



MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
ESCOLA DE MINAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

***ANÁLISE DE PÓRTICOS DE AÇO  
SOB ALTAS TEMPERATURAS***

Valdenir de Souza Junior

Orientador: Antônio Maria Claret de Gouveia

Convênio USIMINAS/FUNDAÇÃO GORCEIX/UFOP

Ouro Preto, Setembro de 1998

S729a Souza Junior, Valdenir de  
Análise de pórticos de aço sob altas  
temperaturas / Valdenir de Souza Junior.  
-- Ouro Preto, 1998.

Dissertação (mestrado).-- Universidade  
Federal de Ouro Preto. Escola de Minas.  
Departamento de Engenharia Civil.

Área: Construções Metálicas.

Orientador: Antônio Maria Claret de  
Gouveia.


1.Estruturas metálicas. 2.Elementos  
finitos. 3.Incêndio. II Título

# ANÁLISE DE PÓRTICOS DE AÇO SOB ALTAS TEMPERATURAS

*Valdenir de Souza Junior*

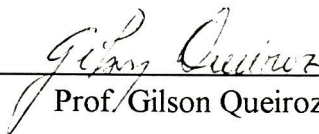
Dissertação apresentada ao corpo docente do curso de pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil.

Aprovada por:



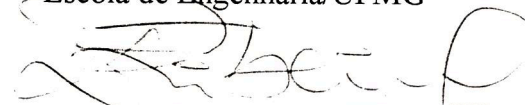
---

Prof. Antônio Maria Claret de Gouveia, D. Sc.  
Escola de Minas/UFOP  
Presidente



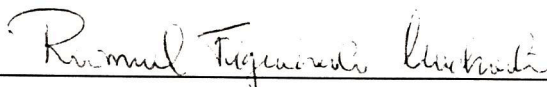
---

Prof. Gilson Queiroz, D.Sc.  
Escola de Engenharia/UFMG



---

Prof. Luiz Fernando Loureiro Ribeiro, D.Sc.  
Escola de Minas/UFOP



---

Prof. Romuel Figueiredo Machado, D.Sc.  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas/UFOP

Ouro Preto – MG, Brasil

Setembro de 1998

## Meus agradecimentos

- Ao Professor Claret, pelo incentivo, experiência e conhecimentos transmitidos, e pelo tempo que pode dispor;
- a todos os professores do DECIV, sempre dispostos a ajudar e a transmitir informações valiosas, em especial ao Professor Ricardo;
- a todos os colegas do Mestrado, pelo convivência amiga, em especial aos companheiros de turma Andréa, Roberta e Gentil;
- à Usiminas pelo apoio financeiro.

## *Resumo*

---

As desvantagens da tradicional avaliação do desempenho de estruturas de aço sob incêndio por meio de ensaios — como o alto custo envolvido, restrições devidas aos tamanhos dos fornos, variação das características dos fornos, etc. — tornam conveniente o uso de técnicas de modelagem como um método de se conduzir investigações fundamentais.

O presente trabalho é um passo inicial para o desenvolvimento de uma ferramenta de modelagem avançada. Uma formulação de análise em elementos finitos de pórticos planos sob altas temperaturas é apresentada. As matrizes de rigidez são desenvolvidas considerando-se não-linearidade física e geométrica, grandes deslocamentos, rotações moderadas e pequenas deformações elásticas. A distribuição de temperatura é uniforme através da seção transversal e ao longo do comprimento do elemento. Resultados numéricos são apresentados.

## *Abstract*

---

The disadvantages of traditional assesment of the performance of steel structures in fire by testing — like the high cost involved, restrictions due to the furnaces sizes, variability of furnaces features, etc. — make convenient the use of modelling techniques as a method of conducting fundamental investigations.

The present work is a first step to the development of a advanced modelling tool. A formulation of finite element analysis of steel plane frames under elevated temperatures is presented. The stiffness matrices are developed considering material and geometric non-linearities, large displacements, moderate rotations and elastic small strains. The temperature distribution is uniform through the cross section and along the member length. Numerical examples are given.

	Página
<b>Resumo</b> .....	ii
<b>Abstract</b> .....	iii
<b>Lista de Figuras</b> .....	vi
<b>Lista de Quadros</b> .....	viii
<b>Lista de Símbolos</b> .....	ix
<i>Capítulo 1 – INTRODUÇÃO</i> .....	1
1.1 – PRINCÍPIOS DA SEGURANÇA CONTRA INCÊNDIO.....	1
1.2 – DESEMPENHO DO AÇO SOB INCÊNDIO .....	3
1.3 – O TESTE DE INCÊNDIO PADRÃO .....	4
1.4 – OUTROS MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO .....	6
<i>Capítulo 2 – O DESENVOLVIMENTO DO MODELO</i>	
<b>EM ELEMENTOS FINITOS</b> .....	8
2.1 – ANTECEDENTES HISTÓRICOS.....	8
2.2 – PROPRIEDADES MECÂNICAS DO AÇO A ALTAS TEMPERATURAS .....	11
2.3 – MODELO DE VIGA-COLUNA .....	14
2.3.1 – Introdução .....	14
2.3.2 – Comportamento Físico do Elemento .....	14
2.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO .....	17
2.4.1 – Equações de Equilíbrio.....	18
2.4.2 – Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente.....	20
2.4.3 – Matriz de Transformação.....	22

<i>Capítulo 3 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</i> .....	24
3.1 – MÉTODOS DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES .....	24
3.1.1 – Método Incremental Puro .....	24
3.1.2 – Método Direto.....	25
3.1.3 – Método Incremental-Iterativo (Método de Newton-Raphson) .....	27
3.1.4 – Critério de Convergência.....	30
3.2. – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON A ALTAS TEMPERATURAS .....	30
3.3 – IDENTIFICAÇÃO DA FALHA ESTRUTURAL.....	31
<i>Capítulo 4 – EXEMPLOS</i> .....	33
4.1 – EXEMPLO À TEMPERATURA AMBIENTE .....	33
4.2 – VIGA BI-APOIADA COM CARREGAMENTO CONCENTRADO.....	34
4.3 – VIGA BI-APOIADA COM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO.....	35
4.4 – PÓRTICO PARCIALMENTE AQUECIDO.....	37
4.5 – PÓRTICO COM UMA VIGA E UM PILAR.....	39
<i>Capítulo 5 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES</i> .....	42
5.1 – CONCLUSÕES .....	42
5.2 – SUGESTÕES .....	42
<i>Capítulo 7 – APÊNDICE</i> .....	44
A1– MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE .....	44
A2 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS .....	46
A3 – CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE PLÁSTICA DE PÓRTICOS METÁLICOS SOB ALTAS TEMPERATURAS.....	47
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	48



# *Lista de Figuras*

---

	Página
<b>Capítulo 1</b>	
Figura 1.1 – Curva de Incêndio Padrão .....	2
Figura 1.2 – Diagrama Tensão-Deformação a temperaturas elevadas para o aço classe 43..	4
Figura 1.3 – Tempo médio para alguns tipos de seção I atingirem 550°C .....	5
Figura 1.4 – Detalhes do teste de Incêndio Padrão para vigas.....	5
Figura 1.5 – Detalhes do teste de Incêndio Padrão em pilares .....	6
<b>Capítulo 2</b>	
Figura 2.1 – Variação do módulo de elasticidade com a temperatura .....	12
Figura 2.2 – Variação da tensão de escoamento com a temperatura .....	13
Figura 2.3 – Comportamento da seção transversal.....	15
Figura 2.4 – Elemento de viga-coluna adotado .....	17
<b>Capítulo 3</b>	
Figura 3.1 – Método incremental puro .....	25
Figura 3.2 – Método direto .....	26
Figura 3.3 – Método de Newton-Raphson.....	27
Figura 3.4 – Método de Newton-Raphson modificado .....	29
Figura 3.5 – Método de Newton-Raphson a altas temperaturas .....	31
Figura 3.6 – Método de Newton-Raphson na proximidade da falha estrutural.....	32

**Capítulo 4**

Figura 4.1 – Exemplo 1: Portico com cinco elementos.....	33
Figura 4.2 – Comparação dos deslocamentos obtidos à temperatura ambiente .....	34
Figura 4.3 – Exemplo 2: Viga bi-apoiada com carregamento concentrado.....	34
Figura 4.4 – Resultados obtidos para o exemplo 2.....	35
Figura 4.5 – Exemplo 3: Viga bi-apoiada com carregamento distribuído.....	35
Figura 4.6 – Resultados obtidos para o exemplo 3.....	36
Figura 4.7 – Exemplo 4: Pórtico parcialmente aquecido.....	38
Figura 4.8 – Resultados obtidos para o exemplo 4.....	38
Figura 4.9 – Exemplo 5: Pórtico com uma viga e um pilar.....	39
Figura 4.10 – Resultados obtidos para o exemplo 5.....	40
Figura 4.11 – Análise elasto-plástica de primeira ordem do pórtico .....	40

## *Lista de Quadros*

---

	Página
<b>Capítulo 2</b>	
Quadro 2.1 – Evolução dos modelos analíticos.....	11
<b>Capítulo 3</b>	
Quadro 3.1 – Algoritmo do Método de Newton-Raphson .....	28

## *Lista de Símbolos*

---

(Somente a notação de uso genérico é apresentada aqui. Símbolos utilizados uma vez e que são de natureza mais específica são explanados quando aparecem no texto)

- $A$  = área da seção transversal;
- $\{D\}$  = vetor de deslocamentos da estrutura;
- $\{\Delta D\}$  = vetor de incremento nos deslocamentos da estrutura;
- $\{d\}$  = vetor de deslocamentos do elemento de viga-coluna;
- $d$  = denota diferenciação ordinária; altura da seção;
- $E, E_{20}$  = módulo de elasticidade e módulo de elasticidade à temperatura ambiente, respectivamente;
- $\{F_{ref}\}$  = vetor de forças de referência;
- $\{F_{ext}\}$  = vetor de forças externas, aplicado na estrutura;
- $\{F_{int}\}$  = vetor de forças internas da estrutura;
- $\{\Delta F\}$  = vetor de incremento de carregamento;
- $f_y, f_{y20}$  = tensão de escoamento e tensão de escoamento à temperatura ambiente, respectivamente;
- $\{g\}$  = vetor de forças desbalanceadas;
- $I$  = momento de inércia da seção;
- $[K_T]$  = matriz de rigidez tangente da estrutura;
- $[k_T]$  = matriz de rigidez tangente do elemento;
- $L$  = comprimento do elemento;
- $M$  = momento aplicado;
- $M_p$  = momento de plastificação;
- $[N_u]$  = matriz de funções de forma para os deslocamentos axiais;
- $[N_v]$  = matriz de funções de forma para os deslocamentos transversais e rotações;
- $NINC$  = número total de incrementos;

- $P$  = força normal no elemento;  
 $T$  = temperatura;  
 $TOL$  = tolerância admitida;  
 $u, u_0$  = deslocamentos horizontais, de um ponto qualquer ao longo da seção transversal e de um ponto situado no seu eixo centróide, respectivamente;  
 $v, v_0$  = deslocamentos horizontais, de um ponto qualquer ao longo da seção transversal e de um ponto situado no seu eixo centróide, respectivamente;  
 $V$  = volume do elemento;  
 $W$  = trabalho virtual total;  
 $W_{ext}$  = trabalho virtual das forças externas;  
 $W_{int}$  = trabalho virtual das forças internas;  
 $X, Y$  = coordenadas globais;  
 $x, y$  = coordenadas locais;  
 $\alpha$  = inclinação da extremidade do elemento;  
 $\Delta$  = prefixando um termo denota incremento;  
 $\delta$  = prefixando um termo denota uma variação virtual;  
 $\partial$  = denota diferenciação parcial;  
 $\epsilon_{xx}$  = deformação na direção  $x$ ;  
 $\theta$  = rotação da seção, no ponto nodal;  
 $\lambda$  = variável auxiliar; fator multiplicador do carregamento;  
 $\Delta\lambda$  = incremento no fator multiplicador do carregamento;  
 $\sigma$  = tensão normal, na direção  $x$  ;  
 $\phi$  = ângulo de inclinação do eixo local em relação ao eixo global;  
 $\{\psi\}$  = vetor de forças desbalanceadas, nas equações (2.27) a (2.32);  
 $\{ \}$  = denota um vetor;  
 $[ \ ]$  = denota uma matriz;  
 $\| \|$  = denota a norma euclidiana de um vetor;  
 $'$  = denota diferenciação em relação a um argumento único.

## INTRODUÇÃO

### 1.1 PRINCÍPIOS DA SEGURANÇA CONTRA INCÊNDIO

Por combustão entende-se uma série de reações químicas muito rápidas entre combustível e oxigênio, produzindo luz e calor. Para que ocorra a combustão é essencial a presença de três ingredientes, que formarão o chamado triângulo do fogo: oxigênio, combustível e calor.

Com o aumento de temperatura, o material combustível aquece-se e libera vapores que poderão entrar em ignição com a aplicação de uma chama externa ou não, caso em que a combustão é denominada espontânea. Portanto não é o combustível em si que se queima, mas os vapores desprendidos por este.

Os mecanismos básicos de transferência de calor são três: **condução**, que ocorre basicamente entre sólidos, e apesar de ocorrer em líquidos e gases, é normalmente mascarada pela convecção; **convecção**, que envolve o movimento do meio e portanto está restrita a líquidos e gases; e **radiação**, que não depende de um meio intervindo entre a fonte de calor e o receptor.

Os incêndios dentro de espaços fechados têm comportamento e taxas de queima diferentes quando comparados com incêndios em espaços abertos. A presença do teto em um incêndio tem o efeito imediato de aumentar o calor radiante retornado para a superfície do combustível e a presença das paredes irá aumentar esse efeito, desde que haja ventilação suficiente. Em um incêndio natural em um compartimento distinguem-se três fases. Na primeira há uma gradual propagação do incêndio com importantes gradientes de temperatura no compartimento. Na segunda há um rápido desenvolvimento do incêndio e as partes mais altas do compartimento são sujeitas a uma súbita ignição chamada “*flashover*” ou inflamação generalizada. Após o *flashover*, a temperatura dos gases aumenta rapidamente, de cerca de 500 °C até um valor de pico que pode exceder 1000 °C. Nessa fase a temperatura praticamente não varia no interior do compartimento. Após essa fase, tem-se uma terceira, onde a temperatura cai, com a diminuição do combustível disponível.

O desenvolvimento dessas fases em um incêndio natural é muito difícil de se prever, sendo muito sensível a uma série de fatores comentados a seguir, e por conveniência, adota-se uma curva de **incêndio padrão**, definida pela ISO-834 (ISO, 1992), conforme Figura 1.1.

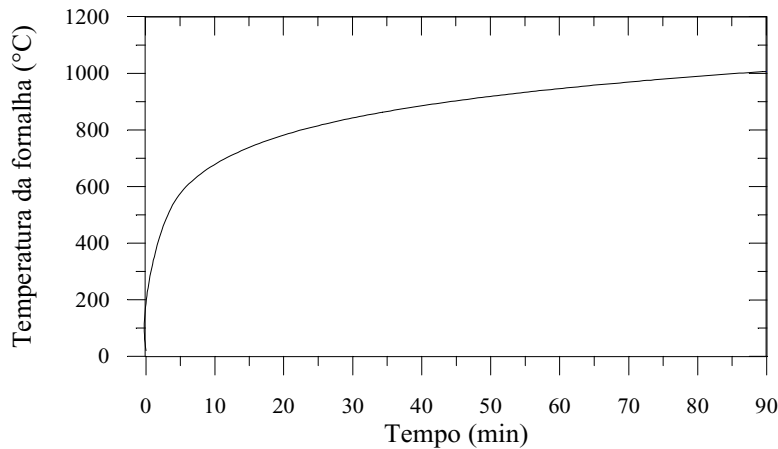


Figura 1.1 Curva de Incêndio Padrão

A severidade de um incêndio (intensidade e duração do mesmo) é governada pela quantidade de material combustível no compartimento (carregamento de incêndio), condições de ventilação, tamanho e geometria do compartimento, tipo de material e área de superfície do combustível.

