Contribuições da razão áurea para a aprendizagem de proporcionalidade

Alexandre Ramon de Souza

Maria do Carmo Vila

Contribuições da razão áurea para a aprendizagem de proporcionalidade

EDITORA UFOP

Ouro Preto|2014

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas|Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação|Mestrado Profissional em Educação Matemática

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br.

A natureza escreve, o matemático e o artista se dão as mãos e leem a natureza:
o número de ouro.
Luiz Barco

Expediente Técnico

Organização | Alexandre Ramon de Souza

Pesquisa e Redação | Alexandre Ramon de Souza e Maria do Carmo Vila

Revisão | Maria do Carmo Vila

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Índice

Introdução

Ao escolher a razão áurea para levar os alunos à aprendizagem de razão e proporção, meu desejo era muito mais do que apenas o conteúdo matemático; era oferecer uma oportunidade de lhes apresentar situações em que grandes artistas aplicaram a matemática em suas obras.

O trabalho proporcionou momentos de admiração, de curiosidade e, o mais importante, de aprendizagem. A manifestação dos alunos ao final de cada atividade motivou-me muito.

Foi muito satisfatório para o professor perceber que os alunos se empenharam em realizar as atividades. Eles faziam reflexões, participavam ativamente dos debates e envolviam-se com a aprendizagem. Foram muitos os momentos em que interagiram entre eles e, também, com o professor.

É gratificante proporcionar aos nossos alunos oportunidades de aprendizagem que vão além da matemática, passando pela história, arte, biologia e outras áreas do conhecimento.

Espero que você, colega, também goste deste trabalho com a razão áurea e possa, assim como eu, verificar as contribuições desse conteúdo para a aprendizagem de proporcionalidade e de sua aplicação em outras áreas do conhecimento.

Razão áurea

Quando se analisam as diversas situações em que a razão áurea aparece, percebe-se que se trata de um número diferenciado, haja vista que suas aplicações englobam diversas áreas de conhecimento tais como a biologia, a música, a literatura, as artes, a arquitetura e a própria matemática como, por exemplo, a sequência de Fibonacci. Sobre a razão áurea, Kepler (1571 – 1630) fez o seguinte comentário:

> A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razão. O primeiro, podemos comparar a uma medida do áureo; o segundo podemos chamar joia preciosa. (KEPLER, s/d *apud* HUNTLEY, 1985, p. 35).

A primeira definição de razão áurea apareceu por volta de 300 a. C., no livro XIII, proposição 5, de Euclides de Alexandria. Sobre esse tema, a poetisa Edna St. Vicent Millay (1923) escreveu um poema com o título *Somente Euclides viu a beleza nua*. Euclides (s/d) apud Lívio (2007) definiu essa proporção da divisão de uma linha que ele chamou de razão extrema e média. Nas palavras de Euclides (s/d) *apud* Lívio (2007, p. 13 e 14), “diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor”. Essa definição pode ser mais bem entendida, usando a figura seguinte:

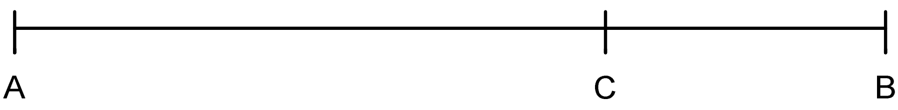


FIGURA 1 - Divisão de um segmento em média de extrema razão

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se dizer que o comprimento do segmento AB é, certamente, maior que o do segmento AC; da mesma forma, o comprimento do segmento AC é maior que o do segmento CB. Se a razão entre os comprimentos dos segmentos AB e CB for igual à razão entre os comprimentos dos segmentos AC e CB, então esse segmento AB foi dividido na razão extrema e média, ou numa razão áurea.

Como imaginar que um simples segmento, que Euclides definiu com objetivos puramente geométricos, poderia abranger temas que vão da botânica às galáxias ou da matemática às artes? Um valor sentimental e espantoso foi dado por Einstein que disse:

> A melhor coisa que podemos vivenciar é o mistério. Ele é a emoção fundamental que está no berço da ciência e da arte verdadeiras. Aquele que não o conhece e não mais se maravilha, não sente mais o deslumbramento, vale o mesmo que um morto, que uma vela apagada. (Einstein, s/d *apud* Lívio 2007, p.14)

Calculando a razão áurea

Na Figura 2, fazendo AC = x e CB = 1, tem-se que:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

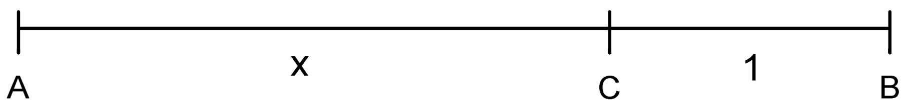


FIGURA 2 - Cálculo da razão áurea

Fonte: Elaborada pelo autor

Logo: $x^2 = x + 1$. Resolvendo essa equação, obtêm-se as seguintes raízes:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

A solução positiva da equação é chamada razão áurea, usualmente, nomeada pelo símbolo **Φ** (lê-se phi).

Calculando a raiz positiva da equação, chega-se ao seguinte resultado aproximado:

$$\Phi \approx 1{,}618$$

Ou seja, a razão áurea é, aproximadamente, igual ao número 1,618.

Construindo o segmento áureo com régua e compasso

Para construir um segmento áureo usando régua e compasso, procede-se do seguinte modo:

a) Dado um segmento AB qualquer, obter o ponto médio de AB, usando o compasso e a régua. Em seguida, traçar uma reta perpendicular à reta AB, passando por B com a metade do comprimento do segmento AB.

b) Centrando o compasso em B, traçar uma circunferência que intercepte a perpendicular no ponto C de raio BM. O segmento BC é perpendicular ao segmento AB medindo a metade do segmento AB. Unir os pontos A e C de modo a obter o triângulo ABC.

c) Com o centro do compasso em C e abertura até B, marcar um novo ponto E em AC (hipotenusa) do triângulo. Agora com centro em A e abertura até E, obter o ponto D no segmento AB do triângulo, esse é o ponto que divide o segmento AB em média e extrema razão, ou ainda, o comprimento da maior parte de AB é 1,618.vezes a menor parte de AB. Esse procedimento pode ser visualizado na Figura 3.

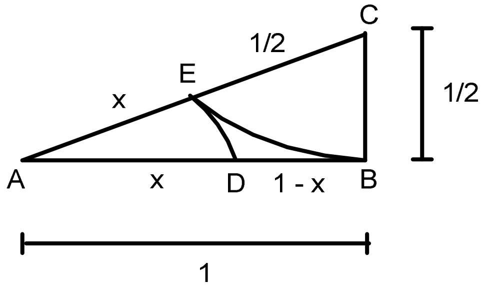


FIGURA 3 - Construção geométrica do segmento áureo

Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se, também, construir um retângulo áureo a partir do menor lado, da seguinte forma:

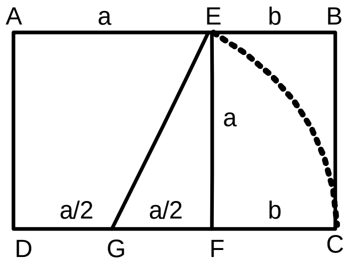


FIGURA 4 - Construção geométrica do segmento áureo a partir do menor lado

Fonte: Elaborada pelo autor

Seja G o ponto médio do segmento DF. Com o compasso centrado em G, traçar o arco EC, sendo C um ponto da reta DF e F pertencente ao segmento DC.

Pode-se, ainda, construir um decágono regular inscrito em uma circunferência. A construção do lado de um decágono (l_{10}) é equivalente à construção de um arco de medida de 36°, isto é, equivalente à décima parte de uma circunferência dada.

a) Seja, então, numa circunferência de centro A e raio r, o ângulo central CÂB com medida 36°.

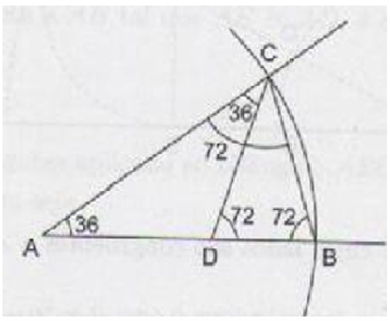


FIGURA 5 – Decágono e razão áurea

Fonte: Rezende e Queiroz, 2008, p.164.

b) O triângulo ABC é isósceles de base BC, com ângulo da base medindo 72°. Seja o segmento CD congruente ao segmento BC com D pertencente a AB. Logo, ambos são congruentes ao lado l_{10} do decágono regular inscrito.

c) O triângulo CDB é, então, isósceles e tem por base o segmento DB. Dessa forma, m(CDB) = 72°.

d) Decorre daí que os triângulos ABC e CDB são semelhantes. Assim sendo, vale a relação AB/CB = CB/DB.

e) O triângulo ADC, por sua vez, é isósceles com base AC, tendo em vista que m(ACD) = 36º = m(CÂD).

f) Dessa forma, tem-se que m(AD) $\cong$ m(CD) $\cong$ m (l_{10}).

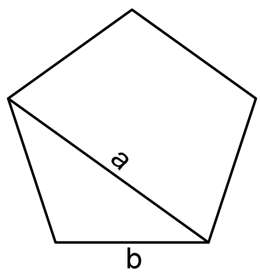
Isto mostra que r/m(l_{10}) = m(l_{10})/(r – m(l_{10})). Logo, l_{10} é o segmento áureo do raio da circunferência inicial.

Simbolicamente: m (l_{10})= r $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Observação: O triângulo isósceles ABC, cujo ângulo da base mede 72º, é chamado de triângulo áureo. Observa-se que a razão de semelhança entre o triângulo ABC e o triângulo CDB é a razão áurea.

Os pitagóricos e a razão áurea

Os pitagóricos sabiam que havia uma relação áurea entre a medida da diagonal do pentágono regular e a medida do seu lado, conforme mostra a figura seguinte.



Relação áurea

$$\frac{a}{b} \approx 1{,}61$$

FIGURA 6 - Pentágono e razão áurea

Fonte: Elaborada pelo autor

Os pitagóricos também sabiam que a relação entre a medida do raio de uma circunferência circunscrita ao decágono regular e a medida de um de seus lados estavam em razão áurea.

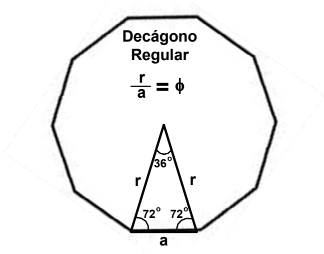
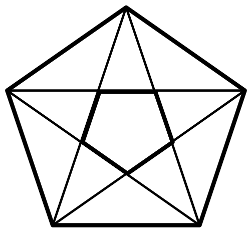


FIGURA 7- Decágono inscrito e razão áurea

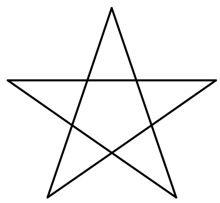
Fonte: Elaborada pelo autor

O pentagrama era um símbolo e o emblema da Sociedade de Pitágoras; por meio dele, um membro da sociedade era reconhecido e era, também, considerado por esses um símbolo de boa saúde.

