos os dados da seção definida pelo usuário, da seção definida pelo programa como ponto de partida para o método de programação linear sequencial, e por último as dimensões da seção otimizada considerando o método Simplex para definição dos passos no processo sequencial do método usado.

4.6. Algoritmo

Sendo \mathbf{x} o vetor das variáveis de projeto que define as dimensões da seção transversal da viga mista composta pela laje de concreto, perfil de aço I e aço de armadura de reforço da laje, o algoritmo a seguir descreve o método iterativo para obter um vetor \mathbf{x} que minimiza a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e satisfaça todas as restrições do projeto discutido nos itens anteriores desse trabalho.

Passo 1 - Leitura dos dados de entrada fornecido pelo usuário no arquivo de entrada. Sendo estes: curva tensão-deformação dos materiais que compõem a viga mista, carregamento considerando combinação última e de serviço das ações, condições de apoio, custo unitário dos materiais, parâmetros limites, discretização da viga em elementos finitos, tipo de análise (para perfil de aço I simétrico ou não simétrico), bem como as dimensões da laje de concreto, viga de aço e área de aço de armadura. Essas dimensões devem ser fornecidas respeitando os parâmetros limites. Outros dados de entrada são as variações possíveis dentro dos parâmetros limites para cada variável de projeto, de forma que esses dados são utilizados pelo programa para definir uma seção discreta a partir da seção otimizada considerando as variáveis de projeto como contínuas.

Passo 2 - Determinação do ponto de partida que atenda a todas as restrições de projeto. Esse ponto é necessário para iniciar o processo iterativo de busca do ponto de ótimo usando aproximações lineares para as restrições e função objetivo a cada passo. Como já descrito no item 4.5 deste capítulo, o algoritmo realiza a análise estrutural e verifica se os dados de entrada, neste caso, as dimensões fornecidas pelo usuário, atendem as restrições conforme prescrições da NBR 8800 (2008). Caso não sejam atendidas, o algoritmo aumenta em 10% as dimensões fornecidas pelo usuário até que todas as restrições sejam satisfeitas.

Passo 3 - Utilização da programação linear sequencial e o método Simplex para definição da seção otimizada. Usando o ponto de partida do passo anterior, define-se um novo

ponto resolvendo um problema de otimização linear usando o método Simplex. Para que aproximação linear seja válida, é inserida às restrições de projeto um controle do tamanho dos passos dados no método sequencial.

Passo 4 - Transformando a seção otimizada do passo anterior em uma seção com variáveis discretas com variação definida pelo usuário. O algoritmo fixará o valor de uma variável de projeto conforme uma lista disponível e mais próximo do valor obtido pelo método Simplex. A partir daí essa variável será eliminada e o problema será reanalisado definindo novos valores para as outras variáveis, e assim sucessivamente até que todas as variáveis de projetos sejam definidas conforme a variação definida pelo usuário. As variáveis são avaliadas nesta ordem: A_{s1} , A_{s2} , t_w , b_w , t_{fs} , b_{fs} , t_{fi} , b_{fi} , h e b .

Passo 5 - Encerrar o procedimento iterativo com o ponto de ótimo dado pela última seção transversal obtida. Ou seja, são definidas a seção transversal da laje de concreto e do perfil de aço I como também a área das barras de aço das armaduras inferior e superior para reforço da laje de concreto.

4.7. Implementação Computacional

Como já mencionado na Metodologia no item 1.5, para implementação do algoritmo descrito, utilizou-se o software comercial Visual Studio 2015 e as formulações implementadas computacionalmente dentro do programa de elemento finitos FEMOOP (*Finite Element Method Object Oriented Program*) que utiliza a linguagem de programação C++ sendo estruturados dentro da lógica de uma programação orientada a objetos para o desenvolvimento dos seus códigos.

O programa FEMOOP é estruturado a partir do conceito de classes. Algumas dessas classes são listadas a seguir. Nesse trabalho, são incluídos novos modelos de análise para a definição das dimensões da seção transversal de vigas mistas formadas por laje retangular de concreto armado ligada por conexão deformável a um perfil de aço do tipo I simétrico ou não. Portanto, são feitas alterações no FEMOOP criando novas filhas da classe *cCtrl*, sendo elas: *cOtmVigasMistas* e *cOtmVigasMistasNS*, descritas neste item a seguir.

cFem: Classe para funções e variáveis globais da análise numérica usando o método dos elementos finitos (MEF). Um elemento dessa classe é construído a partir de uma das suas classes filhas que definem a que tipo de problema será usado o método dos elementos finitos.

cFemMech: Filha da classe *cFem*, e é usada na análise numérica de problemas envolvendo a mecânica dos sólidos.

cFemFluid: Filha da classe *cFem*, e é usada na análise numérica de problemas envolvendo a mecânica dos fluidos.

O programa é iniciado criando um elemento dessa classe que irá gerenciar a criação de todos os outros elementos de classes necessários na análise. Nessa classe estão escritas as funções principais do MEF, como, por exemplo, funções responsáveis pela indexação dos índices das equações globais com os graus de liberdade de cada nó, montagem da matriz de rigidez global do sistema, montagem do vetor de força global, resolução do sistema de equações lineares, entre outras.

cAnModel: Classe para definir os modelos dos elementos finitos. As filhas dessa classe representam os modelos de elementos finitos para diferentes análises, como, por exemplo, análise de pórticos planos, espaciais, análise de placas e cascas, entre outros.

cAnBeam2d: Filha da classe *cAnModel*, define características do elemento para análise de pórticos planos, como, quantidade de nós no elemento e de graus de liberdade por nó.

cAnInterface: idem a *cAnBeam2d*, para elemento de interface entre dois elementos de barra.

cAnPlate9: idem a *cAnBeam2d*, para elemento de placa, entre outras.

Quando se deseja inserir um novo elemento no FEMOOP, deve ser criada uma nova filha para *cAnModel* com as características desejadas desse novo elemento. Nesse trabalho foram utilizados os elementos *beam2d* e *interface*, os quais foram implementados em trabalhos anteriores.

cCtrl: Classe que define o tipo de análise. Ou seja, as filhas dessa classe definem se o método de análise é para um problema estático linear, dinâmico linear, estático não linear usando método de Newton-Raphson com controle de carga ou deslocamento, análise estática não linear usando método incremental com matriz de rigidez tangente média, entre outros.

cCtrlLinStat: Filha da classe *cCtrl*, e define uma função, chamada de *solver*, para análise de problemas estáticos lineares da mecânica dos sólidos.

cPathNR: idem a *cCtrlLinStat*, para análise de problemas estáticos não lineares usando método incremental/iterativo com controle de carga.

cPathDCM: idem a *cCtrlLinStat*, para análise de problemas estáticos não lineares usando método incremental/iterativo com controle de deslocamento, entre outras.

Quando se deseja inserir um novo método de análise no FEMOOP, deve ser criada uma nova filha para *cCtrl* atribuindo à função *solver* as características desejadas. Dessa forma, como mencionado anteriormente, foi implementada nesse trabalho as filhas da *cOtmVigasMistas* e *cOtmVigasMistasNS*. A primeira, para a análise de vigas mistas com interação parcial formada por laje de concreto armado retangular e perfil de aço I simétrico. A segunda é análoga a primeira considerando perfil I não simétrico.

cElement: Classe que define características e funções gerais dos elementos. Por exemplo, parâmetro que identifica o modelo do elemento (*cAnBeam2d*, *cAnBeam3d*, ente outros), e função que retorna os deslocamentos calculados nos nós do elemento. As filhas dessa classe definem características individuais de cada elemento.

cElcBeam2d: Filha da classe *cElement*, define características individuais do elemento, como, por exemplo, material que o elemento é constituído, quantidade de pontos de integração numérica, função para definição da matriz de rigidez do elemento, entre outras.

cElcBeam3d: idem a *cElcBeam2d*.

cElcPlate9: idem a *cElcBeam2d*, entre outras.

Quando se deseja inserir um novo elemento no FEMOOP, deve ser criada uma nova filha para *cElement* com as características desejadas desse novo elemento. Nesse trabalho foram utilizados os elementos *beam2d* e *interface* implementados em trabalhos anteriores.

cCrossSection: Classe que define as propriedades de seções transversais para análise de pórticos planos ou espaciais. As filhas dessa classe definem diferentes formatos das seções e quantidade de materiais usados nas seções.

cCrossPolygon: Filha da classe *cCrossSection*, e define uma seção transversal poligonal composta por apenas um tipo de material.

cCrossCircle: Filha da classe *cCrossSection*, e define uma seção transversal circular composta por apenas um tipo de material.

cMultMatSection: Filha da classe *cCrossSection*, e define uma seção transversal poligonal composta por um número qualquer de materiais, podendo ainda ser definidas barras pontuais dentro da seção.

Outros tipos de formatos de seção podem ser introduzidos no FEMOOP criando novas filhas da classe *cCrossSection*. Nesse trabalho as seções dos elementos de barra (beam2d) para análise da viga mista foram definidas usando *cMultMatSection*.

cMaterial: Classe para definição das propriedades dos materiais, como, por exemplo, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, densidade, entre outras. A análise de placas e cascas, é usada também para definir a espessura dos elementos de placa e característica do material ao longo da espessura, como, por exemplo, a presença de armadura numa laje de concreto armado.

cMaterialIsotropic: Filha da classe *cMaterial*, e define as propriedades dos materiais elásticos isotrópicos.

cMatConcreteReforced: Filha da classe *cMaterial*, e define as propriedades do material ao longo da espessura para análise linear de placas de concreto armado com barras de aço.

cMatConcreteReforcedNL: Filha da classe *cMaterial*, e define as propriedades do material ao longo da espessura para análise não linear de placas de concreto armado com barras de aço.

cMatSteel: Filha da classe *cMaterial*, e define as propriedades do material ao longo da espessura para análise não linear de placas de aço, entre outras.

Outros tipos de materiais podem ser introduzidos no FEMOOP criando novas filhas da classe *cMaterial*.

cLoadElement: Classe que define as características dos carregamentos aplicados nos elementos. Por exemplo, identifica quais elementos da malha de elementos finitos tem carregamento e que tipo de carregamento é (uniforme distribuído, concentrado, entre outros). As filhas dessa classe definem os diferentes tipos de carregamentos que podem atuar em diferentes tipos de elementos.

cLoadPlatePoint: Filha da classe *cLoadElement*, e define um carregamento pontual no elemento de placa retangular.

cLoadPlateUnif: Filha da classe *cLoadElement*, e define um carregamento uniformemente distribuído no elemento de placa retangular.

cLoadShellUnif: Filha da classe *cLoadElement*, e define um carregamento uniformemente distribuído no elemento plano de casca retangular.

cLoadBeam2dUnif: Filha da classe *cLoadElement*, e define um carregamento uniformemente distribuído no elemento de barra para pórticos planos, entre outras.

Outros tipos de carregamentos podem ser introduzidos no FEMOOP criando novas filhas da classe *cCrossSection*.

cStressStrain: Classe para definição de diferentes modelos de curva tensão-deformação para os diferentes materiais. Em algumas análises não lineares é necessária a sua definição.

cStressStrainSegPoli: Filha da classe *cStressStrain*, e define uma curva formada por um número qualquer de sentenças, onde cada sentença é definida por um polinômio de até terceira ordem.

cStressStrainExponencial: Filha da classe *cStressStrain*, e define uma curva exponencial geralmente usada na relação força cortante versus deslizamento de conexões deformáveis.

Outros tipos de curvas para relação tensão-deformação podem ser introduzidas no FEMOOP criando novas filhas da classe *cStressStrain*. Nesse trabalho foi utilizada a classe *cStressStrainSegPoli* para definir as curvas que simulam o comportamento dos materiais aço, concreto e conexão deformável.

cNode: Classe que define as propriedades e funções exclusivas de cada nó da malha de elementos finitos. Por exemplo, suas coordenadas, carregamentos nodais, restrições de deslocamentos, função que associa os graus de liberdade do nó com o índice da equação do sistema global, entre outras.

Capítulo 5

Aplicações

Nesse capítulo são analisados alguns exemplos de otimização de vigas mistas aço-concreto com interação parcial de forma a validar as implementações apresentadas nos capítulos anteriores. Não foram encontrados na literatura exemplos de dimensionamento otimizado de vigas mistas com interação parcial que servissem para comparação com este estudo. Sendo assim, nesse capítulo são analisados exemplos de vigas mistas com interação parcial para as quais foi definido o seu carregamento último e dessa forma, admitindo as mesmas configurações dessas vigas, adotando esse carregamento último como carregamento solicitante e partindo de uma seção qualquer, o algoritmo implementado nesse trabalho deve-se convergir para uma seção menor ou no mínimo igual à seção da viga de exemplo.

Em todos os exemplos descritos neste capítulo, para a verificação das restrições de projeto referentes ao carregamento limite último e ao carregamento de serviço da viga mista, são realizadas análises numéricas onde são utilizados os elementos finitos de barra (Silva, 2010) em conjunto com um elemento de interface (Silva, 2006) expostos de forma resumida no capítulo 3 desse trabalho.

5.1. Exemplo 1

Dall'Asta e Zona (2004) analisaram a capacidade de carga de uma viga mista aço-concreto com interação parcial ilustrada na Figura 5.1 (dimensões da seção transversal em mm). Os autores utilizaram em sua análise numérica, um elemento finito de barra com dez graus de liberdade capaz de simular a não linearidade física dos materiais.

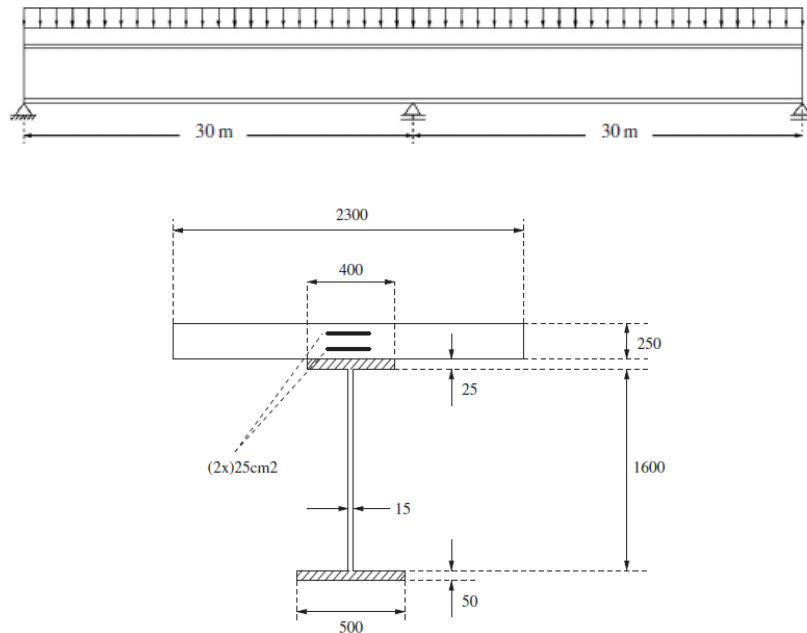


Figura 5.1 - Viga mista com interação parcial: viga contínua e seção transversal
Fonte: Silva e Souza (2007)

As relações constitutivas dos materiais usadas por Dall'Asta e Zona (2004) são apresentadas na Figura 5.2. Para o concreto, f_c é dado por 33MPa. Para o aço do perfil, as propriedades são definidas como $f_y = 275\text{MPa}$, $f_u = 360\text{MPa}$, $\epsilon_{sh} = 0,04$ e $\epsilon_u = 0,11$, e para o aço das barras de reforço da laje de concreto $f_y = 430\text{MPa}$, $f_u = 473\text{MPa}$, $\epsilon_{sh} = 0,02$ e $\epsilon_u = 0,10$, sendo o módulo de elasticidade tomado como 200 000MPa. Para a curva rigidez da conexão, $\alpha = 0,558$ e $\beta = 1 \text{ mm}^{-1}$ e $F_{max} = 1240 \text{ kN/m}$ com $s_u = 6 \text{ mm}$.