O **carregamento de incêndio** é definida como sendo a soma de todo o material combustível de um compartimento em MJ ou equivalente em kg de madeira (1 kg de madeira=17,3 MJ). Pode ser expressa pela densidade de carregamento de incêndio,  $q_f$  (MJ/m<sup>2</sup>), razão entre o carregamento total de incêndio e a área do andar, ou  $q_t$  o carregamento total de incêndio dividida pela área circundante do compartimento.

A taxa de aumento da temperatura depende do montante de oxigênio disponível para a combustão e da dissipação de calor através das paredes e aberturas. A influência da disponibilidade de oxigênio é dada pelo **fator de ventilação**, definido como:

$$v = A_w \cdot \sqrt{h} / A_t \quad (m^{1/2}) \quad (1.1)$$

onde:  $A_w$  = área total de aberturas (m<sup>2</sup>)

$h$  = altura média das aberturas (m)

$A_t$  = área circundante total do compartimento (m<sup>2</sup>)

Quando as aberturas do compartimento são pequenas, comparadas com as dimensões globais, o incêndio pode ser limitado pelo montante de oxigênio que pode ser provido, sendo chamado de incêndio controlado pela ventilação. Grandes aberturas resultam em picos de temperatura elevados (o pico maior é obtido para um fator de ventilação específico) e numa fase de resfriamento mais rápida. Se as aberturas suprem mais oxigênio que o necessário para o incêndio, este é chamado incêndio controlado pelo combustível. Nesse caso o carregamento de incêndio e sua disposição são fatores decisivos para a severidade do incêndio.

Apesar do calor gerado em um incêndio poder levar a estrutura ao colapso, a principal causa de mortes em um incêndio é a fumaça. Fumaça é a denominação dos produtos sólidos e gasosos resultantes da combustão. É constituída por gases desprendidos pela degeneração química do combustível, juntamente com partes queimadas ou não do mesmo.

Os objetivos da segurança contra incêndio podem ser resumidos em dois: a proteção da vida e a proteção da propriedade. Evacuação segura, provida por meios de detecção e alarme eficientes, rotas de escape facilmente atingidas, instalações que evitem a geração e o acúmulo de fumaça, podem ser classificadas como medidas de proteção à vida. Como fatores influenciando à segurança da propriedade pode-se citar como medidas de proteção passiva o uso de proteção estrutural e a compartimentação; como medidas de proteção ativa, o uso de chuveiros automáticos.

## **1.2 DESEMPENHO DO AÇO SOB INCÊNDIO**

Enquanto alguns materiais como o concreto e a alvenaria podem ter suas propriedades comprometidas a altas temperaturas, o aço mantém sua integridade básica. Contudo, sob condições de incêndio, todos os materiais utilizados em uma edificação perdem a rigidez e a resistência, além de se expandirem. A perda da resistência do aço pode ser representada pela variação das curvas tensão-deformação com a temperatura. A Figura 1.2 mostra esta variação para o aço classe 43 (British Steel), com taxa de aquecimento de 10°C/min (Bailey, 1995).

Numa análise simplificada, considera-se que a perda da reserva de resistência do aço é atingida a 550°C. A adição de elementos de liga como cromo e molibdênio podem manter a tensão de escoamento requerida até valores acima de 600°C e não superiores à 700°C.

Apesar de outros materiais também perderem resistência da mesma forma, a leveza do aço, juntamente com sua boa condutibilidade térmica o levam a atingir níveis de temperatura elevadas mais rapidamente. Daí, a abordagem tradicional para assegurar o bom desempenho do aço sob condições de incêndio é revesti-lo de algum material isolante.



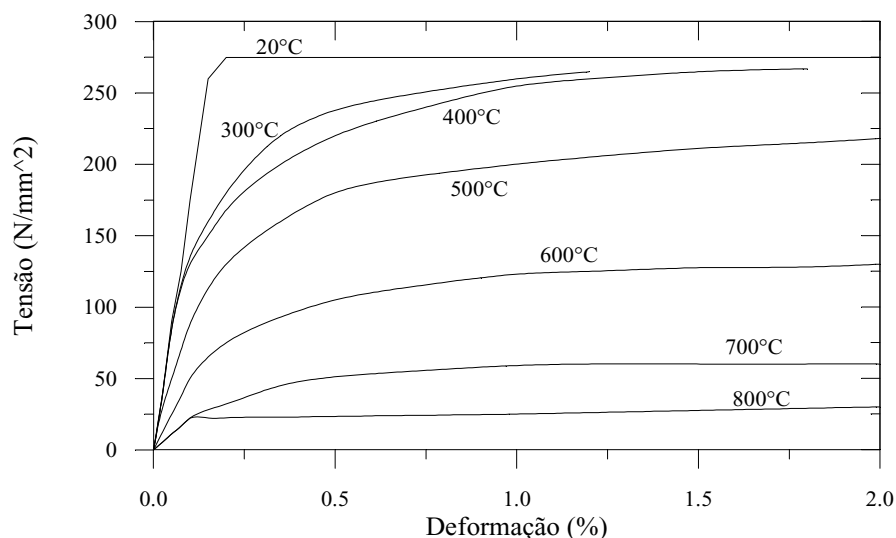


Figura 1.2 - Diagrama tensão-deformação a temperaturas elevadas para o aço classe 43 (Bailey, 1995).

O grau de isolamento depende do tempo de resistência ao fogo requerido pelas normas de incêndio. Esse período de tempo, especificado como ½, 1, 2, 3 ou 4 horas, não é o tempo de escape dos ocupantes nem o tempo de resistência da estrutura, mas uma simples forma de classificar diferentes categorias de edificações.

O isolamento do aço irá depender, dentre outros fatores, das dimensões da peça onde será aplicado. A taxa de aumento de temperatura de um elemento de aço depende da sua massa e da área de sua superfície, além do tipo de proteção empregada. Essa taxa de aquecimento para determinada seção é dada por seu **fator de massividade**, que para um elemento desprotegido é dada pela razão entre a área de sua superfície por unidade de comprimento exposta às chamas ( $A_m$ ) e sua massa por unidade de comprimento (que é diretamente relacionada com seu volume por unidade de comprimento,  $V_m$ ). Assim, barras com baixo fator de massividade irão aquecer-se a taxas mais baixas, conforme Figura 1.3.

### 1.3 O ENSAIO DE INCÊNDIO PADRÃO

A maneira tradicional de se avaliar a resistência ao fogo de um elemento estrutural é por meio do ensaio de incêndio padrão. O princípio do ensaio consiste em submeter os componentes, partes da estrutura ou toda a estrutura ao incêndio padrão de acordo com a ISO-834 ou norma equivalente no país e determinar o tempo até que determinada condição de falha seja atingida. Para elementos de aço protegidos com material isolante, considera-se que estes são resistentes até que se alcance a temperatura de 550 °C no aço. Para elementos de aço parcialmente protegidos ou sem proteção, podem-se adotar outros critérios de falha, devendo-se nesse caso, além de medir as temperaturas, monitorar seu desempenho estrutural.

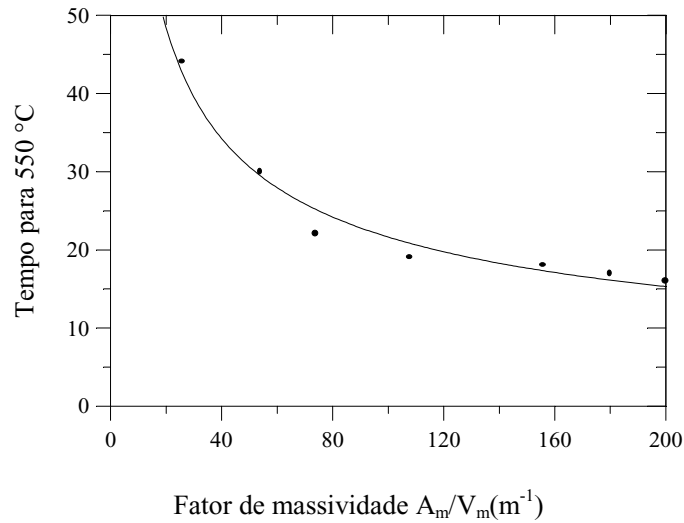


Figura 1.3 - Tempo médio para alguns tipos de de seção I atingirem 550°C (IISI, 1993).

Para o ensaio de vigas, usa-se um elemento simplesmente apoiado de 4m de comprimento com carregamento distribuída em todo o vão, conforme Figura 1.4. A temperatura é aumentada até que a taxa de deflexão atinja  $L^2/9000d$ , em mm/min, (sendo  $L$  o comprimento do vão e  $d$  a altura da seção) para deflexões de até  $L/30$ , ou até que se atinja a deflexão máxima de  $L/20$ .

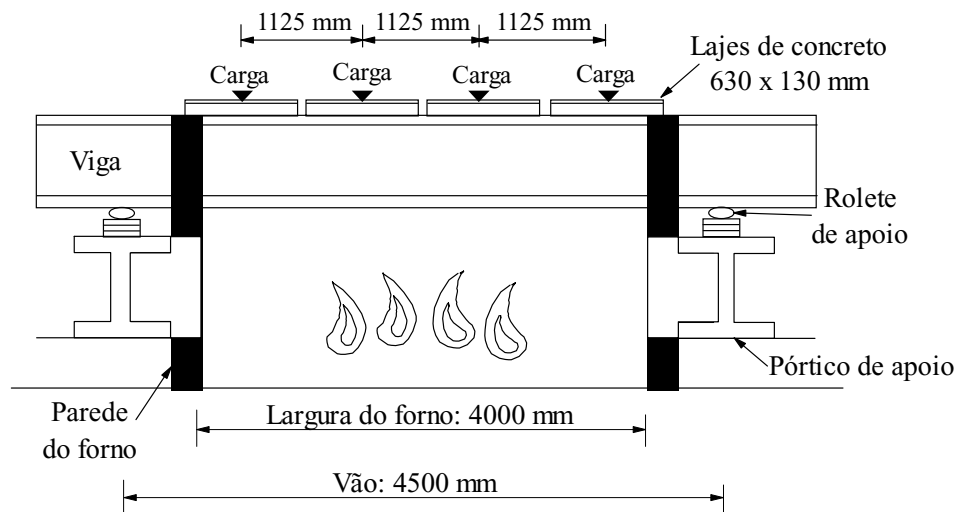


Figura 1.4 - Detalhes do ensaio de Incêndio Padrão para vigas

O ensaio de pilares envolve o uso de um elemento de 3m de comprimento, com as extremidades engastadas em blocos de concreto, conforme Figura 1.5. O ensaio é conduzido até que, após a expansão inicial, a barra volte ao seu comprimento original, devido a perda de rigidez.

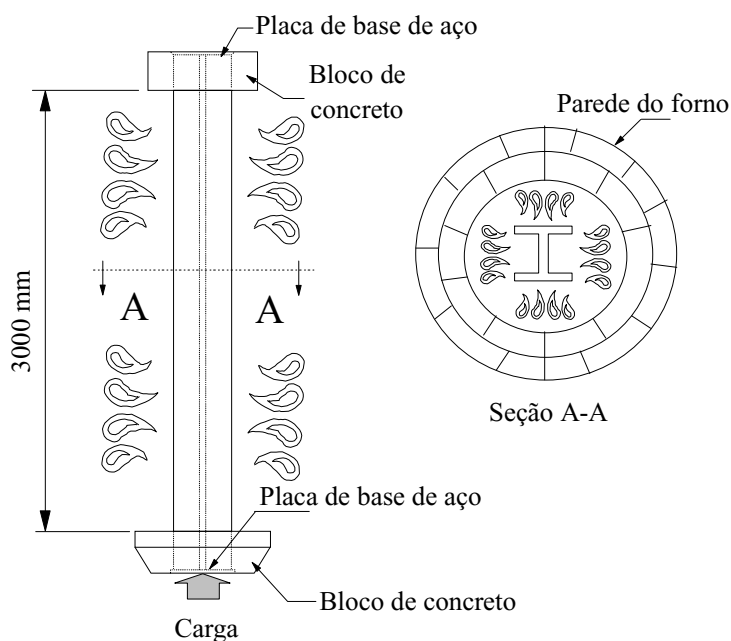


Figura 1.5 - Detalhes do ensaio de Incêndio Padrão em pilares

Tais ensaios confirmam uma temperatura de falha na faixa de 550 °C para pilares. Para vigas têm-se temperaturas mais altas na parte baixa da mesma, diretamente exposta ao fogo. Contudo, o ensaio de incêndio padrão não retrata as condições reais de um incêndio: os incêndios naturais em edificações não seguem a curva de incêndio padrão; os elementos em edificações reais raramente são utilizados isoladamente, havendo restrições de extremidades, impostas pelo resto da edificação. Fornos construídos com diferentes geometrias e tipos de materiais podem levar a resultados de ensaios diferentes, apesar de seguirem a curva de incêndio padrão. Além do mais, a limitação do tamanho dos fornos empregados impede o ensaio de elementos de maiores dimensões que poderiam representar melhor as condições reais. Some-se a isto o alto custo envolvido em tais ensaios, que inviabiliza economicamente a condução de ensaios para as diferentes combinações de tamanho e forma de seção.

#### 1.4 OUTROS MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO

As desvantagens de se avaliar a resistência de elementos estruturais sob altas temperaturas por meio de ensaios, citadas anteriormente, tornam conveniente o uso de outros métodos para o dimensionamento destes elementos . Assim, a substituição de ensaios por cálculos de engenharia vem sendo aceita pelos regulamentos oficiais. De fato, o Eurocode 1 e o Eurocode 3 contêm capítulos separados para o projeto em engenharia de proteção contra incêndio onde procedimentos de cálculo são aceitos (CEN, 1995a e 1995b). Seguindo tais tendências a norma brasileira, ora em preparação, permite o dimensionamento por meio de métodos de cálculos simplificados, usando-se o método dos estados limites ou por meio de métodos de cálculos avançados (Silva *et al.*, 1997). Estes fazem uso de ferramentas analíticas para estudar o comportamento da estrutura ou de suas partes, seguindo os princípios da engenharia de incêndio. Tais ferramentas de simulação são geralmente baseadas no método dos elementos finitos e podem incluir diversos efeitos na modelagem, tais como imperfeições geométricas e tensões iniciais combinadas com ações mecânicas; efeitos da não-linearidade física e geométrica, fluência e plasticidade; variação não uniforme da temperatura ao longo dos elementos estruturais e ao longo de suas seções transversais; interação entre os diversos elementos que compõem a estrutura. O presente trabalho constitui-se num passo inicial para a compreensão do fenômeno e elaboração de um programa computacional que possa futuramente ser utilizado como ferramenta de cálculo avançado.

### O DESENVOLVIMENTO DO MODELO EM ELEMENTOS FINITOS

#### 2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Um dos primeiros trabalhos para análise de elementos de aço sob altas temperaturas foi proposto por Witteveen (1967). Nesse trabalho, em que se considerou a expansão térmica livre e a temperatura uniforme nos elementos, a temperatura de colapso dos mesmos era estimada por meio de uma análise plástica onde a tensão de escoamento variava em função da temperatura. Numa análise elasto-plástica perfeita plástica Marchant (1972) considerou a degradação tanto do módulo de elasticidade quanto da tensão de escoamento. Seu trabalho incluía também os efeitos da expansão térmica, além de uma variação linear da temperatura ao longo da seção transversal. Também numa análise elasto-plástica perfeita onde as curvas tensão-deformação decaíam com o aumento da temperatura, Knight (1972) ressaltou os efeitos da restrição contra a expansão térmica na temperatura de falha da viga.

Usando as curvas tensão-deformação propostas por Brockenbrough (1970) para altas temperaturas, Culver, Ossembrugen e Aggarwal (Culver, 1972, Culver *et al.*, 1973, Ossembrugen *et al.*, 1973) fizeram um estudo usando o método de integração numérica de Newmark. Esse estudo resultou no desenvolvimento de fórmulas simples para o cálculo da tensão de flambagem a altas temperaturas; ressaltou também a importância dos gradientes térmicos na resistência última do elemento. Cheng e Mak (1975) apresentaram um programa de elementos finitos que incluía o efeito da fluência e a variação da temperatura na direção de um dos eixos da seção transversal. Usando a mesma teoria, Furumura e Shinohara (1978) estudaram o comportamento de pilares isolados protegidos. Kruppa (1979) desenvolveu um método analítico simplificado para determinar a temperatura crítica de estruturas de aço. Assumiu-se o comportamento elasto-plástico perfeito, com distribuição uniforme de temperatura em toda a estrutura. Um programa de elementos finitos onde eram modelados o pórtico de aço e a laje foi apresentado por Iding e Bresler (1981); empregaram curvas de tensão-deformação bilineares e elementos unidimensionais de dois nós para representar o pórtico e elementos bidimensionais de placa de três nós para a laje.