O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama.



pentágono e suas diagonais



pentagrama

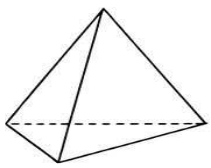
FIGURA 8- Pentagrama e razão áurea

Fonte: Elaborada pelo autor

O pentagrama detém uma série de razões áureas. Uma delas é a seguinte: a razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. Também pode ser constatado que a razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual à quarta potência da razão áurea.

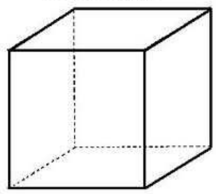
Na escola de Pitágoras, já se sabia que havia cinco, e somente cinco, sólidos convexos regulares, cada um deles podendo ser circunscrito por uma esfera. São eles: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Tais poliedros estão associados ao nome de Platão por ele ter relacionado esses poliedros com os elementos importantes ao qual o mundo fosse feito: terra, fogo, ar, universo, água, respectivamente.

TETRAEDRO



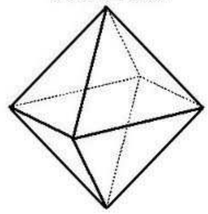
Possui 4 faces que são triângulos equiláteros.

HEXAEDRO



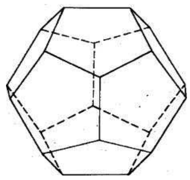
Possui 6 faces que são quadrados.

OCTAEDRO



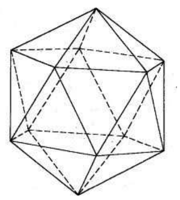
Possui 8 faces que são triângulos equiláteros.

DODECAEDRO



Possui 12 faces que são pentágonos regulares.

ICOSAEDRO



Possui 20 faces que são triângulos equiláteros.

FIGURA 9 – Poliedros de Platão

Fonte: Elaborada pelo autor

Unindo-se os centros dos lados do cubo formar-se-á um octaedro, enquanto a união dos centroides do octaedro forma um cubo. Relação semelhante verifica-se entre o dodecaedro e o icosaedro. A união de quatro centroides dos lados do tetraedro dá origem a outro tetraedro.

Segundo Huntley (1985), um gosto pelos mistérios levou os gregos antigos a atribuir um significado especial ao dodecaedro. Suas doze faces regulares correspondiam aos doze signos do zodíaco. Era um símbolo do universo. É interessante observar que, no dodecaedro, o ponto de intersecção de duas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea. Cada face pentagonal, associada à divisão áurea, era de interesse especial para os pitagóricos.

O teorema de Pitágoras também guarda relação com a razão áurea, como se pode observar a seguir. Os egípcios utilizavam o triângulo cujos comprimentos dos lados eram 3, 4, 5, pois sabiam que ele possuía um ângulo reto. Se forem efetuadas construções geométricas nesse triângulo, percebe-se que a razão áurea aí também aparece.

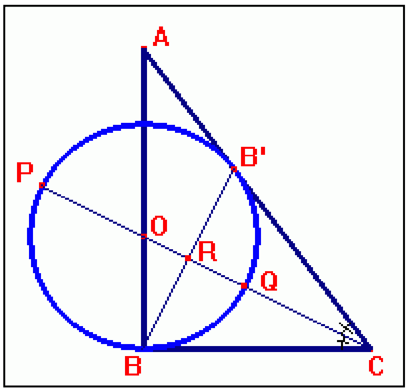


FIGURA 10– Teorema de Pitágoras e razão áurea

Fonte: Queiroz, 2008, pág.12

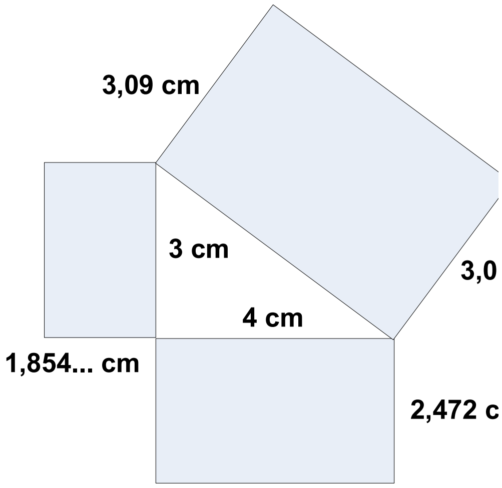
A bissetriz do ângulo C intercepta o lado AB em O; logo, pode-se construir um círculo com centro em O e raio OB. A hipotenusa AC tangencia o círculo no ponto B’. O segmento BB’ intercepta o segmento CO no ponto R. O segmento CO corta o círculo no ponto Q e o ponto Q divide o segmento CP na proporção áurea, ou seja:

$$\frac{m(\overline{CP})}{m(\overline{PO})} = \square \qquad \frac{m(\overline{PQ})}{m(\overline{CQ})} = \square \qquad \frac{m(\overline{OR})}{m(\overline{RQ})} = \square$$

Embora não haja documentos da época, provavelmente, foram os pitagóricos os primeiros a demonstrarem a relação entre os lados do triângulo retângulo: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Tal relação é conhecida como o teorema de Pitágoras. Conforme salienta Boyer (1996),

> Tendo desenvolvido a teoria das proporções no livro V, Euclides explorou-a no livro VI provando teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos semelhantes. Merece destaque a Proposição 31, uma generalização do teorema de Pitágoras. “Em triângulos retângulos a figura sobre o lado que subtende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contém o ângulo reto”. Proclo atribui esta extensão ao próprio Euclides. O livro VI contém também (nas Proposições 28 e 29) uma generalização do método de aplicação das áreas, pois a base sólida para as proporções, dada no livro V, permitia ao autor fazer uso livre do conceito de semelhança. (BOYER, 1996 p.78).

É interessante observar a relação das áreas dos retângulos áureos construídos a partir dos lados de um triângulo retângulo.



3 x 1,854... + 4 x 2,472... ≈ 5 x 3,09

$$\frac{3}{1{,}854\ldots} \approx 1{,}61$$

$$\frac{4}{2{,}472\ldots} \approx 1{,}61$$

$$\frac{5}{3{,}09\ldots} \approx 1{,}61$$

FIGURA 11 - Triângulo retângulo e áreas dos retângulos áureos

Fonte: Elaborada pelo autor

Relevância do tema razão áurea

A razão áurea é um tema que possibilita a exploração de vários conteúdos matemáticos e suas aplicações se estendem por diversas áreas do conhecimento humano. Portanto, ele se constitui em conteúdo importante no ensino da Matemática.

No primeiro caso, observa-se que, ao desenvolver o trabalho com a razão áurea, três eixos temáticos citados no CBC (2007) são estudados pelos alunos. O eixo temático "Espaço e forma" permite desenvolver habilidades como reconhecer as propriedades das figuras planas tais como os triângulos, quadrados, retângulos; identificar segmento e seu ponto médio, elementos de triângulos e polígonos; reconhecer e descrever objetos do mundo físico utilizando termos geométricos; construir perpendiculares, paralelas e mediatriz de um segmento usando régua e compasso; reconhecer a mediatriz e a bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso; retas paralelas e perpendiculares, construção de triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos, hexágonos e outros polígonos

O eixo temático "Números e Operações" funde-se com o eixo "Expressões Algébricas", ajudando a desenvolver algumas importantes habilidades: realizar cálculos numéricos, resolver problemas que envolvam grandezas diretamente proporcionais; resolver problemas que envolvam números racionais; reconhecer a razão áurea como número irracional por meio da resolução de uma equação do segundo grau.

Outra vantagem do estudo da razão áurea é que ela possibilita o uso de instrumentos de construção como régua, transferidor e compasso ou, então, *softwares* de geometria dinâmica. São atividades de desenho geométrico que podem trazer muitos benefícios para o aprendizado da Matemática, conforme salienta Marmo e Marmo.

> O Desenho Geométrico estabelece um canal de comunicação universal para a transmissão da linguagem gráfica. É disciplina que permite ao estudante tirar uma série muito grande de conclusões a partir de um mínimo de informações, liberando a criatividade. Interliga as demais

> disciplinas ajudando a compreensão de desenhos em geral e a resolução de questões de natureza prática do cotidiano. O Desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, fortalecendo o ensino desta importante matéria. (MARMO e MARMO, 1994, p.6)

A razão áurea também pode ser importante no aprendizado da Matemática ao ser encontrada em situações tão diversas como na vida cotidiana, na natureza, na arquitetura, na odontologia, na música e na pintura.

Na vida cotidiana, ela pode ser observada, por exemplo, em cartões de crédito, em uma folha de papel ou uma tela de televisão plana, conforme se pode observar nas três figuras seguintes.

r

s

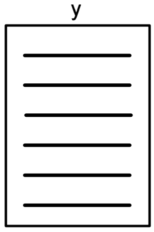
$$\frac{r}{s} = \phi$$

FIGURA 12 - Razão áurea e cartão de crédito

Fonte: Adaptada da página do Universo Fantástico[1]

y

x

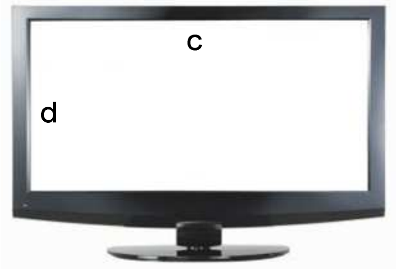


$$\frac{x}{y} = \phi$$

FIGURA 13 - Razão áurea e folha de papel A4

Fonte: Elaborada pelo autor

[1] Disponível em <http:// www.universofantastico.blogspot.br>. Acesso em 22/042013.



$$\frac{c}{d} = \phi$$

FIGURA 14 - Razão áurea e tela plana de televisão

Fonte: Adaptada da página TV digital – Brasil escola [2]

Os alunos poderão, também, encontrar a razão áurea na natureza como, por exemplo, na concha do caracol nautilus, na distribuição das sementes das plantas, nas escamas de peixe, na margarida, no girassol, nos chifres dos cordeiros selvagens, nas presas dos elefantes, na concha de moluscos, entre outros. Trata-se de observar espirais logarítmicas e a sequência de Fibonnaci, para encontrar a razão áurea.

FIGURA 15 – Girassol e razão áurea

Fonte: Página Universo da Gil[3]

[2] Disponível em <http://www.brasilescola.com/informatica/tv-digital.htm > Acesso em 22/04/2013.

[3] Disponível em < http:// www.universodagil.blogspot.com> Acesso em: 22/04/2013

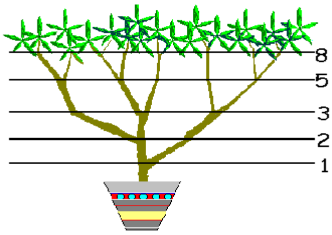


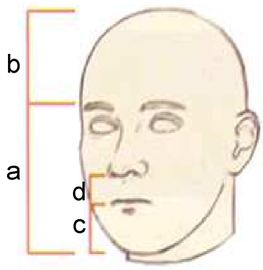
FIGURA 16 - Razão áurea e plantas

Fonte: Figura adaptada da página O lápis Verde[4]

FIGURA 17 - Caracol nautilus e razão áurea

Fonte: Portal Sercomtel [5]

No corpo humano, a presença da razão áurea pode ser detectada entre medidas de comprimentos de várias de suas partes, conforme mostram as Figuras 17, 18 e 19.