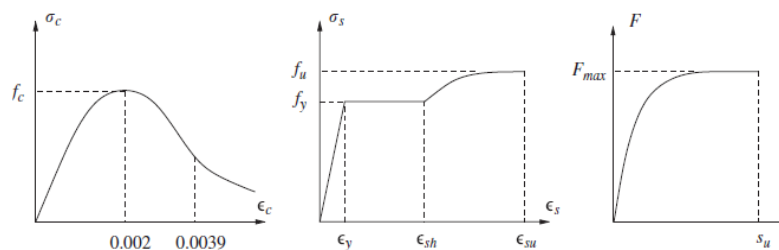


Figura 5.2 - Leis constitutivas utilizadas por Dall'Asta e Zona (2004): concreto, aço (perfil e barras de reforço) e conexão da interface, respectivamente
Fonte: Silva e Souza (2007)

O exemplo da Figura 5.1 também foi analisado por Silva e Souza (2007). Os resultados numéricos obtidos por Dall'Asta e Zona (2004) e Silva e Souza (2007) são mostrados na Figura 5.3 a seguir. Nessa figura são apresentadas as curvas que relacionam o carregamento aplicado ao deslocamento vertical do meio dos vãos da viga mista em análise. Nesta figura, 8el-Dall'Asta

é a resposta numérica obtida por Dall'Asta e Zona (2004) usando 8 elementos de viga mista; 8el-INTERFACE e 8el-SLIPBEAM são respostas numéricas obtidas por Silva e Souza (2007) usando 8 elementos de viga mista em uma análise, e na outra foi utilizada a associações de elementos de interface com elementos de viga.

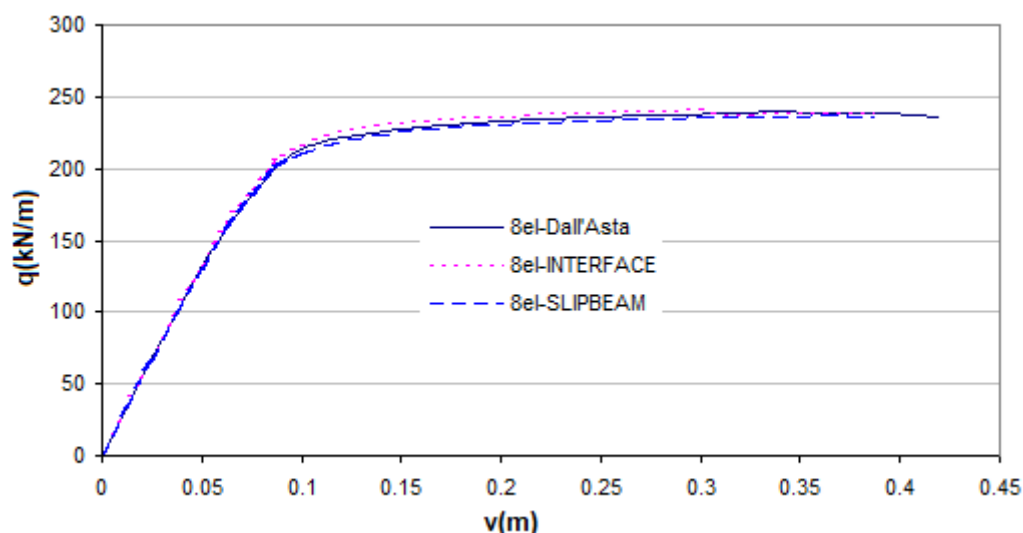


Figura 5.3 - Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista
Fonte: adaptada de Silva (2006)

Da Figura 5.3 observa-se que o carregamento uniformemente distribuído máximo suportado pela viga mista analisada é de 237,4 kN/m. Esse valor será utilizado neste exemplo como carregamento solicitante em uma viga mista contínua com as mesmas configurações da viga mostrada na Figura 5.1, para a qual será definida pelo usuário uma seção inicial qualquer e o algoritmo de otimização fornecerá uma viga mista otimizada, validando sua aplicação.

Para as análises numéricas deste exemplo, são consideradas a não linearidade física representada pelas curvas tensão-deformação dos materiais e a curva força cortante versus deslizamento da conexão deformável mostradas na Figura 5.4. A viga mista da Figura 5.1, foi discretizada em 8 elementos de viga para simular a viga de concreto, 8 elementos de viga para simular a viga de aço e 8 elementos de interface para simular a conexão deformável e conectar os elementos de viga acima e abaixo da interface de contato.

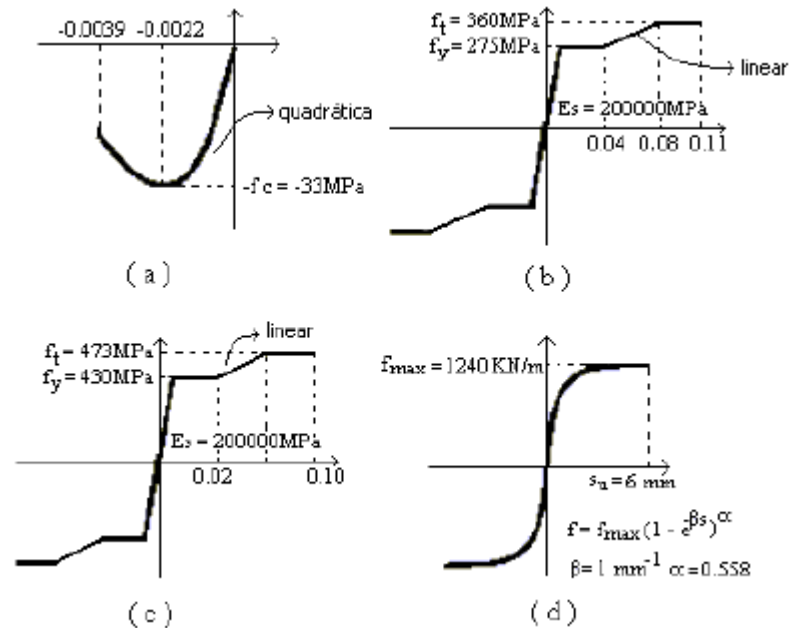


Figura 5.4 - Leis constitutivas utilizadas neste exemplo: (a) concreto, (b) aço do perfil, (c) barras de reforço e (d) conexão da interface

Fonte: Silva (2006)

Ao comparar as curvas dos materiais utilizadas pelos autores (Figura 5.2) com as curvas utilizadas neste exemplo (Figura 5.4), percebe-se que os limites de tensão são os mesmos, porém as curvas da Figura 5.4 são aproximações polinomiais das curvas utilizadas por Dall'Asta e Zona (2004), menos a curva que relaciona força-deslizamento onde foi utilizada a mesma, isso porque os autores não disponibilizaram as expressões analíticas das relações tensão-deformação.

5.1.1. Otimizando o perfil I de aço

Neste exemplo será verificado a redução que se consegue obter no perfil I de aço da seção de Dall'Asta e Zona (2004). Para isso, será forçado que as variáveis referentes à seção da laje de concreto e da área da armadura apresentem valores finais iguais aos apresentados na seção da Figura 5.1, ou seja, b com largura de 2300mm e h com espessura de 250mm e A_{s1} e A_{s2} com área de 25cm^2 cada. Assim, será definido no arquivo de entrada um custo baixo para o concreto e armadura e um custo alto para o aço, em conjunto com valores limites superiores das dimensões da seção de concreto e da armadura iguais às dimensões da seção da Figura 5.1. Dessa forma, o algoritmo em busca de um custo mínimo para a viga mista tende a aumentar a seção de concreto e armadura para poder reduzir a área do perfil de aço, visto que esse foi definido com custo alto, sendo barrado pelas dimensões limites superiores (restrições laterais) definidas.

É apresentada na Figura 5.5 a seção inicial fornecida pelo usuário que deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites inseridas também no arquivo de entrada. Como já descrito na seção 4.5, caso as exigências de esbeltez das mesas e alma e as exigências referentes ao carregamento último e de serviço não sejam satisfeitas, a seção fornecida pelo usuário é alterada pelo algoritmo e tem suas dimensões aumentadas em um processo iterativo até que todas as restrições sejam satisfeitas tornando-se o ponto de partida para o procedimento de otimização. A seção alterada pelo algoritmo para atender as exigências mencionadas, ou seja, o ponto de partida do método de otimização para esse exemplo é apresentado na Figura 5.6.

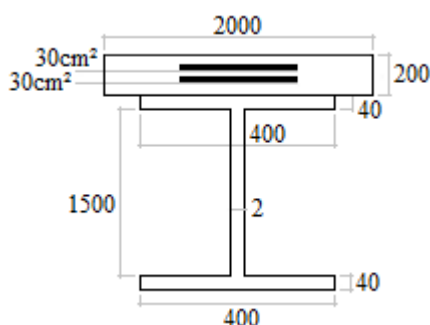


Figura 5.5 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm)

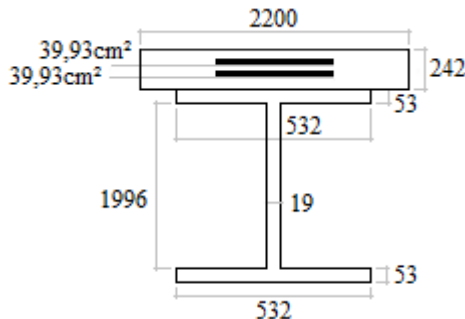


Figura 5.6 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

São apresentados na Tabela 5.1 a seguir, os valores limites definidos pelo usuário no arquivo de entrada para as variáveis de projeto. Como já citado, esses valores servirão como barreira para estas variáveis. Vale a pena lembrar, que os custos neste exemplo foram fornecidos forçando as variáveis referentes à seção de concreto (b e h) e armadura (A_{s1} e A_{s2}) convergirem para seus valores limites superiores.

Tabela 5.1 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm²)

| Variáveis | b | h | b_f | t_f | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 500 | 70 | 50 | 2 | 200 | 2 | 5 | 5 |
| Limite superior | 2300 | 250 | 1000 | 100 | 2000 | 100 | 25 | 25 |

As variáveis de projeto durante o processo de otimização são consideradas variáveis contínuas. Após a definição da seção otimizada, é iniciado um processo de eliminação das variáveis, uma a uma, atribuindo um valor discreto maior ou igual ao valor obtido no processo de otimização e retirando essa variável da lista de variáveis de projeto, conforme foi explicado no item 4.6. Esse processo é repetido até que sejam atribuídos valores discretos a todas as variáveis de projeto. Na atribuição desses valores são usados os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário. Nesse exemplo foram considerados os parâmetros de variação de 10mm para as dimensões b_f e b_w e de 1,0mm para as dimensões t_f e t_w . Dessa forma, de uma maneira mais clara, a largura da mesa será um valor discreto com precisão de mm entre o limite inferior e superior dados na tabela 5.1, ou seja, um valor discreto da lista 50, 60, 70, ..., 980, 990, 1000mm.

Nesse exemplo o algoritmo implementado irá fornecer uma seção de concreto armado com dimensões e armaduras iguais à seção de Dall'Asta e Zona (2004) mostrada na Figura 5.1. Para a seção de aço, será fornecido o menor perfil que atenda a todas as restrições de projeto. Para a restrição referente ao carregamento último foi considerado o carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a viga de 237,4kN/m (Figura 5.3), que é o carregamento limite obtido por Dall'Asta e Zona (2004). Para o carregamento de serviço, foi considerado o valor de 120kN/m para um carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a viga. Geralmente, a combinação de serviço das ações gera um carregamento aproximadamente igual a metade do carregamento obtido através de uma combinação última das ações.

Para análise considerando perfil I simétrico, a resposta obtida neste exemplo é mostrada na Figura 5.7. Observa-se que a seção de concreto armado é igual a seção de Dall'Asta e Zona (2004), como era esperado, e o perfil I simétrico obtido apresenta uma área total de 53.970mm², enquanto que o perfil de Dall'Asta apresenta área de 59.000mm². Dessa forma, percebe-se que o algoritmo de otimização partiu de uma seção qualquer dada na Figura 5.6, com área de 94.316mm² e convergiu para um perfil de área 42,7% menor que a seção de partida e 8,5% menor que a seção de Dall'Asta.

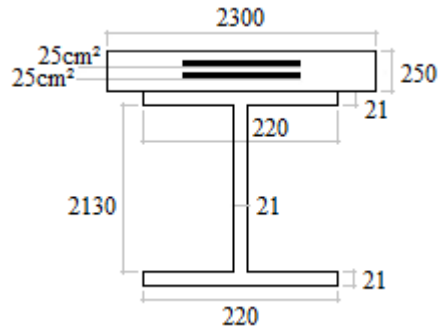


Figura 5.7 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Figura 5.8 a seguir são ilustradas as variações das restrições referentes aos carregamentos últimos e de serviço, esbeltez da mesa e alma, em relação ao número de iterações. Nessa figura, ELU faz referência a restrição dada pelo carregamento último, ELS faz referência a restrição dada pelo carregamento de serviço, EM e EA fazem referências, respectivamente, a restrição de esbeltez da mesa e alma. Observa-se dessa figura que a seção de partida apresenta uma folga de 75%, 81%, 28%, e 0%, respectivamente, em relação à verificação quanto ao carregamento último, carregamento de serviço, esbeltez da mesa e esbeltez da alma.

De acordo com a Figura 5.8, percebe-se que a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, já que a seção otimizada apresenta uma folga de 64% em relação ao estado limite de serviço e não apresenta folga para a verificação do estado limite último. Observa-se também que a esbeltez da alma se apresenta sem folga desde a seção de partida. Isso ocorre devido ao fato da seção fornecida pelo usuário (Figura 5.5) apresentar esbeltez da alma maior que o limite permitido, dessa forma o algoritmo alterou as dimensões da seção dada pelo usuário para definir a seção de partida fixando esbeltez da alma igual ao seu limite. Esse valor foi mantido durante as iterações já que existe uma tendência do algoritmo de otimização em reduzir a espessura da alma e aumentar a sua altura para se ter um acréscimo na inércia da seção.