O primeiro programa de elementos finitos para análise de pórticos planos a incluir a não-linearidade geométrica foi proposto por Jain e Rao (1983). Seu algoritmo incluía um

modelo visco-plástico complexo e um esquema de marcação implícita de tempo. A análise em elementos finitos de Baba e Nagura (1983), em que se levava em conta a não-linearidade física do material, derivada de experimentos, mostrou que esta não poderia ser ignorada.

Em 1985, pesquisadores da Universidade de Liege, Bélgica, juntamente com a ARBED Recherches, em Luxemburgo, desenvolveram um modelo em elementos finitos para análise plana de vigas mistas de aço e concreto (Dotreppe *et al.*, 1985). Nesse modelo, a seção transversal era subdividida em faixas com valores de temperatura, tensões e deformações variando de uma faixa para outra. Franssen introduziu a possibilidade de análise de pórticos planos mistos de aço e concreto. Essa versão do programa, chamada CEFICOSS, teve posteriores melhorias por pesquisadores da ARBED Recherches. Continuando a introduzir melhorias no CEFICOSS, os pesquisadores da Universidade de Liege desenvolveram o programa SAFIR. Versões recentes do SAFIR permitem refinamentos na modelagem como análise de estruturas planas ou tridimensionais, fases de resfriamento da estrutura, além da inclusão da não-linearidade física e geométrica (Dotreppe, 1996).

Visando estudar o comportamento bidimensional de pórticos de aço, El-Zanaty e Murray (1983) desenvolveram um programa chamado INSTAF. Nesse programa, houve a preocupação de se manter os termos de mais alta ordem na formulação, dando melhor tratamento à não-linearidade geométrica. O seu modelo inelástico era do tipo plasticidade distribuída (também chamado de zona plástica), onde a expansão não-linear da plasticidade era considerada. Sharples (1987) adaptou esse programa para a análise de pilares sujeitos a gradientes térmicos ao longo de sua seção transversal e carregamentos excêntricos.

Olawale e Plank (1988) elaboraram uma análise por faixa de elementos finitos onde as curvas tensão-deformação-temperatura eram representadas com melhor aproximação por uma série de equações de Ramberg-Osgood. A análise levava em conta tensões residuais, carregamento excêntrico e flambagem local. Uma abordagem pelo Método da Rigidez Secante foi desenvolvida por El-Rimawi (Burgess *et al.*, 1988 e El-Rimawi, 1989) para a análise bidimensional de vigas a altas temperaturas. As curvas momento-curvatura-temperatura foram representadas através das equações de Ramberg-Osgood. Uma comparação com a abordagem pelo método incremental da rigidez tangente mostrou sua eficiência em termos de rapidez e precisão.

Continuando o desenvolvimento do INSTAF para análise a altas temperaturas conduzido por Sharples, Saab (Saab e Nethercot, 1991) apresentou um programa para análise bidimensional de pórticos de aço. Também foram utilizadas as equações de Ramberg-Osgood para representar as relações tensão-deformação-temperatura. Seu trabalho incluía os efeitos de não-linearidade física e geométrica e variações de temperatura ao longo dos elementos e através da seção transversal. Foram analisados vários tipos de pórticos, verificando-se também a influência de várias formas de proteção ao colapso de pórticos.

Jeyarupalingam e Viridi (1992), a partir de um método numérico para análise inelástica de pilares a temperatura ambiente (Viridi *et al.*, 1973), desenvolveram um modelo para análise estrutural a altas temperaturas. O método baseia-se em estabelecer uma forma flexionada em equilíbrio, usando a relação momento-força normal-curvatura para cada incremento de carregamento, tempo ou temperatura. A partir desse modelo, desenvolveu-se na City University, em Londres, um programa para análise tridimensional de pórticos mistos, com ligações semi-rígidas, chamado FAUST.

No Building Research Establishment, Wang e Lennon (1992) desenvolveram um modelo computacional para a análise tridimensional de pórticos mistos com ligações semi-rígidas. Usando também um modelo matemático tridimensional, Liu (1996) desenvolveu uma análise de elementos de viga e conexões entre vigas e pilares, usando elementos finitos isoparamétricos de cascas de oito nós.

O desenvolvimento introduzido por Saab no programa INSTAF teve continuidade nos trabalhos de Najjar (1994) e Bailey (1995). Najjar incluiu a análise tridimensional a altas temperaturas, procurando manter os termos de mais alta ordem da análise não-linear. O trabalho de Bailey estendeu sua capacidade para a análise com ligações semi-rígidas, inclusão dos efeitos de flambagem lateral por torção, e uso de elementos de casca para representar a laje; incluiu ainda um tratamento da reversão da deformação no resfriamento.

No Brasil, até o presente momento, o único trabalho de modelagem computacional de estruturas metálicas sob incêndio foi apresentado por Silva (1997). Fazendo uso do programa ANSYS, de análise estrutural genérica, simulou-se o comportamento de vigas bi-apoiadas e de um pórtico plano. A não-linearidade física foi conseguida por meio das curvas tensão-deformação recomendadas pelo Eurocode 3 (CEN, 1995b), limitando a deformação linear específica em 0,15.

Ao longo do desenvolvimento dos métodos analíticos, a ausência de resultados experimentais relevantes tem se mostrado um impecilho na verificação dos modelos desenvolvidos. Atualmente tem-se procurado reunir sistematicamente resultados de ensaios e disponibilizar tais dados para uso de pesquisadores envolvidos na simulação numérica do comportamento estrutural sob altas temperaturas (Leston-Jones *et al.*, 1997 e Wainman e Kirby, 1988 e 1989).

O Quadro 2.1 apresenta uma síntese da evolução histórica dos métodos de análise do comportamento de estruturas de aço sob altas temperaturas. Observa-se uma contínua evolução dos métodos no sentido da adoção de modelos analíticos mais complexos, apesar de, ocasionalmente, existirem trabalhos como o de Cheng e Mak (1975) que muito cedo adotaram modelos sofisticados.

Quadro 2.1 - Evolução dos modelos analíticos

<b>Características do modelo analítico</b>	<b>Trabalhos</b>
Análise elástica simplificada, com expansão térmica livre, sem gradientes de temperatura no elemento.	Witteveen (1967).
Análise elasto-plástica com uso de fórmulas simplificadoras.	Marchant (1972), Knight (1972), Culver (1972), Kruppa (1979).
Análise elasto-plástica de 1ª ordem pelo método dos elementos finitos.	Iding e Bresler, (1981)
Análise elasto-plástica de 2ª ordem pelo método dos elementos finitos.	Cheng e Mak (1975), Jain e Rao (1983), Baba e Nagura (1985), Dotreppe <i>et al.</i> (1985), Sharples (1987)
Análise plástica de 2ª ordem com o uso das equações de Ramberg-Osgood para interpolar as curvas tensão-deformação.	El-Rimawi (1988), Saab (1991).
Análise plástica de 2ª ordem por faixas de elementos finitos.	Olawale e Plank (1988).
Análise plástica de 2ª ordem tridimensional pelo método dos elementos finitos.	Wang e Lennon (1992), Jeyarupalingam e Viridi (1992), Najjar (1994), Bailey (1995), Liu (1996), Dotreppe (1996).

## 2.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO AÇO A ALTAS TEMPERATURAS

A não-linearidade física a altas temperaturas é obviamente um fator dos mais importantes a afetar o comportamento de pórticos de aço a altas temperaturas (Liu, 1996). Vários estudos têm sido conduzidos para a determinação das curvas tensão-deformação para o aço a altas temperaturas (Baba e Nagura, 1985, Rubert e Schaumann, 1985, Kirby e Preston, 1985). Estes estudos mostram boa concordância para temperaturas até cerca de 450 °C. A componente de deformação que aparece devido à fluência, para valores de temperaturas superiores a 450 °C, tem levado a divergências quanto a melhor representação do comportamento do aço a tais temperaturas. Contudo, estudos têm demonstrado que o comportamento da deformação e a temperatura crítica não são influenciados significativamente pela seqüência exata de aquecimento, desde que a taxa de aquecimento esteja entre 5 °C/min e 50 °C/min, com uma temperatura final não superior a 600 °C (Saab e Nethercot, 1991). Portanto, conclui-se que uma análise independente do tempo, onde as



curvas tensão-deformação a temperaturas crescentes têm os efeitos da fluência implicitamente incluídos é suficientemente precisa para modelar o comportamento do aço a altas temperaturas.

Devido à forma altamente não-linear das curvas tensão-deformação para temperaturas superiores a 200 °C, conforme mostrado na Figura 1.2 do capítulo anterior, estas podem ser representadas pela equação de Ramberg-Osgood. Tal equação é dada pela fórmula de três parâmetros seguinte:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_T} + 0.01 \left( \frac{\sigma}{f_{yT}} \right)^{n_T}, \quad (2.1)$$

onde a tensão de escoamento ( $f_{yT}$ ), o módulo de elasticidade ( $E_T$ ) e o coeficiente ( $n_T$ ) são os três parâmetros dependentes da temperatura. A Figura 2.1 mostra a variação do módulo de elasticidade aqui adotada, comparada com a função dada no Eurocode 3 (CEN, 1995b) e com a adotada no trabalho de Saab e Nethercot (1991). No presente trabalho optou-se pela adoção de uma curva que acompanhe inicialmente a curva do Eurocode, porém atingindo valor nulo próximo ao da curva de Saab e Nethercot. Utilizando-se um polinômio interpolador do sétimo grau, obteve-se a seguinte equação para a variação do módulo de elasticidade:

$$\begin{aligned} E / E_{20} = & 0,99800977 + 0,0001363016 \times T - 3,1496892 \times 10^{-6} \times T^2 - \\ & - 8,8646646 \times 10^{-9} \times T^3 + 7,6094567 \times 10^{-11} \times T^4 - 1,8985110 \times 10^{-13} \times T^5 + \\ & + 1,9864171 \times 10^{-16} \times T^6 - 7,4251393 \times 10^{-20} \times T^7 \end{aligned} \quad (2.2)$$

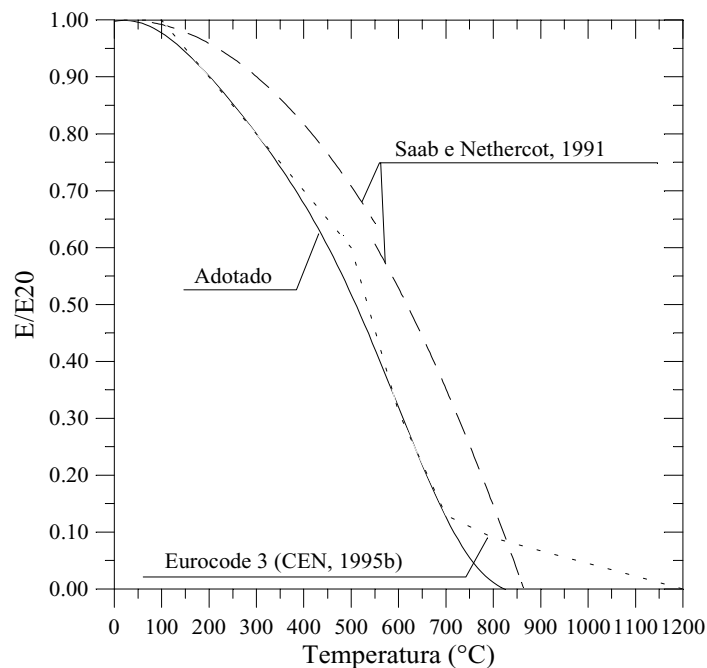


Figura 2.1 – Variação do módulo de elasticidade com a temperatura

Para temperaturas acima de 100 °C, os resultados de ensaios não mostram um ponto de escoamento perfeitamente definido. Isso pode ser contornado especificando-se uma deformação limite, ao invés de uma tensão de escoamento. A Figura 2.2 mostra a variação da tensão de escoamento encontrada no trabalho de Poh e Bennetts (1995), baseado na norma australiana, com deformação limite de 1%, e a variação da tensão de escoamento adotada no Eurocode 3 (CEN, 1996b), que adota a deformação limite de 2%.

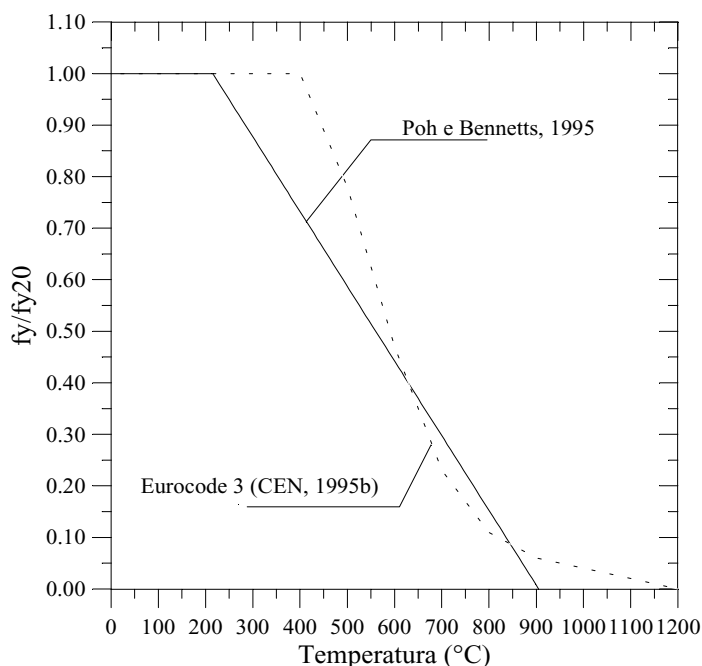


Figura 2.2 – Variação da tensão de escoamento com a temperatura

Na presente análise, as seguintes simplificações serão admitidas:

- O aquecimento será uniforme ao longo do elemento e através da seção transversal. Não serão considerados, portanto, os momentos fletores que se originam no caso de elementos aquecidos não-uniformemente;
- o módulo de elasticidade do material irá variar não-linearmente com o aumento da temperatura, de acordo com a equação (2.2);
- não serão consideradas as forças axiais provocadas pela expansão térmica;
- não serão consideradas deformações plásticas (a análise é elástica);
- a temperatura, após a análise da estrutura à temperatura ambiente, irá sempre crescer até que se atinja o ponto de falha, não se considerando o resfriamento da estrutura.

## 2.3 MODELO DE VIGA-COLUNA

### 2.3.1 Introdução

O elemento de pórtico plano comumente implementado para análises a temperatura ambiente é formulado com base nas hipóteses de linearidade física e pequenas deformações. A análise de estruturas sob temperaturas elevadas deve considerar elementos de barras que estejam sob grandes tensões axiais e deflexões em face dos esforços desenvolvidos e pelos grandes deslocamentos oriundos da perda de rigidez devida à degradação das propriedades físicas dos materiais.

Diante da complexidade dos modelos mais gerais, aqui será adotado um modelo em que as rotações são moderadas e, conseqüentemente, as deformações axiais são não-lineares, embora ainda pequenas. Trata-se de um modelo que, como se conclui nesse trabalho, resulta em uma formulação relativamente simples e capaz de expressar com suficiente precisão o comportamento de pórticos planos a altas temperaturas.