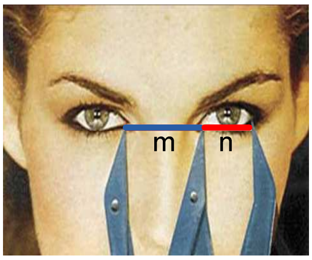
$$\frac{a}{b} = \phi \qquad \frac{c}{d} = \phi$$

FIGURA 17 - Rosto humano e razão áurea

[4] Disponível em: <http://www.olapisverde.blogspot.br-> Acesso em: 22/04/2013.

[5] Disponível em: < http://www.sercomtel.com.br> Acesso em: 22/042013.

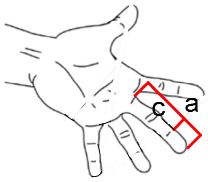
Fonte: Figura Fonte: adelmomedeiros.com [6]



$$\frac{m}{n} = \phi$$

FIGURA 18 - olhos e razão áurea

Fonte Página do Design.blog [7]



$$\frac{a}{c} = \phi$$

FIGURA 19 - Dedo e razão áurea

Fonte: Figura adaptada da página da Wikipédia[8]

Na arquitetura, a razão áurea serviu de base para a construção de edifícios tanto na Antiguidade como em tempos modernos. Por exemplo, o Parthenon, edifício grego representativo do século de Péricles e construído entre 447 a. C. e 443 a. C., apresenta a razão áurea entre algumas de suas medidas. O mesmo acontece com o Taj Mahal, construído pelo imperador indiano Shah Jahan, entre 1630 e 1652, sobre o túmulo de

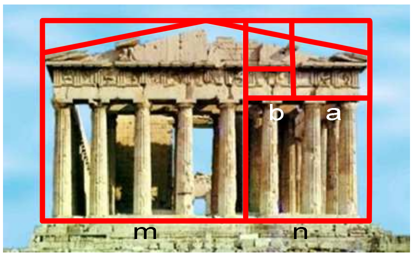
---

[6] Disponível em: < http://www.adelmomedeiros.com.br>. Acesso em: 22/042013.

[7] Disponível em: < http://www.design.blog.br>. Acesso em: 22/04/2013.

[8] Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea. Acesso em: 22/04/2013.

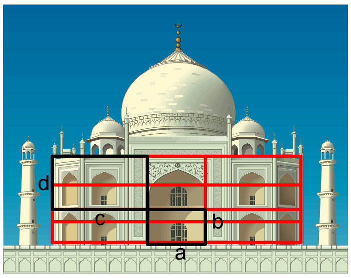
sua esposa chamada Aryumand Banu Began. Em tempos modernos, a razão áurea pode ser observada em três retângulos áureos que se encontram na fachada principal do edifício sede das Nações Unidas, em Nova York.



$$\frac{m}{n} = \phi \qquad \frac{a}{b} = \phi$$

FIGURA 20 – Parthenon e razão áurea

Fonte: Figura adaptada da página Um universo fantástico[9]



$$\frac{a}{b} = \phi \qquad \frac{c}{d} = \phi$$

FIGURA 21 - Taj Mahal e razão áurea

Fonte: Figura adaptada da página Phi – O número de ouro[10]

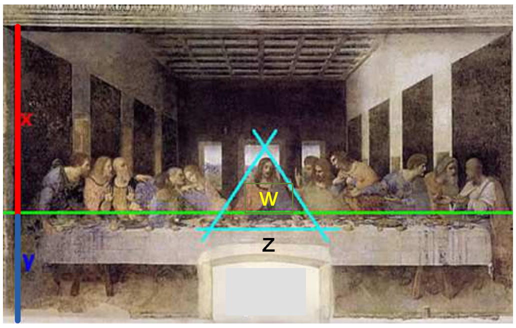
A razão áurea tem sido usada nas artes por grandes pintores e escultores. O universalmente famoso quadro da Monalisa, pintado por Leonardo da Vinci, apresenta a

[9] Disponível em: <http://umuniversofantastico.blogspot.com.br/.Acesso em: 22/04/2013.

[10] Disponível em: http://razaoaureaifsc.blogspot.com.br/2012/09/aplicacoes-da-razao-aurea.html. Acesso em 22/04/2013.

proporção áurea na face, bem como em relações no tronco. Na *Última Ceia* de Da Vinci, o pintor também utilizou a razão áurea.

Boticelli, pintor italiano do Renascimento, em seu quadro *O nascimento de Vênus*, a imagem de *Afrodite* está na proporção áurea. Outros mestres da pintura, como Giotto e Salvador Dalí, também usaram a razão áurea em suas obras.



$$\frac{x}{y} = \phi \qquad \frac{z}{w} = \phi$$

FIGURA 22 - Útima Ceia de Da Vinci e razão áurea

Fonte: Figura adaptada da página B. Piropo[11]

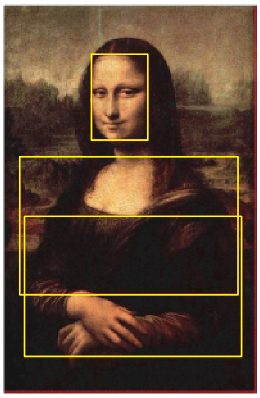


FIGURA 23 -Monalisa e razão áurea

Fonte: Figura adaptada da página De tudo um pouco[12]

[11] Disponível em: <http://www.bpiropo.com.br>. Acesso em 22/04/2013.

[12] Disponível em <http://www.deumtudo2.blogspot.com> Acesso em 22/04/2013.

Considerações sobre a proporcionalidade

O ensino da Matemática vem sofrendo grandes mudanças na maioria dos países, visando substituir o ensino tradicional, que leva os alunos a uma memorização de conteúdos, ao aprendizado de técnicas e fórmulas de uso imediato, à resolução de exercícios padronizados. A matemática é mais do que isso. Para Garcia (2009), ela desempenha um papel importante na formação do cidadão, pois permite ao ser humano desenvolver estratégias, enfrentar desafios, comprovar e justificar resultados em outras atividades, além de estimular a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio lógico, a iniciativa pessoal e o trabalho coletivo.

No Brasil, de acordo com os PCN (1997), os objetivos do ensino fundamental consistem em conduzir o aluno a compreender e a transformar o mundo à sua volta, estabelecer relações de qualidade e quantidade, resolver situações-problema, comunicar-se matematicamente, estabelecer ligações dentro e fora da matemática com os outros conteúdos, promover-lhe autoconfiança e interação com seus colegas. Neles também constam que

> O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia, advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 26).

Ainda de acordo com os PCN, as finalidades do ensino da Matemática indicam que os objetivos do ensino fundamental consistem em levar o aluno a:

> - Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas;
>
> - Fazer observações sistemáticas de aspectos qualitativos e quantitativos do ponto de vista de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e

> produzir informações relevantes para interpretá-las e avaliá-las criticamente (BRASIL, 1997, p. 37).

Segundo o Currículo Básico Comum de Minas Gerais - CBC-MG 2005, as metodologias utilizadas devem priorizar a participação do aluno ativamente por meio da leitura de textos matemáticos, estudos dirigidos, trabalhos em grupo, atividades lúdicas, curiosidades, exposições e murais, e, se puder, de recursos computacionais com *softwares* de geometria dinâmica e experimentos de cálculo.

Apesar dessas recomendações e dos esforços da comunidade de educação matemática junto aos docentes, as mudanças ainda não se concretizaram na maioria das escolas brasileiras. Isso pode ser sentido quando o professor de uma determinada série detecta que seus alunos não possuem os pré-requisitos necessários para o aprendizado de um determinado tema, embora eles já o tenham estudado anteriormente. Tal é o caso, por exemplo, da proporcionalidade, estudada pelos alunos no 7º ano, tão necessária no 9º ano do ensino fundamental para a aprendizagem da semelhança de triângulos, do Teorema de Tales e de suas aplicações, e outros temas.

Dentre os temas matemáticos considerados importantes no que se refere ao seu papel formativo e funcional, encontra-se a proporcionalidade. De fato, esse tema não somente faz parte do contexto prático, auxiliando na resolução de problemas cotidianos, como no âmbito escolar, servindo de ligação entre os diversos campos da matemática e das outras áreas do conhecimento. Como afirmam Ponte e Silvestre (2008):

> O conceito de proporcionalidade é fundamental na interpretação de fenômenos do mundo real e na resolução de problemas do cotidiano. No contexto escolar, o raciocínio proporcional é importante para a aprendizagem da Álgebra, Geometria e Trigonometria e de outras disciplinas como a Física e a Química (PONTE; SILVESTRE, 2008, p. 1).

Ideia semelhante é manifestada por Lesh, Post e Bohr (1995), que afirmam:

> O fato de muitos aspectos de nosso mundo funcionar de acordo com regras de proporcionalidade faz com que a faculdade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 90).

Lesh, Post e Behr (1988) ainda afirmam que esse conceito constitui o culminar da Matemática elementar e representa o alicerce da Matemática dos anos seguintes, sendo sua aprendizagem um dos principais objetivos do ensino dessa disciplina.

Spinillo (1997) considera que esse conceito é importante para vivenciar situações cotidianas e para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo das pessoas.

O estudo da proporcionalidade contribui para a formação de estruturas cognitivas para que outros conceitos matemáticos sejam compreendidos, tanto em questões que envolvem apenas números como em questões que relativas à geometria. O conceito de proporcionalidade permite várias aplicações no cotidiano das pessoas (ao interpretar uma estatística ou um gráfico, ao analisar ou preparar uma planta de um imóvel, ao analisar um mapa, ao estimar uma probabilidade, ampliar uma foto, etc.), em diversos domínios da Matemática e em várias outras áreas do conhecimento (geografia, física, química, etc.).

Críticas (GONÇALVES, 2010; CARRAHER ET AL., 1986) têm sido feitas com relação ao ensino da proporcionalidade em escolas brasileiras. Uma delas é que, em geral, esse tema só é introduzido no 7º ano do ensino fundamental, privilegiando-se a regra de três como meio de resolução de problemas.

Outra crítica, segundo Gonçalves (2010), refere-se à sua abrangência. Se antes se falava em proporção e no algoritmo da regra de três, hoje, estabelece-se como meta o ensino/aprendizagem da proporcionalidade. Trata-se de um termo relativamente novo que, na visão de Vergnaud (2003), constitui um campo conceitual formado por um tripleto:

- conjunto das situações que exigem operações de multiplicação e divisão;
- conjunto dos esquemas e dos invariantes operatórios (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) suscetíveis de serem usados para tratar essas situações;
- conjunto de representações linguísticas, diagramas, quadros, álgebras e grafos suscetíveis de serem utilizados para representar as relações apropriadas e comunicar a respeito delas.

Boisnard *et al* (1994) também demonstram entendimento dessa abrangência quando afirmam que a simples aprendizagem mecânica da regra de três e de todas as regras que dela decorrem não são suficientes para fornecer um verdadeiro conhecimento da proporcionalidade. Isto é, uma boa representação do conceito subjacente a todos os problemas, todos os métodos de resolução e todas as propriedades matemáticas que compõem essa aprendizagem particular, que é designada pelo termo proporcionalidade.