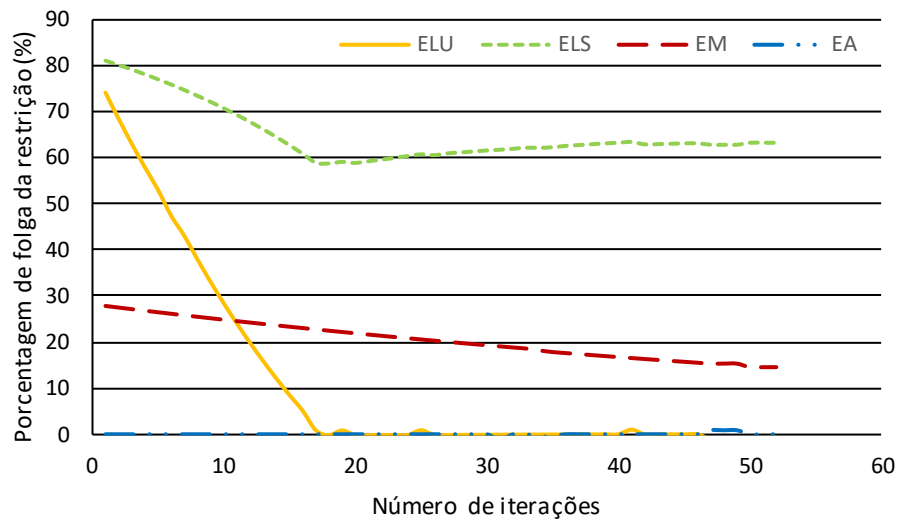


Figura 5.8 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)

As análises realizadas até aqui foram considerando perfil I duplamente simétrico. Nesse caso o perfil I é definido por quatro variáveis. Como já descrito nos capítulos anteriores, outra possibilidade de análise desenvolvida nesse trabalho é a consideração do perfil I não simétrico em relação ao eixo perpendicular a alma. Nesse caso o perfil I é definido por seis variáveis, descritas na seção 4.1.2. As mesmas análises feitas para o perfil I duplamente simétrico foram realizadas para o caso não simétrico e são apresentadas a seguir. Foram utilizados os mesmos carregamentos uniformemente distribuídos ao longo da viga (último e serviço), como também a mesma seção inicial inserida no arquivo de entrada pelo usuário (Figura 5.5).

É mostrada na Figura 5.9 a resposta para a seção otimizada considerando perfil I não simétrico. Dessa figura, como era esperado, observa-se que a seção de concreto armado é igual a seção de Dall'Asta e Zona (2004) e que o perfil I não simétrico apresenta área total de 52.180mm^2 . Da mesma forma que a seção simétrica, o algoritmo de otimização partiu da seção dada na Figura 5.6 e convergiu para um perfil de área 45,6% menor que a seção de partida e 11,6% menor que a seção de Dall'Asta.

A resposta considerando o perfil não simétrico foi um pouco melhor que a resposta considerando o perfil simétrico, sendo as áreas 11,5% e 8,5% menores, respectivamente, quando comparadas com a seção de Dall'Asta e Zona (2004). Isso se deve principalmente ao momento resistente positivo, para o qual a mesa superior do perfil I contribui pouco. Assim, quando se trata de momento resistente positivo, um perfil mais otimizado deve ter mesa inferior maior que a mesa superior.

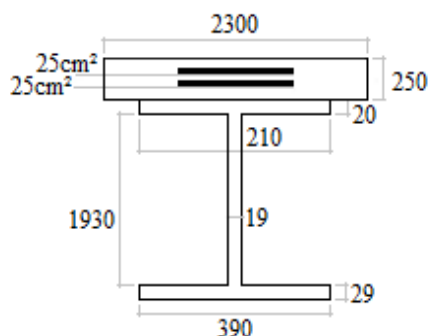


Figura 5.9 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

A Figura 5.10 é análoga a Figura 5.8 que faz referência a análise considerando perfil simétrico. A única diferença é a legenda do gráfico da Figura 5.10 onde EM foi trocado por EMI que se refere a restrição de esbeltez da mesa inferior. Devido à mesa superior estar conectada a laje de concreto, despreza-se a possibilidade de flambagem desta mesa. As mesmas considerações feitas para análise simétrica referentes ao gráfico da Figura 5.8 são válidas para o gráfico da Figura 5.10 para análise não simétrica.

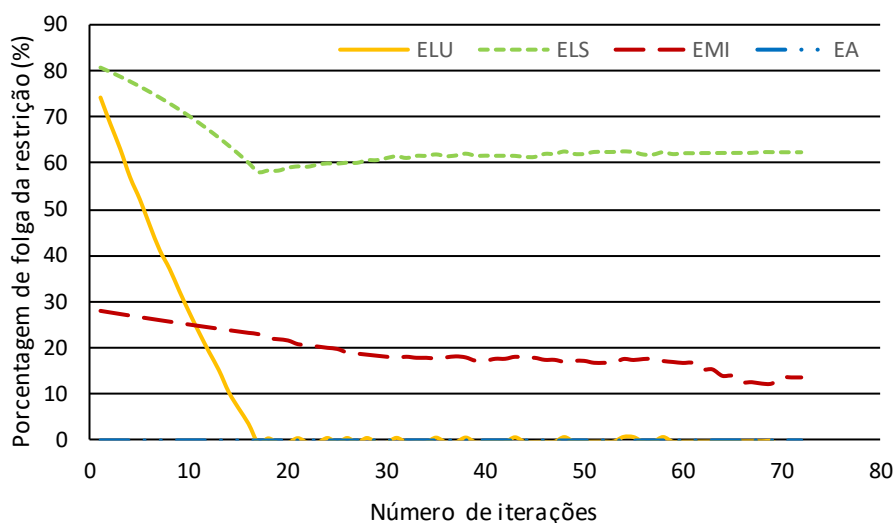


Figura 5.10 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)

Na Figura 5.11 é apresentada a variação da área do perfil de aço da seção mista com as iterações do método de programação sequencial linear implementado nesse trabalho. Comparando o gráfico da Figura 5.11 com os gráficos das Figuras 5.8 e 5.10, observa-se uma redução mais acentuada na área de aço do perfil associada a uma redução da folga referente à restrição do carregamento último. Após isso, a redução da área é pequena e a restrição referente ao carregamento último mantém-se ativa.

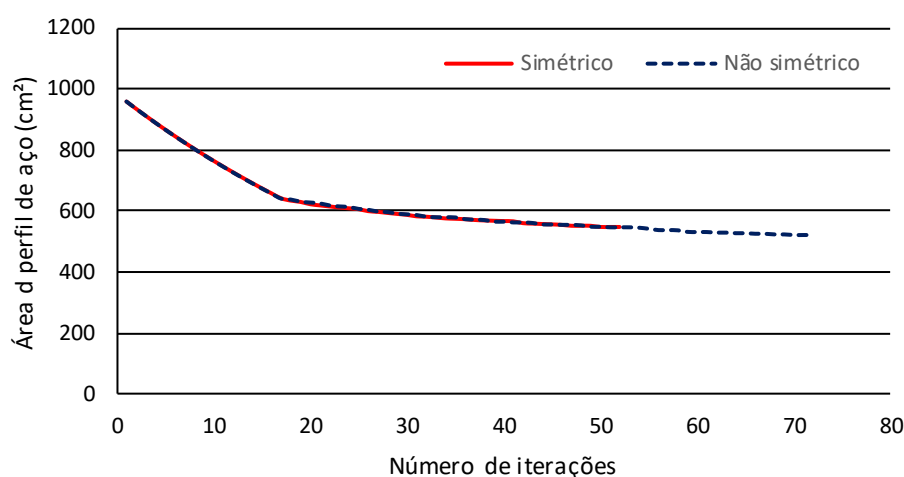


Figura 5.11 - Variação da área de aço na seção mista durante o processo de otimização

5.1.2. Otimizando a laje de concreto

No subitem anterior, foi definida uma seção inicial qualquer pelo usuário e o algoritmo de otimização forneceu uma seção com as dimensões da laje de concreto armado igual à seção de Dall'Asta e Zona (2004) e otimizou a seção do perfil I de aço (simétrico e não simétrico). Esse subitem segue as mesmas características do exemplo do subitem anterior, sendo que agora será definida uma seção inicial qualquer e o algoritmo de otimização fornecerá uma seção com as dimensões da laje de concreto armado otimizada e a seção de perfil I de aço não simétrico igual à seção dos autores.

Como esse exemplo quer verificar a redução que se consegue obter na laje de concreto da seção de Dall'Asta e Zona, será forçado que as variáveis referentes à seção de perfil I de aço e da área da armadura apresentem valores finais iguais ao da seção da Figura 5.1 ($b_{fi} = 500\text{mm}$, $t_{fi} = 50\text{mm}$, $b_{fs} = 400\text{mm}$, $t_{fs} = 25\text{mm}$, $b_w = 1600\text{mm}$, $t_w = 15\text{mm}$, $A_{s1} = 25\text{cm}^2$ e $A_{s2} = 25\text{cm}^2$). Para isso, será definido um custo baixo para o concreto e um custo alto para o aço do perfil e da armadura, em conjunto com valores limites inferiores das dimensões do perfil de aço e da armadura iguais às dimensões da seção da Figura 5.1. Dessa forma, o algoritmo em busca de um custo mínimo para a viga mista tende a reduzir o perfil de aço e área de armadura de forma mais significativa que o concreto, sendo barrado pelas dimensões limites (restrições de barreiras) definidas. Após o perfil de aço e armadura atingirem as dimensões limites inferiores, a redução da função objetivo só pode acontecer com uma otimização das dimensões da laje de concreto.

É mostrada na Figura 5.12, a seção inicial fornecida pelo usuário que deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites. A seção alterada pelo algoritmo, ou seja, o ponto de partida do método de otimização, é apresentada na Figura 5.13. Como já mencionado, a seção fornecida pelo usuário é alterada pelo algoritmo e tem suas dimensões aumentadas em um processo iterativo quando as exigências de esbeltez da mesa e alma e as exigências referentes ao carregamento último e de serviço não são satisfeitas, tornando-se esta um ponto de partida para o procedimento de otimização.

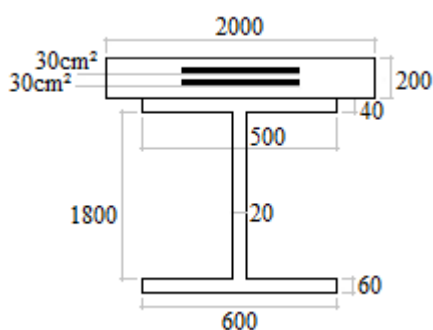


Figura 5.12 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm)

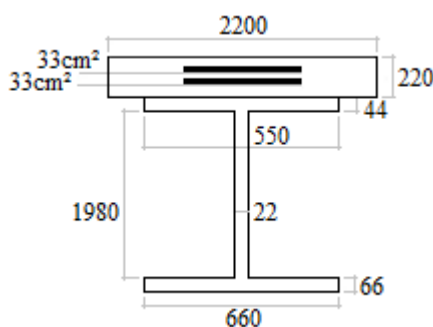


Figura 5.13 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.2 a seguir são apresentados os valores limites definidos pelo usuário no arquivo de entrada para as variáveis de projeto. Esses valores servirão como barreira para estas variáveis (restrições laterais). Vale lembrar, que os custos neste exemplo foram fornecidos forçando as variáveis referentes ao perfil de aço (b_{fi} , t_{fi} , b_{fs} , t_{fs} , b_w , t_w) e da armadura (A_{s1} e A_{s2}) convergirem para seus valores limites inferiores.

Tabela 5.2 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm²)

| Variáveis | b | h | b_{fi} | t_{fi} | b_{fs} | t_{fs} | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|----------|----------|----------|----------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 500 | 70 | 500 | 5 | 400 | 2,5 | 1600 | 15 | 25 | 25 |
| Limite superior | 3000 | 500 | 1000 | 100 | 1000 | 100 | 2500 | 100 | 50 | 50 |

Na atribuição dos valores discretos, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário no arquivo de entrada foram de variação de 10mm para as dimensões b_f e b_w , de 1,0mm para as dimensões t_f e t_w , de 50mm para b e 5,0mm para h entre os limites inferior e superior dados na Tabela 5.2.

A resposta obtida para esse exemplo é mostrada na Figura 5.14 para o mesmo carregamento utilizado anteriormente (carregamento último e de serviço uniformemente distribuídos ao longo de toda a viga de 237,4kN/m e 120kN/m, respectivamente). Dessa figura observa-se que a área de armadura e as dimensões do perfil I, com exceção da espessura da alma, são iguais à seção de Dall'Asta e Zona (2004) e que a seção de concreto apresenta área total de 225.000mm², enquanto que a seção de concreto de Dall'Asta e Zona apresenta área de 575.000mm². Dessa forma, percebe-se que o algoritmo de otimização partiu de uma seção qualquer dada na Figura 5.13 com seção de concreto de área de 484.000mm² e convergiu para uma seção com área 54% menor que a seção de partida e 61% menor que a seção de Dall'Asta e Zona. A espessura da alma não convergiu para 15mm (valor da seção de Dall'Asta e Zona) porque para a alma com altura de 1600mm, a restrição de esbeltez não permite uma espessura de 15mm, sendo o menor valor, considerando precisão de mm, dado por 16mm (valor esse obtido pelo algoritmo).

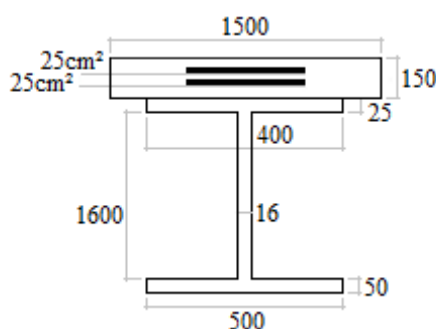


Figura 5.14 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Figura 5.15 a seguir são ilustradas as variações das restrições referentes aos carregamentos últimos e de serviço, esbeltez da mesa e alma, em relação ao número de iterações. Observa-se dessa figura, que a seção de partida apresenta uma folga de 106%, 83%,

35%, e 25%, respectivamente, em relação à verificação quanto ao carregamento último, carregamento de serviço, esbeltez da mesa inferior e esbeltez da alma.

A partir da Figura 5.15 pode-se verificar que para a flecha limite estabelecida e o carregamento de serviço considerado, a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, já que a seção otimizada apresenta uma folga de 53% em relação ao estado limite de serviço e não apresenta folga para a verificação ao estado limite último. Observa-se dessa figura que a seção de partida apresenta folga em relação a todas as restrições e a seção otimizada reduz para zero as folgas em relação as restrições de esbeltez da alma e estado limite último.

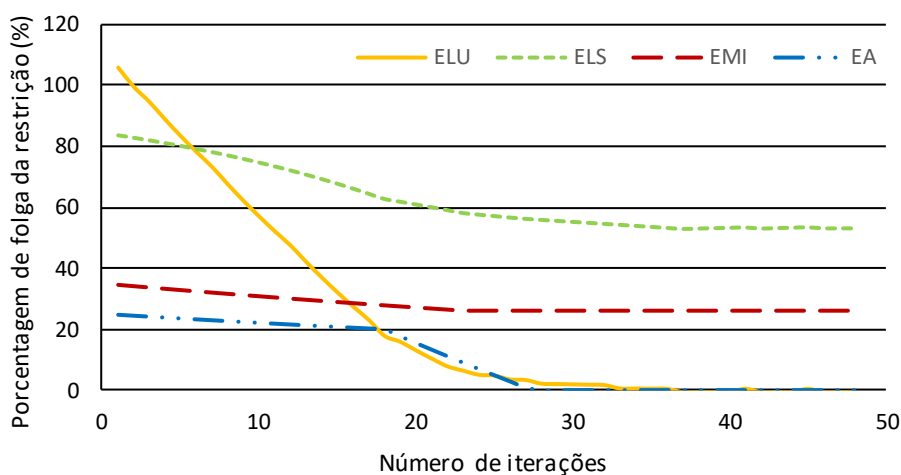


Figura 5.15 - Variação das restrições no processo de otimização (laje de concreto)

5.2. Exemplo 2

Salari e Spacone (2001) também analisaram a capacidade de carga de uma viga mista aço-concreto com interação parcial ilustrada na Figura 5.16 (dimensões da seção transversal em mm). Na análise numérica, os autores utilizaram um elemento finito de barra com dez graus de liberdade capaz de simular a não linearidade física dos materiais. As relações constitutivas dos materiais usadas por Salari e Spacone (2001) são mostradas na Figura 5.17.