### 2.3.2 Comportamento Físico do Elemento

A análise da variação do comprimento de um segmento elementar de um sólido em coordenadas Lagrangeanas conduz à relação deformação-deslocamentos não-linear, definida pelo tensor de Green (DyN e Shames, 1973)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] . \quad (2.3)$$

A componente do campo de deformações na direção axial  $x$  deste tensor, para um elemento bidimensional é dada por

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] . \quad (2.4)$$

A condição de pequenas rotações implicaria em

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \ll 1 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \rightarrow 0 . \quad (2.5)$$

No entanto, na formulação aqui desenvolvida, será admitida uma condição menos restritiva para as rotações, que serão chamadas de rotações moderadas. Será admitida também a condição de pequenas deformações não-lineares. Essas duas condições são expressas matematicamente por

$$\varepsilon_{xx} \ll 1 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \ll 1 \quad . \quad (2.6)$$

Além das simplificações em (2.6), são também admitidas as seguintes simplificações para formular-se as equações básicas para vigas-colunas:

- O elemento é inicialmente reto, prismático e livre de tensões residuais e de imperfeições;
- a seção transversal do elemento é simétrica em relação ao plano do pórtico (ou seja, um dos eixos principais de sua seção transversal está no mesmo plano do pórtico). O eixo longitudinal do elemento é colinear com o eixo baricêntrico longitudinal;
- a hipótese de Bernoulli-Euler é considerada, ou seja, seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal do elemento;
- deformações por cisalhamento são desprezíveis;
- somente ocorrem deformações no plano da estrutura;
- a inclinação em qualquer ponto ao longo do eixo de referência é dada por

$$v'_0 = \frac{dv_0}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_0}{\Delta x} \cong \text{sen } \alpha, \quad (2.7)$$

onde a notação é mostrada na Figura 2.3. Segundo Torkamani *et al.* (1997), tal simplificação não contraria a consideração de rotações moderadas admitida na formulação aqui desenvolvida.

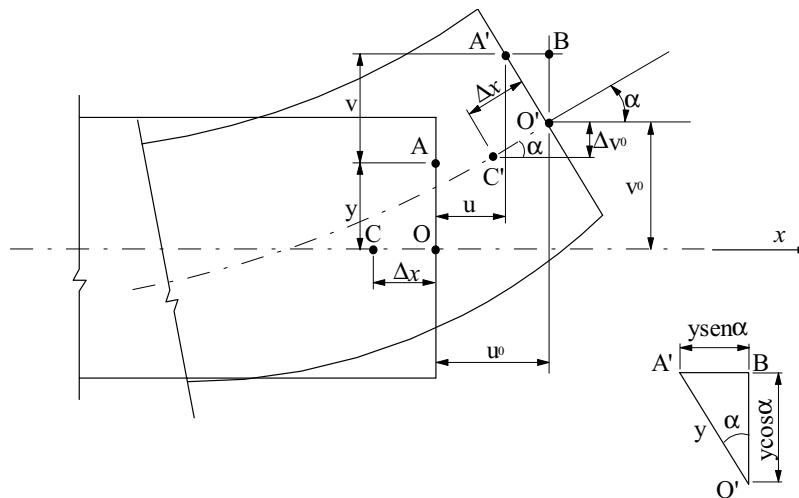


Figura 2.3 – Comportamento da seção transversal

Para verificar a ordem de  $(\partial u / \partial x)$  e  $(\partial u / \partial x)^2$  sob as condições assumidas de pequenas deformações não-lineares e rotações moderadas, a equação (2.4) pode ser resolvida para  $(\partial u / \partial x)$  o que leva a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} . \quad (2.8)$$

Fazendo-se

$$\lambda = 2\varepsilon_{xx} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 , \quad (2.9)$$

obtem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1 + \sqrt{1 + \lambda} . \quad (2.10)$$

Note-se em (2.9) que  $\lambda$  tem a mesma ordem de  $\varepsilon_{xx}$  e  $(\partial v / \partial x)^2$ . A expansão de  $(\partial u / \partial x)$  em série conduz a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}\lambda^2 + \dots \quad (2.11)$$

Portanto  $(\partial u / \partial x)$  tem a mesma ordem de  $\lambda$ , o que leva à conclusão de que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \ll 1 \quad (2.12a)$$

e, conseqüentemente,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \rightarrow 0 . \quad (2.12b)$$

Levando-se (2.12b) em (2.4) tem-se a deformação longitudinal coerente com a hipótese de rotações moderadas aqui formulada,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 . \quad (2.13)$$

Uma vez que são consideradas apenas as deformações no plano da estrutura, o tensor das deformações de Green teria ainda as componentes  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{xy}$ . Mas, como admite-se que as seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal  $x$  do elemento, essas componentes se anulam. Portanto, unicamente a componente de deformação  $\varepsilon_{xx}$  será considerada.

Observando-se a Figura 2.3 e usando-se (2.7), tem-se

$$u = u_0 - y \operatorname{sen} \alpha \cong u_0 - y \frac{dv_0}{dx} . \quad (2.14)$$

Portanto, derivando em relação a  $x$ , obtém-se

$$u' = u'_0 - yv''_0. \quad (2.15)$$

Usando-se (2.6) e(2.7) tem-se

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (v'_0)^2} \cong 1. \quad (2.16)$$

Observando-se a Figura 2.3 e usando-se (2.16), conclui-se que

$$v = v_0 + y \cos \alpha - y = v_0 - y (1 - \cos \alpha) \cong v_0. \quad (2.17)$$

Portanto

$$v' = v'_0. \quad (2.18)$$

Levando-se (2.15) e (2.18) em (2.13) tem-se

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2. \quad (2.19)$$

## 2.4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

Visando a análise computacional de estruturas planas aporticadas complexas, um elemento finito de pórtico plano é formulado com base no modelo de viga-coluna desenvolvido na seção anterior. O elemento é inicialmente retilíneo, com dois nós e três graus de liberdade por nó. Tem o seguinte vetor de deslocamentos em coordenadas locais:

$$\{d\} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T. \quad (2.20)$$

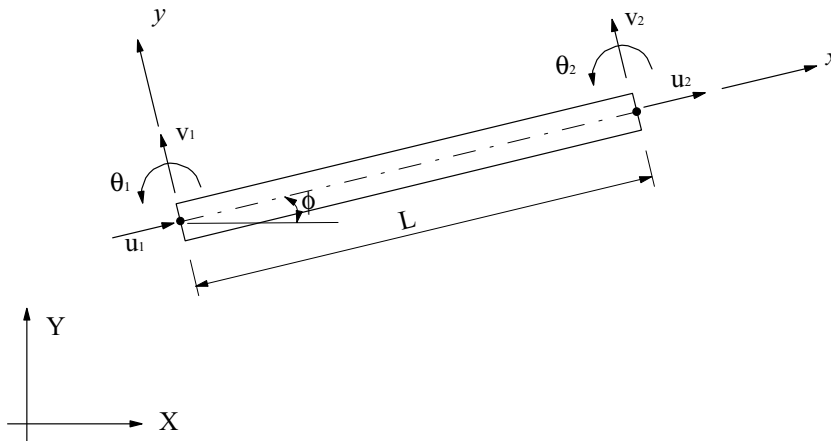


Figura 2.4 – Elemento de viga-coluna adotado.

Na abordagem por elementos finitos baseada em deslocamentos, estes são considerados como incógnitas nos seus pontos nodais. Os valores dos deslocamentos em pontos internos é descrito em termos dos valores nodais por meio de funções de interpolação, chamadas de funções de forma (Zienkiewicz e Taylor, 1991). Tais funções representando os deslocamentos do eixo centróide de um elemento de viga-coluna com deslocamentos axiais e transversais, podem ser assumidas como equações polinomiais lineares e cúbicas, respectivamente. Tal ordem das funções garante a continuidade dos deslocamentos e rotações nos bordos dos elementos adjacentes (Crisfield, 1986). Assim, as funções de forma adotadas para o elemento são as consideradas padrão, dadas por

$$[N_u] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$[N_v] = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Dessa forma, os deslocamentos para as deflexões axiais e transversais são expressos por

$$u_0 = [N_u] \{d\} \quad (2.22)$$

e

$$v_0 = [N_v] \{d\}. \quad (2.23)$$

Substituindo-se as equações (2.22) e (2.23) em (2.19), tem-se a forma matricial da relação entre deformação do elemento e deslocamentos nodais

$$\epsilon_{xx} = [N'_u] \{d\} + \frac{1}{2} \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] \{d\} - y [N'_v] \{d\}. \quad (2.24)$$

#### 2.4.1 – Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio são formuladas usando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Esse estabelece que o equilíbrio de um corpo requer que, o trabalho virtual interno seja igual ao trabalho virtual externo, para qualquer campo de deslocamentos virtuais compatíveis impostos ao corpo. O Princípio dos Trabalhos Virtuais pode, então, ser escrito

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0. \quad (2.25)$$

Desenvolvendo as expressões para o trabalho interno e externo em (2.25), tem-se

$$W = \int_V \sigma \delta \epsilon_{xx} dV - \{F_{ext}\}^T \{\delta d\} = \{F_{int}\}^T \{\delta d\} - \{F_{ext}\}^T \{\delta d\} = \{F_{int} - F_{ext}\}^T \{\delta d\} = 0, \quad (2.26)$$

onde  $\{F_{int}\}$  é o vetor de forças internas do elemento e  $\{F_{ext}\}$  é o vetor de forças aplicado externamente. Definindo-se

$$\{\psi\} = \{F_{int} - F_{ext}\}, \quad (2.27)$$

a condição de equilíbrio pode ser escrita como

$$\{\psi\}^T \{\delta d\} = 0. \quad (2.28)$$

Como esta condição deve valer para campos de deslocamentos virtuais compatíveis arbitrários, tem-se

$$\{\psi\} = 0, \quad (2.29)$$

expressão da condição geral de equilíbrio do sistema discretizado em elementos finitos. Para um sistema estrutural submetido a uma variação de temperatura entre  $T_0$  e  $T$  durante os instantes  $t_0$  e  $t$ , respectivamente, mesmo que o vetor de forças externas  $\{F_{ext}\}$  seja constante, os deslocamentos variarão continuamente caracterizando um fenômeno transiente. Uma estratégia de solução numérica da equação (2.29) consiste no estabelecimento de um processo incremental que corresponde à satisfação da condição de equilíbrio em uma sequência de estados de deformação caracterizados pelo vetor  $\{d\}^i$  correspondente à temperatura  $T_i$  entre  $T_0$  e  $T$ . Assim, expressando  $\{\psi\}$  por meio de uma série de Taylor truncada, vem

$$\{\psi\}^{i+1} = \{\psi\}^i + \left( \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{d\}} \right) \{\Delta d\}^i = 0. \quad (2.30)$$

Fazendo-se

$$[k_T] = \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{d\}} = \frac{\partial \{F_{int}\}}{\partial \{d\}} \quad (2.31)$$

e

$$\{g\} = -\{\psi\} = \{F_{ext} - F_{int}\} \quad (2.32)$$

e substituindo-se em (2.30) obtém-se

$$[k_T] \{\Delta d\} = \{g\}. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) é a equação básica de Newton-Raphson, onde  $[k_T]$  é a matriz jacobiana, chamada em termos estruturais de matriz de rigidez tangente incremental, e  $\{g\}$  é o vetor de forças desbalanceadas. Tal equação pode ser utilizada para trabalho com não-linearidade física e geométrica. O procedimento para solução de um sistema de equações por meio do método de Newton-Raphson será explicado mais adiante.



## 2.4.2 – Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente

O trabalho virtual interno é dado por

$$W_{\text{int}} = \int_V \sigma \delta \varepsilon_{xx} dV = \int_L \left( \int_A \sigma \delta \varepsilon_{xx} dA \right) dx. \quad (2.34)$$

A variação da deformação  $\delta \varepsilon_{xx}$  é obtida a partir de (2.19)

$$\delta \varepsilon_{xx} = \frac{d \delta u_0}{dx} + \frac{d v_0}{dx} \frac{d \delta v_0}{dx} - y \delta \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (2.35)$$

Fazendo uso das funções de forma (equações (2.20) e (2.21)) pode-se escrever a variação da deformação  $\delta \varepsilon_{xx}$  de forma matricial

$$\delta \varepsilon_{xx} = [N'_u] \{\delta d\} + [N'_v] \{d\} [N'_v] \{\delta d\} - y [N''_v] \{\delta d\}. \quad (2.36)$$

A substituição de (2.36) na expressão do trabalho interno (2.34) conduz a

$$W_{\text{int}} = \int_L \int_A \sigma [N'_u] \{\delta d\} dA dx + \int_L \int_A \sigma [N'_v] \{d\} [N'_v] \{\delta d\} dA dx - \int_L \int_A y \sigma [N''_v] \{\delta d\} dA dx \quad (2.37)$$

Como

$$\int_A \sigma dA = P \quad \text{e} \quad \int_A \sigma y dA = M, \quad (2.38)$$

onde  $P$  é a força normal e  $M$  é o momento fletor no elemento, tem-se

$$W_{\text{int}} = P \int_L [N'_u] \{\delta d\} dx + P \int_L [N'_v] \{d\} [N'_v] \{\delta d\} dx - M \int_L [N''_v] \{\delta d\} dx. \quad (2.39)$$

Mas

$$M = -EI \frac{d^2 v_0}{dx^2} = -EI [N''_v] \{d\}. \quad (2.40)$$

Substituindo, tem-se

$$W_{\text{int}} = P \int_L [N'_u] \{\delta d\} dx + P \int_L [N'_v] \{d\} [N'_v] \{\delta d\} dx + EI \int_L [N''_v] \{d\} [N''_v] \{\delta d\} dx. \quad (2.41)$$

O trabalho virtual interno também pode ser expresso como

$$W_{\text{int}} = \{F_{\text{int}}\}^T \{\delta d\}, \quad (2.42)$$

onde  $\{F_{\text{int}}\}$  é o vetor de forças internas do elemento. A expressão para o vetor de forças internas pode então ser obtida de (2.41), retirando-se  $\{\delta d\}$  da expressão e transpondo-se o resultado:

$$F_{\text{int}} = P \int_L [N'_u]^T dx + P \int_L [N'_v] \{d\} [N'_v]^T dx + EI \int_L [N''_v] \{d\} [N''_v]^T dx. \quad (2.43)$$

Para facilitar a dedução das expressões da matriz  $[k_T]$ , pode-se dividir o vetor de deslocamentos de forma que

$$\{d\} = \{d_1\} + \{d_2\}; \quad (2.45a)$$

$$\{d_1\} = [u_1 \ 0 \ 0 \ u_2 \ 0 \ 0]^T; \quad \{d_2\} = [0 \ v_1 \ \theta_1 \ 0 \ v_2 \ \theta_2]^T \quad (2.45b \text{ e } 2.45c)$$

Conforme equação (2.31), a matriz de rigidez tangente será dada por

$$[k_T] = \frac{\partial \{F_{int}\}}{\partial \{d\}} = \frac{\partial \{F_{int}\}}{\partial \{d_1\}} + \frac{\partial \{F_{int}\}}{\partial \{d_2\}}. \quad (2.46)$$

Tomando a expressão para a força normal em (2.38) e desenvolvendo,

$$P = \int_A \sigma \, dA = \int_A E \varepsilon_{xx} \, dA = EA \varepsilon_{xx}. \quad (2.47)$$

Fazendo uso dos vetores de deslocamentos definidos em (2.45) e da equação (2.24) pode-se expressar a força normal como

$$P = EA \left( [N'_u] \{d_1\} + \frac{1}{2} \{d_2\}^T [N'_v]^T [N'_v] \{d_2\} - y [N''_v] \{d_2\} \right). \quad (2.48)$$

Suas derivadas em relação aos deslocamentos ficam

$$\frac{\partial P}{\partial \{d_1\}} = EA [N'_u]; \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \{d_2\}} = EA \left( \{d_2\}^T [N'_v]^T [N'_v] - y [N''_v] \right) = EA \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] - E \int_A y [N''_v] \, dA. \quad (2.49b)$$

Como a origem do sistema de referência coincide com o eixo baricêntrico longitudinal do elemento, o momento estático é nulo, ou seja

$$\int_A y \, dA = 0. \quad (2.50)$$

Portanto, o último termo na equação (2.49b) se anula.