Na opinião de Spinillo (1997), os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual adequada da proporção, evitando a visão simples e errada de que se trata de um tópico do currículo de matemática onde o algoritmo, a regra de três, é o centro do processo de aprendizagem. Esta visão deve ser superada no meio escolar.

Ao constatar que seus alunos do 9º ano do ensino fundamental não possuem os conhecimentos básicos de proporcionalidade para iniciar o estudo sobre semelhanças, Teorema de Tales e aplicações desse teorema, o professor se pergunta: - “O que devo fazer? Ensinar novamente esse conteúdo? Solicitar aos alunos que façam uma revisão do conteúdo? Considerar que este não é um problema meu, pois os alunos deveriam ter aprendido esse conteúdo em séries anteriores, e, assim, continuar a desenvolver normalmente meu plano da disciplina?”.

Em grande parte das escolas brasileiras, a proporcionalidade é abordada a partir do 9º ano do ensino fundamental, deixando um hiato nas séries anteriores. Pesquisas têm mostrado que os conceitos relevantes para a formação matemática atual devem ser trabalhados com os alunos desde a fase inicial da formação escolar. Isso é válido mesmo para aqueles mais complexos como a proporcionalidade. Esse ponto de vista é defendido nos PCN (BRASIL, 2008):

> O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos (BRASIL, 2008, p. 22-23).

Portanto, não se espera que a construção de um conceito matemático ocorra de forma completa e num curto período de tempo. Pelo contrário, ela acontece no decorrer de um longo período, desde estágios mais intuitivos aos mais sistematizados, conforme mencionado no PNLD (BRASIL, 2008).

> Tal ponto de vista apoia-se na concepção de que a construção de um conceito pelas pessoas processa-se no decorrer de um longo período, de estágios mais intuitivos aos mais sistematizados. Além disso, um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros conceitos por meio de relações, das mais simples às mais complexas. Dessa maneira, não se deveria esperar que a aprendizagem dos conceitos e procedimentos se realizasse de forma completa e num período curto de tempo. Por isso, ela é mais efetiva quando os conteúdos são revisitados, de forma progressivamente ampliada e aprofundada, durante todo o percurso escolar. É preciso, então, que esses vários momentos sejam bem articulados, em especial, evitando-se a fragmentação ou as retomadas repetitivas (BRASIL, 2008, p. 17).

Nesse sentido, a presente investigação se propõe a retomar o conteúdo de proporcionalidade no 9º ano a partir da introdução da razão áurea e de suas aplicações e verificar possíveis contribuições dessa abordagem na aprendizagem de proporcionalidade por esses alunos. Por outro lado, considerando que as aplicações da razão áurea são encontradas em várias áreas do conhecimento, esta investigação está propondo um segundo objetivo, qual seja, verificar a influência dessa abordagem na percepção dos alunos acerca da importância da matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento.

A proporcionalidade tem sido alvo de pesquisas em Educação Matemática, Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva. No que se refere à Educação Matemática, a proporcionalidade pode ser encontrada pelas pesquisas já realizadas por educadores como Costa (2005), Pontes (1996), Bernal (2004) e Ávila (1985), dentre outros. Em geral, esses autores pesquisaram a abordagem da proporcionalidade em livros didáticos, como a proporcionalidade ensinada em sala de aula e até mesmo como esse conceito é compreendido e utilizado por pessoas que não frequentaram a escola.

Ruiz e Carvalho (1990) testaram uma metodologia para o ensino de proporções com ênfase na formação do conceito de proporcionalidade, levando em consideração o fato de que o raciocínio proporcional envolve uma estrutura de pensamento bastante complexa. Segundo eles, o problema não se resume em ensinar, mas, sobretudo, em como ensinar. O conteúdo de razões e proporções é ensinado no 1º grau; porém, a forma como esse tema tem sido pedagogicamente abordado não tem contribuído de forma efetiva para o seu aprendizado. A partir dos resultados colhidos na pesquisa, os autores concluíram que a abordagem tradicional da proporcionalidade pouco tem contribuído para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Segundo eles:

> O conceito de proporcionalidade precisa ser ensinado e não pode limitar-se à transmissão de regras e algoritmos para serem memorizados. Daí a preocupação com o ensino de proporções visando oferecer condições para que o aluno vivencie experiências que o conduzam à formação mental do conceito de proporcionalidade e a partir disso estabelecer regras e fórmulas" (RUIZ e CARVALHO, 1990, p. 102).

Os resultados alcançados por Ruiz e Carvalho (1990) com os alunos do grupo experimental nos testes aplicados os levaram a afirmar que o material instrucional e os procedimentos que adotaram se revelaram eficientes, constituindo-se numa opção muito válida para o ensino de proporções.

Kurtz e Karplus (1979), segundo Ruiz e Carvalho (1990), apresentam uma experiência destinada ao ensino de proporções visando capacitar os alunos do 8º e 9º anos para a aplicação do raciocínio proporcional. Usam materiais manipuláveis que, segundo eles, favorecem a participação ativa de todos os alunos e, além disso, formam uma base concreta para a formação do conceito de proporcionalidade e facilitam interação do grupo.

Freudenthal (1981), segundo Ruiz e Carvalho (1990), também manifesta preocupação com os possíveis inconvenientes de um ensino de Matemática centralizado em algoritmos. Ele afirma que a grande ênfase em técnicas pode estar criando um grande número de pessoas desenvolvidas abaixo de seu próprio potencial. Segundo ele, é importante que o ensino vise, basicamente, ao entendimento do aluno. O entendimento não pode ser substituído pela memorização, geralmente, buscada em Matemática através de grande quantidade de treinamento repetitivo.

Uma estratégia de ensino alternativa, que se pode designar de exploratória (Ponte, 2005), consistiu em levar os alunos, através da exploração de situações abertas, a estabelecerem estratégias próprias para resolverem problemas de proporcionalidade. Nesse sentido, o pesquisador afirma que

> Os alunos revelam distinguir as situações onde existem relações de natureza proporcional daquelas em que tal relação não existe. Para isso, recorrem ao seu conhecimento sobre a existência de regularidades entre os dados de relações proporcionais e são essas

> regularidades que procuram verificar dentro e entre grandezas, usando estratégias de natureza escalar ou funcional. Nem sempre são claros os motivos que os levam a optar por investigar relações usando uma ou outra estratégia, mas os alunos mostram saber a constante de proporcionalidade corresponde à regularidade que encontram no quociente entre duas grandezas (PONTE, 2005, p. 25).

Associar o estudo da proporcionalidade com sua relação na história da Matemática pode contribuir para a aprendizagem do tema, pois, segundo D'Ambrósio (1996),

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino. Tal ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino de matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral [...] (D'Ambrósio, 1996, p.29).

O raciocínio proporcional

As expressões raciocínio proporcional e pensamento proporcional são usadas por vários autores para descrever uma maneira de pensar em matemática diante de situações que envolvam relações proporcionais.

Conforme assinalam Post, Lesh e Behr (1995), já foram feitas tentativas de se definir o raciocínio proporcional. Em algumas delas, por exemplo, ele é considerado como forma de raciocinar proporcionalmente, como capacidade do indivíduo em fornecer respostas certas a problemas com valor ausente. Assim, o raciocínio proporcional não é limitado a resolver problemas utilizando algoritmos; ele envolve o raciocínio com proporções, um senso de covariação, as comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. Ao comparar duas razões, é necessário entender que as grandezas se relacionam entre si e variam em conjunto.

Post, Lesh e Behr (1995), conforme Gonçalves (2010), consideram que o raciocínio proporcional requer um pensamento qualitativo e quantitativo. O pensamento qualitativo seria mais amplo que o quantitativo, uma vez que ele possibilita uma análise prévia do problema e uma conclusão, após comparar taxas ou razões dadas, antes de se efetuar cálculos para se obter a resposta. O pensamento qualitativo possibilita ainda uma análise dos resultados obtidos, fazendo com que seja feito um questionamento quanto à coerência no contexto perante o problema que foi resolvido. Como afirmam Post, Behr e Lesh (1995, p.90), "[...] o pensamento qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado de duas taxas, guardar essa informação e, então, comparar as interpretações de acordo com critérios predeterminados". O pensamento quantitativo refere-se ao envolvimento e domínio dos cálculos para se obter uma solução numérica para o problema, exigindo o domínio de conceitos matemáticos dentre eles, os relacionados aos números racionais, tais como ordem, divisão, equivalência e relação entre unidade e suas partes. Para os autores, é importante que o indivíduo seja capaz de diferenciar situações proporcionais das que não possuem essas relações para que o raciocínio proporcional seja identificado.

Post, Behr e Lesh (1995) consideram que o raciocínio proporcional envolve aspectos tanto matemáticos quanto psicológicos. Quanto à matemática, considera-se que a ideia de proporcionalidade se modela por uma expressão dada por equações do tipo y = kx (diretamente proporcional) ou y = k/x (inversamente proporcional), quando duas grandezas são relacionadas, ou por uma equação do tipo y = kxy/uvw, quando muitas grandezas são envolvidas (ÁVILA, 1986, LIMA 2006).

Quanto aos aspectos psicológicos, eles estariam relacionados à exigência de uma capacidade mental para realizar operações. Nesse sentido, há duas posições divergentes. De um lado, conforme salientam Schlimann e Carraher (1997), encontram-se aqueles que defendem que o pensamento proporcional só pode ser desenvolvido pelo indivíduo no período das operações formais do desenvolvimento cognitivo, em torno dos 15 anos de idade. Spinillo (1997) observou que muitos pesquisadores apoiam-se em Piaget e em seus colaboradores Piaget e Inhelder, (1975), Inhelder e Piaget, (1976) para ratificarem essa crença de que as crianças não possuem pensamento proporcional, sendo este de domínio dos adolescentes.

A seguir são apresentadas as quatorze atividades que foram utilizadas como os alunos do 9º ano do ensino fundamental. Para cada uma delas, são indicados os objetivos, o tempo previsto em sua aplicação, os recursos utilizados e o modo como foi aplicada.

Atividade 1: Construção do segmento áureo

Objetivo

Construir o segmento áureo usando régua e compasso.

Recursos

Papel, régua e compasso

Tempo previsto

1 aula de 50 minutos

Descrição da atividade

A atividade de construção do segmento áureo foi uma dais quais os alunos tiveram maior dificuldade, mesmo trabalhando em grupos. O manuseio da régua, do compasso e do transferidor proporcionou inicialmente certo desânimo aos alunos, pois tiveram receio de não conseguir fazer a atividade proposta. Alguns alunos chegaram a pedir ao professor que desenhasse as figuras para eles, pois não estavam conseguido fazer o desenho. O professor interveio incentivando-os e indo até o quadro de giz para mostrar como os pontos eram obtidos. Ao final, alguns disseram: “ Custei, mas consegui!”.

Deve-se ressaltar que os CBC’s propõem ao professor que utilize em suas aulas régua, compasso e transferidor, o que vem ao encontro da realização da atividade.

Construído o segmento áureo, os grupos foram orientados a medir os segmentos AB, AC e BC, usando a régua. Em seguida, usando a calculadora, determinaram as razões $\frac{m(AB)}{m(AC)}$ e $\frac{m(AC)}{m(BC)}$.