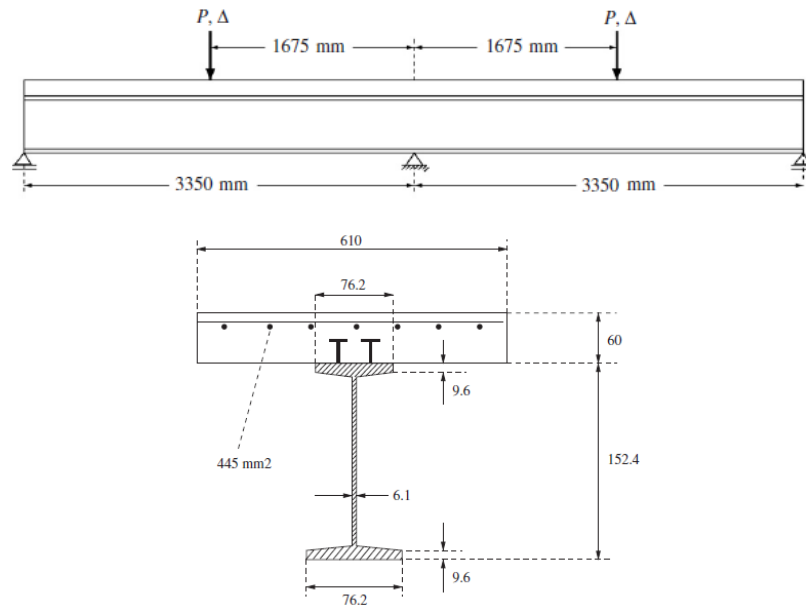


Figura 5.16 - Viga mista com interação parcial: viga contínua e seção transversal
 Fonte: Silva e Souza (2007)

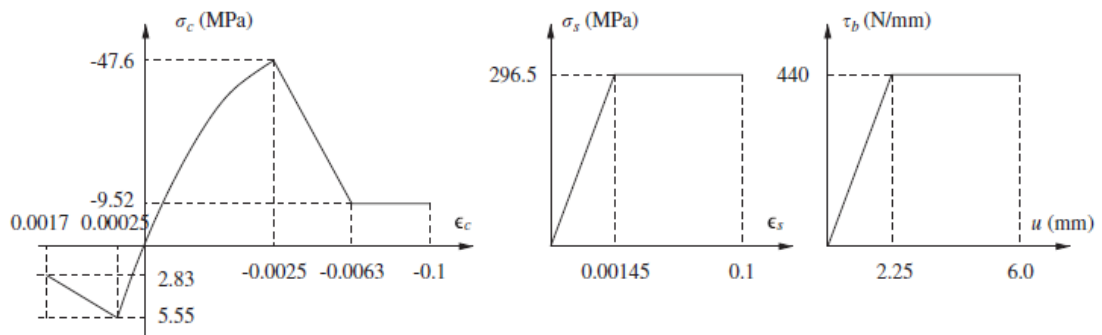


Figura 5.17 - Leis constitutivas utilizadas por Salari e Spacone (2001): concreto, aço (perfil e barras de reforço) e conexão da interface respectivamente
 Fonte: Silva e Souza (2007)

O exemplo da Figura 5.16 também foi analisado por Silva e Souza (2007). Os resultados numéricos obtidos por Salari e Spacone (2001) e Silva e Souza (2007) são mostrados na Figura 5.18 a seguir, onde encontram-se representadas as curvas que relacionam o carregamento aplicado P ao deslocamento vertical Δ da viga analisada neste exemplo.

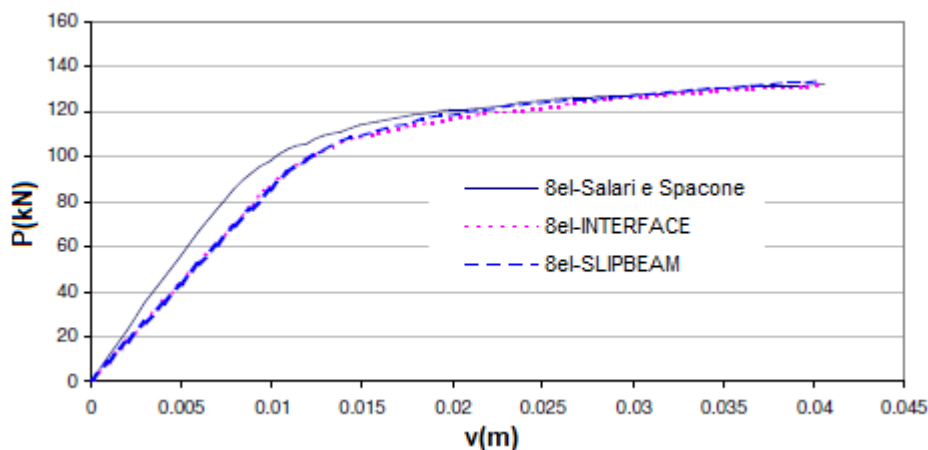


Figura 5.18 - Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista
 Fonte: adaptada de Silva (2006)

Pode-se observar da Figura 5.18 que o carregamento concentrado máximo suportado pela viga mista analisada é de 132,3kN, aplicado no meio do vão da viga mista. Assim como no exemplo 1, esse valor será utilizado neste exemplo como carregamento solicitante em uma viga mista contínua com as mesmas configurações da viga mostrada na Figura 5.16, para a qual o usuário definirá uma seção inicial qualquer e o algoritmo de otimização fornecerá uma viga mista otimizada, validando sua aplicação.

São mostradas na Figura 5.19 as curvas tensão-deformação dos materiais e a curva força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento da conexão deformável para análise numérica, considerando as não linearidades físicas dos materiais. Ao comparar as curvas utilizadas pelos autores (Figura 5.17) com as curvas utilizadas por Silva (2006), percebe-se que os limites de tensão e deformação são os mesmos, porém as curvas da Figura 5.18 são aproximações polinomiais das curvas utilizadas por Salari e Spacone (2001), isso porque os autores não disponibilizaram as expressões analíticas das relações tensão-deformação.

Na simulação por elementos finitos da viga mista da Figura 5.16 foram utilizados 8 elementos de viga para simular a viga de concreto, 8 elementos de viga para simular a viga de aço e 8 elementos de interface que ligam os elementos de viga e simulam a conexão deformável.

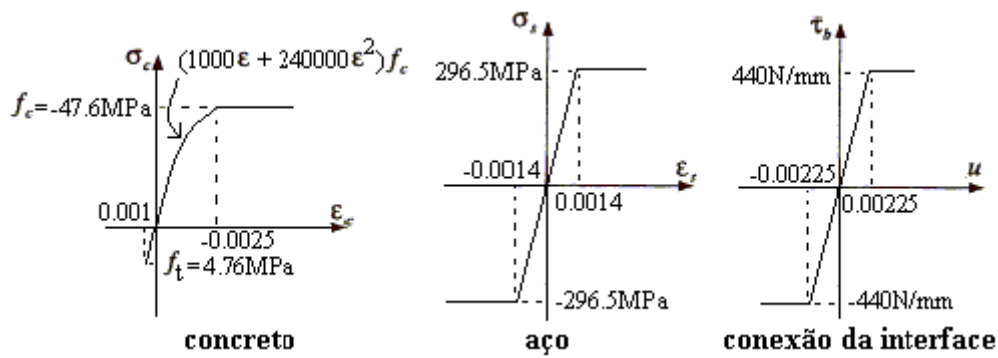


Figura 5.19 - Leis constitutivas utilizadas neste exemplo

Fonte: Silva (2006)

5.2.1. Otimizando o perfil I de aço

Da mesma forma que no exemplo anterior, este também verificará a redução que se consegue obter no perfil I de aço da seção de Salari e Spacone (2001). Assim, será forçado que as variáveis referentes à seção da laje de concreto e da área da armadura apresentem valores finais iguais ao da seção da Figura 5.16 (A_{s1} com área de 445 mm^2 e A_{s2} igual a 0 , b com largura de 610 mm e h com espessura de 60 mm). Para isso, neste exemplo será definido no arquivo de entrada um custo baixo para o concreto e armadura e um custo alto para o aço, em conjunto com valores limites superiores das dimensões da seção de concreto e da armadura iguais aos valores das dimensões da seção da Figura 5.16. Dessa forma, na busca do custo mínimo, o algoritmo tende a reduzir mais significativamente o perfil de aço chegando a um ponto em que ele começa a aumentar as dimensões de concreto e armadura para continuar reduzindo o perfil de aço, sendo que o aumento da laje mais armadura é cessado quando atingem as dimensões limites (restrições laterais) definidas, e a partir daí apenas as variáveis do perfil de aço são alteradas.

É mostrada na Figura 5.20 a seção inicial fornecida pelo usuário que deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites também inseridas no arquivo de entrada. A seção alterada pelo algoritmo para atender as exigências referentes aos carregamentos e esbeltez é apresentada na Figura 5.21, sendo esta seção o ponto de partida do método de otimização nesse exemplo.

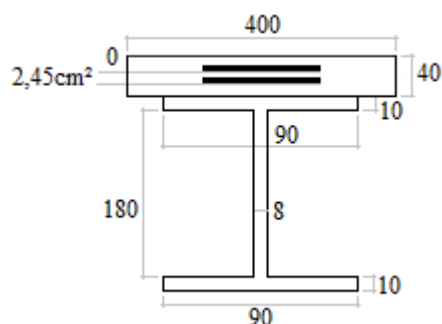


Figura 5.20 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm)

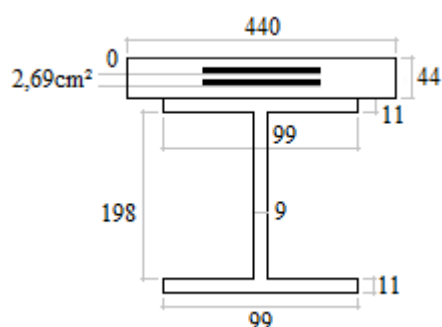


Figura 5.21 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.3 são apresentados os valores limites definidos para as variáveis de projeto que servirão como barreira para as mesmas (restrições laterais), inseridos no arquivo de entrada pelo usuário. Como já mencionado, os custos foram fornecidos forçando as variáveis referentes à seção de concreto (b e h) e à armadura (A_{s1} e A_{s2}) convergirem para seus valores limites superiores.

Tabela 5.3 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm^2)

| Variáveis | b | h | b_f | t_f | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 200 | 10 | 40 | 2 | 80 | 2 | 0 | 0 |
| Limite superior | 610 | 60 | 1000 | 100 | 2000 | 100 | 4,4 | 0 |

Na atribuição dos valores discretos, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário foram de 10mm para as dimensões b_f e b_w e de 1,0mm para as dimensões t_f e t_w . Assim, as espessuras serão valores discretos com precisão de mm, entre o limite inferior e superior de cada variável descritos na Tabela 5.3.

O algoritmo implementado irá fornecer uma seção de concreto armado com dimensões e armaduras iguais à seção de Salari e Spacone (2001), ver Figura 5.16, sendo que para a seção de aço, será fornecido o menor perfil que atenda a todas as restrições de projeto. Para a restrição

referente ao carregamento último foi considerado uma carga concentrada no meio do vão da viga de 132,3 kN (Figura 5.21), que é o carregamento limite obtido por Salari e Spacone (2001), e para o carregamento de serviço foi considerado o valor de 70kN para uma carga concentrada no meio do vão da viga, que é um carregamento aproximadamente igual a metade do carregamento obtido através de uma combinação última das ações.

A resposta obtida neste exemplo, considerando perfil I simétrico, é mostrada na Figura 5.22. Como já esperado, a seção de concreto armado é igual a seção de Salari e Spacone (2001) e igual aos valores limites superiores dessas variáveis inseridos pelo usuário e apresentados na Tabela 5.3. O perfil I simétrico apresenta uma área total de 1.140mm², enquanto que o perfil de Salari e Spacone (2001) apresenta área de 2.390mm². Pode-se notar que o algoritmo de otimização partiu de uma seção inicial dada na Figura 5.21 com área de 3.960mm² e convergiu para um perfil de área 71,2% menor que a seção de partida e 52,3% menor em relação à seção dos autores.

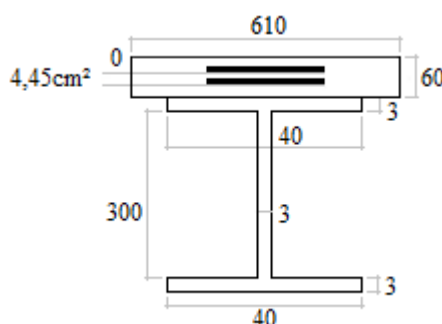


Figura 5.22 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

A Figura 5.23 a seguir ilustra as variações das restrições referentes aos carregamentos último e de serviço, esbeltez da mesa e alma, em relação ao número de iterações. Assim como no exemplo anterior, nesta figura, ELU faz referência a restrição dada pelo carregamento último, ELS faz referência a restrição dada pelo carregamento de serviço, EM faz referência a restrição de esbeltez da mesa e EA restrição de esbeltez da alma. Pode-se observar que a seção de partida apresenta uma folga de 122%, 73%, 6%, e 67% em relação à verificação quanto ao carregamento último, carregamento de serviço, esbeltez da mesa e esbeltez da alma, respectivamente.

Observando a Figura 5.23, nota-se que a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, visto que, em relação ao estado limite de serviço, a seção otimizada apresenta uma folga de 54% e nenhuma folga em relação ao estado limite último. Nota-se também que a esbeltez da alma apresenta bastante folga no

início das iterações finalizando sem folga e a esbeltez da mesa, apresenta uma pequena folga durante todo o processo iterativo.

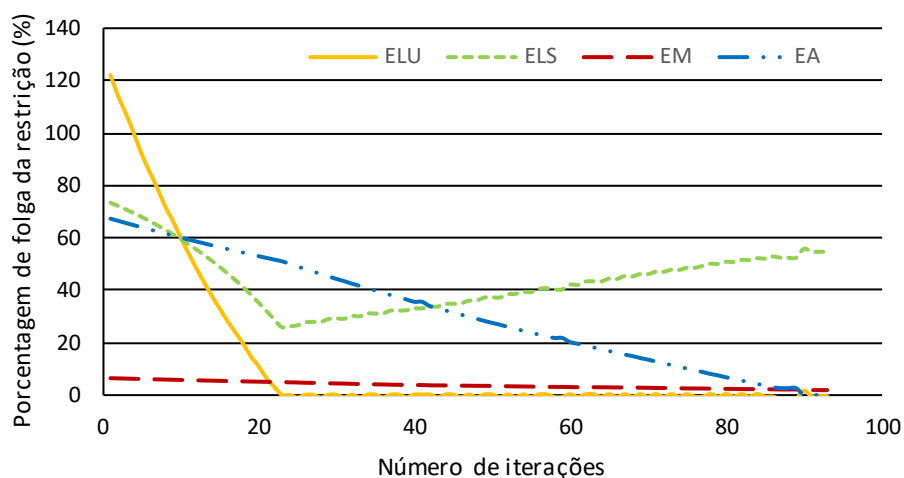


Figura 5.23 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)

As mesmas análises feitas para o perfil I duplamente simétrico foram realizadas para o caso não simétrico e são apresentadas a seguir.