O vetor de forças internas em (2.43) expresso com o uso de  $\{d_1\}$  e  $\{d_2\}$  fica

$$F_{int} = P \int_L [N'_u]^T \, dx + P \int_L [N'_v] \{d_2\} [N'_v]^T \, dx + EI \int_L [N''_v] \{d_2\} [N''_v]^T \, dx. \quad (2.51)$$

Suas derivadas em relação aos deslocamentos ficam

$$\frac{\partial \{F_{int}\}}{\partial \{d_1\}} = \int_L [N'_u]^T EA [N'_u] \, dx + \int_L [N'_v] \{d\} [N'_v]^T EA [N'_u] \, dx \quad (2.52a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F_{int}\}}{\partial \{d_2\}} &= \int_L [N'_u]^T EA \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] \, dx + \\ &+ \int_L [N'_v]^T \{d\} [N'_v]^T EA \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] \, dx + P \int_L [N'_v] [N'_v]^T \, dx + \\ &+ EI \int_L [N''_v]^T [N''_v] \, dx, \end{aligned} \quad (2.52b)$$

Substituindo as expressões de (2.52) em (2.46) obtém-se a expressão para a matriz de rigidez tangente

$$\begin{aligned}
[k_T] = & EA \int_L [N'_u]^T [N'_u] dx + EA \int_L [N'_v] \{d\} [N'_v]^T [N'_u] dx + EA \int_L [N'_u]^T \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] dx + \\
& + EA \int_L [N'_v]^T \{d\} [N'_v]^T \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] dx + P \int_L [N'_v] [N'_v]^T dx + \\
& + EI \int_L [N''_v]^T [N''_v] dx.
\end{aligned}
\tag{2.53}$$

As expressões desenvolvidas para a matriz de rigidez tangente e para o vetor de forças internas encontram-se nos anexos A.1 e A.2, respectivamente.

### 2.4.3 – Matriz de Transformação

As expressões para a matriz de rigidez tangente (2.53) e para o vetor de forças internas (2.43) são definidas em relação a um sistema de coordenadas locais, conforme mostrado na Figura 2.4. Na análise de uma estrutura composta por vários elementos, adota-se um sistema de coordenadas globais, válido para todos os elementos. Para obter-se a matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais, efetua-se a transformação de coordenadas usando a relação

$$[k_T^G] = [T]^T [k_T] [T],
\tag{2.54}$$

onde  $[k_T^G]$  é a matriz de rigidez tangente do elemento em coordenadas globais,  $[k_T]$  é a matriz de rigidez tangente do elemento em coordenadas locais, e  $[T]$  é a matriz de transformação de coordenadas, dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\tag{2.55}$$

onde  $\phi$  é o ângulo entre os dois sistemas de coordenadas, conforme Figura 2.4.

Uma vez que a matriz  $[k_T^G]$  é obtida, esta é adicionada à matriz de rigidez tangente da estrutura, conforme a correspondência entre os graus de liberdade do elemento e os da

estrutura. Procedendo de forma idêntica para todos os elementos, obtém-se a matriz de rigidez de toda a estrutura.

Para obter-se o vetor de forças internas da estrutura, procede-se de forma semelhante. Contudo, por ser um tensor de 1ª. ordem, sua transformação de coordenadas locais para coordenadas globais é dada pela relação

$$\{F_{int}^G\} = [T]^T \{F_{int}\}, \quad (2.56)$$

onde  $\{F_{int}^G\}$  é o vetor de forças internas em coordenadas globais,  $\{F_{int}\}$  é o vetor de forças internas em coordenadas locais e  $[T]$  é a matriz de transformação dada em (2.55).

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

#### 3.1 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Uma vez que a equação de equilíbrio (2.29) é não-linear é necessário adotar-se métodos numéricos adequados para a sua solução. A literatura para solução de um conjunto de equações não-lineares é extensa. Serão comentados aqui os tipos mais comuns, com ênfase no método de Newton-Raphson, adotado no presente trabalho. Basicamente, existem três procedimentos para obter-se a curva carregamento-deslocamento para problemas não-lineares (Chajes *et al.*, 1987): ( 1 ) método incremental puro, ( 2 ) método direto e ( 3 ) método incremental-iterativo.

##### 3.1.1 Método Incremental Puro

O método linear incremental ou incremental puro constitui-se na idéia mais básica para a análise incremental. O processo de carregamento é dividido em um número de passos razoavelmente pequeno, convertendo-se o problema não-linear em uma série de problemas lineares.

No início de cada passo de carregamento a geometria deformada referente ao passo anterior é utilizada para a obtenção da matriz de rigidez tangente da estrutura. Os deslocamentos incrementais da estrutura  $\{\Delta D\}^i$  são então calculados, resolvendo-se a equação

$$[K_T]^{i-1} \{\Delta D\}^i = \{\Delta F\}^i, \quad (3.1)$$

onde  $[K_T]^{i-1}$  é a matriz de rigidez tangente calculada no começo do i-ésimo passo de carregamento e os incrementos de carregamento são definidos como

$$\{\Delta F\}^i = \{F_{ext}\}^i - \{F_{ext}\}^{i-1}. \quad (3.2)$$

Ao fim de cada incremento o carregamento externo total aplicado na estrutura pode ser calculado como a somatória de todos os incrementos de carregamento aplicados, ou seja,

$$\{F_{ext}\}^i = \sum_{r=1}^i \{\Delta F\}^r, \quad (3.3)$$

e os deslocamentos totais da estrutura são dados por

$$\{D\}^i = \sum_{r=1}^i \{\Delta D\}^r . \quad (3.4)$$

Estes novos deslocamentos totais da estrutura são agora utilizados para a obtenção da matriz de rigidez para o próximo incremento de carregamento.

A característica do método é que a matriz de rigidez  $[K_T]$  permanece constante durante cada passo de carregamento, desprezando-se as mudanças na deformação que ocorrem durante o processo, o que requer passos de carregamento relativamente pequenos. Uma vantagem do método é a sua simplicidade. Contudo, para problemas com grandes deslocamentos e rotações, o acúmulo de erros obtidos em cada passo pode ser significativo. Além disso, como não são realizadas iterações, não há garantia de que as condições de equilíbrio da estrutura serão satisfeitas nos pontos encontrados (v. Figura 3.1).

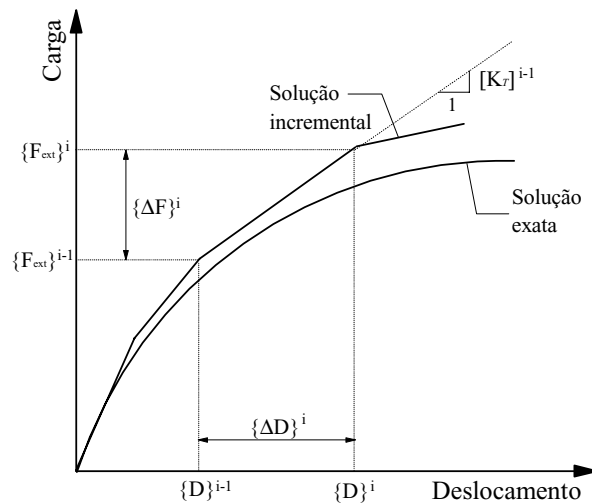


Figura 3.1 – Método incremental puro

### 3.1.2 Método Direto

O método direto usa a matriz de rigidez secante para determinar deslocamentos totais produzidos pelo carregamento total. Enquanto nos métodos incrementais o carregamento é aplicado em uma série de incrementos, no método direto o carregamento total é aplicada em um único passo. Um procedimento iterativo é então utilizado para convergir os deslocamentos para uma posição de equilíbrio.

O procedimento é ilustrado na Figura 3.2. Começando da estrutura indeformada deseja-se calcular o deslocamento  $\{D\}$  correspondente ao carregamento externo  $\{F_{ext}\}$ . Uma matriz de rigidez secante inicial é montada, calculando-se então um valor inicial para os deslocamentos através de

$$[K_S]_{j-1} \{D\}_j = \{F_{ext}\}, \quad (3.5)$$

onde  $[K_S]_{j-1}$  é a matriz de rigidez obtida no começo da iteração e  $\{F_{ext}\}$  a força externa total aplicada. Os deslocamentos obtidos são então utilizados para o cálculo atualizado da matriz  $[K_S]$ . Assim, em sucessivas iterações, novos valores para os deslocamentos são obtidos através da relação de recorrência (3.5) e a matriz  $[K_S]$  é atualizada com tais deslocamentos, para ser utilizada na iteração seguinte. Ao final de cada iteração, o equilíbrio é checado, calculando-se

$$\{F\}_j = [K_S]_j \{D\}_j \quad (3.6)$$

e comparando-se a força  $\{F\}$  encontrada com a força aplicada  $\{F_{ext}\}$ . Quando os valores destes vetores forem suficientemente próximos, o processo terá convergido.

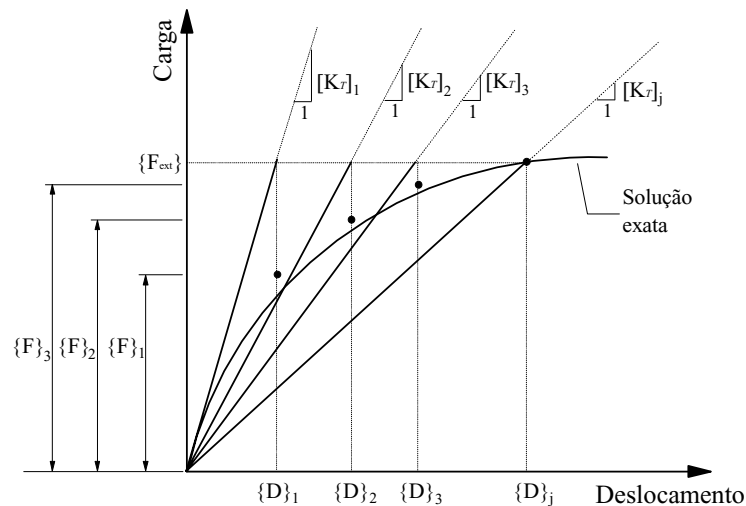


Figura 3.2 – Método direto

Quando for necessário traçar a trajetória da curva carregamento-deslocamento, deve-se adaptar o procedimento para que o carregamento seja aplicado em incrementos, recaindo-se no método incremental-iterativo. Por este motivo alguns autores vêem o método direto como uma modificação do método de Newton-Raphson. Torkamani (1997), por exemplo, chama esta variação de “método de Newton-Raphson modificado com matriz de rigidez atualizada parcialmente”.

### 3.1.3 Método Incremental-Iterativo (Método de Newton-Raphson)

No método incremental-iterativo o carregamento é feito por meio de incrementos e os deslocamentos correspondentes a tais incrementos convergem para valores de equilíbrio por meio de um processo iterativo.

O método de Newton Raphson é provavelmente o método incremental-iterativo mais antigo que é ainda largamente utilizado. Grande parte dos métodos iterativos adotados na solução de equações não-lineares pode ser considerada como variantes deste método.

O procedimento para um incremento de carregamento é ilustrado na Figura 3.3. Partindo-se de uma posição de equilíbrio, onde, para um nível de carregamento externo  $\{F_{ext}\}^{i-1}$  têm-se os deslocamentos correspondentes  $\{D\}^{i-1}$ , é dado um acréscimo de carregamento  $\{\Delta F\}^i$ . A equação

$$[K_T]_0^i \{\Delta D\}_1^i = \{\Delta F\}^i \quad (3.7)$$

é resolvida, obtendo-se um acréscimo nos deslocamentos  $\{\Delta D\}_1^i$  que será somado aos deslocamentos totais

$$\{D\}_1^i = \{D\}^{i-1} + \{\Delta D\}_1^i \quad (3.8)$$

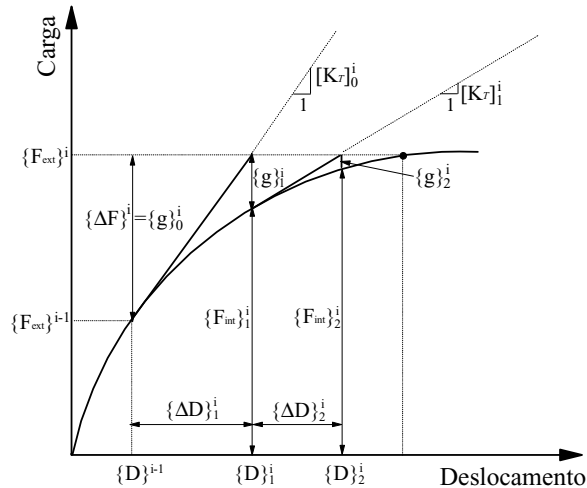


Figura 3.3 – Método de Newton-Raphson

Nessa nova posição há um desequilíbrio entre as forças externas  $\{F_{ext}\}^i$  e as forças internas da estrutura  $\{F_{int}\}_1^i$ , dadas por

$$\{g\}_1^i = \{F_{ext}\}^i - \{F_{int}\}_1^i \quad (3.9)$$



onde  $\{g\}^i$  é chamado de vetor de forças desbalanceadas ou gradiente da energia potencial. Note-se que antes do primeiro acréscimo de deslocamentos  $\{\Delta D\}_1^i$  o vetor de forças desbalanceadas é igual ao próprio acréscimo de carregamento  $\{\Delta F\}^i$ .

Usando os novos deslocamentos totais obtidos em (3.8), uma nova matriz de rigidez é calculada, obtendo-se novos acréscimos de deslocamentos que serão somados aos deslocamentos totais. O processo é então repetido até que o vetor de forças desbalanceadas seja suficientemente pequeno.

Quadro 3.1 – Algoritmo do método de Newton-Raphson

```

Algoritmo
  {D}←{0};   λ←0;   P←0
  para i de 1 até NINC faça {loop sobre os incrementos}
    λ←λ+Δλ
    {F_ext}←λ{F_ref}
    {ΔF}←Δλ{F_ref}
    [K_T]←f(P,E,A,I,L,{D})
    {ΔD}←[K_T]-1{ΔF}
    {D}←{D}+{ΔD}
    para j de 1 até NITMAX faça {loop sobre as iterações}
      P←f(E,A,{D})
      {F_int}←f(P,E,I,L,{D})
      {g}←{F_ext}-{F_int}
      se "convergiu"
        então interrompa
      fim se
      [K_T]←f(P,E,A,I,L,{D})
      {ΔD}←[K_T]-1{g}
      {D}←{D}+{ΔD}
    fim para
  escreva {F_ext}, {D}
  fim para
fim algoritmo

```

Um algoritmo simplificado do método de Newton-Raphson utilizado é apresentado no Quadro 3.1, onde a seguinte notação foi empregada:

$\lambda$  = Fator multiplicador do carregamento;

$\Delta\lambda$  = incremento no fator multiplicador do carregamento;

$P$  = força normal no elemento;

NINC = número total de incrementos;

NITMAX = número máximo de iterações;

$\{F_{ref}\}$  = vetor de forças de referência;

$\{F_{ext}\}$  = vetor de forças externas, aplicado na estrutura;

$\{F_{int}\}$  = vetor de forças internas da estrutura;

$\{\Delta F\}$  = vetor de incremento de carregamento;

$\{D\}$  = vetor de deslocamentos da estrutura;

$\{\Delta D\}$  = vetor de incremento de deslocamentos;

$[K_T]$  = matriz de rigidez tangente da estrutura.

O critério de convergência adotado será comentado no item a seguir. Apesar de sua convergência rápida (com menor número de iterações), o método de Newton-Raphson pode ser custoso computacionalmente, uma vez que a matriz  $[K_T]$  precisa ser formada e fatorada a cada incremento.

O inconveniente do método de Newton-Raphson pode ser evitado com o uso de procedimentos alternativos. Um destes procedimentos é o chamado *método de Newton-Raphson modificado*. Este método usa o mesmo algoritmo do método de Newton-Raphson convencional, porém a matriz de rigidez  $[K_T]_j$  é substituída por uma aproximação constante  $[\bar{K}_T]$ . Existem várias possibilidades para esta aproximação.  $[\bar{K}_T]$  pode ser escolhida, por exemplo, como a matriz correspondente à primeira iteração  $[K_T]_1^i$ , ou pode ainda ser a matriz correspondente a um passo inicial de carregamento  $[K_T]_1^i$  (v. Figura 3.4).

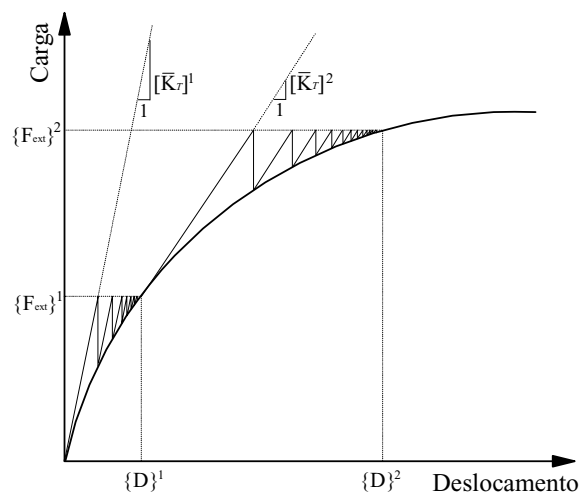


Figura 3.4 – Método de Newton-Raphson modificado

Apesar de poupar esforço computacional, dado que a matriz de rigidez é calculada apenas uma vez, o número de iterações necessário por este método para se atingir o equilíbrio torna-se maior. Na prática, várias variantes deste processo podem ser utilizadas, podendo-se fazer uso de “*solvers*” simétricos, desde que a matriz de rigidez seja simétrica.