Os resultados obtidos eram próximos da razão áurea, e não exatamente iguais a ela, fato que deixou os alunos um pouco frustrados. O professor fez, então, uma discussão sobre as medidas e suas aproximações, bem como sobre a precisão dos instrumentos de medida. A seguir, usando o *software* Geogebra, o *datashow* e contando com a participação dos alunos, calculou as razões anteriormente mencionadas com diferentes aproximações das medidas dos segmentos AB, AC e BC. Assim sendo, os alunos chegaram à conclusão que, medindo os segmentos com precisão, as razões encontradas seriam iguais à razão áurea.

Durante a realização da atividade, o pesquisador aproveitou para realizar um debate sobre a imprecisão dos instrumentos de medida. O momento também foi aproveitado para tecer comentários sobre os algarismos significativos. Não havia intenção de se aprofundar no tema; apenas deixar claro para os alunos que quanto maior fosse a precisão das medidas, mais próximo se chegaria da medida esperada.

Atividade 1: Construção do segmento áureo

Componentes: ____

____

Utilizando régua, e compasso, divida o segmento a seguir em média e extrema razão (segmento áureo)

Utilizando a régua meça os segmentos AB, AC e BC e verifique se $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} =$ 1,618

AB= _________ cm AC = _________ cm BC = _________cm

$\frac{AB}{AC} =$ $\frac{AC}{BC} =$

Relatório da atividade 1: Construção do segmento áureo

Componentes:____

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 2: Aplicações da razão áurea

Objetivo

Perceber as diversas aplicações da razão áurea na natureza, nas artes, na arquitetura, na música, dentre outros, por meio dos vídeos *Arte e Matemática: o número de ouro* e *Donald no país da Matemágica*.

Recursos

Sala multimídia ou projetor e vídeos

Tempo previsto

2 aulas de 50 minutos cada

Descrição da atividade

Como recurso, foram exibidos dois vídeos. O primeiro deles, denominado *Donald no país da matemática*, veiculado em um *site* da internet , tem duração de 27 minutos. O segundo foi produzido pela TV Escola, com duração de 12 minutos, tendo recebido o nome de *Arte e Matemática*[1].

Ainda em sala de aula, foi informado aos alunos que eles assistiriam a dois vídeos da área de Matemática e que, ao final, participariam de um debate, seguido da elaboração de um relatório por grupos. Os grupos em questão foram formados sob a orientação do professor pesquisador e permaneceram os mesmos durante toda a pesquisa.

A seguir, os alunos foram encaminhados para assistir aos vídeos, que mostravam a razão áurea sendo aplicada na natureza e em campos do conhecimento como a biologia, as artes, a música, a arquitetura e a literatura. Após a exibição dos vídeos, o pesquisador salientou algumas partes que abordavam a razão áurea de uma forma mais destacada. Logo em seguida, foi realizado o debate, no qual os alunos apresentaram seus comentários e realizaram discussões sobre o que viram e ouviram nos vídeos.

Relatório da atividade 2: Aplicações da razão áurea

Componentes:____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 3: Construção do retângulo áureo

Objetivos

Construir o retângulo áureo.

Identificar a razão áurea por meio das medidas dos lados do retângulo áureo.

Material utilizado

Régua, compasso, folha de papel, objetos de uso cotidiano (cartão de crédito, tela de televisão, folha A4, etc.)

Tempo previsto

2 aulas de 50 minutos cada

Descrição da atividade

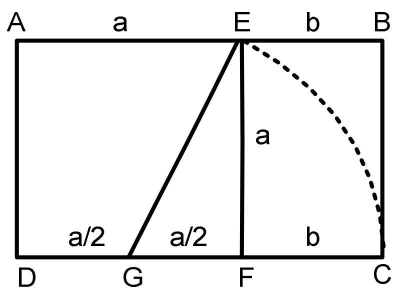
O professor solicitou aos grupos que construíssem o retângulo áureo a partir de um quadrado com 10 cm de lado, utilizando a régua e o compasso, conforme a figura a seguir e os seguintes passos:

1º) determinar com a régua o ponto médio G do lado DF do quadrado;

2º) unir o ponto G ao ponto E para obter o segmento EG;

3º) prolongar o lado DF do quadrado ADEF;

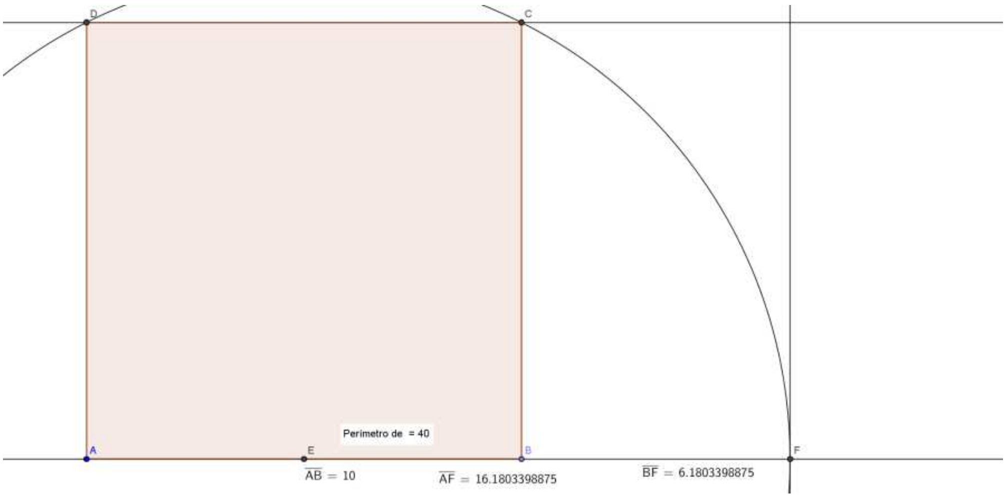
4º) com centro do compasso em G e abertura EG, determinar o ponto C no prolongamento de DF obtendo-se, daí, o retângulo ABCD, que é áureo.



Por se tratar de uma construção utilizando instrumentos de desenho, os alunos tiveram dificuldade como na atividade anterior. O professor interveio, auxiliando-os sempre que era necessário, utilizando os instrumentos de desenho no quadro.

Ao final da construção, o professor pediu aos alunos que medissem os comprimentos dos segmentos CD, DF, CF, utilizando a régua. Após isso, os alunos calcularam as razões — e — e verificaram que elas eram próximas de 1,618.

Assim como na atividade 1, podem ocorrer divergências devido à imprecisão do instrumento de medida e de não se encontrar o valor exato esperado. O professor utilizou o *software* Geogebra para mostrar que o resultado seria 1,618, se fossem usados instrumentos com maior precisão.



Observação: Esta atividade pode auxiliar os alunos no estudo de figuras semelhantes. Basta para isso alterar a medida do lado do quadrado, obtendo uma outra figura. Os alunos poderão, então, comparar as duas figuras, determinando as razões entre as medidas de seus lados correspondentes.

Atividade 3: Construção do retângulo áureo

Componentes:____

____

A partir do quadrado a seguir, construa um retângulo áureo usando régua e compasso.

Utilizando a régua, meça os lados do retângulo construído e verifique se estão em razão áurea.

Lado maior: __________cm

Lado menor: _________cm

Razão:___________

Relatório da atividade 3: Construção do retângulo áureo

Componentes:____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 4: Sequência de Fibonacci, construção da espiral áurea

Objetivos

Identificar a sequência de Fibonacci.

Construir a espiral áurea utilizando régua e compasso.

Fazer uma pesquisa na internet.

Recursos

Régua, compasso, folha de papel e calculadora

Tempo previsto

2 aulas de 50 minutos cada

Descrição da atividade

Esta atividade foi realizada pelos alunos reunidos em grupos em duas aulas de cinquenta minutos cada uma. Tinha como objetivo levá-los a construir a sequência de Fibonacci e a espiral áurea.

Inicialmente, o professor solicitou a eles que indicassem dois números inteiros quaisquer. Foram indicados os números 3 e 5, que foram escritos no quadro de giz. A seguir, o professor pediu que eles indicassem a soma desses dois números. Essa soma (8) seria o terceiro termo da sequência que estava sendo construída. O quarto termo seria a soma dos dois termos imediatamente anteriores, e assim por diante. Os alunos foram indicando os termos da sequência, e o professor os escrevia no quadro.

Usando ainda o quadro, o professor apresentou uma nova sequência para que os alunos procedessem como na sequência anterior. Isto é, cada termo deveria ser o resultado da soma dos dois números imediatamente anteriores.

Após esse trabalho, os alunos receberam uma folha de registro com três tarefas a serem executadas.

Com a ajuda de uma calculadora, eles escreveram a sequência de Fibonacci com quinze termos (1ª tarefa). Em seguida, calcularam a razão entre seus termos. A partir daí, quando percebiam que a razão entre os termos era a razão áurea, ficavam admirados e perguntavam: “Como pode? Qual a mágica que tem aqui? Será que sempre será assim?” Daí, o professor incentivou os grupos a calcularem mais termos da sequência e, em seguida, calcularem a razão entre eles. Comprovaram, assim, o que eles *a priori* não acreditavam: a razão áurea ocorria também com os novos termos que foram acrescentados à sequência.

A segunda tarefa da atividade consistiu em escrever três sequências. Os próprios grupos indicavam os dois primeiros termos de cada uma delas. A partir daí, o terceiro termo seria a soma do primeiro com o segundo; o quarto, a soma do segundo com o terceiro; e assim sucessivamente. Ou seja, cada termo da sequência, a partir do terceiro, era igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

Construídas as sequências, os grupos deveriam calcular as razões entre os termos de cada uma delas a fim de verificar se, em cada sequência, as razões encontradas tenderiam ao número de ouro.

Foi discutido com os alunos que, independentemente dos dois primeiros números indicados, as razões entre os termos consecutivos de uma sequência com essa lei de formação tendiam à razão áurea.

Atividade 4: Sequência de Fibonacci e construção da espiral áurea

Componentes:

____

____

A sequência 1,1,2,3,5,8,13,21, ... é denominada sequência de Fibonacci em que cada termo, a partir do terceiro é igual a soma dos dois anteriores. Calculando a razão entre o terceiro e o segundo termo, o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto verifica-se que essa razão tende a ser a razão áurea, 1,618.

a) Escreva a sequência de Fibonacci com 15 termos e calcule a razão entre os termos consecutivos a partir do terceiro.

b) Escreva 3 sequências com 15 termos em que cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois anteriores como na sequência de Fibonacci. Verifique se a razão entre o terceiro e o segundo termo, entre o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto e assim sucessivamente até a razão entre o décimo quinto e o décimo quarto também tende a ser a razão áurea, 1,618.