A Figura 5.24 mostra a resposta para a seção otimizada não simétrica e pode-se observar que a seção de concreto armado é igual a seção de Salari e Spacone (2001), como deveria ser, e que o perfil I não simétrico apresenta área total de 1.140mm^2 . Da mesma forma que a seção simétrica, a seção inicial fornecida pelo usuário está representada na Figura 5.20 e o algoritmo de otimização que partiu da seção dada pela Figura 5.21, convergiu para um perfil de área 71,2% menor que a seção de partida e 52,3% menor que a seção dos autores.

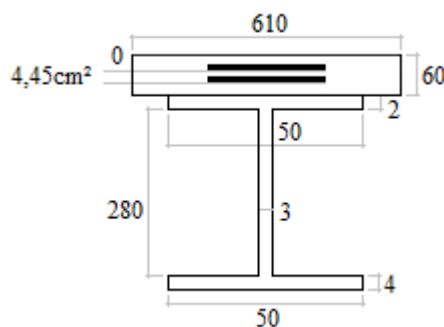


Figura 5.24 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

A Figura 5.25 é análoga a Figura 5.23 que faz referência a análise das variações das restrições considerando perfil simétrico. A única diferença, como no exemplo anterior e pelo

mesmo motivo, é a legenda do gráfico da Figura 5.25 onde EM foi trocado por EMI que se refere a restrição de esbeltez da mesa inferior. As mesmas considerações feitas para análise simétrica referentes ao gráfico da Figura 5.23 são válidas para o gráfico da Figura 5.25 para análise não simétrica.

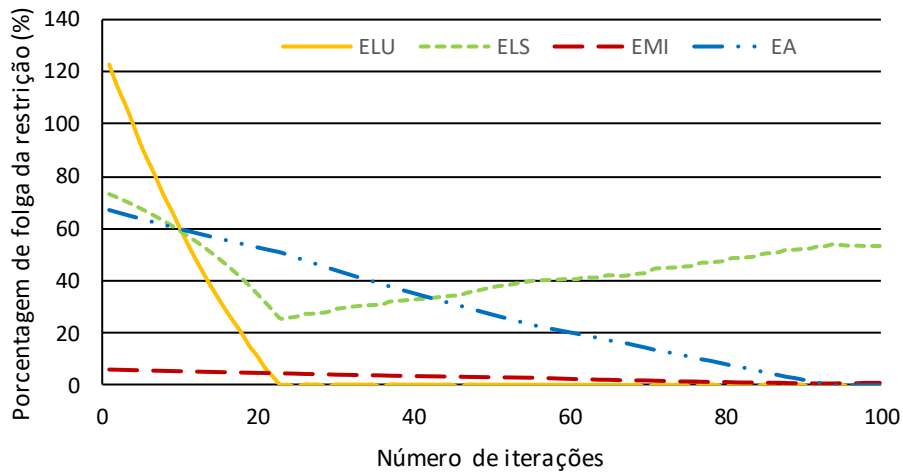


Figura 5.25 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)

Nota-se que os gráficos das Figuras 5.23, referente a análise para perfil simétrico e 5.25, referente a análise para perfil não simétrico são semelhantes, diferenciando-se apenas pelo número de iterações.

Na Figura 5.26 é apresentada a variação da área do perfil de aço da seção mista durante as iterações do método de programação sequencial linear implementado nesse trabalho. Do gráfico desta figura, observa-se que em todo processo iterativo, a área do perfil simétrico é igual a área do perfil não simétrico diferenciando apenas no final do processo onde o perfil não simétrico consegue um pouco mais de redução da seção do perfil. Outra observação é a taxa de redução da área do perfil que é maior no início e tende para zero no final do processo.

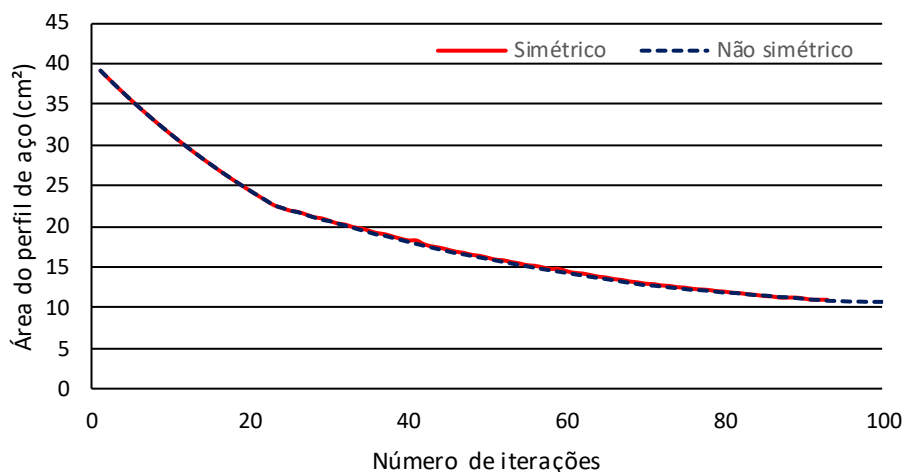


Figura 5.26 - Variação da área de aço na seção mista durante o processo de otimização

5.2.2. Otimizando a laje de concreto

No subitem anterior foi definida uma seção inicial qualquer pelo usuário e o algoritmo de otimização forneceu uma seção com as dimensões da laje de concreto armado igual à seção de Salari e Spacone (2001) e otimizou a seção do perfil I de aço (simétrico e não simétrico). No exemplo a seguir, seguem as mesmas características do exemplo do subitem anterior, porém agora será definida uma seção inicial qualquer e o algoritmo de otimização fornecerá uma seção de perfil I de aço simétrico igual à seção dos autores e otimizará a seção da laje de concreto armado.

A seção inicial fornecida pelo usuário é mostrada na Figura 5.27. Como nos exemplos anteriores, essa seção deve satisfazer apenas às exigências das dimensões limites. Neste exemplo, a seção fornecida pelo usuário atende a todas as restrições de projeto, assim a mesma também é a seção de partida para o algoritmo de otimização.

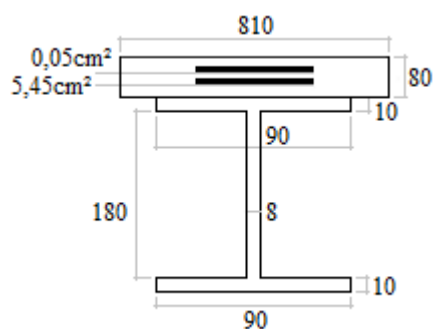


Figura 5.27 - Seção definida pelo usuário e seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.4 são apresentados os valores limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto no arquivo de entrada. Como já mencionado, esses valores servirão como barreira para as variáveis de projeto (restrições laterais), lembrando que os custos foram fornecidos forçando as variáveis referentes ao perfil de aço (b_f , t_f , b_w e t_w) e armadura (A_{s1} e A_{s2}) convergirem para seus valores limites inferiores.

Tabela 5.4 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm^2)

| Variáveis | b | h | b_f | t_f | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 100 | 40 | 76,2 | 9,6 | 133,2 | 6,1 | 4,4 | 0 |
| Limite superior | 2000 | 250 | 1000 | 100 | 2000 | 100 | 5,4 | 0,01 |

Na atribuição dos valores discretos, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário foram de 10mm para a dimensão b , 5 mm para h e 0,1mm para as dimensões b_f , t_f , b_w e t_w . Dessa forma, a altura da laje de concreto será um valor discreto com precisão de 5mm entre o limite inferior e superior dados na Tabela 5.4, ou seja, um valor discreto da lista 40, 45, 50, ..., 240, 245, 250mm.

Na Figura 5.28 é mostrada a resposta obtida para esse exemplo. Dessa figura observa-se que a armadura e as dimensões do perfil I são iguais à seção de Salari e Spacone (2001) como previsto e a seção de concreto apresenta área total de 20.250mm^2 , enquanto que a laje de concreto da seção de Salari e Spacone apresenta área de 36.600mm^2 . Assim, nota-se que o algoritmo de otimização partiu de uma seção qualquer dada na Figura 5.27, com área de 64.800mm^2 e convergiu para uma seção de área 68,8% menor que a seção de partida e 44,6% menor que a seção de Salari e Spacone.

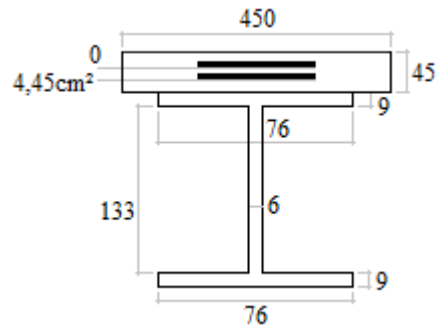


Figura 5.28 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Observa-se da Figura 5.29 que a seção de partida apresenta uma folga de 37%, 71%, 5%, e 61%, respectivamente, em relação à verificação quanto ao carregamento último, carregamento de serviço, esbeltez da mesa inferior e esbeltez da alma. Verifica-se dessa mesma figura que para a flecha limite estabelecida e o carregamento de serviço considerado, iguais aos anteriores onde se utilizou a seção de Salari e Spacone, a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, já que a seção otimizada apresenta uma folga de 28% em relação ao estado limite de serviço e não apresenta folga para a verificação quanto ao estado limite último.

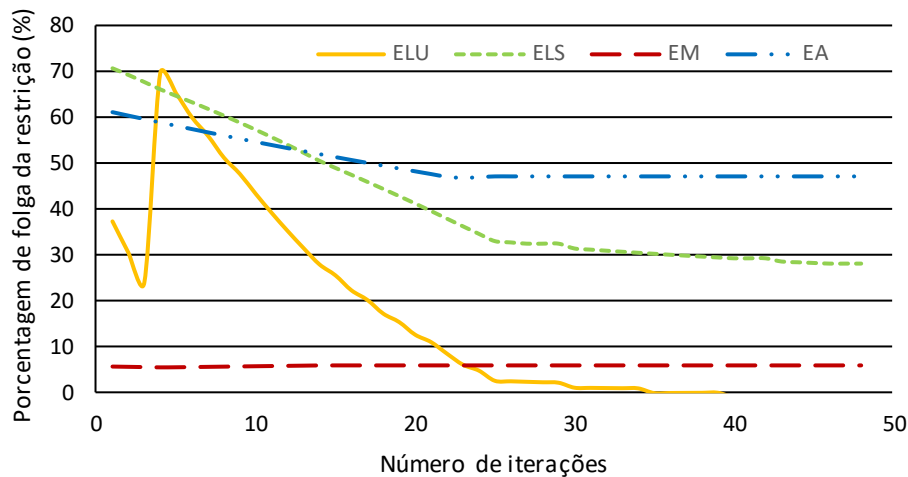


Figura 5.29 - Variação das restrições no processo de otimização (laje de concreto)

5.3. Exemplo 3

O piso da Figura 5.30 a seguir é formado por uma laje de concreto C20 apoiada em três vigas de aço MR350 ($f_y = 350\text{MPa}$), as quais são simplesmente apoiadas em suas extremidades. Para a definição do carregamento último e de serviço atuantes nas vigas será considerado um

carregamento variável acidental de 2kN/m^2 (piso de escritório), um carregamento permanente de peso próprio da laje mais revestimento de $3,8\text{kN/m}^2$ e um carregamento permanente por metro linear de viga de $0,8\text{kN/m}$ (peso próprio do perfil I de aço). É considerado que a viga central pega metade da área do piso e a outra metade é igualmente dividida entre as vigas das extremidades.

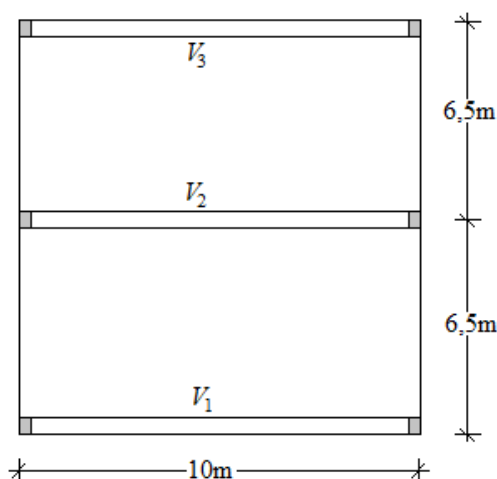


Figura 5.30 - Piso formado por laje de concreto e vigas de aço simplesmente apoiadas

Nesse exemplo serão determinadas as dimensões da viga mista formada pela laje de concreto e a viga central (viga V2 na Figura 5.30) de forma a minimizar uma função custo relacionada ao custo do concreto, aço do perfil e aço da armadura. A viga é dada por um perfil I simétrico de aço MR350, a armadura por barras de 10mm de aço CA50 e a laje de concreto C20 retangular com espessura a ser determinada e largura fixa dada pelo conceito de largura efetiva que pode ser encontrado na literatura (NBR 8800, 2008).

De acordo com os dados fornecidos nos parágrafos anteriores, na Figura 5.30 e nas condições de combinações de ações para verificação de estado limite último e de serviço da NBR 8800 (2008), chega-se aos carregamentos de cálculo último e de serviço dados por $55,16\text{kN/m}$ e $30,7\text{kN/m}$, respectivamente. A largura efetiva (b) de contribuição da laje de concreto para formar a viga mista V2 é dada pelo menor valor entre o vão dividido por 4 ou a metade das distâncias das vigas paralelas (V1 e V2). Dessa forma, tem-se $b = 2,5\text{m}$.

É considerada, nas análises numéricas, a não linearidade física representada pelas curvas tensão-deformação dos materiais e a curva força cortante versus deslizamento da conexão deformável. Nesse exemplo são usadas as curvas tensão-deformação fornecidas pela NBR6118 (2014) e NBR 8800 (2008), como é mostrado na Figura 5.31. Para a curva da conexão deformável é considerado o uso de conectores do tipo pino com cabeça de 19,1mm espaçados

a cada 20cm. O aço do conector apresenta $f_y = 345\text{MPa}$ e $f_u = 415\text{MPa}$. Para maiores detalhes de como chegar nessa curva consultar Ollgaard *et al.* (1971) e Oehlers e Coughlan (1986).

Para análise numérica, utilizou-se uma discretização da viga mista V_2 da Figura 5.30 em 4 elementos de viga para simular a viga de concreto, 4 elementos de viga para simular a viga de aço e 4 elementos de interface que ligam os elementos de viga e simulam a conexão deformável.

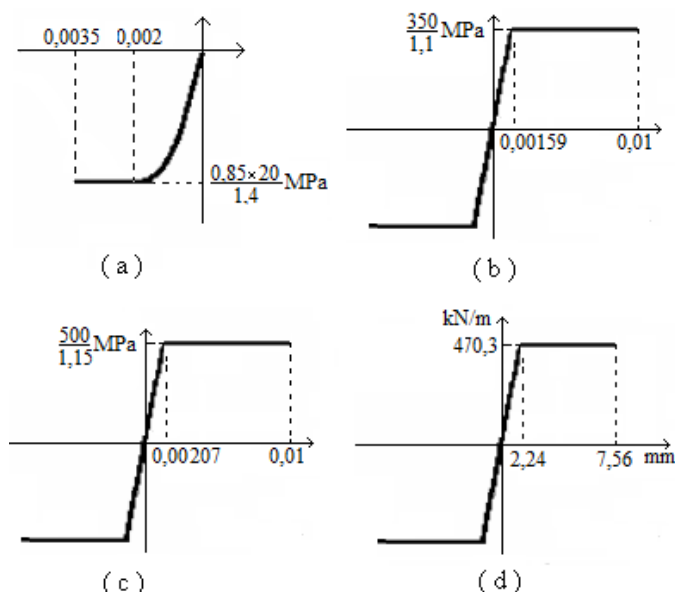


Figura 5.31 - Leis constitutivas utilizadas neste exemplo: (a) concreto, (b) aço, (c) barras de reforço e (d) conexão da interface

Na definição da função objetivo é necessário que o usuário forneça os valores de custo do concreto, aço e armadura. Nesse exemplo foram adotados os valores de $350\text{R}\$/\text{m}^3$, $31000\text{R}\$/\text{m}^3$ e $50000\text{R}\$/\text{m}^3$ para o custo dos materiais concreto, aço e armadura, respectivamente, sugeridos pelo usuário.

É apresentada na Figura 5.32 a seção inicial fornecida pelo usuário para esse exemplo, que deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites. Como nos outros exemplos, se as exigências de esbeltez das mesas e alma e as exigências referentes aos carregamentos último e de serviço não forem satisfeitas, a seção é alterada pelo algoritmo e tem suas dimensões aumentadas em um processo iterativo até que todas as restrições sejam satisfeitas tornando-se esta um ponto de partida para o procedimento de otimização. Nesse exemplo, a seção da Figura 5.32 não atendeu as exigências e a seção alterada pelo algoritmo é apresentada na Figura 5.33.

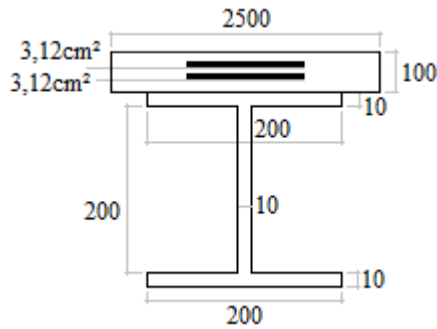


Figura 5.32 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm)

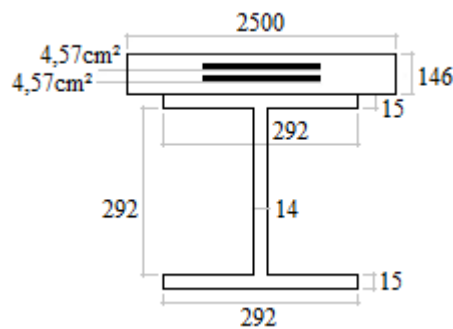


Figura 5.33 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.5 a seguir são apresentados os valores limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto (valores que servirão como barreira para estas variáveis). Observa-se dessa tabela que a variável b tem uma pequena variabilidade e que qualquer que for o seu valor dentro dessa variabilidade, a dimensão final atribuída será o valor de 2,5m. Isso porque no processo de transformação dessa variável contínua em um valor discreto, será utilizada uma variação de 50mm. Para as outras variáveis, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário são de 5mm para h , 10mm para b_f e b_w e de 1,0mm para as dimensões de t_f e t_w .

Tabela 5.5 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm²)

| Variáveis | b | h | b_f | t_f | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 2460 | 70 | 50 | 20 | 200 | 2 | 2,49 | 2,49 |
| Limite superior | 2500 | 250 | 1000 | 100 | 2000 | 100 | 20 | 20 |

Nesse exemplo, o algoritmo implementado nesse trabalho, irá fornecer uma seção com largura da laje de concreto (b) igual a 2,5m e as demais dimensões serão definidas dentro dos limites especificados de forma a minimizar a função objetivo relacionada ao custo. A resposta obtida desse exemplo, considerando perfil I simétrico, é mostrada na Figura 5.34.

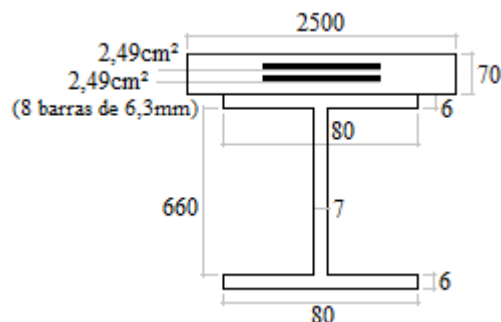


Figura 5.34 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Verifica-se da seção mostrada na Figura 5.34 que a seção otimizada apresenta a largura da laje de concreto de 2,5m, como se desejava, já que esse valor é fixo sendo dado pela largura de contribuição da laje de concreto do piso analisado. A seção também apresenta os valores limites mínimos para a espessura da laje de concreto (h) e para a armadura (A_{s1} e A_{s2}).

Na Figura 5.35 a seguir são ilustradas as variações das restrições referentes aos carregamentos últimos e de serviço, esbelteza da mesa e alma, em relação ao número de iterações. Observa-se dessa figura que a seção de partida apresenta uma folga de 35%, 9%, 0%, e 109%, respectivamente, em relação à verificação quanto ao carregamento último, carregamento de serviço, esbelteza da mesa e esbelteza da alma.

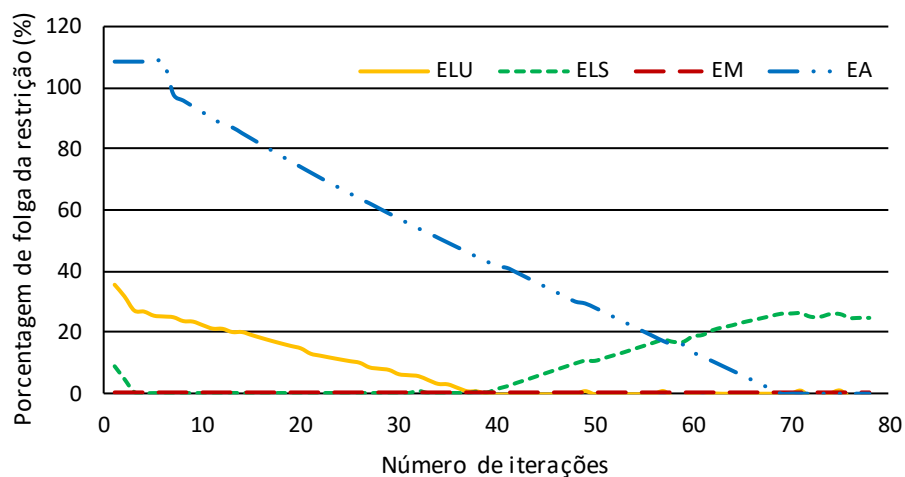


Figura 5.35 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)

Verifica-se da Figura 5.35 que a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, já que a seção otimizada apresenta uma folga de 25% em relação ao estado limite de serviço e não apresenta folga para a verificação ao estado limite último. Na iteração 38 as folgas em relação aos dois estados limites

eram nulas, no entanto, a folga de 45% em relação a esbeltez da alma permitiu a continuação do método levando a uma seção com esbeltez limite da alma e 25% de folga em relação ao estado limite de serviço. Já a esbeltez da mesa apresenta-se sem folga desde a seção de partida. Isso ocorre devido ao fato da seção fornecida pelo usuário (Figura 5.32) apresentar esbeltez da mesa maior que o limite permitido, dessa forma o algoritmo alterou as dimensões da seção dada pelo usuário para definir a seção de partida (Figura 5.33) fixando esbeltez da mesa igual ao seu limite.

Na Figura 5.36 é apresentada a variação do custo por metro linear da viga com as iterações do método de programação linear sequencial implementado nesse trabalho. A seção de partida apresenta um custo de R\$586,61 enquanto que a seção otimizada apresenta um custo de R\$265,01, uma redução de 54,8%.

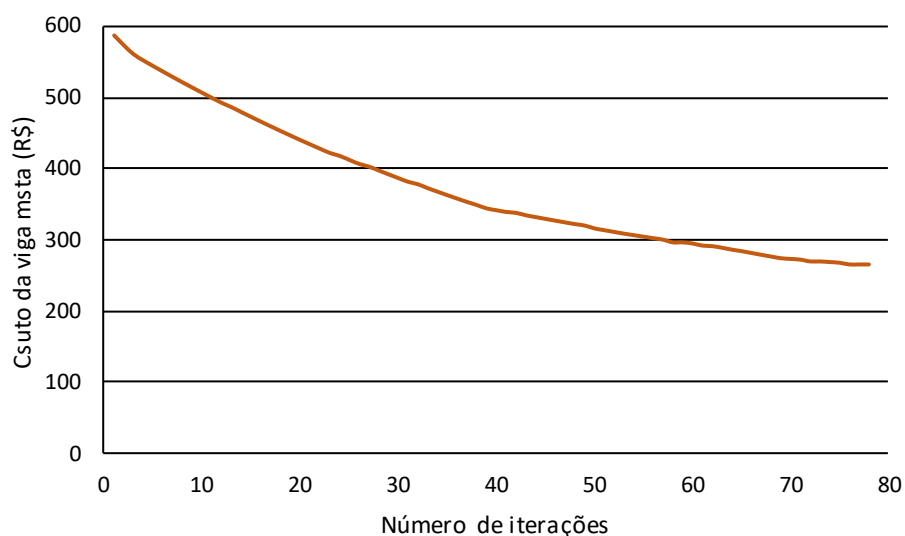


Figura 5.36 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil simétrico)

As mesmas análises feitas considerando perfil I duplamente simétrico foram realizadas considerando perfil I não simétrico e são apresentadas a seguir. A seção definida pelo usuário é a mesma do exemplo anterior (Figura 5.32). Como essa seção não satisfaz as exigências de todas as restrições para o caso não simétrico, o algoritmo alterou-a definindo a seção da figura 5.37 a seguir, e esta é o ponto de partida para o procedimento de otimização.

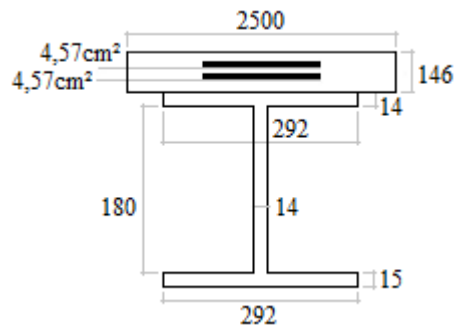


Figura 5.37 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.6 a seguir são apresentados os valores limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto (valores que servirão como barreira para as variáveis de projeto). O que difere da tabela 5.5 do exemplo anterior é o acréscimo das variáveis de projeto com a separação das duas mesas (b_{fi} , t_{fi} , b_{fs} e t_{fs}), no entanto os limites superior e inferior são os mesmos.

Tabela 5.6 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm²)

| Variáveis | b | h | b_{fi} | t_{fi} | b_{fs} | t_{fs} | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|----------|----------|----------|----------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 2460 | 70 | 50 | 2 | 50 | 2 | 200 | 2 | 2,49 | 2,49 |
| Limite superior | 2500 | 250 | 100 | 100 | 100 | 100 | 2000 | 100 | 20 | 20 |

A seção não simétrica otimizada pelo algoritmo é apresentada na Figura 5.38. Verifica-se dessa figura que a mesa superior é menor que a mesa inferior, o que é justificado devido a viga mista estar submetida apenas a momentos positivos. Deve-se lembrar que o critério de esbeltez só se aplica a mesa inferior, uma vez que a mesa superior está rigidamente associada a laje de concreto evitando problemas associados a flambagem.

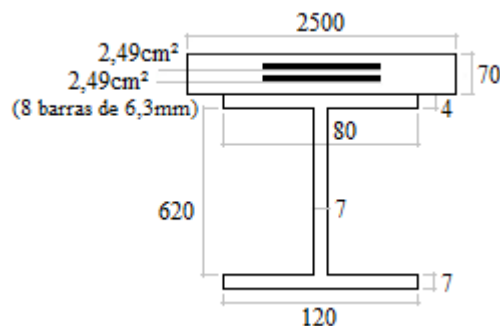


Figura 5.38 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Figura 5.39 a seguir são ilustradas as variações das restrições referentes aos carregamentos últimos e de serviço, esbeltez da mesa e alma, em relação ao número de

iterações. Observa-se que o comportamento é muito parecido com o exemplo anterior onde considera-se o perfil I simétrico.

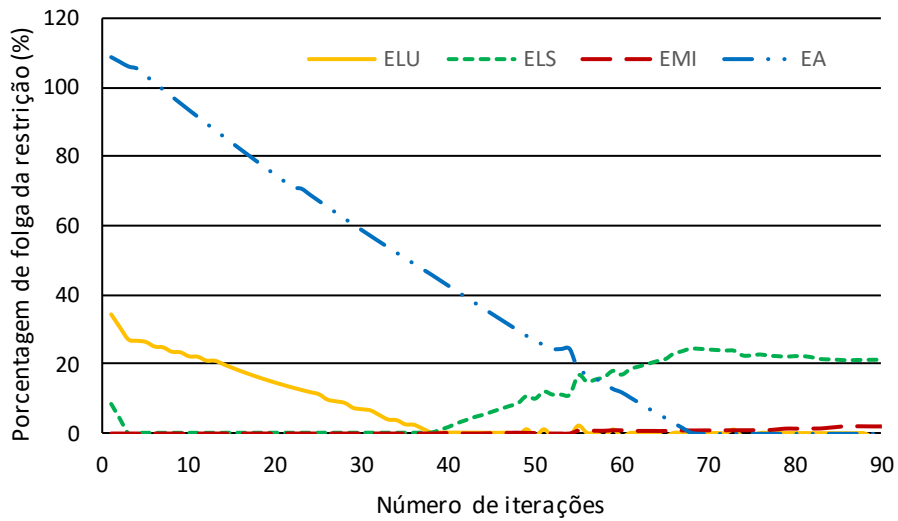


Figura 5.39 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)

A curva da variação do custo por metro linear da viga com as iterações é muito semelhante ao caso perfil I simétrico e é ilustrada na figura 5.40. A seção de partida apresenta um custo de R\$579,05 enquanto que a seção otimizada apresenta um custo de R\$251,12, uma redução de 56,6%. Já em comparação com o perfil simétrico tem-se uma redução de 5,2%.

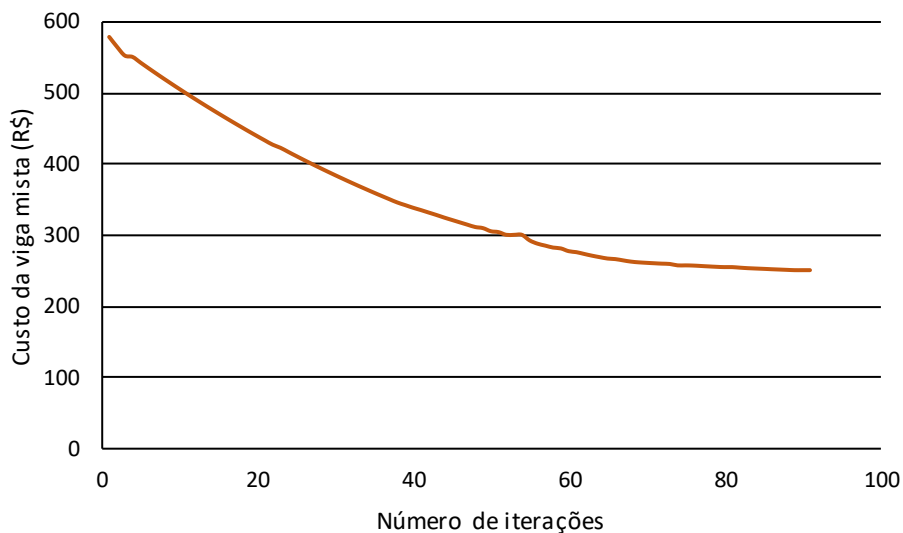


Figura 5.40 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil não simétrico)

5.4. Exemplo 4

Nesse exemplo é analisada uma viga mista contínua sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, como mostrada na Figura 5.41. É considerado que a viga mista seja formada por uma laje de concreto C20 ligada a um perfil de aço MR350 ($f_y = 350\text{MPa}$). Os parâmetros dos materiais, conexão e carregamento, são os mesmos do exemplo 3.

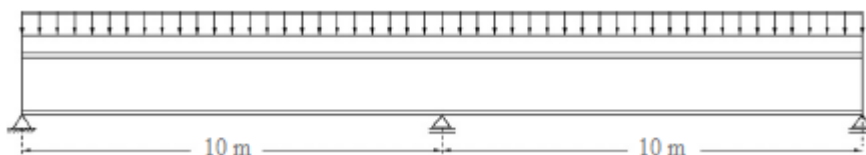


Figura 5.41 - Viga mista contínua com interação parcial

De forma a minimizar uma função custo relacionada com o custo do concreto, aço do perfil e aço da armadura, nesse exemplo são determinadas as dimensões da viga mista, ou seja, diferente do exemplo 3, a largura b da laje de concreto pode variar dentro de um intervalo significativo dado a seguir.

Assim como no exemplo 3, a viga mista da Figura 5.41 foi discretizada em 4 elementos de viga para simular a viga de concreto, 4 elementos de viga para simular a viga de aço e 4 elementos de interface que ligam os elementos de viga e simulam a conexão deformável. Na definição da função objetivo, foram adotados os valores dos custos dos materiais de $350\text{R}\$/\text{m}^3$, $31.000\text{R}\$/\text{m}^3$, e $50.000\text{R}\$/\text{m}^3$, respectivamente, para o concreto, perfil e armadura, sugeridos pelo usuário.

A seção inicial fornecida pelo usuário que deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites é apresentada na Figura 5.42. Neste exemplo, a seção inicial inserida pelo usuário não satisfaz as exigências de esbeltez da mesa e alma e as exigências referentes aos carregamentos último e de serviço, logo a seção alterada pelo algoritmo é mostrada na Figura 5.43. Para essa seção todas as restrições são satisfeitas sendo mantidas durante todo o processo de otimização.

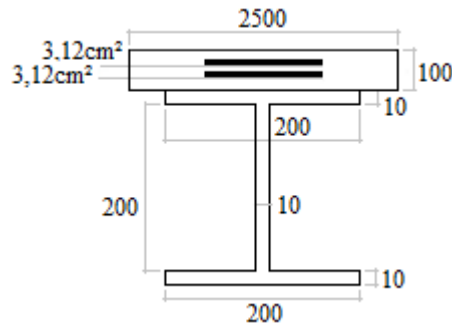


Figura 5.42 - Seção definida pelo usuário (dimensões em mm)

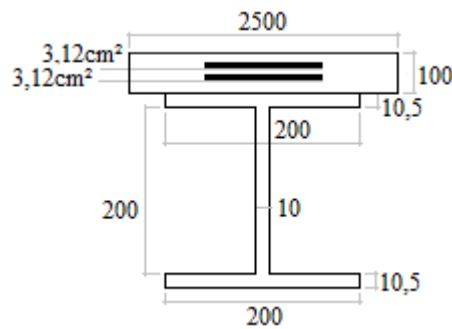


Figura 5.43 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.7 a seguir são apresentados os valores que servirão como barreira para as variáveis de projeto, ou seja, são os limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto. Assim como exemplo 3, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário são de 50mm para b , 5mm para h , 10mm para b_f e b_w e de 1mm para as dimensões de t_f e t_w .

Tabela 5.7 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm²)

| Variáveis | b | h | b_f | t_f | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 200 | 70 | 50 | 2 | 100 | 2 | 0,9 | 0,9 |
| Limite superior | 4000 | 400 | 1000 | 100 | 2000 | 100 | 20 | 20 |

Na Figura 5.44 é apresentada a seção otimizada obtida neste exemplo, considerando perfil I simétrico.

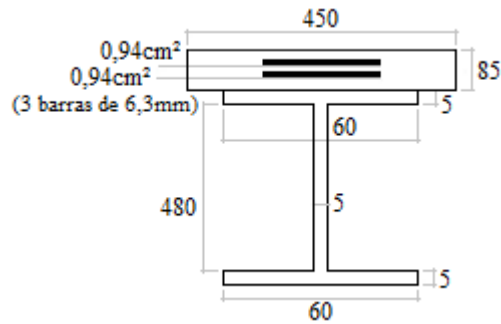


Figura 5.44 - Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Figura 5.45 a seguir são ilustradas as variações das restrições referentes aos carregamentos últimos e de serviço, referentes à esbeltez da mesa e alma, em relação ao número de iterações. Dessa figura, nota-se que a seção de partida apresenta uma folga de 33%, 22%, 0% e 74%, em relação à verificação quanto ao estado limite último e de serviço, esbeltez da mesa e da alma, respectivamente.

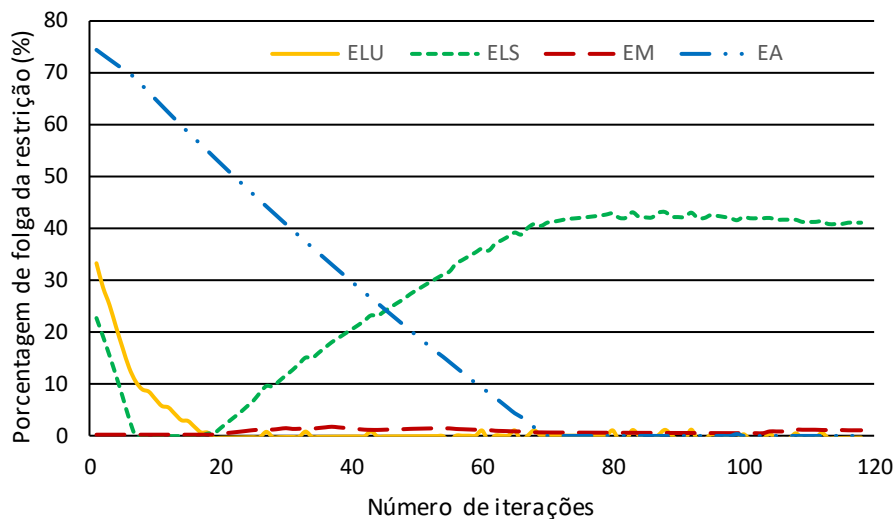


Figura 5.45 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)

Da Figura 5.45, observa-se que a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, visto que a seção otimizada apresenta uma folga de 41% em relação ao estado limite de serviço e não apresenta folga para a verificação ao estado limite último. Nas iterações 17, 18 e 19 as folgas em relação aos dois estados limites eram nulas, no entanto, as folgas de 56%, 54% e 53% (nas iterações mencionadas respectivamente) em relação a esbeltez da alma, permitiu a continuação do método levando a uma seção com esbeltez limite da alma e 41% de folga em relação ao estado limite de serviço. A esbeltez da mesa apresenta-se sem folga desde a seção de partida, como no

exemplo para viga simplesmente apoiada, isso se deve ao fato da seção fornecida pelo usuário (Figura 5.42) apresentar esbeltez da mesa maior que o limite permitido.

É apresentada na Figura 5.46 a variação do custo por metro linear da viga com as iterações do método de programação linear sequencial implementado nesse trabalho. A seção de partida apresenta um custo de R\$310,82 enquanto que a seção otimizada apresenta um custo de R\$112,35, uma redução de 63,8%.

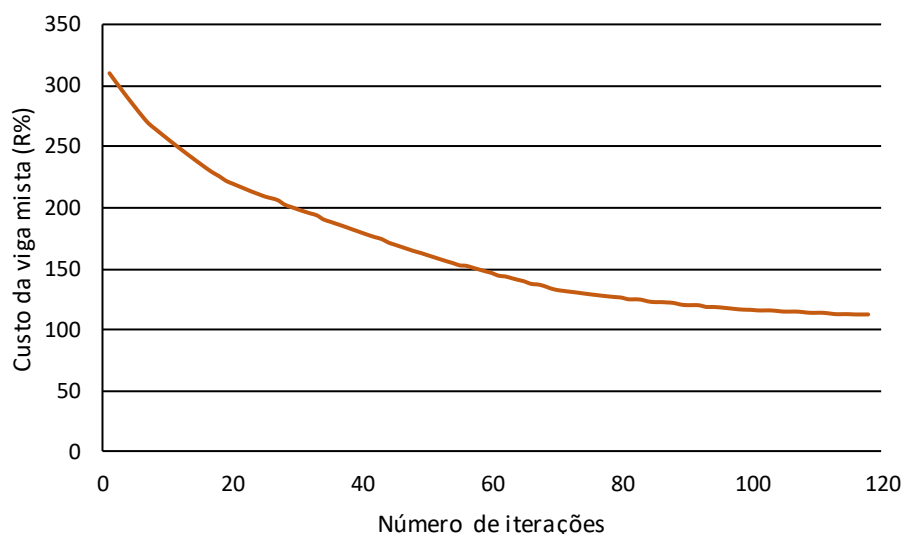


Figura 5.46 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil simétrico)

As mesmas análises feitas considerando o perfil I duplamente simétrico foram também realizadas considerando perfil I não simétrico. A seção inicial definida pelo usuário no arquivo de entrada é a mesma do exemplo anterior (Figura 5.42). Essa seção não satisfaz as exigências de todas as restrições, assim a mesma é alterada e teve suas dimensões aumentadas pelo algoritmo definindo a seção de partida para o procedimento de otimização, mostrada na Figura 5.47 a seguir.

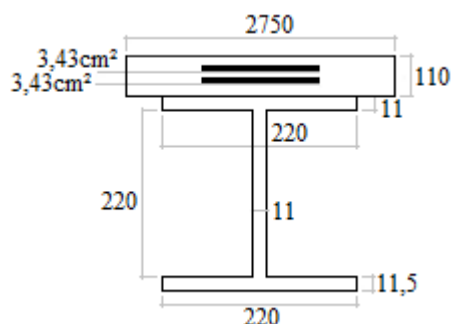


Figura 5.47 - Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Tabela 5.8 a seguir são apresentados os valores limites definidos pelo usuário no arquivo de entrada para as variáveis de projeto. Assim como no exemplo 3, a Tabela 5.6 do exemplo que considera perfil I simétrico difere dessa que segue, apenas na separação das duas mesas (b_{fi} , t_{fi} , b_{fs} e t_{fs}), no entanto os limites superior e inferior são os mesmos.

Tabela 5.8 - Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm^2)

| Variáveis | b | h | b_{fi} | t_{fi} | b_{fs} | t_{fs} | b_w | t_w | A_{s1} | A_{s2} |
|-----------------|------|-----|----------|----------|----------|----------|-------|-------|----------|----------|
| Limite inferior | 2000 | 70 | 50 | 2 | 50 | 2 | 100 | 2 | 0,9 | 0,9 |
| Limite superior | 4000 | 400 | 1000 | 100 | 1000 | 100 | 2000 | 100 | 20 | 20 |

A seção mista com perfil de aço I não simétrico otimizada pelo algoritmo é apresentada na Figura 5.48. Verifica-se dessa figura que a mesa superior é menor que a mesa inferior, no entanto a redução foi bem menor que aquela obtida do exemplo 3. Isso porque, nesse exemplo a viga mista está submetida a momentos negativos e positivos.

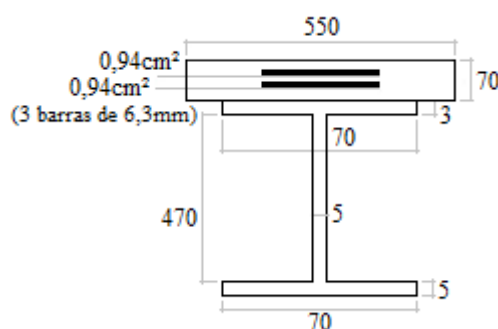


Figura 5.48 - Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

Na Figura 5.49 são ilustradas as variações das restrições referentes aos estados limites últimos e de serviço, esbeltez da mesa e alma, em relação ao número de iterações, como foi feito para os exemplos anteriores. Pode-se notar que a seção de partida apresenta uma folga de 69%, 44%, 0% e 81% respectivamente em relação à verificação quanto ao estado limite último e de serviço, esbeltez da mesa e da alma.

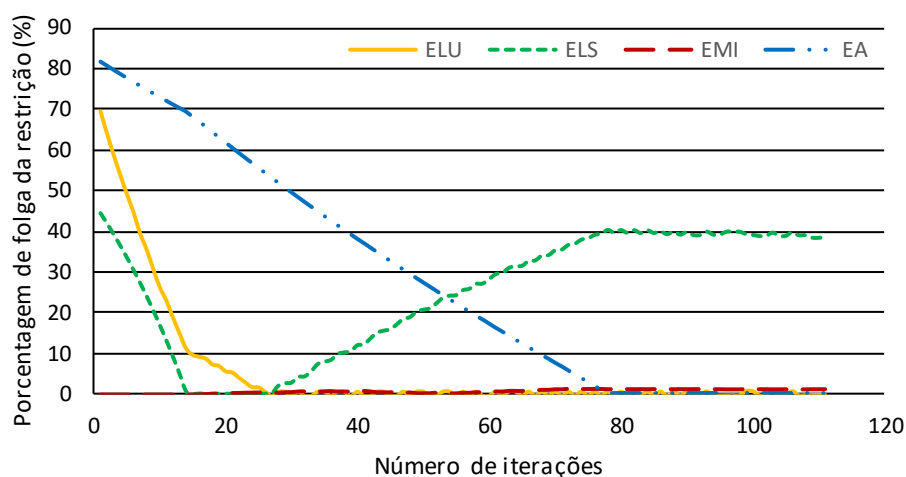


Figura 5.49 - Variação das restrições no processo de otimização (perfil não simétrico)

Observa-se da Figura 5.49 que a verificação quanto ao estado limite último é mais uma vez determinante quando comparada ao estado limite de serviço, onde a seção otimizada apresenta uma folga de 37% em relação ao estado limite de serviço e não apresenta folga alguma para a verificação ao estado limite último. Nas iterações 26 e 27 as folgas em relação aos dois estados limites são nulas, mas a folga em relação à esbeltez da alma permitiu a continuação do método levando a uma seção com esbeltez limite da alma e grande folga em relação ao estado limite de serviço.

A curva da variação do custo por metro linear da viga com o número de iterações é mostrada na Figura 5.50. A seção de partida apresenta um custo de R\$368,96 enquanto que a seção otimizada apresenta um custo de R\$109,61, uma redução de 70,3%. Já em comparação com o perfil simétrico tem-se uma redução de 2,4%.

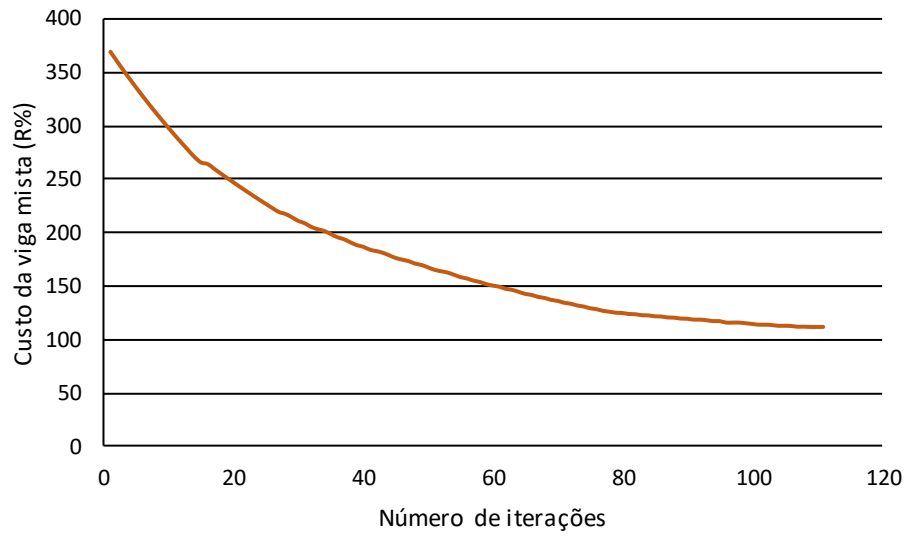


Figura 5.50 - Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil não simétrico)

Considerações Finais

6.1. Síntese do Trabalho

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional para análise de problemas de otimização não linear com restrições. O algoritmo implementado utiliza o método de programação linear sequencial em conjunto com o método Simplex para o dimensionamento otimizado de vigas mistas aço-concreto considerando os estados limites últimos de flexão e estado limite de serviço de deformação excessiva.

No primeiro capítulo, faz-se uma introdução expondo conceitos relevantes sobre vigas mistas e um breve histórico com a origem da otimização. Além disso, também é apresentado nesse capítulo as motivações e os objetivos que levaram ao desenvolvimento do presente trabalho, assim como a metodologia utilizada para elaboração desta pesquisa.

No segundo capítulo foi feita uma revisão bibliográfica sobre diversos trabalhos encontrados na literatura por diferentes autores sobre otimização e dimensionamento de estruturas, incluindo pesquisas não só relacionadas à utilização do método Simplex, mas também algumas que utilizaram outros métodos para otimização. Nota-se que existe um número elevado de pesquisadores trabalhando com otimização, nas mais diversas áreas ou mesmo dentro da engenharia estrutural, onde visam encontrar a solução mais econômica em menor tempo. Também no capítulo 2, de forma resumida, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre trabalhos relacionados à análise numérica não linear de vigas mistas aço-concreto. Algumas das formulações desses trabalhos foram utilizadas no algoritmo implementado no presente trabalho. Nesse capítulo pode-se encontrar também, uma revisão das considerações normativas prescritas na NBR 8800 (2008) que rege o dimensionamento de vigas mistas.

No capítulo seguinte, são apresentadas, de forma resumida, as formulações usadas para o desenvolvimento do elemento unidimensional de barra e do elemento de interface que foram utilizados para a análise não linear de vigas mistas aço-concreto com interação parcial. Esses elementos são empregados porque é necessária a realização da análise estrutural das vigas mistas estudadas, para a verificação das restrições de projeto referentes ao dimensionamento otimizado desse elemento estrutural. Como já mencionado, o elemento de interface tem como

função simular a conexão deformável na interface de contato entre a laje de concreto e o perfil de aço e ligar os elementos unidimensionais de barra que simulam o comportamento das seções acima e abaixo da interface de deslizamento.

No quarto capítulo foram apresentadas as considerações referentes ao problema estudado, bem como os conceitos para a formulação de um problema de otimização, como a função objetivo, restrições e as variáveis de projeto. Para se ter uma ótima modelagem do problema, esses conceitos devem ser definidos de maneira clara e objetiva para que seus resultados sejam satisfatórios. Em seguida, ainda no capítulo 4, para o problema de otimização não linear com restrições, são descritos os métodos de otimização aplicados nesse trabalho, que são o método de programação linear sequencial juntamente com o método Simplex, além das equações para colocar o problema analisado na forma padrão da programação linear, o ponto de partida para o método de programação linear sequencial, a descrição do algoritmo em cinco passos e por fim, a implementação computacional.

No capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de otimização de vigas mistas aço-concreto com interação parcial que validam e comprovam a eficiência do programa desenvolvido neste trabalho. Como já mencionado, não foram encontrados na literatura exemplos de dimensionamento otimizado de vigas mistas com interação parcial que servissem para comparação com este estudo, ou seja, trabalhos que consideravam apenas em sua função objetivo os custos dos materiais concreto e aço (perfil I e barras de reforços da laje de concreto), como foi feito neste trabalho. Com isso, foram analisados dois exemplos de vigas mistas com interação parcial para as quais os autores definiram o seu carregamento último (Dall'Asta e Zona (2004) e Salari e Spacone (2001)) e dessa forma, utilizando esse carregamento último como carregamento solicitante, o algoritmo implementado nesse trabalho convergiu e retornou uma seção menor e otimizada quando comparadas com as seções dos autores em questão. Além destes exemplos, também foi dimensionada de maneira otimizada uma viga simplesmente apoiada de um piso formado por uma laje de concreto C20 apoiada em três vigas de aço MR350, submetidas a carregamentos último e de serviço. E por fim, o último exemplo foi a análise de uma viga mista contínua sujeita a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda viga (último e de serviço), formada por uma laje de concreto C20 ligada a um perfil de aço MR350.

6.2. Conclusões

Esse trabalho consiste na implementação de um algoritmo para definir as dimensões do perfil de aço do tipo I simétrico ou não simétrico, das dimensões da laje de concreto retangular e da quantidade de armadura, de forma que a viga mista aço-concreto com interação parcial sujeita à flexão simples atenda às condições de projeto especificadas em normas técnicas, minimizando uma função objetivo custo definida a partir da quantidade de material e do custo desses.

O método de programação linear sequencial foi utilizado para resolver o problema não linear na determinação dos esforços resistentes na seção mista aço-concreto em relação às variáveis de projeto. Para isso, nesse método, as restrições e a função objetivo foram aproximadas por suas expansões em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem. Com isso, a partir de um ponto que atenda todas as restrições, novos pontos são determinados de forma que as restrições continuem sempre sendo atendidas e a função objetivo decresça. Nesse processo iterativo a cada passo deve-se resolver um problema de otimização linear sendo para isso utilizado nesse trabalho o método Simplex.

Com a eficiência das formulações usadas (Silva 2006, 2010), a implementação do algoritmo para a busca da seção otimizada foi devidamente comprovada a partir dos resultados observados nos exemplos apresentados no capítulo 5. Assim conclui-se que o método implementado nesse trabalho mostrou-se bastante satisfatório para a conclusão dos objetivos almejados nesta pesquisa, podendo afirmar o sucesso do algoritmo implementado.

6.3. Trabalhos Futuros

A seguir são citadas algumas ideias de trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir desta dissertação, onde espera-se que com as ferramentas desenvolvidas no presente trabalho outras pesquisas possam ser produzidas.

Utilização de outros métodos de otimização para análise do problema estudado nesse trabalho, como, por exemplo, método da programação quadrática sequencial e algoritmo genético.

Aumento do número de variáveis de projeto, como, por exemplo, o grau de conexão da viga mista relacionada com a distribuição e quantidade de conectores de cisalhamento.

Definição de novos parâmetros para a geometria da seção do perfil de aço, não limitado apenas a perfil I.

Discretização da viga mista por elementos planos de casca podendo assim avaliar efeitos de segunda ordem localizados não sendo necessária a limitação a perfis compactos.

Possibilidade do usuário inserir uma lista comercial de perfil do tipo I no arquivo de entrada, para que o algoritmo encontre, dentro desta lista, um perfil otimizado com dimensões comerciais.

Ampliação das restrições referentes aos estados limites últimos e de serviço no dimensionamento de vigas mistas aço-concreto, como, por exemplo, verificação quanto ao esforço cortante e verificação quanto ao estado limite de serviço de abertura de fissuras na laje de concreto.

Desenvolvimento de uma interface gráfica para facilitar a criação do arquivo de entrada e a visualização dos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABADI, A. S. M.; KAVEH, A. Cost optimization of a composite floor system using an improved harmony search algorithm. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, p. 664-669, 2010.
- ADELI, H.; KIM H. Cost optimization of composite floors using neural dynamics model. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 771-787, 2001.
- ANDRADE, R. F. S.; FERREIRA, C. C. M.; ABREU, R. O. A. **Dimensionamento automatizado de vigas mistas conforme a NBR 8800:2008 e a NBR 6118:2014**. IX CBPE. Rio de Janeiro, 2016.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimun design**. McGraw-Hill, 1989.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 8800**: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- BALLING, R.J.; YAO, X. Optimization of reinforced concrete frames. **Journal of Structural Engineering**, v.123, p.193-202, 1997.
- BASKAR, K.; SHANMUGAM, N. E.; THEVENDRAN, V. Finite-element analysis of steel-concrete composite plate girder. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, p. 1158-1168, 2002.
- BASTOS, E. A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos**. Dissertação de Mestrado. COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2004.
- BAZARAA, M.; SHETTY, C. **Nonlinear programming-theory and algorithms**. Second edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization**. Springer, Berlin, 2002.
- CALDAS, R. B. **Análise numérica de pilares mistos aço-concreto**. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2004.
- CASTELANI, T. **Otimização e dimensionamento de perfis formados a frio pelo método da resistência direta**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.
- CHENG, G. D. **Introdution to structural optimization: theory, methods and solution**. Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992.
- COUTINHO, K. D. **Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2006.

DALL'ASTA, A; ZONA, A. Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams. **Computer & Structures**, v. 82, p. 2117-2130, 2004.

DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. **C++ Como programar**. Bookman, 2001.

EIRAS, S.; ANDRADE, J. C. **O uso do simplex modificado como estratégia de otimização em química analítica**. Química Nova, São Paulo, 1996.

FERNANDES, W. L. **Software para análise e dimensionamento de vigas mistas aço-concreto em pontes rodoviárias**. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2008.

GUIMARÃES, L. G. S. **Disciplina orientada a objetos para análise e visualização bidimensional de modelos de elementos finitos**. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1992.

HAFTKA, R.; KAMAT, M. **Elements of structural optimization**. Martinus Nijhoff Publishers, Boston, 1985

JIANG, S. F.; ZENG, X; ZHOU, D. Novel two-node linear composite beam element with both interface slip and shear deformation into consideration: Formulation and validation. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 85, p. 110-119, 2014.

KAVEH, A.; MASSOUDI, M. S. Cost optimization of a composite floor system using ant colony system. **Transactions of Civil Engineering**, v. 36, p. 139-148, 2012.

KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Comparison between three different composite systems. **High Performance Structures and Materials II**, v. 52, p. 87-97, 2004.

KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Cost estimation, optimization and competitiveness of different composite floor systems - Part 1: Self-manufacturing cost estimation of composite and steel structures. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 62, p. 434-448, 2006a.

KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Cost estimation, optimization and competitiveness of different composite floor systems - Part 2: Optimization based competitiveness between the composite I beams, channel-section and hollow-section trusses. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 52, p. 449-462, 2006b.

KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Cost optimization of composite I beam floor system. **American Journal of Applied Sciences**, v. 5, p. 7-17, 2007.

KOTINDA, T. I. **Modelagem numérica de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas: ênfase ao estudo da interface laje-viga**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

KRAVANJA, S.; SILIH, S. The MINLP optimisation of composite I-beams. **Transactions on the Built Environment**, v. 52, p. 401-407, 2001.

- KRAVANJA, S.; SILIH, S. Optimization based comparison between composite I beams and composite trusses. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 59, p. 609-625, 2003.
- LEMES, I. J. M.; BARROS, R. C.; ROCHA, P. A. S. **Implementação de um código computacional para o Projeto de estruturas metálicas segundo as Recomendações da ABNT NBR 8800 (2008)**. XXXIV CILAMCE. Pirenópolis, 2013.
- LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Numerical modeling of externally prestressed steel–concrete composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 121, p. 229-236, 2016.
- MALITE, M. **Sobre o cálculo de vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1990.
- MARCONCIN, L. R.; MACHADO, R. D.; MARINO, M. A. Numerical modeling of steel–concrete composite beams. **Ibracon structures and materials journal**, v. 3, p. 449-476, 2010.
- MORENO, J. C. A. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: modelos para os efeitos de longa duração e protensão interna**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
- NETO, J. C. **Otimização do custo de elementos metálicos e mistos aço-concreto sob temperatura ambiente e incêndio**. Dissertação (Mestrado). COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. Second edition, Springer-Verlag, New York, 2006.
- OEHLERS, D. J.; BRADFORD, M. A. **Composite steel and concrete structural members: fundamental behaviour**. Pergamon Press, Oxford, 1995.
- OEHLERS, D. J.; BRADFORD, M. A. **Elementary behaviour of composite steel and concrete structural members**. Biddles Ltda, Woburn, 1999.
- OEHLERS, D. J.; COUGHLAN, C. G. The shear stiffness of stud shear connections in composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 6, p. 273-284, 1986.
- OLIVIERI, B. P. **Otimização do projeto de pontes protendidas pré-moldadas pelo método dos Algoritmos Genéticos**. Dissertação (Mestrado). COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2004.
- OLLGAARD, J. G.; SLUTTER, R. G.; FISHER, J. W. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete. **AISC Eng**, v. J, p. 55-64, 1971.
- PARENTE JR., E. **Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares**. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2000.

QUEIROZ, G.; PIMENTA, R. J.; MATA, L. A. C. **Elementos das estruturas mistas aço-concreto**. Ed. O Lutador, Belo Horizonte, 2001.

QUEIROZ, F. D.; VELLASCO, P. C. G. S.; NETHERCOT, D. A. Structural assessment of composite beams using the finite element method. **Proceedings of Eurosteel**, v. B, p. 49-59, 2005.

SALARI, M. K.; SPACONE, E. Finite element formulation of one-dimensional elements with bond-slip. **Engineering Structures**, v. 23, p. 815-826, 2001.

SENOUCI, A. B.; AL-ANSARI, M. S. Cost optimization of composite beams using genetic algorithms. **Advances in Engineering Software**, v. 40, p. 1112-1118, 2009.

SIAS, F. M. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.

SILVA, E. C. N. S. **Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos**. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

SILVA, A. R. **Análise numérica de vigas mistas com interação parcial**. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2006.

SILVA, A. R. **Análise numérica de elementos estruturais com interação parcial**. Tese (Doutorado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010.

SILVA, A. R., SOUZA Jr., J. B. M. Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, p. 954-964, 2007.

SILVA, A. R., SOUZA Jr., J. B. M. e NEVES, F. A. Otimização do perfil I de aço de vigas mistas de aço-concreto com interação parcial. **Mecânica Computacional**, v. 19, p. 7609-7625, 2010.

SILVA, A. R., SOUZA Jr., J. B. M. e NEVES, F. A. **Optimization of steel-concrete composite beams with partial interaction by sequential linear programming**. XXXII CILAMCE. Ouro Preto, 2011.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais**. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2009.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas elásticas 2D via MEC baseada em uma nova abordagem evolucionária**. Tese (Doutorado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.

SOMMER, R. C. **Otimização de estruturas por algoritmos genéticos submetidas a restrições de flexibilidade e flambagem**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

TAMAYO, J. L. P. **Análise numérica de vigas mistas pelo método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

VANDERPLAATS, G., 1984. **Numerical optimization technique for engineering design - with applications.** McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

VERZENHASSI, C. C. **Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade.** Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2008.

VIANNA, L. C. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos.** Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2003.