### 3.1.4 Critério de convergência

Como é utilizado um processo iterativo, deve-se adotar um critério de convergência, para verificar se a solução obtida está dentro de uma tolerância especificada, podendo-se cessar as iterações. O critério aqui adotado é baseado na convergência das forças desbalanceadas, dadas por

$$\frac{\|\{g\}\|}{\|\{F_{ext}\}\|} \leq \text{TOL}, \quad (3.10)$$

onde  $\|\{g\}\|$  é a norma euclidiana do vetor de forças desbalanceadas, dada por

$$\|\{g\}\| = \|\{F_{ext}\} - \{F_{int}\}\| = \left( \sum_{i=1}^n (F_{i(ext)} - F_{i(int)})^2 \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

e  $\|\{F_{ext}\}\|$  é a norma euclidiana do vetor de forças externas, aplicadas à estrutura, dada por

$$\|\{F_{ext}\}\| = \left( \sum_{i=1}^n (F_{i(ext)})^2 \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Note-se que  $n$  é o número de elementos do vetor, o que corresponde ao número de graus de liberdade da estrutura,  $\{F_{int}\}$  é o vetor de forças internas, e “TOL” é a tolerância especificada. É necessário certo cuidado ao especificar-se o limite de tolerância empregado. Se a tolerância for elevada pode-se obter resultados imprecisos. Se for muito pequena, pode-se ter um número elevado de iterações, levando a uma precisão numérica injustificada para um processo inerentemente aproximado. Valores típicos para a tolerância ficam entre 0,001 e 0,01 (Crisfield, 1991).

## 3.2 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON A ALTAS TEMPERATURAS

A elevação da temperatura provoca uma degradação das propriedades do material, como visto. Assim, para cada valor de temperatura tem-se uma curva carregamento-deslocamento. Contudo, para evitar maior trabalho computacional, a análise é feita a partir de uma posição de equilíbrio, obtida para um valor de temperatura anterior à elevação. Assim, é realizado primeiramente a análise à temperatura ambiente, usando-se o método de Newton-Raphson explanado anteriormente. Obtidos o carregamento final e os deslocamentos

correspondentes a uma posição de equilíbrio, estes valores são utilizados como ponto de partida para a análise sob incrementos térmicos. Dando-se então um incremento térmico (usualmente seu valor inicial é em torno de 50 °C), recai-se numa posição de desequilíbrio entre o carregamento externo mantido constante e as forças internas da estrutura (v. Figura 3.5). Os deslocamentos correspondentes à nova posição de equilíbrio são obtidos por meio de iterações da mesma forma que no processo de Newton-Raphson à temperatura ambiente, que no Quadro 3.1 corresponde ao *loop* sobre as iterações. Obtido um novo ponto de equilíbrio, dá-se outro acréscimo de temperatura e itera-se até convergir para outra posição de equilíbrio. O processo é repetido até que se obtenha a temperatura de falha da estrutura, conforme mostrado no item seguinte.

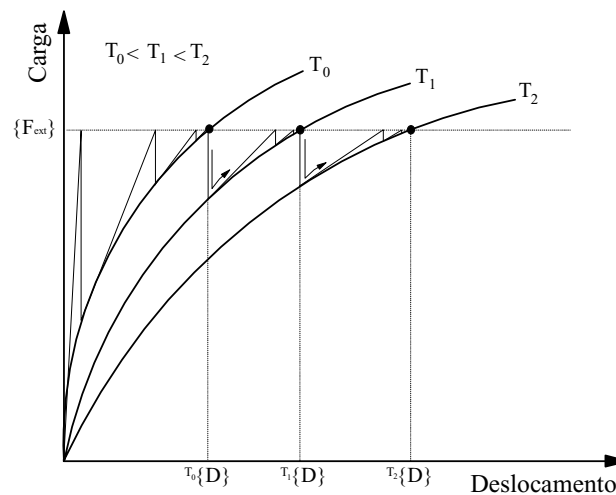


Figura 3.5 – Método de Newton-Raphson a altas temperaturas

### 3.3 IDENTIFICAÇÃO DA FALHA ESTRUTURAL

A cada iteração a matriz de rigidez da estrutura,  $[K_T]$  é montada e fatorada, para obter-se os deslocamentos incrementais da estrutura. O processo aqui adotado na solução do sistema de equações é a fatoração de Crout, onde a matriz  $[K_T]$  é fatorada de forma que

$$[K_T] = [L][D][L]^T, \quad (3.13)$$

onde  $[L]$  é a matriz triangular inferior, com termos unitários na diagonal principal, e  $[D]$  é a matriz diagonal, contendo os pivôs da fatoração.

Se a matriz de rigidez tornar-se indefinida, a estrutura deverá estar instável. Usando a fatoração de Crout, a indefinição de  $[K_T]$  é detectada pela presença de um ou mais pivôs negativos (Crisfield, 1986).

Um procedimento automático é adotado para que, uma vez identificada a falha, haja um refinamento nos incrementos de temperatura, de forma que a análise não finalize por falha numérica. Assim, no início da análise, a temperatura é aumentada em incrementos pré-determinados (usualmente em torno de 50 °C). Em algum instante, o programa irá indicar a presença de pivôs negativos na fatoração. Isto é indicado na Figura 3.6, na temperatura  $T_{n+1}$ . Como procura-se uma temperatura de falha mais refinada, retorna-se à temperatura de equilíbrio anterior e dá-se um incremento térmico de 10% do incremento original. O processo de retorno à posição de equilíbrio e redução de incremento térmico a 10% do valor anterior é repetido cada vez que a falha é detectada, até que o valor do incremento seja menor ou igual a 0,1 °C, quando então o processo é encerrado.

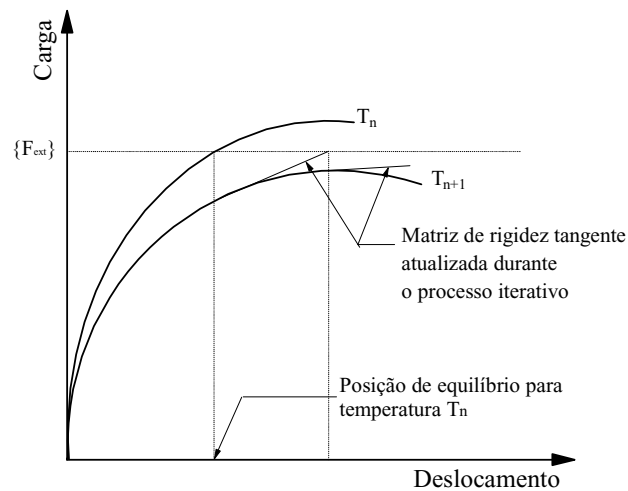


Figura 3.6 – Método de Newton-Raphson na proximidade da falha estrutural

## EXEMPLOS

### 4.1 EXEMPLO À TEMPERATURA AMBIENTE

O propósito deste exemplo é avaliar a precisão do programa para análise não-linear à temperatura ambiente. Trata-se de um pórtico do tipo portal, com duas forças aplicadas na vertical e uma na horizontal. O pórtico foi discretizado considerando-se cinco elementos. Os pilares foram discretizadas em um elemento, cada, e a viga em três elementos, conforme Figura 4.1. Os resultados encontrados são mostrados na Figura 4.2, onde são comparados com os resultados obtidos pela Análise Elástica Linear, e a Análise de Segunda Ordem de H.B. Harrison, em 1965, citado no trabalho de Torkamani *et al.* (1997). Os resultados obtidos concordam favoravelmente com a análise de Harrison.

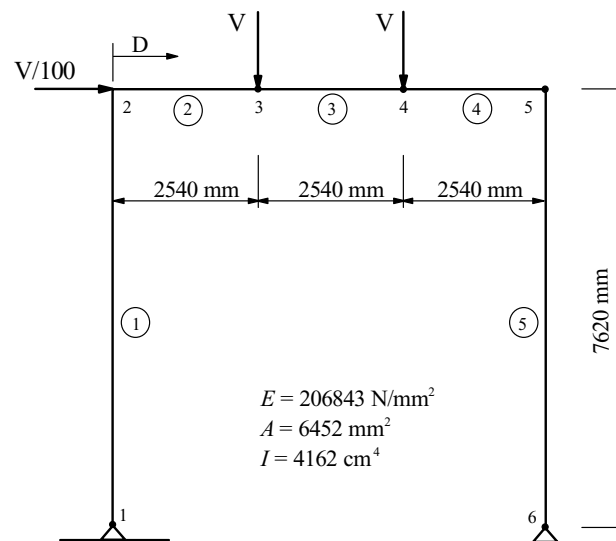


Figura 4.1 – Exemplo 1: Pórtico com cinco elementos

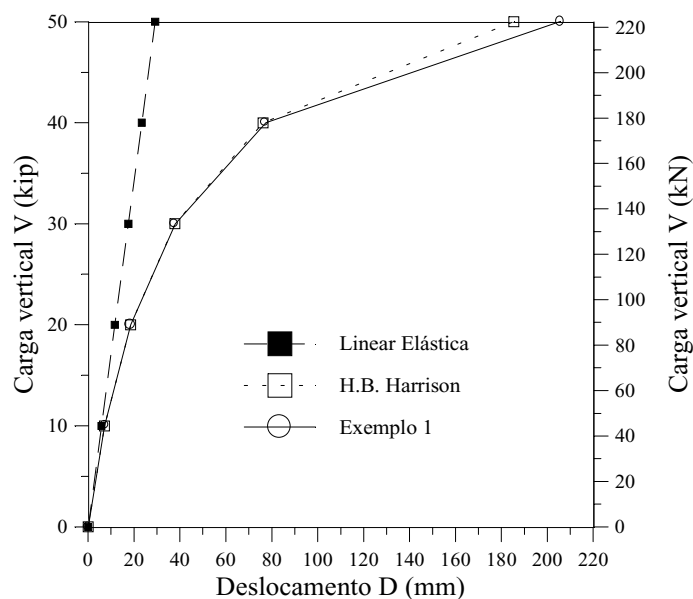


Figura 4.2 – Comparação dos deslocamentos obtidos à temperatura ambiente.

#### 4.2 VIGA BI-APOIADA COM CARREGAMENTO CONCENTRADO

Como primeiro exemplo para análise a altas temperaturas, considere-se a viga bi-apoiada da Figura 4.3. A viga foi discretizada em 10 elementos de mesmo comprimento (114 mm). O perfil IPE 80 utilizado tem seção com 80 mm de altura, 46 mm de largura, 3,8 mm de espessura da alma e 5,2 mm de espessura da aba. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos por Rubert e Schaumann. (1985), para taxas de aquecimento de 5,33 K/min e 32,0 K/min. A curva obtida apresenta bons resultados, ficando entre as duas curvas de Rubert e Shaumann para valores superiores a 660 °C. (v. Figura 4.4).

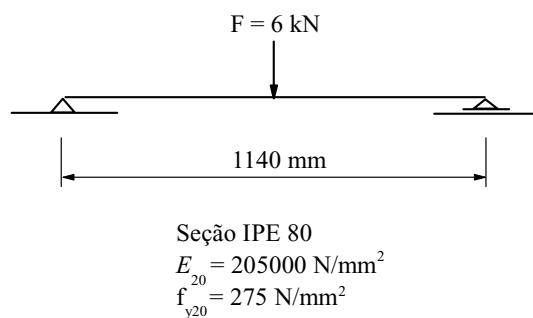


Figura 4.3 – Exemplo 2: Viga bi-apoiada com carregamento concentrado.

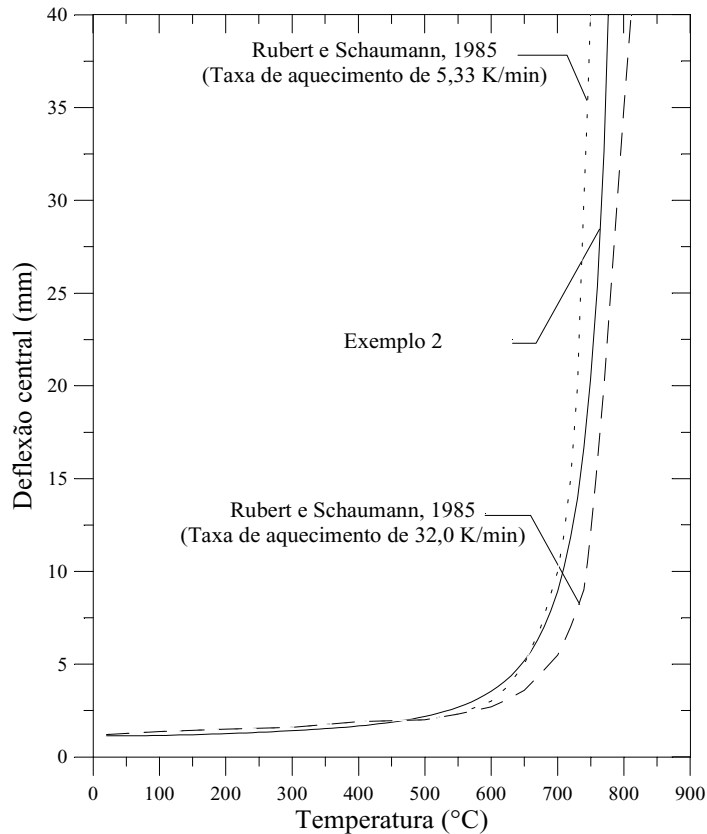


Figura 4.4 - Resultados obtidos para o exemplo 2

### 4.3 VIGA BI-APOIADA COM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO

A viga bi-apoiada apresentada na Figura 4.5 foi discretizada considerando-se dez elementos de mesmo comprimento (400 mm). O perfil 254x146 UB 43 utilizado tem seção com 259,6 mm de altura, 147,3 mm de largura e 7,2 mm de espessura da alma e 12,7 mm de

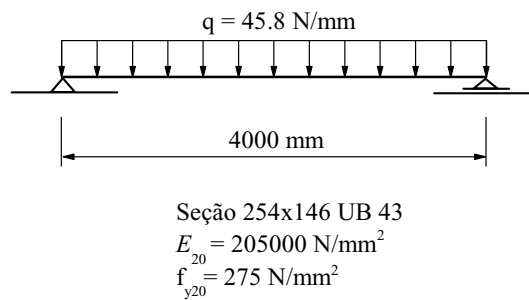


Figura 4.5 – Exemplo 3: Viga bi-apoiada com carregamento distribuído



espessura da aba. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos por Burgess *et al.* (1991), na Figura 4.6. . As curvas mostradas apresentam uma concordância inicial, e depois se distanciam. Enquanto a curva obtida numericamente no trabalho de Burgess apresenta temperatura crítica em torno de 570 °C, considerando-se como critério de falha  $L/20$ , o método aqui empregado apresenta um valor em torno de 750 °C.

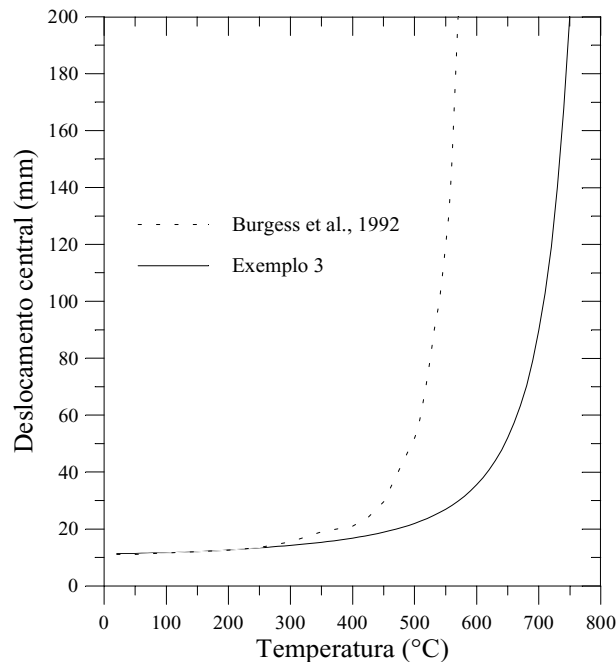


Figura 4.6 – Resultados obtidos para o exemplo 3

Diante dos resultados apresentados, será feita a verificação de uma possível formação de rótula plástica na viga, utilizando uma análise plástica de primeira ordem. O diagrama de momento fletor para o caso de uma viga com carregamento uniformemente distribuído e com as condições de contorno mostradas é parabólico, sendo nulo nos apoios e máximo no meio do vão, onde é dado por:

$$M = \frac{qL^2}{8}. \quad (4.1)$$

O carregamento uniformemente distribuído que levará à formação de uma rótula plástica no meio do vão é dado por:

$$q = \frac{8M_p}{L^2}, \quad (4.2)$$

onde  $M_p$  é o momento de plastificação, dado por (Chen e Sohal, 1995)

$$M_p = f_y Z, \quad (4.3)$$

sendo  $Z$  o módulo plástico, dependente somente da geometria da seção transversal.

Substituindo (4.3) em (4.2), tem-se

$$q = \frac{8 \times Z \times f_y}{L^2}. \quad (4.4)$$

Para a seção adotada, o módulo plástico é de  $566 \text{ cm}^3$ . Variando a tensão de escoamento com a temperatura, conforme mostrado na Figura 2.2, de acordo com o Eurocode 3 (CEN, 1995b), tem-se para uma temperatura de  $560 \text{ }^\circ\text{C}$ , uma tensão de escoamento de  $161,81 \text{ N/mm}^2$  (59 % do valor inicial). Substituindo estes valores em (4.4), tem-se

$$q = \frac{8 \times 566000 \times 161,81}{4000^2} = 45,8 \text{ N/mm}. \quad (4.5)$$

Ou seja, numa análise elasto-plástica de primeira ordem, em torno de  $560 \text{ }^\circ\text{C}$ , o carregamento que está sendo aplicada será capaz de produzir uma rótula plástica.

Na realidade a rótula não se forma subitamente, ocorrendo um processo de expansão gradual da plasticidade ao longo da seção transversal, começando pelas partes da seção onde a tensão é maior. À medida que a porção plastificada da seção aumenta, esta vai perdendo a rigidez, até que a rótula se forme totalmente. O programa de Burgess leva em conta esta expansão gradual da plasticidade, daí a inclinação da curva inicia-se para valores próximos a  $220 \text{ }^\circ\text{C}$ . Como o programa aqui adotado não leva em conta a plasticidade, os deslocamentos vão variando não-linearmente, à medida que o módulo de elasticidade decai. A falha só ocorrerá a  $750 \text{ }^\circ\text{C}$ , quando o módulo de elasticidade estará a 6% do valor inicial.

#### 4.4 PÓRTICO PARCIALMENTE AQUECIDO

Um pórtico constituído de quatro pilares e duas vigas é mostrado na Figura 4.7. Somente a viga maior e os dois pilares inferiores sofreram elevação de temperatura, conforme ilustrado. Considerou-se nas vigas e nos pilares um carregamento equivalente a cinquenta vezes o seu peso próprio. A viga maior foi discretizada em dez elementos e as demais partes em seis elementos cada. O perfil 254x102 UB 22 utilizado tem um peso de 22 kg por metro de comprimento e seção com 254 mm de altura, 101,6 mm de largura, 5,7 mm de espessura da alma e 6,8 mm de espessura da aba. O perfil 152 UC 23 tem um peso de 23 kg por metro de comprimento e seção com 152,4 mm de altura, 152,2 mm de largura, 5,8 mm de espessura da alma e 6,8 mm de espessura da aba. Os resultados obtidos para a deflexão central da viga aquecida são comparados com os obtidos por Plank (1996), na Figura 4.8, obtendo-se uma boa aproximação.

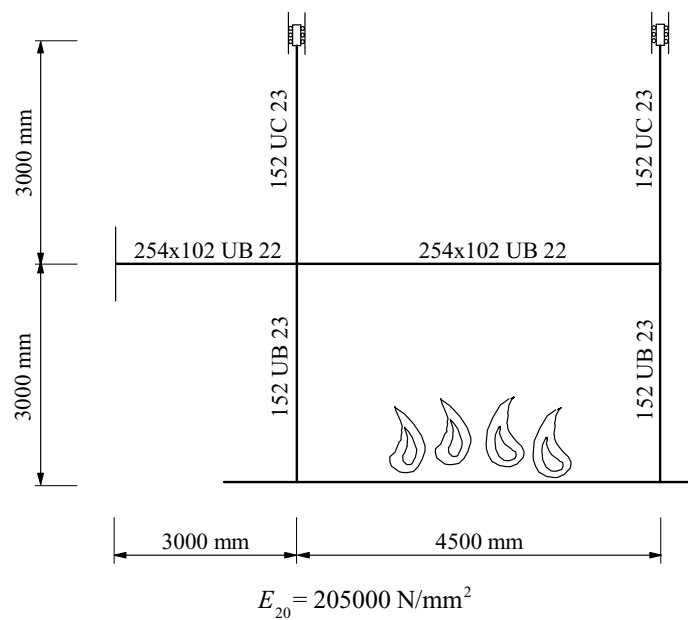


Figura 4.7 – Exemplo 4: Pórtico parcialmente aquecido

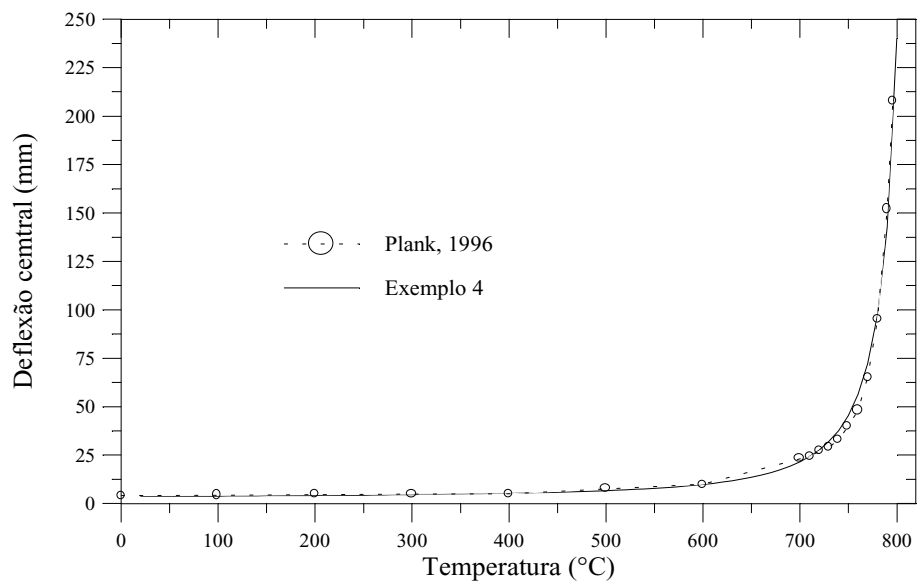


Figura 4.8 – Resultados obtidos para o exemplo 4

#### 4.5 PÓRTICO COM UMA VIGA E UM PILAR

O pórtico apresentado na Figura 4.9 foi discretizado considerando-se dez elementos de mesmo comprimento para o pilar (117 mm) e dez elementos de mesmo comprimento para a viga (124 mm). O perfil IPE 80 utilizado tem seção com 80 mm de altura, 46 mm de largura, 3,8 mm de espessura da alma e 5,2 mm de espessura da aba.

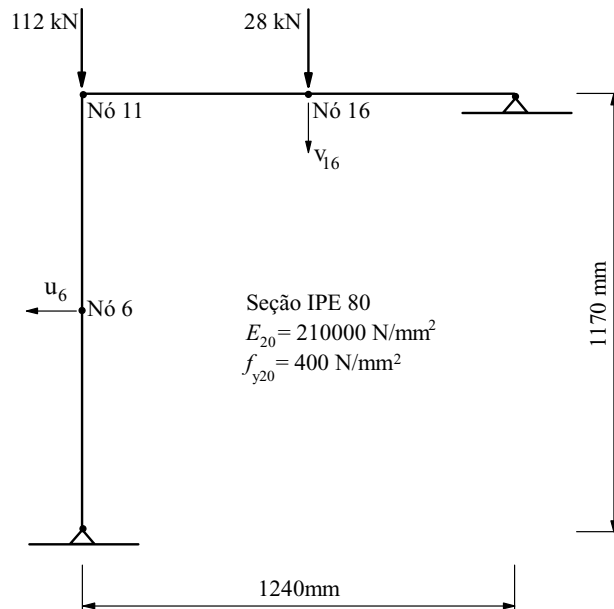


Figura 4.9 - Exemplo 5: Pórtico com uma viga e um pilar

Os valores encontrados para o deslocamento horizontal do nó central do pilar (nó 6) e para o deslocamento vertical do nó central da viga (nó 16) são mostrados na Figura 4.10. Os resultados são comparados com os obtidos por Saab e Nethercot (1991), em sua adaptação do programa INSTAF para análise de pórticos planos sob altas temperaturas. Observa-se que os resultados de Saab e Nethercot apresentam uma temperatura crítica em torno de 480 °C, menor que o obtido no presente trabalho. Usando a curva de variação do módulo de elasticidade adotada no presente trabalho, conforme a equação (2.2), a 480 °C este irá decair de 210000 N/mm<sup>2</sup> para 116113 N/mm<sup>2</sup>. Variando também a tensão de escoamento com a temperatura, usando a curva proposta por Poh e Bennetts (1995), conforme Figura 2.2, este irá de 400 N/mm<sup>2</sup> para 248 N/mm<sup>2</sup>. Usando estes novos valores para o módulo de elasticidade e para a tensão de escoamento, a estrutura da Figura 4.9 foi analisada usando-se o programa de análise elasto-plástica de primeira ordem à temperatura ambiente do Dr. Maheeb Abdel-Ghaffar, da Universidade do Cairo (Chen e Sohal, 1995).

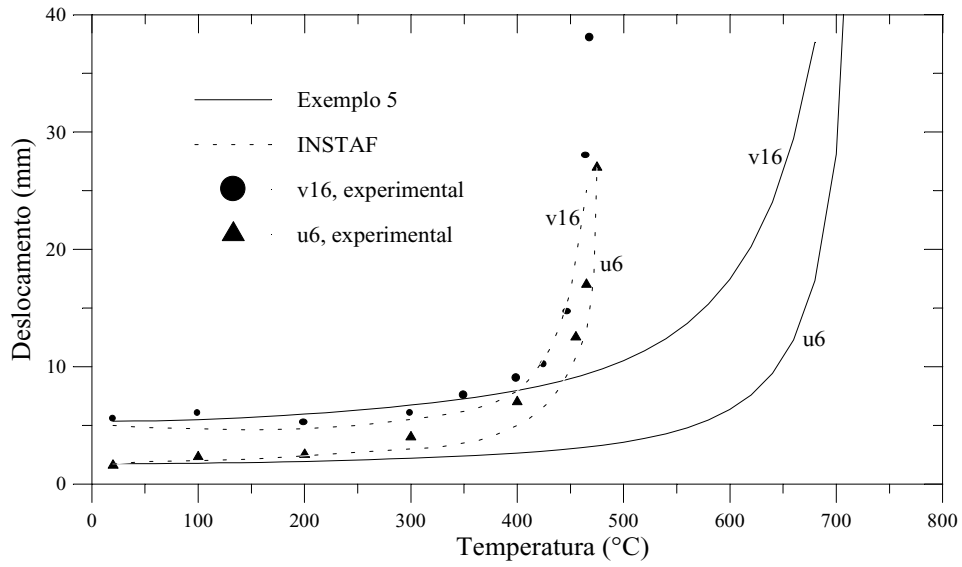


Figura 4.10 - Resultados obtidos para o exemplo 5

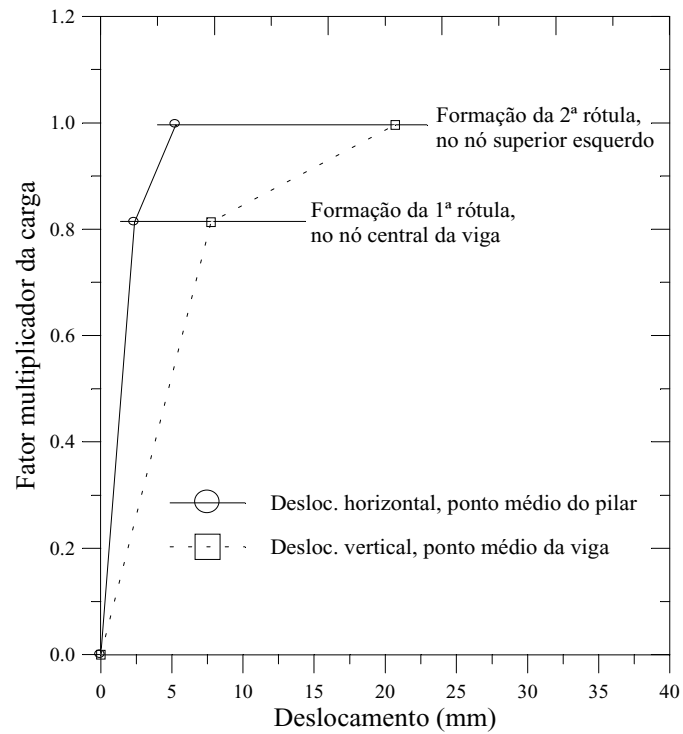


Figura 4.11 - Análise elasto-plástica de primeira ordem do pórtico

Os resultados obtidos com este programa são exibidos na Figura 4.11. A curva mostra que para estes valores a estrutura não suporta o nível de carregamento utilizado; ou seja, para um fator de carregamento igual a 1, ocorrerá a formação de duas rótulas plásticas que provocarão a falha estrutural. Portanto a estrutura apresentada sofrerá uma falha plástica e daí a discordância dos resultados, uma vez que no presente trabalho tem-se somente a análise elástica.

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

#### **5.1 CONCLUSÕES**

Um procedimento baseado em formulação em elementos finitos para análise elástica de estruturas de aço sob incêndio foi apresentado. Considerou-se a não-linearidade geométrica, com grandes deslocamentos, rotações moderadas e pequenas deformações, e também considerou-se a não-linearidade física com a variação do módulo de elasticidade com a temperatura

Os resultados apresentados mostram que o decréscimo no módulo de elasticidade com o aumento da temperatura provoca um aumento na taxa de deflexão dos elementos estruturais. O aspecto das curvas deslocamento-temperatura comprova que não se pode deixar de levar em conta os efeitos de segunda ordem para conseguir-se traçar a correta trajetória da relação deslocamento-temperatura.

Os resultados para os casos onde não ocorrem a plastificação mostraram concordância favorável. Contudo, é de se esperar que a altas temperaturas ocorra uma interação entre o modo de falha elástico e o modo de falha plástico. A velocidade com que a tensão de escoamento decai com a temperatura sugerem que a plastificação não pode ser ignorada na modelagem.

A deformação devida aos efeitos da expansão térmica não demonstrou ter efeitos relevantes nos exemplos analisados, porque nas estruturas examinadas a restrição à expansão térmica não é significativa.

#### **5.2 SUGESTÕES**

Para a continuidade deste trabalho, visando a obtenção final de uma ferramenta de modelagem avançado, a partir da qual o comportamento de pórticos planos de aço e mistos poderá ser efetuado, apresenta-se algumas sugestões a seguir:

- Adotar uma formulação com referencial Lagrangeano atualizado, ao invés do referencial Lagrangeano total aqui adotado. Com a atualização do referencial ameniza-se os

problemas decorrentes dos movimentos de corpo rígido, uma vez que as rotações de corpo rígido são divididas em partes menores, podendo assim serem melhor aproximadas pelas funções de interpolação.

- Implementar os efeitos decorrentes da expansão térmica no modelo. Apesar da expansão térmica não apresentar efeitos relevantes nos exemplos vistos, no caso de elementos com restrição à tal expansão, poderá ocorrer interação entre o esforço, o que causará o colapso a temperaturas menores.

- Permitir diferentes distribuições de temperatura através da seção e ao longo do elemento. Espera-se que a distribuição de temperatura não tenha influência significativa quanto ao colapso da estrutura; contudo, afeta sua trajetória de deformação.

- Implementar uma formulação que leve em conta a plastificação do elemento (ver Apêndice A.3).



## A.1 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Os termos que forma a matriz de rigidez tangente, na equação (2.53), foram calculados simbolicamente com a ajuda do software *Maple V*. São dados por:

$$k_{T(1,1)} = -k_{T(1,4)} = -k_{T(4,1)} = k_{T(4,4)} = \frac{EA}{L}; \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} k_{T(1,2)} = -k_{T(1,5)} = k_{T(2,1)} = -k_{T(2,4)} = -k_{T(4,2)} = k_{T(4,5)} = -k_{T(5,1)} = k_{T(5,4)} = \\ = -\frac{EA}{10L^2} [L(\theta_1 + \theta_2) + 12(v_1 - v_2)]; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$k_{T(1,3)} = k_{T(3,1)} = -k_{T(3,4)} = -k_{T(4,3)} = -\frac{EA}{30L} [L(4\theta_1 - \theta_2) + 3(v_1 - v_2)]; \quad (\text{A.3})$$

$$k_{T(1,6)} = -k_{T(4,6)} = k_{T(6,1)} = -k_{T(6,4)} = \frac{EA}{30L} [L(\theta_1 - 4\theta_2) + 3(v_2 - v_1)]; \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} k_{T(2,2)} = -k_{T(2,5)} = -k_{T(5,2)} = k_{T(5,5)} = \frac{3}{35L^3} [14PL^2 + 140EI + EAL^2(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \\ + 24EA(v_2 - v_1)^2 - 6EAL(v_2 - v_1)(\theta_1 + \theta_2)]; \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} k_{T(2,3)} = k_{T(3,2)} = -k_{T(3,5)} = -k_{T(5,3)} = \frac{1}{140L^2} [14PL^2 + 840EI - 24EAL\theta_1(v_2 - v_1) + \\ - EAL^2(\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 - \theta_2^2) + 36EA(v_2 - v_1)^2]; \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$k_{T(2,6)} = -k_{T(5,6)} = k_{T(6,2)} = -k_{T(6,5)} = \frac{1}{140L^2} [14PL^2 + 840EI - 24EAL\theta_2(v_2 - v_1) - EAL^2(\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 - \theta_1^2) + 36EA(v_2 - v_1)^2]; \quad (\text{A.7})$$

$$k_{T(3,3)} = \frac{1}{210L} [28PL^2 + 840EI + EAL^2(\theta_2^2 - 3\theta_1\theta_2 + 12\theta_1^2) + 18EA(v_2 - v_1)^2 + 3EAL(v_2 - v_1)(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (\text{A.8})$$

$$k_{T(3,6)} = k_{T(6,3)} = -\frac{1}{420L} [14PL^2 - 840EI + EAL^2(3\theta_2^2 + 3\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2) + 6EAL(v_2 - v_1)(\theta_2 + \theta_1)]; \quad (\text{A.9})$$

$$k_{T(6,6)} = \frac{1}{210L} [28PL^2 + 840EI + EAL^2(\theta_1^2 - 3\theta_1\theta_2 + 12\theta_2^2) + 18EA(v_2 - v_1)^2 + 3EAL(v_2 - v_1)(\theta_2 - \theta_1)]. \quad (\text{A.10})$$

A deformação longitudinal do elemento,  $\varepsilon_{xx}$ , pode ser substituída pela expressão abaixo, que melhora, inclusive, os problemas de "travamento de membrana" (Crisfield, 1991)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{L} \int_L \varepsilon_{xx} dx. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a equação (A.11) na expressão da força normal, dada pela equação (2.47), pode-se escrever

$$P = \frac{EA}{L} \int_L \varepsilon_{xx} dx. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a expressão matricial de  $\varepsilon_{xx}$ , dada pela equação (2.24), em (A.12) resultará em

$$P = \frac{EA}{L} \int_L \left( [N'_u] \{d\} + \frac{1}{2} \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] \{d\} - y [N''_v] \{d\} \right) dx. \quad (\text{A.13})$$

Desenvolvendo, vem

$$P = \frac{EA}{L} \int_L [N'_u] \{d\} dx + \frac{EA}{2L} \int_L \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] \{d\} dx - \frac{E}{L} \int_L \int_A y [N''_v] \{d\} dA dx. \quad (\text{A.14})$$

:Como o momento estático é nulo (equação (2.50)), o último termo na equação (A.14) anula-se, e a expressão fica

$$P = \frac{EA}{L} \int_L [N'_u] \{d\} dx + \frac{EA}{2L} \int_L \{d\}^T [N'_v]^T [N'_v] \{d\} dx. \quad (\text{A.15})$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtém-se a equação da força normal  $P$ , a seguir

$$P = \frac{EA}{30L^2} \left[ 30L(u_2 - u_1) + 18(v_2 - v_1)^2 - 3L(v_2 - v_1)(\theta_2 + \theta_1) + L^2(2\theta_2^2 + 2\theta_1^2 - \theta_1\theta_2) \right]. \quad (\text{A.16})$$

O valor calculado de  $P$  pela expressão acima é utilizado no cálculo dos termos da matriz de rigidez e do vetor de forças internas.

## A.2 VETOR DE FORÇAS INTERNAS

O vetor de forças do elemento é obtido a partir do desenvolvimento simbólico da equação (2.43). É dado pelos seguintes termos

$$F_{int(1)} = -F_{int(4)} = -P; \quad (\text{A.14})$$

$$F_{int(2)} = -F_{int(5)} = \frac{1}{10L^3} \left[ (PL^3 + 60EIL)(\theta_2 + \theta_1) - (12PL^2 + 120EI)(v_2 - v_1) \right]; \quad (\text{A.15})$$

$$F_{int(3)} = \frac{1}{30L^2} \left[ PL^3(4\theta_1 - \theta_2) + 60EIL(2\theta_1 + \theta_2) - (3PL^2 + 180EI)(v_2 - v_1) \right]; \quad (\text{A.16})$$

$$F_{int(6)} = \frac{1}{30L^2} \left[ PL^3(4\theta_2 - \theta_1) + 60EIL(2\theta_2 + \theta_1) - (3PL^2 + 180EI)(v_2 - v_1) \right]. \quad (\text{A.17})$$

### **A.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE PLÁSTICA DE PÓRTICOS METÁLICOS SOB ALTAS TEMPERATURAS**

Segundo Chen e Sohal (1995), os modelos para análise inelástica de segunda ordem podem ser divididos em dois tipos principais: ( 1 ) Zona plástica (ou plasticidade distribuída); e ( 2 ) rótula plástica. A análise por zona plástica acompanha a expansão gradual da plasticidade através do volume da estrutura. A plastificação dos elementos estruturais é modelada discretizando-os em vários elementos de viga-coluna e subdividindo-se a seção transversal em várias fibras. Os efeitos de tensões residuais, imperfeições geométricas e endurecimento por deformação podem ser considerados nessa análise. Na análise convencional por rótulas plásticas, é assumido que os elementos são elásticos até que a resistência plástica total da seção transversal seja atingida em algum ponto ao longo do comprimento do elemento. Uma vez que o escoamento ocorre, o comportamento da seção é perfeitamente plástico (sem encruamento). O comportamento inelástico é restrito às rótulas plásticas de comprimento nulo e assume-se que os elementos comportam-se elasticamente entre as rótulas. Apesar da análise por rótulas plásticas e o seu refinamento com o emprego de ligações semi-rígidas poder fornecer boas aproximações quanto à trajetória do deslocamento com o aumento da temperatura (Chiou e Lin, 1991), o ideal é partir-se de um procedimento para análise por zona plástica à temperatura ambiente, adaptando-o para análise sob incrementos térmicos. Além da precisão trazida pela inclusão dos efeitos citados e pela simulação da expansão gradual da plasticidade, a análise por zona plástica permitiria, com pequenas modificações, a discretização de estruturas mistas e estruturas protegidas. O inconveniente da zona plástica seria o esforço computacional bem maior. Contudo, a disponibilidade de recursos computacionais tem se tornado mais e mais freqüente.

## *Referências Bibliográficas*

---

Baba, S. e Nagura, H., “Effect of Material Properties on the Deformation of Steel Frames in Fire”, *Proc. of JSCE Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 2, No. 1, pp.47-57, 1985.

Bailey, C.G., “Simulation of the Structural Behaviour of Steel-Framed Buildings in Fire”, Ph.D Thesis, University of Sheffield, 1995.

Brockenbrough, R., “Theoretical Stresses and Strains from Heating Curve”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 96, No. ST7, pp. 1421-1444, 1970.

Burgess, I.W., El-Rimawi, J. e Plank, R.J., “A Secant Stiffness Approach to the Fire Analysis of Steel Beams”, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 11, pp. 105-120, 1988.

Burgess, I.W., El-Rimawi, J. e Plank, R.J., “Studies of the Behaviour of Steel Beams in Fire”, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 19, pp. 285-312, 1991.

CEN - European Committee for Standardization, ENV 1191-2-2, Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2.2: Actions on structures exposed to fire, Brussels, Belgium, 1995a.

CEN - European Committee for Standardization, ENV 1193-1-2, Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-2: General rules – Structural fire design, Brussels, Belgium, 1995b.

Chajes, A. e Churchill, J.E., “Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 6, pp. 1221-1235, 1987.

Chen, W.F. e Sohal, I, *Plastic Design and Second Order Analysis of Steel Frames*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1995.

Cheng, W. e Mak, K., “Computer Analysis of Steel Frames in Fire”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.101, No. ST4, pp. 855-867, 1970.

Chiou, Y.J. e Lin, Y.R., "A Study of the Fire Response of Flexibly Jointed Steel Frames", *Computer and Structures*, Vol. 45, No. 3, pp. 439-451, 1992.

Crisfield, M.A., *Finite Elements and Solutions Procedures for Structural Analysis*, Vol. 1: Linear Analysis, Pineridge Press, Swansea, England,1986.

Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1: Essentials, John Wiley & Sons, West Sussex, England, 1991.

Culver, C.G., “Steel Column Buckling Under Thermal Gradients”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 98, No. ST8, pp. 1853-1865, 1972.

- Culver, C.G, Aggarwal, V. e Ossembruggen, P.J., “Buckling of Steel Columns at Elevated Temperature”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 99 No. ST4, pp. 715-726, 1973.
- Dotreppe, J.C., Franssen, J. e Schleich, J., “Numerical Simulation of Fire Resistance Tests on Steel and Composite Structural Elements or Frames,” *Fire Safety Science – Proceedings of the First International Symposium*, Oct. 1985.
- Dotreppe, J.C., “Fire Resistance of Steel Structures”, *5th. International Colloquium on Structural Stability*, Structural Stability Research Council, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Aug., 1996.
- Dyn, C.L. e Shames,I.H., *Solid Mechanics: A Variational Approach*, McGraw-Hill, U.S.A., 1973.
- El-Rimawi, J. “The Behaviour of Flexural Members under Fire Conditions”, Ph.D Thesis, University of Sheffield, 1989.
- El-Zanaty, M.H. e Murray, D.W., “Non-linear Finite Element Analysis of Steel Frames”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.109, No. ST2, pp. 353-368, 1983.
- Furumura, F. e Shinohara, Y., “Inelastic Behaviour of Protected Steel Beams and Frames in Fire”, *Report of the Research Laboratory of Engineering Materials*, No.3, pp. 1-14, 1978.
- Iding, R. e Bresler, B., “Effect of Fire Exposure on Steel Frame Buildings”, *Final Report*, WJE No. 78124, Janney Elstner and Associates, Sep. 1981.
- IISI – International Iron and Steel Institute, “Fire Engineering Design for Steel Structures: State of the Art”, IISI, Brussels, Belgium, 1995.
- ISO - International Organization for Standardization. ISO-834 *Fire resistance tests - Elements of building construction*. Part 1. Geneva, 1992.
- Jeyarupalingam, N. e Viridi, K.S., *Steel Beams and Columns Exposed to Fire Hazard. Structural Design for Hazardous Loads*, Edited by J.L. Clark, F.K.Garas e G.S.T Armer, E&FN Spon, 1992.
- Jain, P. e Rao, R., “Analysis of Steel Frames Under Fire Environment”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 1467-1478, 1983.
- Kirby, B.R. e Preston, R.R., “High Temperature Properties of Hot-rolled, Structural Steel for Use in Fire Engineering Design Studies”, *JSCE Structural Engineering/Earthquake Engineering*, Vol. 2, No. 1, pp. 47-57, 1985.
- Knight, D., “The Behaviour of Steel Structures in Fire”, *Broken Hill Propriety Technical Bulletin*, Vol. 16, No.2, Nov. 1972.
- Kruppa, J., “Collapse temperature of Steel Structures”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.105, No. ST9, pp. 1769-1787, 1979.

Leston-Jones, L.C., Burgess, I.W., Lennon, T. Plank, R.J., “Elevated-Temperature Moment-Rotation Tests on Steelwork Connections”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Structures and Buildings*, Vol. 122, pp. 410-419, 1997.

Liu, T.C.H., “Finite Element Modelling of Behaviour of Steel Beams and Connections in Fire”, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol.36, No. 3, pp. 181-199, 1996.

Marchant, E., *A Complete Guide to Fire and Buildings*, Medical and Technical Publishing Co., London, 1972.

Najjar, S.R., *Three-Dimensional Analysis of Steel Frames and Subframes in Fire*”, Ph.D Thesis, University of Sheffield, 1994.

Olawale, A.O. e Plank, R.J., “The Collapse Analysis of Steel Columns in Fire Using a Finite Strip Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*”, Vol. 26, pp. 2755-2764, 1988.

Ossebrugen, P.J., Aggarwal, V. e Culver, C.G., “Steel Column Failure Under Thermal Gradients”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 99, No. ST4, pp. 727-739, 1973.

Plank, R.J., *Fire Engineering of Steel Structures*, Cadernos de Construção Metálica, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, 1996.

Poh, K.W. e Bennets, I.D., “Analysis of Structural Members Under Elevated Temperature”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 4, pp. 664-675, 1995.

Rubert, A. e Schaumann, P., "Temperaturabhängige Werkstoffigenschaften von Baustahl bei Brandbeanspruchung", *Stahlbau*, No. 3, pp. 81-84, 1985.

Saab, H.A. e Nethercot, D.A., “Modelling Steel Frame Behaviour Under Fire Conditions”, *Engineering Structures*, Vol 13, No. 4, pp. 371-382, 1991.

Sharples, J.R., “The Strength of Partially Exposed Steel Columns in Fire”, M.Phil. Thesis, University of Sheffield, 1987.

Silva, V.P., “Estruturas de Aço em Situação de Incêndio”, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

Silva, V.P., Fakury, R.H., Pimenta, R.J., Rodrigues, F.C., “Dimensionamento de Estruturas de Aço de Edifícios em Situação de Incêndio”, *Anais das XXVII Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural*, Associação Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Departamento de Engenharia de Estruturas EESC-USP, São Carlos, pp. 685-694, 1997.

Torkamani, A.M., Sonmez, M. e Cao, J., “Second-order Elastic Plane-frame Analysis Using Finite Element Method”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol 123, No. 9, pp. 125-1235, 1997.

Virdi, K.S. e Dowling, P.J. “The Ultimate Strength of Composite Columns in Biaxial Bending”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, Mar. 1973.

Wainman, D.E., e Kirby, B.R., *Compendium of UK Standard Fire Test Data, Unprotected Structural Steel - Vol. 1*, Ref. No. RS/TSC/S10328/1/87/B. British Steel Corporation, Swinden Laboratories, Rotherham, 1988.

Wainman, D.E., e Kirby, B.R., *Compendium of UK Standard Fire Test Data, Unprotected Structural Steel - Vol. 2*, Ref. No. RS/R/S1199/8/88/B, British Steel Technical, Swinden Laboratories, Rotherham, 1989

Wang, Y.C. e Lennon, T., “A computer program for structural analysis at elevated temperatures”, Building Stablishment Client Report, CR77/92, 1992.

Witteveen, J., “Some Aspects with Regard to the Behaviour of the Calculation of the Steel Structures in Fire”, *Symposium No. 2 – Behaviour of Structural Steel in Fire*, Fire Research Station, Borehamwood Herts. 24th Jan. 1967.

Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Vol. 2, 4th ed., McGraw-Hill, London, 1991.