Lembre-se de que essas sequências podem ser infinitas, ou seja, podem ter infinitos termos,

1ª sequência:

____

Razão entre os termos:

2ª sequência:

____

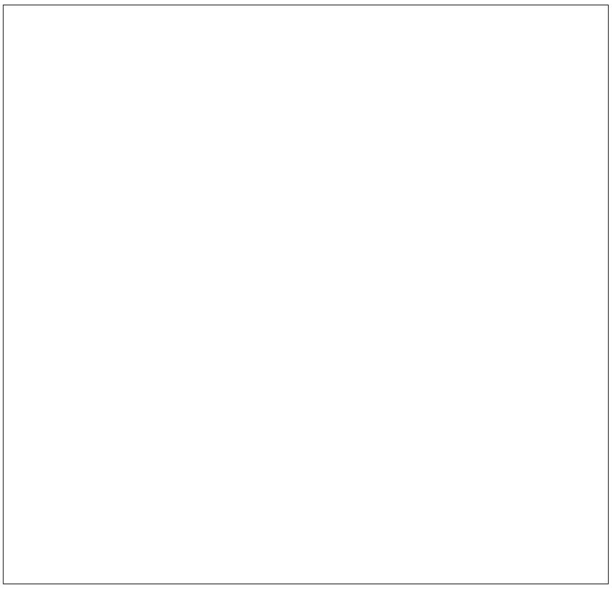
Razão entre os termos:

3ª sequência:

____

Razão entre os termos:

c) Construa a espiral áurea a partir do retângulo a seguir:



Relatório da atividade 4: Sequência de Fibonacci e construção da espiral áurea

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 5: Sequência de Fibonacci e espiral áurea na natureza

<u>Objetivo</u>

Identificar a sequência de Fibonacci e a espiral áurea em objetos e fenômenos da natureza (molusco, galhos de árvore, crescimento de uma população de coelhos, plantas e outras).

<u>Recursos</u>

Fotografias, régua e calculadora

<u>Tempo previsto</u>

1 aula de 50 minutos

<u>Descrição da atividade</u>

O professor apresentou aos alunos algumas figuras. Foi, então, proposto a eles que identificassem nelas a presença da espiral áurea e a sequência de Fibonacci.

O professor aproveitou a oportunidade para falar um pouco mais sobre a espiral áurea e a sequência de Fibonacci.

Os grupos tiveram, também, a oportunidade de verificar que, em várias plantas, o número de pétalas é um número da sequência de Fibonacci.

O professor orientou os alunos quanto à observação de cada figura para que eles pudessem nela identificar a espiral áurea e a sequência de Fibonacci.

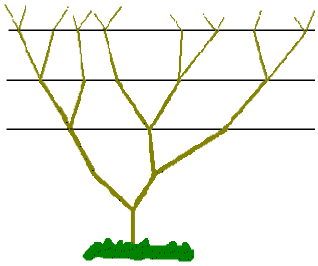
Atividade 5: Sequência de Fibonacci e espiral áurea na natureza

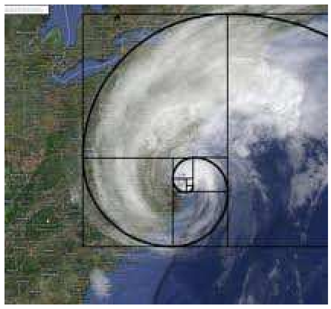
Componentes:

____

____

a) Verifique a presença da espiral áurea e da sequência de Fibonacci nas figuras a seguir:

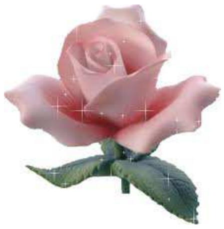

b) Verifique a presença da sequência de Fibonacci no número de pétalas de flores.

3 pétalas: lírios e íris


5 pétalas: colubrina, ranúnculo amarelos e esporas


8 pétalas:
delfíneos


13 pétalas:
crisântemos, cinerária
e tasna




21 pétalas:
asteráceas

34 pétalas:
banana-da-terra e
malmequer


Relatório da atividade 5: Sequência de Fibonacci e a espiral áurea na natureza

Componentes:____
____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 6: Retângulos áureos e não áureos

Objetivo

Identificar retângulos áureos e não áureos.

Recursos

Régua e calculadora

Tempo previsto:

2 aulas de 50 minutos cada

Descrição da atividade

Dentre as quatorze atividades propostas aos alunos durante a pesquisa, esta foi a sexta por eles realizada. Ela foi denominada “retângulos áureos e não áureos” e teve a duração de duas aulas de cinquenta minutos cada uma. Como recursos didáticos, foram usados régua, compasso, trena e folha de registro para a anotação dos resultados das medições e dos cálculos. Os alunos realizaram essa atividade em grupos, já formados anteriormente, quando da realização da primeira atividade.

Inicialmente, o pesquisador relembrou com eles os vídeos apresentados na atividade anterior. Discutiu a parte do vídeo *Donald no país da matemática* que trazia explicações sobre o Parthenon, cuja fachada principal formava um retângulo áureo. Ressaltou que a razão entre seus lados era o número de ouro.

Curiosos e atentos, os alunos se interessaram em medir retângulos em objetos que se encontravam na sala de aula. O professor incentivou-os a escolher os retângulos e a realizar as medições de seus lados e assim foi feito. Os grupos realizaram medições em retângulos que eles iam identificando na sala de aula, tais como tampo da mesa, folha de papel A4, capa do livro de Matemática, cartão de crédito, quadro de giz, tampa da caixa do interruptor, etc.

Usando uma calculadora, os grupos encontraram as razões entre os lados dos retângulos previamente medidos. Classificaram os retângulos em áureos, quando a razão entre os lados era 1,6, próximo ao áureo, quando a razão estava entre 1,5 e 1,7 e não áureo quando ela era menor que 1,5 e maior que 1,7.

As medições, os cálculos e as conclusões eram anotados na folha de registro da atividade.

Atividade 6: Retângulos áureos e não áureos

Componentes:____

____

a) As partidas do Campeonato Brasileiro de Futebol são disputadas em vários estádios do Brasil. A seguir, são fornecidas as medidas de alguns deles. Verifique se as dimensões desses estádios, dadas em metros, correspondem às medidas de um retângulo áureo, se aproximam do áureo ou de um não áureo.

Arena do Jacaré: 110x74

Arena da Baixada: 105x78

Beira Rio: 108x72

Engenhão: 105x68

Independência: 105x68

Olímpico: 107x72

Pacaembu: 110x75

São Januário: 110x70

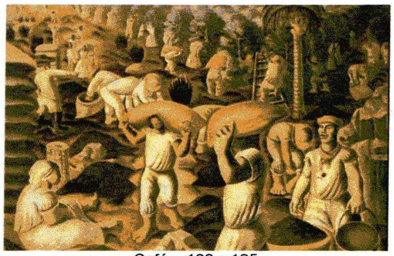
Vila Belmiro: 106x70

(Fonte: Blog do Chico Maia)

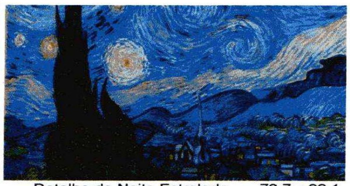
b) Obtenha as medidas de diversas superfícies e verifique se o retângulo que é determinado em cada uma é áureo, se aproxima do áureo ou é não áureo.

Superfície	Unidade de medida	Dimensões	Razão	Resultado

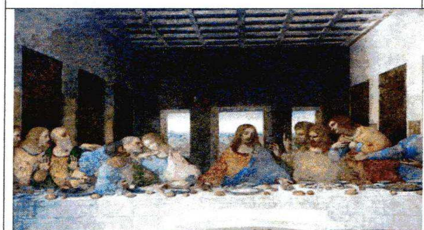
c) A seguir são apresentadas das obras de alguns artistas. Verifique se o retângulo que contém cada uma delas é áureo, aproxima-se do áureo ou não é áureo.



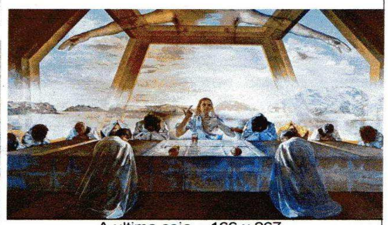
Café – 130 x 195
Candido Portinari – 1935



Detalhe de Noite Estrelada – 73,7 x 92,1
Van Gogh - 1889



A última ceia – 421 x 902
Leonardo Da Vinci



A ultima ceia - 166 x 267
Salvador Dali

Relatório da atividade 6: Retângulos áureos e não áureos

Componentes:____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 7: Construção do triângulo áureo e pentagrama

<u>Objetivos</u>
Identificar o triângulo áureo e o pentagrama.
Construir o triângulo áureo.
Analisar a relação do triângulo áureo com o decágono e a razão áurea
Construir o pentagrama.
Analisar a relação entre o pentagrama e a razão áurea
<u>Recursos</u>
Papel, régua e transferidor
<u>Tempo previsto</u>:
1 aula de 50 minutos
<u>Descrição da atividade</u>

O professor relembrou com os alunos o vídeo *Donald no país da matemágica* e, mais especificamente, a parte referente à aplicação do pentagrama, que era o símbolo dos pitagóricos. Após os comentários sobre o vídeo, os grupos se reuniram e promoveram outro debate, para saber um pouco mais sobre os pitagóricos e o pentagrama.

Em seguida, o pesquisador entregou aos grupos a folha de registro da atividade a ser realizada. Nela, era solicitado que fossem construídos o triângulo áureo e o pentagrama.

A segunda tarefa solicitada aos grupos nessa atividade foi a construção de um triângulo áureo, com a orientação, passo a passo, do professor:

1º) construir uma circunferência usando o transferidor;
2º) dividir a circunferência em 10 partes iguais;
3º) desenhar um polígono cujos vértices seriam os pontos da divisão da circunferência;
4º) traçar as diagonais do polígono (decágono);
5º) escolher um dos triângulos formados;

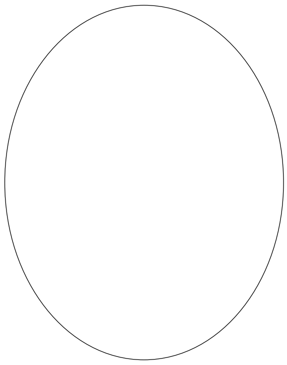
6º) medir os lados do triângulo e calcular a razão entre o comprimento de um dos lados maiores pelo comprimento do lado menor.

Atividade 7: Triângulo áureo e pentagrama

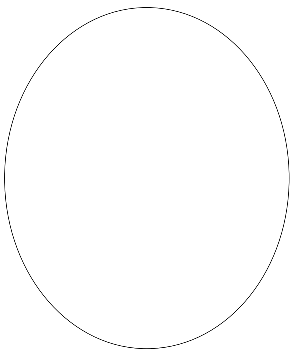
Componentes:____

____

a) Construir um pentagrama a partir de um pentágono e verificar as suas relações com a razão áurea.



b) Construir o triângulo áureo a partir do decágono e verificar suas relações com a razão áurea.



Relatório da atividade 7: Triângulo áureo e pentagrama

Componentes:

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 8: Novas aplicações da razão áurea

<u>Objetivo</u>

Apresentar um personagem conhecido,Pato Donald, aventurando-se a mostrar, em um vídeo, a razão áurea e suas aplicações.

<u>Recursos</u>

Sala multimídia

<u>Tempo previsto</u>

1 aula de 50 minutos

<u>Descrição da atividade</u>

Os alunos foram levados à sala multimídia onde assistiram novamente ao vídeo "*Donald no país da matemágica*". Logo após, participaram de um debate sobre os pitagóricos e o pentagrama. Em seguida, cada grupo elaborou um relatório sobre o debate.

Trata-se de uma atividade de complementação à anterior, na qual o símbolo dos pitagóricos foi estudado, o pentagrama foi construído, as relações entre as medidas da figura foram calculadas e verificadas que se tratavam da razão áurea.

Relatório da atividade 8: Aplicações da razão áurea

Componentes:

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 9: Aplicações da razão áurea na arquitetura

Objetivo

Identificar algumas aplicações da razão áurea na arquitetura.

Recursos

Régua, desenhos de construções arquitetônicas

Tempo previsto:

1 aula de 50 minutos

Descrição da atividade

Reunidos em grupos, os alunos receberam fotografias ampliadas de construções arquitetônicas que são mostradas na folha de registro.

O professor fez um relato histórico sobre cada construção, chamando a atenção sobre sua localização, data da construção e de outros detalhes que ele julgava importante.

Usando uma régua, os grupos efetuaram medidas e identificaram a presença da razão áurea nas fotografias das construções analisadas.

Deve-se salientar que, em algumas fotos, não é possível obter o valor da medidas, pois as fotos estão distorcidas em relação ao plano horizontal. Nesse caso, o professor chamou a atenção sobre esse fato e, mais uma vez, mostrou aos alunos que a imprecisão das medidas interfere diretamente no cálculo da razão áurea.

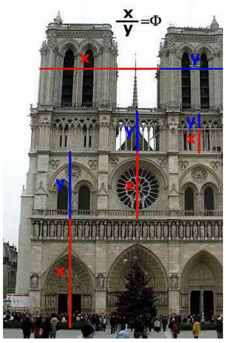
Atividade 9: Aplicações da razão áurea na arquitetura

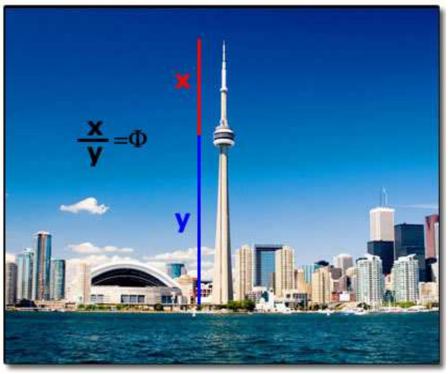
Componentes:

____

____

Utilizando a régua, encontre, se possível, as medidas dos retângulos e dos segmentos e verifique se eles estão em razão áurea.


$\frac{x}{y} = \Phi$
x
y


x
$\frac{x}{y} = \Phi$
y

Relatório da atividade 9: Aplicações da razão áurea na arquitetura

Componentes:

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 10: Aplicações da razão áurea nas pinturas e na música

Objetivo

Identificar algumas aplicações da razão áurea na pintura e na música

Recursos

Régua, fotografias de pinturas e instrumento de música

Tempo previsto

2 aulas de 50 minutos cada

Descrição da atividade

Reunidos em grupos, os alunos receberam fotografias de pinturas e de um violino. Usando uma régua, efetuaram as medidas, a fim de verificar a presença da razão áurea nas fotografias analisadas. Na folha de registro, havia uma ampliação de cada fotografia.

Ao iniciar a atividade, o professor fez um relato histórico sobre cada obra, apresentando o período em que ela foi feita, os aspectos que apresentava com relação a conceitos matemáticos e históricos, o autor e sua relação entre a Matemática e a Arte.

Utilizando a régua, os grupos encontraram as medidas, x e y, dos retângulos que foram desenhados sobre cada obra e verificaram se a razão $\frac{x}{y}$ era a razão áurea.

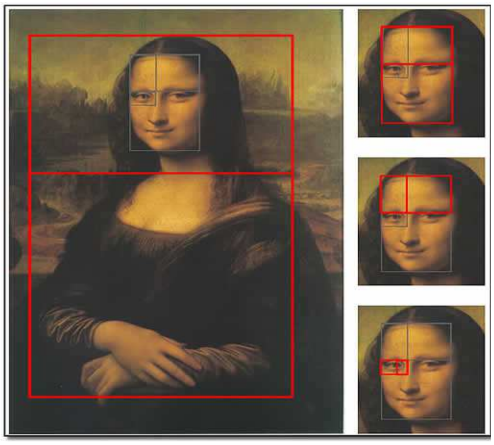
Atividade 10: Aplicações da razão áurea na pintura e na música

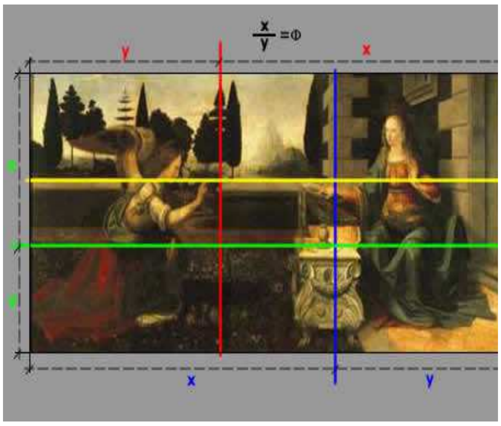
Componentes:

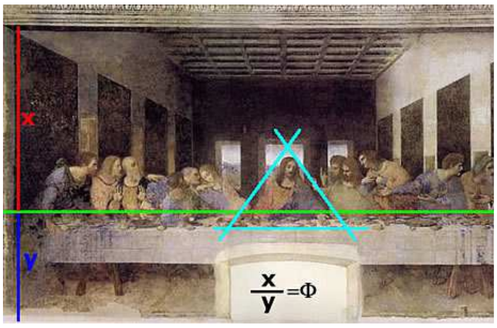
____

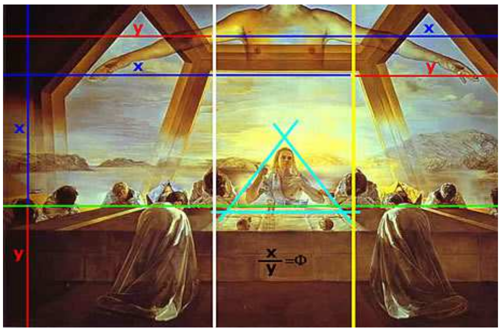
____

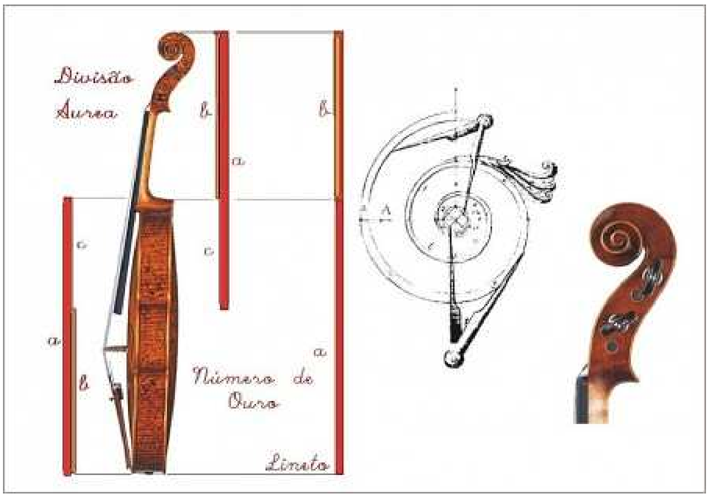
Utilizando a régua, determine o valor das medidas x e y em cada figura e verifique se estão em razão áurea.











Relatório da atividade 10: Aplicações da razão áurea na pintura e na música

Componentes:

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 11: Poliedros de Platão, suas propriedades e suas relações com a razão áurea

Objetivos

Construir os poliedros de Platão a partir de suas planificações.

Identificar as propriedades dos poliedros de Platão.

Identificar as relações das propriedades com a razão áurea.

Recursos

Planificação dos poliedros de Platão, lápis de cor, cola e régua

Tempo previsto:

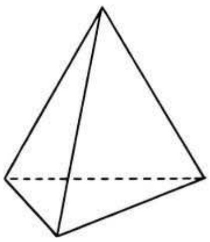
2 aulas de 50 minutos cada.

Descrição da atividade

Inicialmente, os grupos receberam os poliedros de Platão na folha registro. Foi pedido que eles colorissem as faces de cada um e dobrassem o papel nas pregas. Usando cola, eles montaram os poliedros.

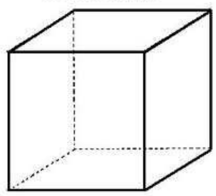
Em seguida, o professor apresentou aos alunos as propriedades dos poliedros de Platão relacionadas com a razão áurea.

TETRAEDRO



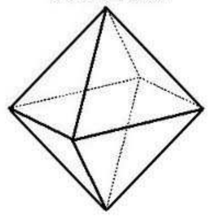
Possui 4 faces que são triângulos equiláteros.

HEXAEDRO



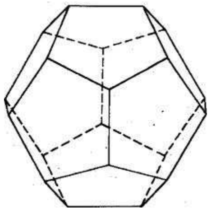
Possui 6 faces que são quadrados.

OCTAEDRO



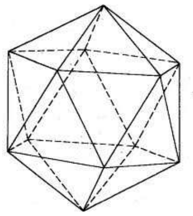
Possui 8 faces que são triângulos equiláteros.

DODECAEDRO



Possui 12 faces que são pentágonos regulares.

ICOSAEDRO



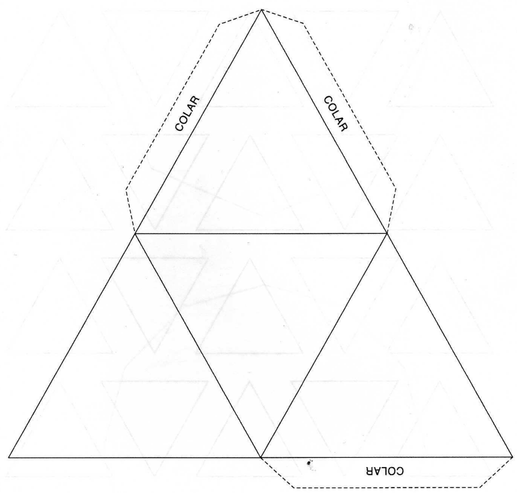
Possui 20 faces que são triângulos equiláteros.

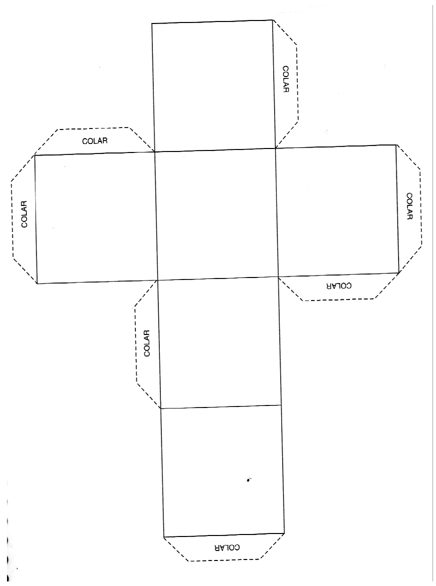
Atividade 11: Poliedros de Platão; suas propriedades e suas relações com a razão áurea

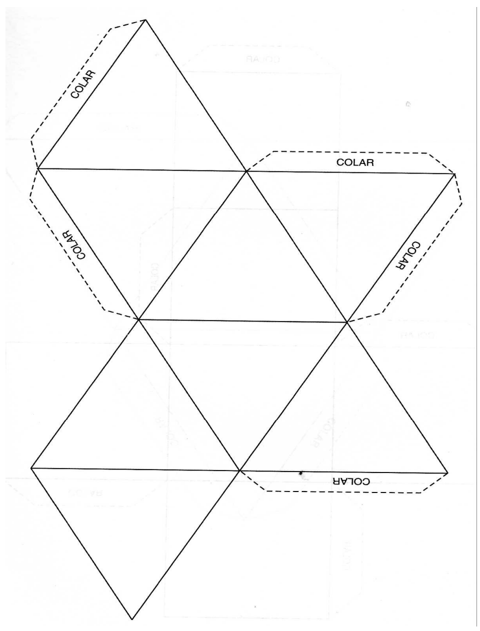
Componentes:____

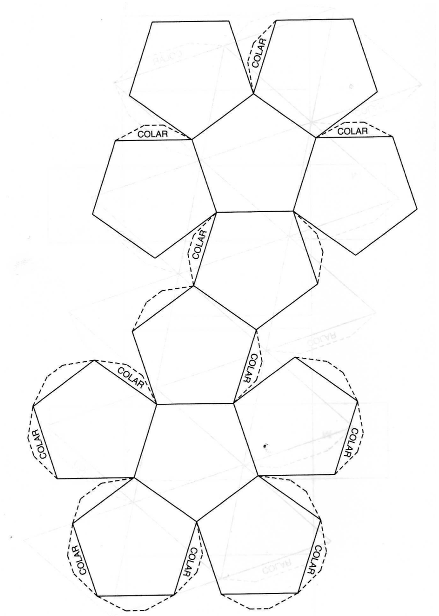
____

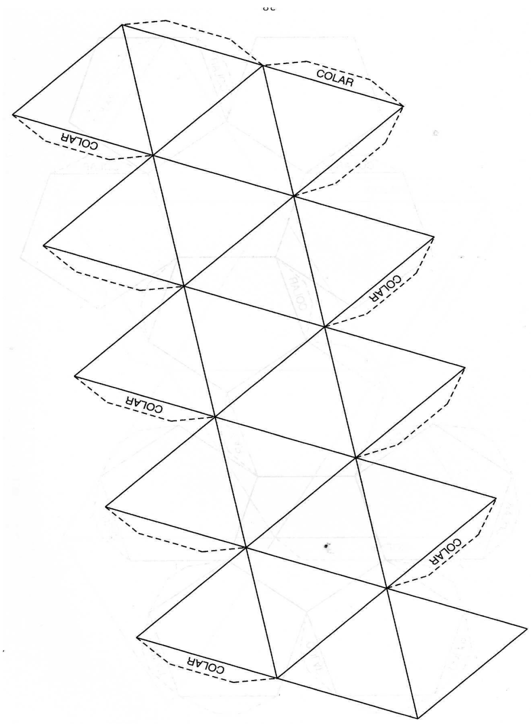
Use lápis de cor para colorir as planificações, recorte, dobre e cole formando os poliedros de Platão.




COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR


COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR





Relatório da atividade 11: Poliedros de Platão; suas propriedades

e suas relações com a razão áurea

Componentes:____
____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 12: Razão áurea e fractais

Objetivos

Reconhecer um fractal.

Identificar as relações de um fractal com a razão áurea.

Recursos

Vídeo, desenhos, papel, régua e compasso

Tempo previsto

2 aulas de 50 minutos cada

Descrição da atividade

Inicialmente, foi exibido o vídeo sobre geometria fractal denominado *Arte e matemática em formas naturais*[13] de Andrios Bemfica. Nele são apresentados diversos tipos de fractais: geométricos na natureza curiosos.

Durante a exibição do vídeo, o professor interrompeu-a algumas vezes para chamar a atenção em relação à proporcionalidade e salientar que os fractais eram cópias reduzidas à mesma razão do original. Ao final do vídeo, foi disponibilizado um tempo para que cada aluno pudesse apresentar suas impressões sobre o que havia acabado de ver.

Em seguida, os alunos formaram os mesmos grupos para construírem um fractal simples, denominado triângulo de Sierspinky. Foi possível observar mais desinibição dos alunos e mais segurança em fazer a atividade, pois já utilizavam a régua e o compasso com maior facilidade para efetuar as medidas e fazer as construções.

Inicialmente, foi solicitado aos grupos que construíssem na folha de registro um triângulo equilátero cujo lado media 16 cm. Depois, foi pedido que marcassem o ponto médio de cada lado. Usando os pontos médios encontrados, deviam construir outro triângulo tendo esses pontos como vértices. Tal procedimento devia ser aplicado sucessivamente, até obterem um triângulo com lados medindo 2 cm.

A atividade transcorreu de forma agradável e tranquila. Ao final, foi proposto aos grupos que utilizassem lápis de cor para colorir os triângulos. Eles obtiveram figuras com diversos contrastes e puderam perceber que os triângulos pequenos eram reduções do maior. Incentivados, conseguiram determinar a razão de redução. Também observaram que os triângulos maiores eram ampliações dos menores e obtiveram a razão de ampliação.

Atividade 12: Razão áurea e fractais

Componentes:

____

____

Construa um triângulo equilátero e a seguir um fractal simples, usando o segmento abaixo de comprimento igual a 16m.

Relatório da atividade 12: Construindo fractais

Componentes:

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 13: Proporcionalidade e Pirâmides de Gizeh

Objetivos

Identificar as propriedades das Pirâmides de Gizeh.

Montar uma pirâmide semelhante a uma das Pirâmides de Gizeh, usando a planificação fornecida pelo professor.

Recursos

Papel, cola e régua

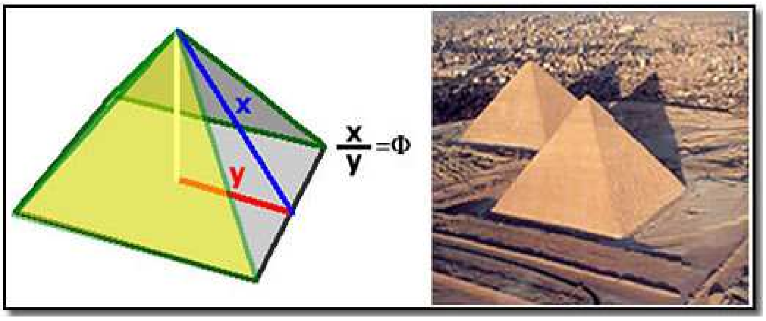
Tempo previsto

2 aulas de 50 minutos cada.

Descrição da atividade

Inicialmente, o professor fez um relato sobre quem eram os faraós, as pirâmides do Egito, como eram construídas e para que foram construídas. Ele destacou que elas consistiam em uma das sete maravilhas da Antiguidade e que as três mais importantes eram as de Quéops, Quéfren e Miquerinos.

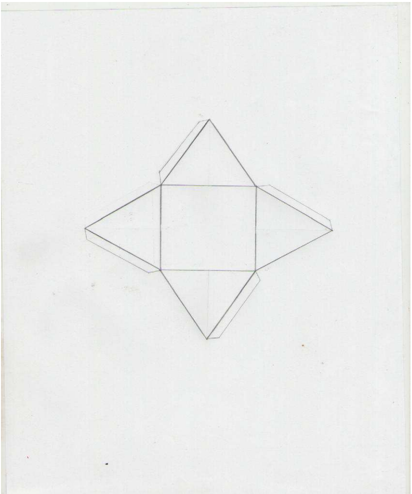
Os alunos, reunidos em grupo, coloriram a planificação da pirâmide. Em seguida, fizeram as dobras e montaram a pirâmide.



Realizaram medições na planificação usando a régua para identificar a presença da razão áurea na pirâmide construída, conforme ilustração.

Atividade 13: Proporcionalidade e Pirâmides de Gizeh

Componentes:



Relatório da atividade 13: Proporcionalidade e Pirâmides de Gizeh

Componentes:

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 14: Aplicações matemáticas envolvendo a razão áurea

Componentes:

____

____

Verifique as aplicações matemáticas envolvendo a razão áurea.

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi + 1$$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}}}$$

$$\varphi = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}}}$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}$$

Em seguida, os grupos analisaram e discutiram a demonstração do cálculo da razão áurea (Fi), conforme apresentada no quadro seguinte.

Cálculo da razão áurea (Φ)

Calculando a razão extrema e média do segmento obtemos:

$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$

$x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Determinando as raízes da equação:

$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Desconsiderando a raiz negativa obtemos:

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Que resulta aproximadamente em:

$$\Phi = 1{,}618$$

Relatório da atividade 14: Aplicações matemáticas envolvendo a razão áurea

Componentes:

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Referências

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica*. Brasília, 2002.

________ Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática*. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 03/04/2008.

______ Ministério da Educação. *Guia de livros didáticos PNLD - Anos Finais do Ensino Fundamental - Matemática.* Brasília, 2008. 152 p.

BARBOSA, Ruy Madsen *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*; 3ª edição; Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.

BOISNARD, D. et al. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris: Hachette, 1994.

BOYER, Carl B.*História da Matemática*; 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1991.

COSTA, S. *O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2007. Dissertação (Mestrado).

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. (1993). *Learning and teaching ratio and proportion: Research implications*. Disponível em http://education.umn.edu/rationalnumberproject/93_4.html. Acesso: 12/06/06.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2007.

FRINGS, M. *The Golden Section in Architectural Theory*. Disponível em http://www.nexusjournal.com/Frings.html . Acesso em 12/06/2012.

GONÇALVES, Maria J. S. V. *Raciocínio Proporcional: estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.* Dissertação de mestrado – PPGEM – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Mato Grosso do Sul. 2010.

HUNTLEY, H. E. *A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática.* Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1985. 178p.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988, p. 93-118.

LÍVIO, Mário*. Razão áurea, a história de fi, um número surpreendente*. 2ª edição, Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2007.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. *Proposta Curricular (CBC):Matemática, Ensinos Fundamental e Médio.* Belo Horizonte, SEE/MG, 1995.

OLIVEIRA, I. A. F. G. & SANTOS, M. C. Era uma vez... a regra de três. Reunião Anual da ANPEd. Caxambú, MG, 2000.

PONTES, M. G. O. *Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1996, 227 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

POST, T. e al. *Research on rational number, ratio and proportionality*. 1998. Disponível em: http://education.umn.edu/rationalnumberproject/98_1.html. Acesso em: 12/06/2012.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bonterim de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*, 2ª edição. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

SCHLIEMANN, A.; NUNES, T. A situated schema of proportionality. *British Journal of Developmental Psychology*, 1990, v. *8*, p. 259-268.

SPINILLO, A. (2003). Ensinando proporção a crianças: Alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim do GEPEM*, *43*(3), p. 11-47.

TOSATTO, Cláudia Míriam et al. *Matemática* - 7ª e 8ª série. 2ª edição. Curitiba: Positivo, 2005.

VERGNAUD, G. A psicologia da educação. In: PLAISANCE, E.; VERGNAUD, G. *As Ciências Da Educação.* São Paulo: Loyola, 2003.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York, NY: Academic Press. 1983, p. 127-174.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora|CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto.