Instituto de Ciências Exatas e Biológicas – ICEB
Departamento de Matemática – DEMAT
Mestrado Profissional em Educação Matemática

DISSERTAÇÃO

RAZÃO ÁUREA E APLICAÇÕES: CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE **DE** ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Orientando: Alexandre Ramon de Souza

Orientadora: Dra. Maria do Carmo Vila

Ouro Preto

2013

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Alexandre Ramon de Souza

RAZÃO ÁUREA E APLICAÇÕES: CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE DE ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática
Orientadora: Prof.ª Dra. Maria do Carmo Vila

OURO PRETO
2013

G633a Souza, Alexandre Ramon.
Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental
147 f.: il.; grafs.; tabs.
Orientadora: Profª Dra Maria do Carmo Vila.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Ensino a distância - Teses. 3. Formação de professores - Teses. 4. Licenciatura - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU:

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

iv

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

RAZÃO ÁUREA E APLICAÇÕES: CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE DE ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Autor: Alexandre Ramon de Souza

Orientadora: Maria do Carmo Vila

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Alexandre Ramon de Souza e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 30/08/2013

MCarmoVila ....

Orientadora

COMISSÃO EXAMINADORA:

MCarmoVila
Profa. Dra. Maria do Carmo Vila

Eliane Scheid Gazire
Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire

Marger da Conceição Ventura Viana
Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana

2013

Dedico a minha família pelo incentivo e paciência, principalmente à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo que tem me proporcionado.

A minha orientadora Maria do Carmo Vila pela atenção, carinho e paciência.

A todos que tornaram possível a realização deste trabalho.

A minha família por me incentivar a todo o momento.

A Rosângela.

Aos membros da banca examinadora, Eliane Scheid Gazire e Marger da Conceição Ventura Viana, pelas valorosas contribuições.

A Universidade Federal de Ouro Preto, por mais esta oportunidade de aprimoramento intelectual.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, pelos momentos de aprendizagem e aprimoramento oferecidos durante as aulas.

"Para mim, umas das preocupações minhas, uma das razões de minha luta, uma das razões de minha presença no mundo é exatamente a de que, como educador, eu posso contribuir para uma associação crítica da possibilidade da passividade, para que se vá além dessa passividade, no que chamo de posturas rebeldes, de posturas criticamente transformadoras do mundo."

Paulo Freire

RESUMO

Pesquisadores e educadores matemáticos têm destacado a importância da proporcionalidade na formação das estruturas cognitivas dos alunos, na aprendizagem de vários conceitos matemáticos, na aplicação em várias áreas do conhecimento científico e, ainda, nas aplicações no cotidiano das pessoas. Contudo, esse conteúdo tem oferecido dificuldades para alunos e professores e uma das explicações apresentadas na literatura é o fato de que seu ensino consiste, em geral, na apresentação mecânica da regra de três e de todas as regras que dela decorrem sem possibilidade de os alunos adquirirem um verdadeiro conhecimento de proporcionalidade. As considerações anteriores levaram o pesquisador a elaborar e aplicar em sala de aula um conjunto de quatorze atividades, tendo como elemento unificador a razão áurea e suas aplicações na Matemática, na natureza e em outras áreas de conhecimento e a propor a seguinte questão de pesquisa: “Quais seriam as contribuições do estudo da razão áurea e de suas aplicações para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano de uma escola pública e para a percepção da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento?” Para respondê-la, foram fixados dois objetivos. Primeiro objetivo - Verificar a conjectura: o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribui para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Segundo objetivo - Verificar a conjectura: o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribui para a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, realizada com 40 alunos do 9º ano. Para a coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: teste inicial, observação com anotação em diário de campo, gravações em áudio e vídeo, relatórios escritos dos alunos, teste final e relatório final dos alunos. A análise dos dados mostrou que o estudo da razão áurea motivou os alunos, possibilitando a aprendizagem das razões e das proporções. Por outro lado, a riqueza de detalhes dos comentários orais e escritos dos alunos durante a execução das atividades apresentou evidências de que os alunos estavam percebendo a importância da Matemática e sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Vale ressaltar também que eles relacionavam o tema estudado com objetos conhecidos de seu espaço.

Palavras chave: Proporcionalidade, Razão áurea, Educação Matemática.

ABSTRACT

Mathematics educators and researchers have highlighted the importance of proportionality in the formation of cognitive structures of students in learning various math concepts in use in many areas of scientific knowledge, and also in applications in daily life. However, that content is offered difficulties for students and teachers and the explanations given in the literature is the fact that their teaching is, in general, the presentation of the mechanical rule of three and any rules made under it is not possible for students to gain a real understanding of proportionality. The above considerations have led researchers to develop and implement in the classroom a set of fourteen activities, with the unifying element the golden ratio in mathematics and its applications, in nature and in other areas of knowledge and to propose the following research question: "What are the contributions of the study of the golden ratio and its applications to learning the proportionality of the ninth year students of a public school and the perception of the importance of mathematics and its application in other areas of knowledge? To answer it were set two goals . First goal - Check the conjecture: The study of the golden ratio and its application contributes to the learning of proportionality students from the 9th grade of elementary school in a public school. Second goal - Check the conjecture: The study of the golden ratio and its application contributes to the perception of the students about the importance of mathematics and its application in other areas of knowledge. This is a qualitative study conducted with 40 students from the 9th year. To collect data we used the following instruments: initial testing, observation annotation field diary, audio and video recordings, student´s written reports, final testing and final report of the students. Data analysis showed that the study of the golden ratio motivated students enabling learning reasons and proportions. On the other hand, the rich detail of oral and written comments from students during the execution of the activities presented evidence that students were realizing the importance of mathematics and its application in other areas of knowledge. It is noteworthy also that they related the studied subject with known objects of your space.

Keywords: Proportionality, Golden Ratio, Mathematics Education.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

1. Trajetória Pessoal

Na sexta série do Ensino Fundamental, encontrei dificuldades na aprendizagem dos números negativos. Além de uma antipatia que eu nutria pelo professor, eles me aterrorizaram durante uma boa parte do ano. Chegado o quarto bimestre, o professor aposentou-se, sendo substituído por uma professora que me deu um novo ânimo, motivando-me a seguir em frente e a conseguir a aprovação na disciplina sem necessidade de passar por recuperação. Foi um alívio!

Durante a sétima e a oitava séries, eu não tive problemas com a Matemática. O fato de uma nova professora assumir essa disciplina me revitalizou e animou. a prosseguir meus estudos sem medo da matéria. Lembro-me especialmente de uma aula em que ela contou onde tinha se formado e teceu comentários sobre o seu gosto pela Matemática. Isso me levou a acreditar que poderia vencer esse obstáculo e, quem sabe, também, ser um professor dessa disciplina.

Passei, então, a partir daquele momento, a dar aulas particulares, o que realmente me aproximou e me fez gostar muito da Matemática. Na oitava série, também comecei a aprender Física, o que me deixou ainda mais motivado e interessado por ela.

Tendo concluído o Ensino Fundamental, prestei vestibular no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), sendo aprovado no curso Técnico de Mecânica. O curso foi excelente, pois era todo apoiado em Matemática e Física. Foram três anos estudando nos períodos da manhã e da tarde com até onze aulas diárias. Embora, às vezes, encontrasse algumas dificuldades inerentes ao curso, ele era para mim uma fonte de motivação. Não posso me esquecer de que os professores de lá tiveram influência na minha decisão sobre a escolha de meu curso superior. Após ter sido aprovado no vestibular, cursei a Licenciatura de Física. Ao terminar, decidi fazer a Licenciatura em Matemática, na qual aprendi algumas coisas dessa ciência que me intrigavam. O Desenho Geométrico, a Geometria Descritiva e a Álgebra foram disciplinas que muito me ajudaram a melhor compreender a Matemática.

Quando ainda era estudante da Licenciatura de Matemática, iniciei minha carreira como professor de Física, Química e Matemática. Esse contato com os estudantes foi muito desafiador, mas ao mesmo tempo motivador. Será que eu conseguiria ensinar o que havia aprendido? Será que os estudantes entenderiam? Foi um grande desafio, mas eu o encarei. Trabalhei durante algum tempo no Ensino Médio; depois de formado, comecei a lecionar no Ensino Fundamental.

Ao longo dos anos de minha carreira no magistério, tinha a impressão de que algo não funcionava muito bem. Eu tentava ensinar os conteúdos, mas verificava que uma parcela significativa dos alunos não os entendia. Foi então que desenvolvi algumas atividades visando aproximar a Matemática e a Física da realidade do aluno. Obtive alguns resultados favoráveis, mas ainda constatava que muitos alunos continuavam com dificuldades em aprender e eu com dificuldades em ensinar Matemática. Sentia-me preocupado, angustiando, sem saber como ajudá-los.

Um assunto que sempre me despertava a atenção, pois os alunos tinham muita dificuldade de aprendê-lo, era a proporcionalidade; tema que constava do programa do 9º ano do Ensino Fundamental.

Em 1997, participei de um curso de Capacitação de Professores para o Ensino Médio e, em 1998, de uma Capacitação de Professores para o Ensino Fundamental. Tais cursos foram promovidos pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais (SEEMG). Eles foram muito importantes para a minha profissão, pois me incentivaram a buscar alternativas que pudessem minimizar as dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem da Matemática.

Em 2007, tive conhecimento do Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Ouro Preto. Vislumbrei nele uma oportunidade de conhecer métodos e processos de ensino/aprendizagem de Matemática que pudessem me ajudar a inovar minhas aulas e, consequentemente, levar meus alunos a aprender e a gostar dessa disciplina.

Em 2010, participei da seleção e fui aprovado no programa do referido Mestrado. Depois de ter cursado algumas disciplinas, tomei conhecimento de outras formas de intervir no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, a fim de reduzir as dificuldades dos alunos no estudo dessa disciplina. Conclui que o caminho era buscar metodologias e abordagens matemáticas que possibilitassem ao aluno construir seus conhecimentos, ao invés de submetê-lo a aulas monótonas, nas quais o professor expõe os conteúdos usando o quadro e o giz.

Naquela oportunidade, retomando minha preocupação com a dificuldade dos alunos na aprendizagem da proporcionalidade, realizei leituras sobre pesquisas e artigos de educadores que tratavam desse assunto (PONTE, SILVESTRE, 2008; COSTA, 2005; BERNAL, 2004; PONTES, 1996; POST, BEHR, LESH, 1995). Também analisei as considerações e orientações sobre o ensino e a aprendizagem da proporcionalidade, contidas nos *Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN* do Ensino Fundamental (BRASIL, 2008) e no *Plano Nacional do Livro Didático* (BRASIL, 2008).

A partir dessa revisão bibliográfica inicial, vislumbrei a possibilidade de abordar o tema proporcionalidade em sala de aula a partir de do assunto matemático denominado razão áurea. Foi então que decidi realizar a presente pesquisa, a fim de verificar se o estudo da razão áurea e de suas aplicações poderia contribuir para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano de uma escola pública.

Além de sua aplicação em áreas da própria Matemática, a razão áurea pode ser observada na vida cotidiana e usada em várias outras áreas do conhecimento humano como a pintura, arquitetura, música, odontologia. Considerando tal diversidade de aplicação, acrescentei um segundo objetivo à pesquisa, que além de uma antipatia que eu nutria pelo professor seria o de verificar se estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuiria para o desenvolvimento da percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua contribuição para outras áreas do conhecimento.

2 Justificativa da Pesquisa

Duas razões principais justificam a presente investigação que pretende desvendar possíveis contribuições da introdução do tema razão áurea na aprendizagem de proporção por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental: a) dificuldade manifestada pelos alunos na aprendizagem de razão, proporção e semelhança; b) interesse pelo assunto.

a) Dificuldade manifestada pelos alunos na aprendizagem de razão, proporção e semelhança.

Lecionando no Ensino Fundamental e Médio, o pesquisador percebeu que havia uma grande dificuldade dos alunos em identificar figuras semelhantes e, assim, encontrar a proporção entre elas. Tentando minimizar as dificuldades apresentadas, o pesquisador inseriu o conteúdo razão áurea em suas aulas, tendo em vista que ele: a) tem várias aplicações em outras áreas além da Matemática como na arte, na arquitetura, na música, literatura, entre outros campos; b) envolve conceitos matemáticos de razão, proporção e semelhança. Os resultados lhe pareceram positivos, mas ele não chegou a realizar nenhum estudo para verificar se tal abordagem contribuía para a aprendizagem da proporcionalidade pelos alunos. Concluiu, então, que se fazia necessário sistematizar a abordagem, aplicá-la em sala de aula, e coletar dados consistentes sobre a experiência realizada. Nascia aí o germe da presente pesquisa.

b) Interesse pelo assunto

Conversando com uma professora, que trabalhava com educação artística, o pesquisador percebeu mais profundamente a importância das aplicações da razão áurea na Matemática e em outras áreas do conhecimento e, em particular, nas artes. Naquela ocasião, pensou-se na realização de um trabalho envolvendo arte e matemática. Como este projeto não se concretizou, o pesquisador realizou um estudo sobre o assunto e sobre a proporcionalidade, a fim de verificar a possibilidade de realizar uma pesquisa envolvendo os dois temas.

Leituras sobre proporcionalidade e razão áurea (POST, LESH, BEHR, 1995; SPINILLO 2002; CARRAHER, 2002; GONÇALVES, 2010; Lívio, 2007; HUNTLEY, 1985) confirmaram as preocupações do pesquisador sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da proporcionalidade e o potencial da razão áurea para minorá-las. Por sua vez, a análise do trabalho de CARRAHER et al (1986 apud PONTES, 1996) e dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (BRASIL, 2008) revelou que a construção dos conceitos matemáticos pelos alunos se dá ao longo do tempo, e que eles devem ser trabalhados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, senão antes. Foi também muito importante para a presente investigação, as críticas de Boisnard e al (1994) e Oliveira e Santos (2 000), mostrando que o ensino da proporcionalidade consiste, em geral, na apresentação mecânica da regra de três e de todas as regras que dela decorrem, sem possibilidade de os alunos adquirirem um verdadeiro conhecimento de proporcionalidade.

Por fim, a posição de pesquisadores e educadores (VERGNAUD, 2003; LESH, POST e BEHR, 1988), sobre a importância da proporcionalidade na formação das estruturas cognitivas dos alunos, na aprendizagem de vários conceitos matemáticos, na aplicação em várias áreas do conhecimento científico e, ainda, nas aplicações no cotidiano das pessoas, levou o pesquisador a se preocupar ainda mais com o aprendizado desse conteúdo e a reafirmar sua decisão de realizar uma investigação nessa área.

Em termos de trabalho em sala de aula, a ideia de retomar o ensino da proporcionalidade no 9º ano, a partir do estudo da razão áurea, foi reavivada por duas afirmações contidas em documentos oficiais. A primeira delas consta nos PCN (BRASIL, 2008, p. 22-23): “[...] para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos”. A segunda, encontra-se no PNDL (BRASIL, 2008, p. 17): “É preciso, então, que esses vários momentos sejam bem articulados, em especial, evitando-se a fragmentação ou as retomadas repetitivas”.

A retomada da proporcionalidade por meio da razão áurea preencheria esses dois requisitos. Em primeiro lugar, os alunos teriam oportunidade de estudar as proporções em novas representações e em extensões com outros conceitos matemáticos (sequências; medida de comprimento; ângulo reto, segmento; triângulo retângulo; teorema de Pitágoras; pirâmide; espiral; frações contínuas; semelhança de triângulos retângulos, polígonos etc.). Por outro lado, seria evitada uma retomada repetitiva, pois a aplicação da razão áurea em outras áreas científicas é um tema que atrai a atenção dos alunos.

Portanto, restaria verificar se tal retomada poderia contribuir para o aprendizado da proporcionalidade e, também, para a percepção acerca da importância da Matemática e de sua contribuição para outras áreas do conhecimento.

3 Questão de Investigação e Objetivos

As considerações anteriores levaram o pesquisador a propor a seguinte questão de pesquisa:

Quais as contribuições do estudo da razão áurea e de suas aplicações para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano de uma escola pública e para a percepção da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento?

Para respondê-la, foram fixados os dois seguintes objetivos:

1º objetivo - Verificar a conjectura seguinte: "O estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuem para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública".

2º objetivo - Verificar a conjectura: "O estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuem para a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento".

Para realizar a pesquisa, foi elaborado conjunto de atividades sobre proporcionalidade para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir da razão áurea e de suas aplicações.

Considerando que o presente estudo foi desenvolvido no âmbito de um mestrado profissional, e que um produto deve resultar dele para uma possível utilização por professores, o conjunto de atividades elaborado e as orientações para sua aplicação serão disponibilizados para uso nas escolas do Ensino Fundamental.

Além da introdução, esta dissertação apresenta cinco capítulos. O Capítulo I trata da razão áurea. Nele constam aspectos históricos da razão áurea, os fundamentos matemáticos desse conceito e dos conceitos dele decorrentes. Também são discutidas a relevância desse tema, as relações entre a razão áurea e a proporcionalidade e a construção do segmento áureo com régua e compasso.

O Capítulo II é dedicado à proporcionalidade. Nele são abordados aspectos históricos sobre esse tema, as discussões e estudos relacionados com o raciocínio proporcional e a temática do ensino e da aprendizagem da proporcionalidade.

A metodologia da pesquisa é abordada no Capítulo III. Nele são descritos os participantes, os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos que foram adotados durante a coleta dos dados. Por último, é apresentada a o conjunto de atividades aplicado em sala de aula, a partir de uma abordagem baseada na razão áurea.

No Capítulo IV, é apresentada a análise dos dados, bem como a discussão dos resultados obtidos, tendo em vista os objetivos fixados.

O Capítulo V apresenta as considerações finais relacionadas com o primeiro e o segundo objetivos da investigação e as contribuições complementares aportadas pela pesquisa.

CAPÍTULO I

A RAZÃO ÁUREA

1.1 Aspectos Históricos da Razão Áurea

Alguns pintores famosos da história também foram matemáticos talentosos. Porém, quando se fala de um “homem do Renascimento” se quer referir a uma pessoa que exemplifica o ideal Renascentista de vasta cultura e conhecimento. Por conseguinte, três dos mais conhecidos pintores renascentistas, os italianos Piero dela Francesca, Leonardo da Vinci e o alemão Albrecht Durer, também deram contribuições interessantes à Matemática. Talvez não surpreenda o fato de que as investigações matemáticas dos três pintores estivessem relacionadas à razão áurea.

Conforme salienta Lívio (2007), o matemático mais ilustre deste trio ilustre foi Piero dela Francesca. Em Florença, ele conheceu os trabalhos de pintores do início do Renascimento, como Fra Angelico e Masaccio, e as esculturas de Donatello. Ficou particularmente impressionado com a serenidade das obras religiosas de Fra Angelico, e seu estilo próprio, em termos de aplicação da cor e da luz. Em sua obra, *As Vidas dos Mais Eminentes Pintores, Escultores e Arquitetos*[1], o primeiro historiador da arte, Giorgio Vasari, escreveu que Piero demonstrava grande habilidade matemática desde a infância e atribuiu a ele diversos tratados matemáticos (LÍVIO, 2007). Alguns foram escritos quando ainda era pintor. Em uma dedicatória ao duque Guidobaldo de Urbino. Piero dizia a respeito de seus livros que eles foram escritos para que sua inteligência não ficasse entorpecida pela falta de uso. Três dos trabalhos matemáticos de Piero foram preservados: De *Prospectiva Pingendi* (Sobre a perspectiva na pintura[2]), *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (Livro curto sobre sólidos regulares[3]) e *Trattato d’Abaco* (Tratado sobre o Ábaco[4]).

Tanto no *Tratado sobre o Ábaco* como em *Cinco Sólidos Regulares*, Piero apresenta um número considerável de problemas e de suas soluções que envolvem o pentágono e os cinco sólidos platônicos. Ele calculava os comprimentos dos lados

[1] Tradução nossa.
[2] Tradução nossa.
[3] Tradução nossa.
[4] Tradução nossa.

e das diagonais, além de áreas e volumes. Muitas das soluções envolvem razão áurea. Algumas das técnicas de Piero demonstram um pensamento inovador e original.

Segundo Lívio (2007), Piero, tal como Fibonacci antes dele, escreveu o *Tratado sobre o Ábaco* principalmente para fornecer aos mercadores de sua época receitas matemáticas e geométricas. Num mundo comercial em que não havia um sistema único de pesos e medidas e, tampouco, formatos ou tamanhos convencionais de recipientes, a capacidade de calcular volumes de recipientes era uma necessidade absoluta. Contudo, a curiosidade de Piero o levou muito além dos assuntos com aplicações cotidianas. Neste sentido, em seus livros, encontram-se problemas como calcular o lado de um octaedro inscrito em um cubo ou o diâmetro de cinco pequenos círculos inscritos em um círculo de diâmetro maior. A solução deste último problema envolve o pentágono e, portanto, a razão áurea.

Grande parte do trabalho algébrico de Piero foi incluída no livro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalit*à (1494), publicado por Luca Pacioli (1494). A maioria das obras de Piero sobre sólidos, publicados em latim, foi traduzida para o italiano pelo mesmo Luca Pacioli e incorporada ao seu famoso livro sobre a razão áurea, *Divina Proportione* como sendo obra sua.

De acordo com Lívio (2007), Luca Pacioli nasceu em 1445 no Borogo San Sepolcro (a mesma vila toscana em que Piero dela Francesca nasceu e manteve sua oficina). De fato, Paciolli teve sua educação infantil na oficina de Piero. Entretanto , ao contrário de outros alunos que mostraram habilidade na arte e na pintura, mostrou ser mais promissor em Matemática. Após ter sido agraciado com alguns privilégios pelo papa, Pacioli teve que enfrentar a inveja do *establishment* religioso. Durante quase dois anos, chegou a ser impedido de dar aulas.

Em 1494, Pacioli foi à Veneza para publicar *Summa*, que dedicou ao duque Guidobaldo. De forma enciclopédica, esta obra apresentava o conhecimento matemático da época relativo a Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Nesse livro, Pacioli apresenta problemas sobre o icosaedro e o dodecaedro do tratado de Piero e problemas de álgebra e geometria de Fibonacci.

Segundo Lívio (2007), em 1480, Ludovico Sforza tornou-se, efetivamente, o duque de Milão. Na verdade, ele era apenas o regente do verdadeiro duque de sete anos de idade, após um episódio de intriga política e assassinato. Decidido a fazer da sua corte um lar para estudiosos e artistas, em 1482, Ludovico convidou

Leonardo da Vinci como pintor e engenheiro do duque. Leonardo tinha considerável interesse pela geometria, especialmente por suas aplicações práticas em mecânica. Ele considerava a mecânica como sendo o paraíso das ciências matemáticas, pois por meio dela podiam-se ver os frutos da Matemática. Consequentemente, foi Leonardo quem, provavelmente, induziu o duque a convidar Pacioli para se juntar à corte como professor de matemática, em 1496. Sem dúvida, Leonardo aprendeu um pouco de Geometria com Pacioli, enquanto infundia neste uma maior apreciação da arte.

Durante sua estada em Milão, completou o trabalho de seu tratado de três volumes, *De Divina Proportione* (A Divina Proporção [5]), que finalmente foi publicado em 1509. O primeiro grande volume, *Compêndio de Divina Proportione* (Compêndio da Divina Proporção[6]), contém um sumário detalhado das propriedades da razão áurea e um estudo dos sólidos platônicos e outros poliedros. Na primeira página de *A Divina Proporção*, Pacioli diz que essa era uma obra necessária para toda mente humana perspicaz e inquisidora, na qual todos que gostassem de estudar filosofia, perspectiva, pintura, escultura, música e outras disciplinas matemáticas, iriam encontrar ensinamentos delicados, sutis e admiráveis e se deliciarem em diversas questões que abarcavam uma ciência muito secreta.

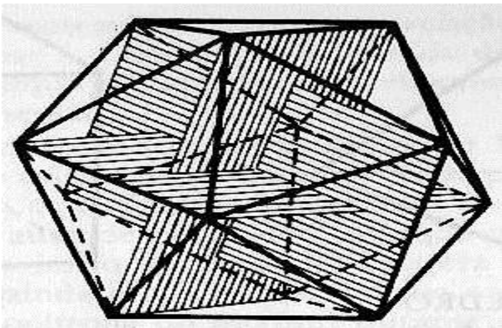
De acordo com Lívio (2007), Pacioli dedicou o primeiro volume de *A Divina Proporção* a Ludovico Sforza. No quinto capítulo, ele apresenta cinco razões pelas quais acredita que o nome apropriado para razão áurea deveria ser a proporção divina. A primeira razão seria porque ela é uma só e não mais. Isso porque a razão áurea é um valor único e a unidade é o supremo epíteto do próprio Deus. Como segunda razão, Pacioli encontra uma similaridade entre a existência da Santíssima Trindade e a definição da razão áurea envolver exatamente três comprimentos. A terceira razão consistiria na impossibilidade da compreensão de Deus e o fato de a razão áurea ser um número irracional. Pacioli julgava que, assim como Deus não pode ser definido adequadamente, nem entendido por meio de palavras, a proporção também não poderia ser designada por números inteligíveis, nem ser expressa por uma quantidade racional. Como quarta razão, Pacioli compara a onipresença e a invariabilidade de Deus com a autossimilaridade associada à razão áurea. Isto porque seu valor é sempre o mesmo e não depende do comprimento da

[5] Tradução nossa.
[6] Tradução nossa.

linha sendo dividida ou do tamanho do pentágono, no qual quocientes entre os comprimentos são calculados. A quinta razão indica uma visão ainda mais platônica da existência do que expressa pelo próprio Platão. Pacioli afirma que, assim como Deus conferiu existência a todo o cosmo através da quinta essência, representado pelo dodecaedro, a razão áurea conferiu existência ao dodecaedro, já que não se pode construir o dodecaedro sem a razão áurea. Ele acrescenta que é impossível comparar aos quatro sólidos platônicos (representando terra, água, ar e fogo) entre si sem a razão áurea.

No livro, Pacioli delira incessantemente a respeito das propriedades da razão áurea. Ele analisa em sucessão o que chama de efeitos e os qualifica com adjetivos como: essencial, singular, maravilhoso, supremo, e assim por diante. Ele considera como incompreensível o efeito de que retângulos áureos possam ser inscritos no icosaedro.

Figura 1 - Retângulos áureos inscritos no icosaedro



Fonte: (Huntley, 1985, p.44)

Pacioli para nos treze efeitos, concluindo que, pelo bem da salvação, essa lista deveria terminar, pois treze homens estavam presentes à mesa da Última Ceia de Cristo.

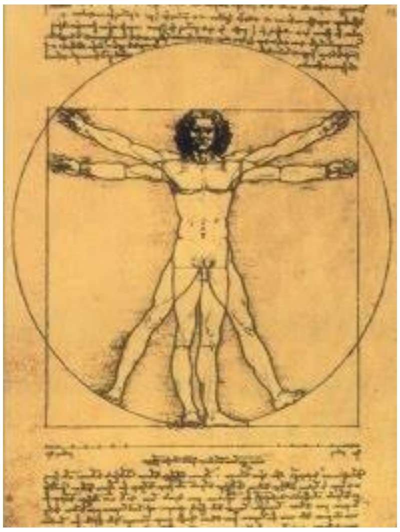
Pacioli tinha grande interesse pelas artes e, em parte, sua intenção em A Proporção Divina era aperfeiçoar suas bases matemáticas. Sua frase de abertura, na primeira página do livro, expressa o desejo de revelar a artistas, por meio da razão áurea, o segredo das formas harmônicas.

De acordo com Lívio (2007), o segundo volume de *A Divina Proporção* é um tratado sobre proporção e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. O tratado de Pacioli foi baseado, em grande parte, no trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius. De acordo com Vitruvius (s/d):

> No corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se o homem for deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas. (VITRUVIUS, s/d apud LÍVIO, 2007, p.157).

Esta passagem foi considerada pelos estudiosos renascentistas mais uma demonstração da ligação entre a base orgânica e a geometria da beleza, e isso levou ao conceito de homem vitruviano, desenhado por Leonardo da Vinci por volta de 1490.

Figura 2 - Homem vitruviano desenhado por Leonardo da Vinci



Fonte: Página da Wikipédia[7]

Quanto ao terceiro volume da coleção, ele consiste essencialmente em uma tradução para o italiano, palavra por palavra, da obra *Cinco Sólidos Regulares*, escrito em latim por Piero. O fato de que, em nenhum lugar do texto, Pacioli reconheça que foi simplesmente o tradutor do livro provocou uma violenta denúncia do historiador de arte Giorgio Vasari. Sobre Piero dela Francesca, Vasari (s/d apud LÍVIO, 2007) escreve que ele

[7] Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour.jpg>. Acesso em: 22/04/2013

> [...] era considerado um grande mestre dos problemas dos sólidos regulares, tanto aritméticos quanto geométricos, mas não pôde, devido à perda da visão que sofreu em idade avançada e em seguida pela morte, tornar conhecidas suas brilhantes pesquisas e os muitos livros que escreveu. O homem que deveria ter feito o máximo para aumentar a reputação e a fama de Piero, já que Piero lhe ensinara tudo que sabia vergonhosa e perversamente, tentou apagar o nome de seu professor e usurpar para si próprio a honra que pertencia inteiramente a Piero. Pois publicou com seu nome, todas as pesquisas feitas por esse admirável idoso, que era um grande pintor, além de um *expert* nas ciências (LÍVIO, 2007, p. 158).

Conforme Lívio (2007), não há dúvida de que, se não fosse pelos livros impressos de Pacioli, as ideias e construções matemáticas de Piero não teriam tido a ampla circulação que acabaram tendo. Além disso, até a época de Pacioli, a razão áurea era conhecida apenas por nomes como razão extrema e média ou proporção que tem uma média e dois extremos, e o próprio conceito só era conhecido pelos matemáticos. A publicação da A *Divina Proporção*, em 1509, renovou o interesse pela razão áurea. O conceito poderia então ser considerado com atenção renovada, porque sua publicação na forma de livro o identificava como merecedor de respeito. A infusão de significado teológico/filosófico no nome também destaca a razão áurea como um tópico matemático no qual um grupo eclético e cada vez maior de intelectuais poderia se aprofundar. Finalmente, com o livro de Pacioli, a razão áurea começou a se tornar disponível a artistas em tratados teóricos que não eram excessivamente matemáticos, que eles poderiam realmente usar.

Para Pacioli (1509 apud LÍVIO, 2007), os desenhos dos poliedros feitos à mão por Leonardo da Vinci para o livro *A Divina Proporção* tiveram um impacto próprio. Provavelmente, foram as primeiras ilustrações de sólidos vazados, que permitiam a fácil distinção visual entre a frente e a parte de trás. Há uma crença de que Leonardo possa ter desenhado o poliedro a partir de uma série de modelos de madeira, pois registros da Sala do Conselho em Florença indicam que um conjunto de modelos de madeira de Pacioli foi adquirido pela cidade para exposição pública.

As vidas de Leonardo e Pacioli continuaram a ser um tanto interligadas, mesmo após a conclusão de *A Divina Proporção*. Em outubro de 1499, os dois fugiram para Milão quando o exército francês, comandado pelo rei Luís XII, tomou a cidade. Após passarem curtos períodos em Mântua e Veneza, ambos se estabeleceram por algum tempo em Florença. Fra Luca Pacioli certamente não pode ser lembrado por sua originalidade, mas sua influência no desenvolvimento da

Matemática em geral, e na história da razão áurea em particular, não pode ser negada.

Na história da razão áurea, aparece outro nome de destaque: Leonardo de Pisa ou Fibonacci. Ele dizia que qualquer número poderia ser escrito com os nove algarismos (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) mais o signo 0. Foi assim que Fibonacci começou seu primeiro livro *Liber Abaci* (Livro do ábaco), publicado em 1202. Fibonacci teve a oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas de numeração e métodos de operações aritméticas.

Leonardo Fibonacci nasceu na década de 1170, filho de um homem de negócios e funcionário do governo chamado Guglielmo. O apelido Fibonacci (do latim *filius* Bonacci, filho da família Bonacci, ou filho da boa natureza), foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaurne Libri numa nota de rodapé em seu livro *Histoire des Sciencis Matematique em Italie*, de 1838. Entretanto, há alguns pesquisadores que atribuem o primeiro uso do nome Fibonacci a matemáticos italianos do fim do século XVII.

De acordo com Lívio (2007), na Argélia, Fibonacci entrou em contato com os numerais indo-arábicos, provavelmente com a instrução de um professor árabe. Após um tour pelo mediterrâneo, que lhe serviu para expandir seus horizontes matemáticos, ele decidiu publicar um livro que introduziria o uso de tais numerais de modo mais generalizado na vida comercial. Em seu livro, Fibonacci mostra como traduzir os numerais romanos para o novo sistema e como realizar as operações aritméticas com os novos números. Nele, havia também muitos exemplos que demonstravam a aplicação de sua nova matemática a uma variedade de problemas, que iam de práticas comerciais e do enchimento e esvaziamento de cisternas ao movimento de navios.

O papel de Fibonacci na história da razão áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a razão áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não tão importante. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a razão áurea, ele expandiu de forma significativa o campo da razão áurea e de suas aplicações.

As contribuições diretas de Fibonacci para a literatura da razão áurea aparecem em um pequeno livro sobre geometria, *Practica Geometriae*, que foi publicado em 1223 (LÍVIO, 2007). Ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do dodecágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro; todos intimamente ligados à razão áurea. Na solução desses problemas, Fibonacci demonstra um profundo conhecimento de Geometria Euclidiana. Embora suas técnicas matemáticas empreguem até certo ponto trabalhos anteriores, em particular sobre o pentágono e o decágono, de Abu Kamil, há poucas dúvidas de que Fibonacci aprimorou o uso das propriedades da razão áurea em várias aplicações geométricas. Contudo, sua contribuição mais importante para a razão áurea, e a que mais lhe trouxe fama, deriva de um problema aparentemente inocente do *Liber Abaci*.

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (FIBONACCI, 1202 apud LÍVIO, 2007, p.116).

Em qualquer mês, começando com o terceiro, o número de pares de adultos é simplesmente igual à soma do número de pares de adultos nos dois meses anteriores. O número de pares adultos, portanto, segue a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., e o número de pares de filhotes segue exatamente a mesma sequência, apenas com a diferença de um mês, a saber, 0, 1, 2, 3, 5, 8, ... É fácil observar que o número de pares é simplesmente a soma desses números, que dá a mesma sequência dos pares de adultos, com o primeiro termo omitido (1, 2, 3, 5, 8,...). A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... , na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, foi chamada de sequência de Fibonacci, no século XIX, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 - 1891).

Sequências de números nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas. A sequência de Fibonacci foi a primeira dessas sequências recursivas na Europa. A propriedade geral de que cada termo na sequência é igual à soma dos dois anteriores é expressa matematicamente como: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, onde F_n representa o n-ésimo termo na sequência.

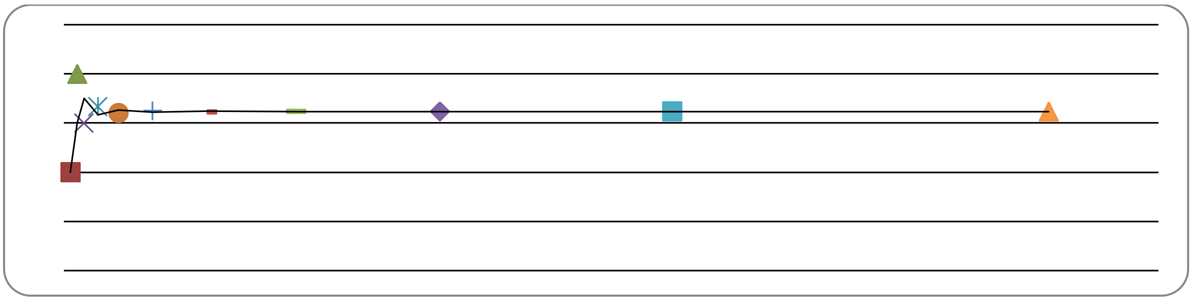
O nome de Fibonacci é tão famoso hoje porque a sequência de Fibonacci está longe de ficar limitada à reprodução de coelhos. Ela é usada em algumas construções como a da espiral áurea e pode ser encontrada na natureza (caramujo Nautillus, pétalas de flores, formação dos galhos das árvores, nas veias e artérias, etc).

Considerando a sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... e a razão de cada número pelo seu antecessor, obtêm-se outra sequência:

$$\frac{1}{1} = 1\,, \quad \frac{2}{1} = 2\,, \quad \frac{3}{2} = 1{,}5\,, \quad \frac{5}{3}\ 1{,}666\ldots\ , \quad \frac{8}{5} = 1{,}6\ , \ldots$$

Isso é percebido quando se coloca em um gráfico a sequência de Fibonacci no eixo horizontal e as razões sucessivas no eixo vertical.

Figura 3 - Sequência de Fibonacci e razões sucessivas



Fonte: Elaborada pelo autor

As razões vão se aproximando da razão áurea. Quando n tende para o infinito, o limite é exatamente a Razão Áurea ϕ.

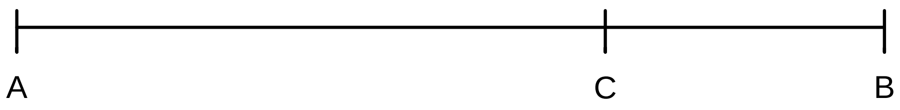
1.2 Razão Áurea

Quando se analisa as diversas situações em que a razão áurea aparece, percebe-se que se trata de um número diferenciado, haja vista que suas aplicações englobam diversos campos tais como a biologia, a música, a literatura, as artes, a arquitetura e situações na própria Matemática como, por exemplo, a sequência de Fibonacci. Sobre ela, Kepler (1571 – 1630) fez o seguinte comentário:

> A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razão. O primeiro, podemos comparar a uma medida do áureo; o segundo podemos chamar joia preciosa. (KEPLER, s/d apud HUNTLEY, 1985, p. 35).

Segundo Lívio (2007) a primeira definição de razão áurea apareceu, por volta de 300 a. C., no livro XIII, proposição 5, de Euclides de Alexandria. Sobre esse tema, a poetisa Edna St. Vicent Millay (1923) escreveu um poema com o título *Somente Euclides viu a Beleza Nua*. Euclides (s/d) apud Lívio (2007) definiu essa proporção da divisão de uma linha que ele chamou de razão extrema e média. Nas palavras de Euclides (s/d) apud Lívio (2007, p. 13 e 14), “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor”. Essa definição pode ser mais bem entendida, usando a figura seguinte:

Figura 4 - Divisão de um segmento em média e extrema razão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se dizer que o comprimento do segmento AB é, certamente, maior que o do segmento AC; da mesma forma, o comprimento do segmento AC é maior que o do segmento CB. Se a razão entre os comprimentos dos segmentos AB e CB for igual à razão entre os comprimentos dos segmentos AC e CB, então esse segmento AB foi dividido na razão extrema e média, ou numa razão áurea.

Como imaginar que um simples segmento, que Euclides definiu com objetivos puramente geométricos, poderia abranger temas que vão da Botânica às Galáxias ou da Matemática às Artes? Um valor sentimental e espantoso foi dado por Einstein que disse:

> A melhor coisa que podemos vivenciar é o mistério. Ele é a emoção fundamental que está no berço da ciência e da arte verdadeiras. Aquele que não o conhece e não mais se maravilha, não sente mais o deslumbramento, vale o mesmo que um morto, que uma vela apagada. (Einstein, s/d apud Lívio 2007, p.14)

1.2.1 Calculando a razão áurea

Na figura 5, fazendo AC = x e CB = 1, tem-se que:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Figura 5 - Cálculo da razão áurea

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo: $x^2 = x + 1$. Resolvendo esta equação, obtêm-se as seguintes raízes:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

A solução positiva da equação é chamada razão áurea, usualmente, nomeada pelo símbolo **Φ** (lê-se phi).

Calculando a raiz positiva da equação, chega-se ao seguinte resultado aproximado:

$$\Phi \approx 1{,}618$$

Ou seja, a razão áurea é, aproximadamente, igual ao número 1,618.

1.2.2 Construindo o segmento áureo com régua e compasso

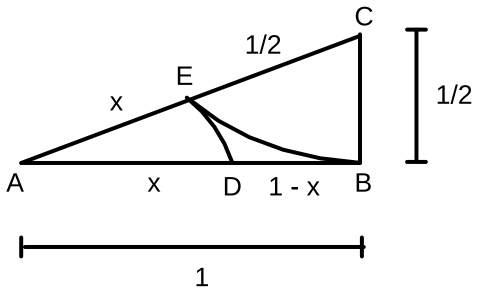
Para construir um segmento áureo usando régua e compasso, procede-se do seguinte modo:

a) Dado um segmento AB qualquer, obter o ponto médio de AB, usando o compasso e a régua. Em seguida, traçar uma reta perpendicular à reta AB, passando por B, com a metade do comprimento do segmento AB.

b) Centrando o compasso em B, traçar uma circunferência que intercepte a perpendicular no ponto C de raio BM. O segmento BC é perpendicular ao segmento AB medindo a metade do segmento AB. Unir os pontos A e C de modo a obter o triângulo ABC.

c) Com aponta seca do compasso em C e abertura até B, marcar um novo ponto em AC (hipotenusa) do triângulo no segmento AB. Este é o ponto que divide o segmento AB em média e extrema razão, ou ainda, o comprimento da maior parte de AB é 1,618.vezes a menor parte de AB. Esse procedimento pode ser visualizado através da figura 6.

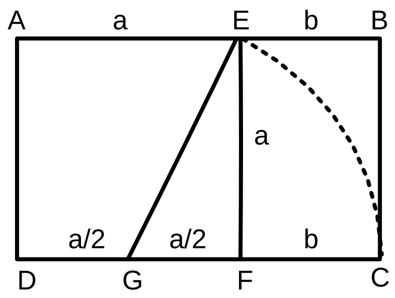
Figura 6 - Construção geométrica do segmento áureo



Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se, também, construir um retângulo áureo a partir de um quadrado de lado a, da seguinte forma:

Figura 7 - Construção geométrica do segmento áureo a partir de um quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor

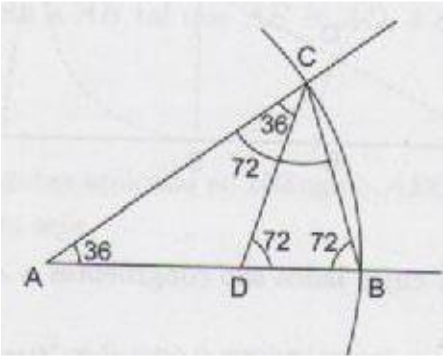
Seja G o ponto médio do segmento DF. Com o compasso centrado (ponta-seca) em G, traçar o arco EC, sendo C um ponto da reta DF e F pertence ao segmento DC.

O ponto F divide o segmento DC em média e extrema razão (razão áurea).

Pode-se, ainda, construir um decágono regular inscrito em uma circunferência. A construção do lado de um decágono (l_{10}) é equivalente à construção de um arco de medida de 36°, isto é, equivalente à décima parte de uma circunferência dada.

a) Seja, então, numa circunferência de centro A e raio r, o ângulo central CÂB com medida 36°.

Figura 8 – Decágono e razão áurea



Fonte: Rezende e Queiroz, 2008, p.164

b) O triângulo ABC é isósceles de base BC, com ângulo da base medindo 72°. Seja o segmento CD, congruente ao segmento BC, com D pertencente a AB. Logo, ambos são congruentes ao lado l_{10} do decágono regular inscrito.

c) O triângulo CDB é, então, isósceles e tem por base o segmento DB. Dessa forma, m(CDB) = 72°.

d) Decorre daí, que os triângulos ABC e CDB são semelhantes. Assim sendo, vale a relação AB/CB = CB/DB.

e) O triângulo ADC, por sua vez, é isósceles com base AC, tendo em vista que m(ACD) = 36º = m(CÂD).

f) Dessa forma, tem-se que m(AD) $\cong$ m(CD) $\cong$ m (l_{10}).
Isto mostra que r/m(l_{10}) = m(l_{10})/(r – m(l_{10}). Logo, l_{10} é o segmento áureo do raio da circunferência inicial.

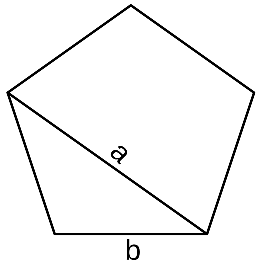
Simbolicamente: m (l_{10}) = r $\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$

Observação: O triângulo isósceles ABC, cujo ângulo da base mede 72º, é chamado de triângulo áureo. Observa-se que a razão de semelhança entre o triângulo ABC e o triângulo CDB é a razão áurea.

1.3 Os pitagóricos e a razão áurea

Os Pitagóricos sabiam que havia uma relação áurea entre a medida da diagonal do pentágono regular e a medida do seu lado, conforme mostra a figura seguinte.

Figura 9 - Pentágono e razão áurea



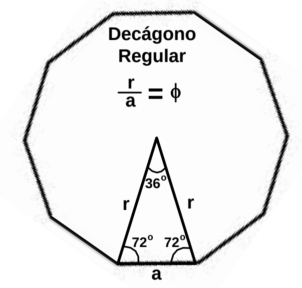
Relação Áurea

$$\frac{a}{b} \approx 1{,}61$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Os Pitagóricos também sabiam que a relação entre a medida do raio de uma circunferência circunscrita ao decágono regular e a medida de um de seus lados estavam em razão áurea.

Figura 10- Decágono inscrito e razão áurea

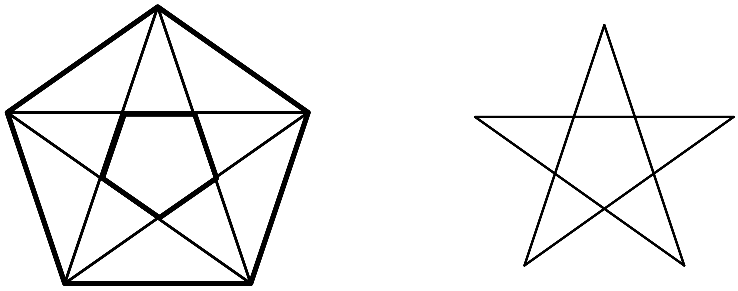


Fonte: Elaborada pelo autor

O pentagrama era um símbolo e o emblema da Sociedade de Pitágoras; um membro da sociedade era reconhecido. Era, também, considerado pelos membros da sociedade pitagórica como um símbolo de boa saúde.

O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama.

Figura 11 - Pentagrama e razão áurea



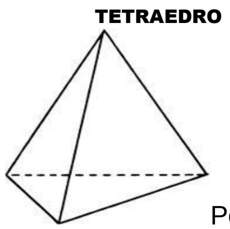
pentágono e suas diagonais pentagrama

Fonte: Elaborada pelo autor

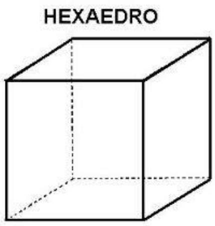
O pentagrama detém uma série de razões áureas. Uma delas é a seguinte: a razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. Também pode ser constatdo que a razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea.

Na escola de Pitágoras, já se sabia que havia cinco, e somente cinco, sólidos convexos regulares, cada um deles podendo ser circunscrito por uma esfera. São eles: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Tais poliedros estão associados ao nome de Platão por ele ter relacionado esses poliedros com os elementos importantes ao qual o mundo fosse feito: terra, fogo, ar, universo e água, respectivamente.

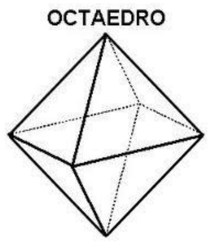
Figura 12 – Poliedros de Platão



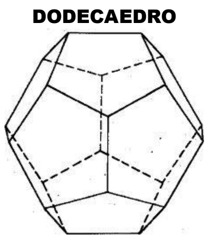
Possui 4 faces que são triângulos equiláteros.



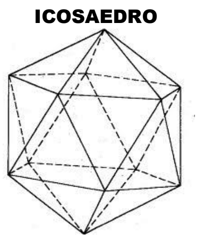
Possui 6 faces que são quadrados.



Possui 8 faces que são triângulos equiláteros.



Possui 12 faces que são pentágonos regulares.



Possui 20 faces que são triângulos equiláteros.

Fonte: Elaborada pelo autor

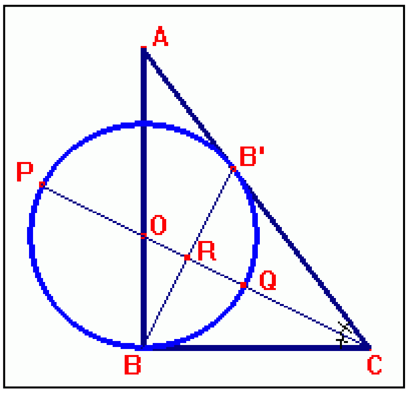
Unindo-se os centros dos lados do cubo formar-se-á um octaedro, enquanto a união dos centroides do octaedro forma um cubo. Relação semelhante verifica-se entre o dodecaedro e o icosaedro. A união de quatro centroides dos lados do tetraedro dá origem a outro tetraedro.

Segundo Huntley (1985), um gosto pelos mistérios levou os gregos antigos a atribuir um significado especial ao dodecaedro. Suas doze faces regulares correspondiam aos doze signos do zodíaco. Era um símbolo do universo. É interessante observar que, no dodecaedro, o ponto de intersecção de duas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea. Cada face pentagonal, associada à divisão áurea, era de interesse especial para os pitagóricos.

Existe uma relação dos dois pares de poliedros recíprocos com o retângulo áureo.

O teorema de Pitágoras também guarda relação com a razão áurea, como se pode observar a seguir. Os Egípcios utilizavam o triângulo cujos comprimentos dos lados eram 3; 4; 5, pois sabiam que ele possuía um ângulo reto. Se forem efetuadas construções geométricas nesse triângulo, percebe-se que a razão áurea aí também aparece.

Figura 13 – Teorema de Pitágoras e razão áurea



Fonte: Queiroz, 2008, pág.12

A bissetriz do ângulo C intercepta o lado AB em O; logo, pode-se construir um círculo com centro em O e raio OB. A hipotenusa AC tangencia o círculo no ponto B’. O segmento BB’ intercepta o segmento CO no ponto R. O segmento CO corta o círculo no ponto Q e o ponto Q divide o segmento CP na proporção áurea, ou seja:

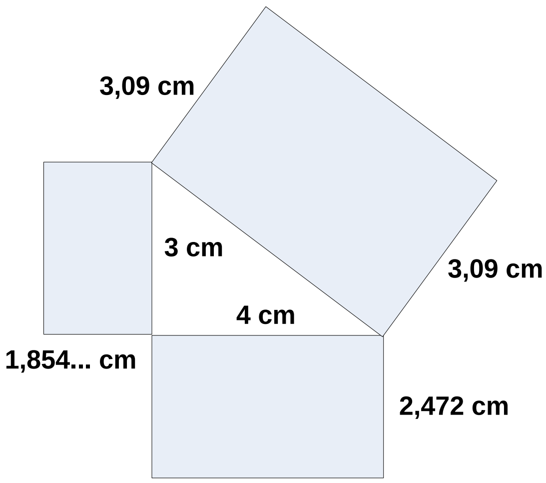
$$\frac{m(\overline{CP})}{m(\overline{PO})} = \phi \qquad \frac{m(\overline{PQ})}{m(\overline{CQ})} = \phi \qquad \frac{m(\overline{OR})}{m(\overline{RQ})} = \phi$$

Embora não haja documentos da época, provavelmente, foram os pitagóricos os primeiros a demonstrarem a relação entre os lados do triângulo retângulo: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Tal relação é conhecida como o teorema de Pitágoras. Conforme salienta Boyer (1996),

> Tendo desenvolvido a teoria das proporções no livro V, Euclides explorou-a no livro VI provando teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos semelhantes. Merece destaque a Proposição 31, uma generalização do teorema de Pitágoras. “Em triângulos retângulos a figura sobre o lado que subtende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contém o ângulo reto”. Proclo atribui esta extensão ao próprio Euclides. O livro VI contém também (nas Proposições 28 e 29) uma generalização do método de aplicação das áreas, pois a base sólida para as proporções, dada no livro V, permitia ao autor fazer uso livre do conceito de semelhança. (Boyer, 1996 p.78)

É interessante observar a relação das áreas dos retângulos áureos construídos a partir dos lados de um triângulo retângulo.

Figura 14 - Triângulo retângulo e áreas dos retângulos áureos



3 x 1,854... + 4 x 2,472... ≈ 5 x 3,09

$$\frac{3}{1{,}854\ldots} \approx 1{,}61$$
$$\frac{4}{2{,}472\ldots} \approx 1{,}61$$
$$\frac{5}{3{,}09\ldots} \approx 1{,}61$$

Fonte: Elaborada pelo autor

1.4 Relevância do tema razão áurea

A razão áurea é um tema que possibilita a exploração de vários conteúdos matemáticos e suas aplicações se estendem por diversas áreas do conhecimento humano. Portanto, ele se constitui em conteúdo importante no ensino da Matemática.

No primeiro caso, observa-se que, ao desenvolver o trabalho com a razão áurea, três eixos temáticos citados no CBC (2007) são estudados pelos alunos. O eixo temático “Espaço e Forma” é abordado e permite desenvolver as habilidades: reconhecer as propriedades das figuras planas tais como os triângulos, quadrados, retângulos; identificar segmento e seu ponto médio, elementos de triângulos e polígonos; reconhecer e descrever objetos do mundo físico utilizando termos geométricos; construir perpendiculares, paralelas e mediatriz de um segmento usando régua e compasso; reconhecer o ponto segmento, a mediatriz e a bissetriz de ângulos) utilizando régua e compasso; retas paralelas e perpendiculares, construção de triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos, hexágonos e outros polígonos

O eixo temático “Números e Operações” funde-se com o eixo “Expressões Algébricas”, ajudando a desenvolver algumas importantes habilidades: realizar cálculos numéricos, resolver problemas que envolvam grandezas diretamente proporcionais; resolver problemas que envolvam números racionais; reconhecer a razão áurea como número irracional através da resolução de uma equação do segundo grau.

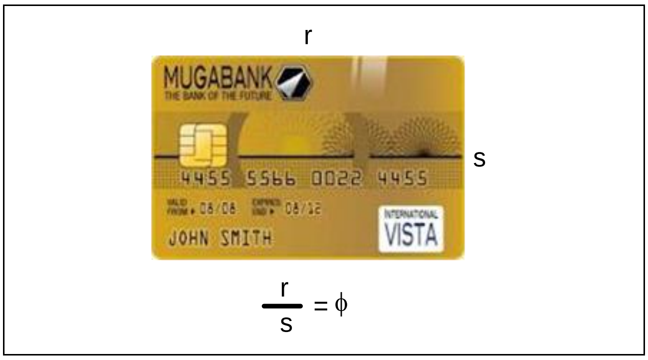
Outra vantagem do estudo da razão áurea é que ela possibilita o uso de instrumentos de construção como régua, transferidor e compasso ou, então, *softwares* de geometria dinâmica. São atividades de desenho geométrico que podem trazer muitos benefícios para o aprendizado da Matemática, conforme salienta Marmo e Marmo.

> O Desenho Geométrico estabelece um canal de comunicação universal para a transmissão da linguagem gráfica. É disciplina que permite ao estudante tirar uma série muito grande de conclusões a partir de um mínimo de informações, liberando a criatividade. Interliga as demais disciplinas ajudando a compreensão de desenhos em geral e a resolução de questões de natureza prática do cotidiano. O Desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, fortalecendo o ensino desta importante matéria (MARMO e MARMO, 1994, p.6).

A razão áurea também pode ser importante no aprendizado da Matemática ao ser encontrada em situações tão diversas como a vida cotidiana, a natureza, a arquitetura, a odontologia, música, pintura.

Na vida cotidiana, ela pode ser observada, por exemplo, em cartões de crédito, conforme mostra a figura 15.

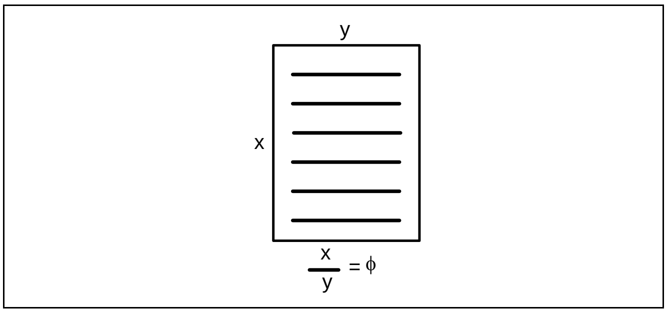
Figura 15 - Razão áurea e cartão de crédito



Fonte: Página do Universo Fantástico[8]

Também pode ser encontrada em uma folha de papel, conforme ilustrada na figura 16.

Figura 16 - Razão áurea e folha de papel A4

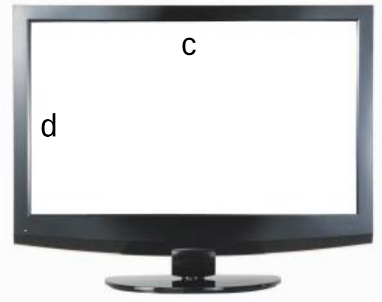


Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme mostra a figura 17, a razão áurea pode ainda ser observada em uma tela de televisão plana.

[8] Disponível em <http:// www.universofantastico.blogspot.br>. Acesso em 22/04/2013.

Figura 17 - Razão áurea e tela plana de televisão



$$\frac{c}{d} = \phi$$

Fonte: Adaptada da página TV digital – Brasil escola [9]

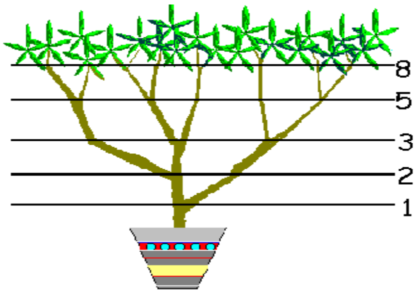
Os alunos poderão, também, encontrar a razão áurea na natureza como, por exemplo, na concha do caracol nautillus, na distribuição das sementes das plantas, nas escamas de peixes, na margarida, no girassol, nos chifres dos cordeiros selvagens, nas presas dos elefantes, na concha de moluscos, entre outros. Trata-se de observar espirais logarítmicas e a sequência de Fibonacci, onde se encontra a razão áurea.

Figura 18 – Girassol e razão áurea

Fonte: Página Universo da Gil[10]

[9] Disponível em <http://www.brasilescola.com/informatica/tv-digital.htm > Acesso em 22/04/2013.
[10] Disponível em < http:// www.universodagil.blogspot.com> Acesso em 22/04/2013

Figura 19 - Razão áurea e plantas



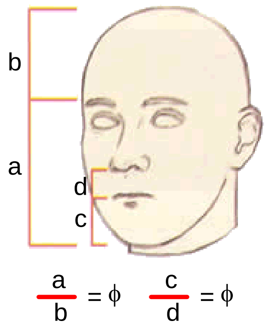
Fonte: Página O lápis Verde[11]

Figura 20 - Caracol nautillus e razão áurea

Fonte: Portal Sercomtel [12]

No corpo humano, a presença da razão áurea pode ser detectada entre medidas de comprimentos de várias de suas partes, conforme mostram as figuras 21, 22 e 23.

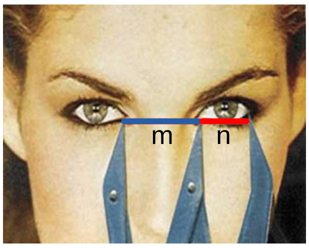
Figura 21 - Rosto humano e razão áurea



Fonte: adelmomedeiros.com [13]

[11] Disponível em: <http://www.olapisverde.blogspot.br-> Acesso em 22/04/2013.
[12] Disponível em: < http://www.sercomtel.com.br> Acesso em 22/04/2013.
[13] Disponível em: < http://www.adelmomedeiros.com.br>. Acesso em 22/04/2013.

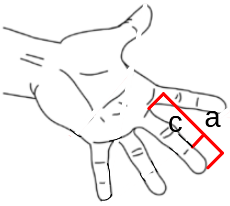
Figura 22 - olhos e razão áurea



$$\frac{m}{n} = \phi$$

Fonte: Página do Design.blog [14]

Figura 23 - Dedo e razão áurea



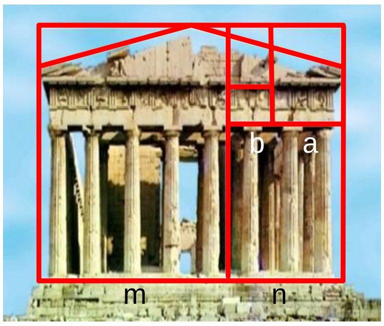
$$\frac{a}{c} = \phi$$

Fonte: Figura adaptada da página da Wikipédia[15]

Na arquitetura, a razão áurea serviu de base para a construção de edifícios tanto na antiguidade como em tempos modernos. Por exemplo, o Parthenon, edifício grego representativo do século de Péricles e construído entre 447 a. C. e 443 a. C., apresenta a razão áurea entre algumas de suas medidas. O mesmo acontece com o Taj Mahal, construído pelo imperador indiano Shah Jahan, entre 1630 e 1652, sobre o túmulo de sua esposa chamada Aryumand Banu Began. Em tempos modernos, a razão áurea pode ser observada em três retângulos áureos que se encontram na fachada principal do edifício sede das Nações Unidas em Nova York.

[14] Disponível em: < http://www.design.blog.br>. Acesso em: 22/04/2013.
[15] Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea. Acesso em: 22/04/2013.

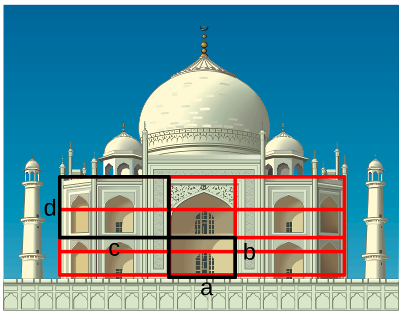
Figura 24 - Parthenon e razão áurea



$$\frac{m}{n} = \phi \qquad \frac{a}{b} = \phi$$

Fonte: Figura adaptada da página Um universo fantástico[16]

Figura 25 - Taj Mahal e razão áurea



$$\frac{a}{b} = \phi \qquad \frac{c}{d} = \phi$$

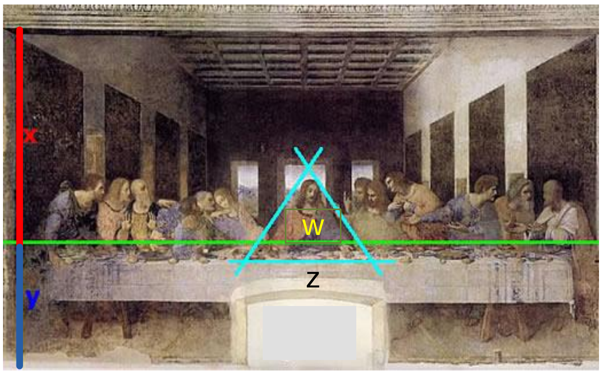
Fonte: figura adaptada da página Phi – O número de Ouro[17]

A razão áurea tem sido usada nas artes por grandes pintores e escultores. O universalmente famoso quadro da Monalisa, pintado por Leonardo da Vinci, apresenta a proporção áurea na face, bem como em relações no tronco. Na santa ceia de Da Vinci, o pintor também utilizou a razão áurea.

Boticelli, pintor italiano do Renascimento, em seu quadro denominado *O Nascimento de Vênus*, a imagem de Afrodite está na proporção áurea. Outros mestres da pintura, como Giotto e Salvador Dalí, também usaram a razão áurea em suas obras.

[16] Disponível em: <http://umuniversofantastico.blogspot.com.br/> Acesso em: 22/04/2013.
[17] Disponível em: http://razaoaureaifsc.blogspot.com.br/2012/09/aplicacoes-da-razao-aurea.html. Acesso em 22/04/2013.

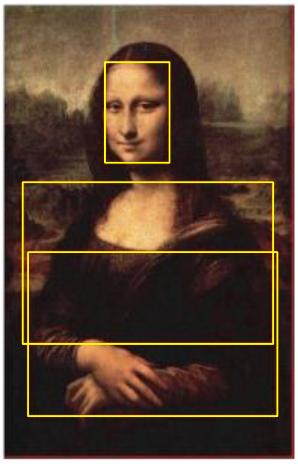
Figura 26 - Útima ceia de Da Vinci e razão áurea



$$\frac{x}{y} = \phi \qquad \frac{z}{w} = \phi$$

Fonte: Figura adaptada da página B. Piropo[18]

Figura 27 - Mona Lisa e razão áurea



Fonte: Figura adaptada da página De tudo um pouco[19]

[18] Disponível em: <http://www.bpiropo.com.br>. Acesso em 22/04/2013.
[19] Disponível em <http://www.deumtudo2.blogspot.com> Acesso em 22/04/2013.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES SOBRE A PROPORCIONALIDADE

O ensino da Matemática vem sofrendo grandes mudanças na maioria dos países, visando substituir o ensino tradicional, que leva os alunos a uma memorização de conteúdos, ao aprendizado de técnicas e fórmulas de uso imediato, à resolução de exercícios padronizados. A Matemática é mais do que isso. Para Garcia (2009), a Matemática desempenha um papel importante na formação do cidadão, pois ela permite ao ser humano desenvolver estratégias, enfrentar desafios, comprovar e justificar resultados em outras atividades, além de estimular a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio lógico, a iniciativa pessoal e o trabalho coletivo.

No Brasil, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997), os objetivos do Ensino Fundamental consistem em conduzir o aluno a compreender e transformar o mundo à sua volta, estabelecer relações de qualidade e quantidade, resolver situações-problemas, comunicar-se matematicamente, estabelecer ligações dentro e fora da Matemática com os outros conteúdos, promover-lhe autoconfiança e interação com seus colegas. Neles também consta que:

> O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia, advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 26).

Ainda de acordo com os PCN, as finalidades do ensino de Matemática indicam que os objetivos do ensino fundamental consistem em levar o aluno a:

> - Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas;
> - Fazer observações sistemáticas de aspectos qualitativos e quantitativos do ponto de vista de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes para interpretá-las e avaliá-las criticamente (BRASIL, 1997, p. 37).

Segundo o Currículo Básico Comum de Minas Gerais - CBC-MG 2005, as metodologias utilizadas devem priorizar a participação ativa do aluno através da leitura de textos matemáticos, estudos dirigidos, trabalhos em grupo, atividades lúdicas, curiosidades, exposições e murais. E, se possível, através do uso de recursos computacionais com softwares de geometria dinâmica e experimentos de cálculo.

Apesar dessas recomendações e dos esforços da comunidade de educação matemática junto aos docentes, as mudanças ainda não se concretizaram na maioria das escolas brasileiras. Isso pode ser sentido quando os professores de uma determinada série detectam que seus alunos não possuem os pré-requisitos necessários para o aprendizado de um determinado tema, embora eles já os tenham estudado anteriormente. Tal é caso, por exemplo, da proporcionalidade, já estudada pelos alunos no 7º ano, tão necessária no 9º ano de Ensino Fundamental para a aprendizagem de semelhança de triângulos e do Teorema de Tales e de suas aplicações, entre outros temas.

2.1 Aspectos Históricos da Proporcionalidade

Inúmeros conceitos matemáticos que são utilizados na resolução de problemas atuais surgiram na antiguidade. Caso igual ao da proporcionalidade, com grandes aplicações, hoje em dia, em diversas áreas do conhecimento e na resolução de problemas cotidianos.

De acordo com textos e documentos analisados por historiadores da Matemática, já havia registros relacionados às proporções no Papiro de Rhind, ou Papiro de Armes, um texto matemático datado de 1650 a.C e que trazia informações referentes à matemática egípcia antiga (EVES, 2004).

Segundo Boyer (1974), nesse papiro há registros de problemas aritméticos, envolvendo objetos concretos relacionados às situações práticas do dia a dia, cujas soluções mostram evidências do conhecimento e uso do algoritmo que se assemelha ao que hoje se chama regra de três. Um exemplo disso é a resolução apresentada para o problema 72, que indaga sobre o número de pães de “pesu” (densidade do grão) 45 que é equivalente à 100 pães de “pesu” 10. A solução 450 pães é encontrada a partir da resolução da expressão $\frac{100}{10}\ x\ 45$.

Outros problemas, segundo Gonçalves (2010), envolvendo proporção que constam no papiro de Rhind são citados por Boyer (1974) como sendo problemas algébricos. Estes não mencionam objetos concretos específicos, nem fazem apelo às operações ou números conhecidos. Trata-se de problemas com incógnitas denominadas *aha*. Um exemplo retratado por Boyer é o problema 24 que solicita o valor de *aha*, sabendo que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19. A solução proposta é encontrada por meio do "método da falsa posição", segundo o qual se atribui um valor qualquer para *aha* e, após a realização das operações indicadas no problema, compara-se o valor encontrado com o resultado que se deseja e, usando o conceito de proporção durante a resolução, chega-se à resposta correta.

No campo da Geometria, os egípcios chegaram a uma fórmula para a área do círculo a partir da proporcionalidade entre a área do quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo e a área do octógono inscrito nesse quadrado. Tal fórmula não difere muito da área do círculo atualmente usada.

A história antiga da Matemática ainda mostra outros povos que fizeram usos das proporções. Eves (2004) diz que, há mais de mil anos da era cristã, os babilônios tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes eram proporcionais.

Na Matemática da Grécia antiga, os pitagóricos também faziam uso do raciocínio proporcional, mas sua concepção das proporções foi desconsiderada quando da descoberta das grandezas incomensuráveis. Até então, os pitagóricos acreditavam que, dados dois segmentos quaisquer, sempre existia um segmento que "cabia" uma quantidade inteira de vezes em cada um dos segmentos considerados, ou seja, que os segmentos eram comensuráveis. Ainda é atribuído aos pitagóricos o estudo das médias e o uso da proporção áurea, o que fez os historiadores cogitarem sobre a hipótese de que os pitagóricos possuíam uma teoria de proporções para se trabalhar com números.

Segundo Eves (2004), no livro V dos Elementos, Euclides registra de forma organizada a teoria das proporções de Eudoxo. Expõe a definição de proporção na definição 5:

> Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores

> que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes (EUCLIDES, s/d apud EVES, 2004, p.173)

Utilizando a linguagem simbólica que a Matemática passou a adotar ao longo dos tempos, a definição proposta por Eudoxo pode ser escrita do seguinte modo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados os inteiros m, n sempre que $ma < mb$, então $mc < md$ se $ma = nb$, então $mc = nd$; se $ma > nb$, então $mc > nd$.

No livro V, Euclides ainda apresenta a definição de grandezas proporcionais, (def. 6), no qual afirma que "as grandezas, que têm entre si a mesma razão, se chamam proporcionais" (EUCLIDES, s/d apud COMMANDINO, 1944, p. 75). No livro VI dos Elementos de Euclides, encontra-se a aplicação das proporções eudoxianas à Geometria Plana. Nele, são apresentados os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos, a construção de terceiras, quartas e médias proporcionais, a proposição que afirma que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados, entre outras afirmações.

Além da aplicação à Geometria, a teoria das proporções foi aplicada aos números. De fato, conforme mostra Araújo et al (2005, p. 9), no livro VII, Euclides apresenta a seguinte definição nomeada como definição 20: "Números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, de um segundo número, que o terceiro é do quarto". A proposição 19 também trata de proporção relacionada aos números:

> Se quatro números são proporcionais, então o número originado pelo primeiro e o quarto é igual ao número originado pelo segundo e o terceiro; e, se o número originado pelo primeiro e o quarto é igual ao número originado pelo segundo e o terceiro, então os quatro números são proporcionais (ARAÚJO et al., 2005, p. 16).

A proposição 19 é hoje conhecida como a propriedade fundamental das proporções. Usando a simbologia atual, tem-se o seguinte enunciado: se a:b = c:d, então a.d = b.c e, se a.d = b.c, então a:b = c:d.

Boyer (1974) constatou que a teoria das proporções de Euclides foi substituída pela teoria de Omar Khayyman que, ao propor um método numérico em substituição ao método anterior, se aproximou muito das noções de números irracionais, e lidou com o conceito de um tipo de número que hoje representa o conceito de número real.

Tradicionalmente, os problemas que envolvem proporções nos quais são conhecidos três valores e deseja-se determinar um quarto valor, são resolvidos por um processo prático denominado regra de três e que, supostamente, surge das noções apresentadas na proposição 19 do livro VII dos Elementos de Euclides. Por exemplo, empregando a simbologia atual da Matemática, verifica-se que dados a,b,c conhecidos e x o desconhecido, tem-se que a.b = c.x. No entanto, a regra de três só veio a ser associada às proporções no final do século XVI (Eves, 2004). Anteriormente, a regra de três era puramente verbal, não sendo expressa por nenhum tipo de fórmulas ou equações.

Boyer (1996) destaca que a produção matemática chinesa mais importante foi o livro *Chui-Chang-Suan-Shu* ou *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática* (250 a.C.). Nele são apresentados 246 problemas sobre medidas de terras, agricultura, sociedade, engenharia, impostos dentre outros exemplos, onde alguns podiam ser resolvidos por regra de três. A análise dos problemas revela que a regra de três já era usada na resolução de problemas de interesse de grupos sociais.

Em seus trabalhos, Smith (1958) e Ávila (1986) mostram que a regra de três foi usada em transações comerciais durante vários séculos. Nesse sentido, Garding (1981) ressalta que:

> Pouco depois da invenção da imprensa apareceram muito compêndios de aritmética elementar, alguns deles tratando também de frações e de matemática comercial, em particular da equivalência de moedas, de problemas de partilhas e taxas de juros. O fato que x = a.b/c resolve a equação a.b = c.x (regra de três) mostrou ser extremamente útil. Um escritor chama-lhe a regra de ouro alegando que “é tão valiosa que ultrapassa as outras regras, assim como o ouro ultrapassa os outros metais” (GARDING, 1981, p. 290).

Outro fato histórico sobre as proporções deve-se ao italiano Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci. Em seu livro denominado Liber Abaci, publicado em 1202, encontra-se um problema envolvendo regra de três, e que Eves (2004, p. 316) descreve com o seguinte enunciado: “Certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?”.

2.2 O Raciocínio Proporcional

As expressões raciocínio proporcional e pensamento proporcional são usadas por vários autores para descrever uma maneira de pensar em Matemática diante de situações que envolvam relações proporcionais.

Conforme assinalam Post, Lesh e Behr (1995), já foram feitas tentativas de se definir o raciocínio proporcional. Em algumas delas, por exemplo, ele é considerado como forma de raciocinar proporcionalmente, como capacidade do indivíduo em fornecer respostas certas a problemas com valor ausente. Assim, o raciocínio proporcional não é limitado a resolver problemas utilizando algoritmos; ele envolve o raciocínio com proporções, um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. Ao comparar duas razões é necessário entender que as grandezas se relacionam entre si e variam em conjunto.

Post, Lesh e Behr (1995), segundo Gonçalves (2010), consideram que o raciocínio proporcional requer um pensamento qualitativo e quantitativo. O pensamento qualitativo seria mais amplo que o quantitativo, uma vez que ele possibilita uma análise prévia do problema e uma conclusão, após comparar taxas ou razões dadas, antes de se efetuar cálculos para se obter a resposta. O pensamento qualitativo possibilita ainda uma análise dos resultados obtidos, fazendo com que seja feito um questionamento quanto à coerência no contexto perante o problema que foi resolvido. Como afirmam Post, Behr e Lesh (1995, p.90), “o pensamento qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado de duas taxas, guardar essa informação e, então, comparar as interpretações de acordo com critérios predeterminados”. O pensamento quantitativo refere-se ao envolvimento e domínio dos cálculos para obter uma solução numérica para o problema, exigindo, o domínio de conceitos matemáticos; entre eles, os relacionados aos números racionais, tais como ordem, divisão, equivalência e a relação entre unidade e suas partes. Para os autores é importante que o indivíduo seja capaz de diferenciar situações proporcionais das que não possuem essas relações para que o raciocínio proporcional seja identificado.

Post, Behr e Lesh (1995) consideram que o raciocínio proporcional envolve aspectos tanto matemáticos quanto psicológicos. Quanto à Matemática, considera-se que a ideia de proporcionalidade se modela por uma expressão dada por equações do tipo y = kx (diretamente proporcional) ou y = k/x (inversamente proporcional), quando duas grandezas são relacionadas, ou por uma equação do tipo y = kxy/uvw, quando muitas grandezas são envolvidas (ÁVILA, 1986; LIMA 2006).

Quanto aos aspectos psicológicos, eles estariam relacionados à exigência de uma capacidade mental para realizar operações. Nesse sentido, há duas posições divergentes. De um lado, conforme salientam Schlimann e Carraher (1997), encontram-se aqueles que defendem que o pensamento proporcional só poder ser desenvolvido pelo indivíduo no período das operações formais do desenvolvimento cognitivo, em torno dos 15 anos de idade. Spinillo (1997) observou que muitos pesquisadores apoiam-se em Piaget e em seus colaboradores Piaget e Inhelder, (1975), Inhelder e Piaget, (1976) para ratificarem essa crença de que as crianças não possuem pensamento proporcional; sendo este, de domínio dos adolescentes.

De outro lado, posicionam-se aqueles que consideram que o aparecimento do pensamento proporcional se manifesta muito mais cedo na vida de um indivíduo. Eles apoiam-se em estudos que mostram que o conceito de proporção surge muito antes do ensino formal. Oliveira e Santos (1998), por exemplo, observaram que alunos do 6º ano, que ainda não tinham passado pela instrução formal da proporcionalidade e não conheciam o algoritmo da regra de três, foram capazes de manipular os seus conhecimentos prévios, construindo estratégias que possibilitaram a resolução de problemas propostos. Constatação semelhante foi observada por (OLIVEIRA, 1998), em um estudo sobre as estratégias de resolução de problemas sobre proporções diretas simples. Após uma instrução inicial que permitia aos alunos resolverem os problemas da forma que lhes aprouvessem, eles usaram outras estratégias, que não aquelas ensinadas na escola.

Esta constatação já havia sido verificada quase uma década antes por Carraher et al (1986), a propósito de um estudo realizado junto a professores:

> ... ao tentar promover, por meio do ensino, a capacidade de resolver problemas de proporções, não têm aproveitado devidamente habilidades já existentes nos estudantes. Consistentemente com esta conclusão, observou-se entre os estudantes a utilização mais frequente de estratégias intuitivas do que de regra de três, ensinada como algoritmo para resolução de problemas de proporção (CARRAHER et al, 1986, p. 586 apud PONTES, 1996, p. 66).

Fundamentando-se em estudos conduzidos por alguns pesquisadores (MULLER, 1978; SPINILLO, 1990; SPINILLO e BRYANT, 1989, 1990, 1991), Gonçalves (2010) realizou uma pesquisa com crianças ainda mais jovens, a partir de 6-7 anos de idade, encontrando indícios de pensamento proporcional entre elas.

O raciocínio proporcional, segundo Gonçalves (2010), não se restringe a um tipo de pensamento que está presente somente quando se estuda Matemática, mas também é utilizado em outras áreas do conhecimento e em situações do dia a dia. A relevância do conceito de proporcionalidade para a Matemática costuma aparecer em várias situações cotidianas tais como compra e venda, receitas de cozinha, na construção civil e em diversos ramos da atividade da ciência e tecnologia. Além disso, o conceito de proporcionalidade se relaciona a vários outros conceitos matemáticos como porcentagem, fração, função linear, inclinação do gráfico de uma função, etc.

Justamente pelo fato de apresentar estreita relação com a resolução de problemas matemáticos, além de abranger diversos contextos, não se restringindo unicamente a problemas matemáticos de sala de aula, o conceito de proporcionalidade tem sido estudado com bastante interesse pela Psicologia no que se refere ao desenvolvimento cognitivo de sujeitos escolarizados e também não escolarizados.

Assim sendo, pesquisas sobre o raciocínio proporcional têm revelado que este modo de pensar é utilizado intuitivamente por crianças e adultos, quando resolvem problemas que envolvem o pensamento proporcional, mesmo não tendo eles instruções prévias sobre proporcionalidade (SCHLIEMANN e CARRAHER, 2006; SPINILLO, 1997).

Schliemann e Carraher (1997) acreditam que a criança desenvolve uma compreensão de razão e proporção fora da escola, mas reconhecem que o raciocínio proporcional envolve conhecimentos que podem ser desenvolvidos no meio escolar.

Para autores como Lins e Gimenez (2006, p.52), o pensamento proporcional é um tipo de pensamento que implica em “[...] uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva”. Segundo Spinillo (1997), o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações.

De acordo com Lamon (1994 apud BARRETO, 2001, p.11),

> [...] o raciocínio proporcional desempenha um papel tão importante no desenvolvimento matemático do estudante que foi descrito como um conceito limítrofe, a pedra fundamental dos níveis mais altos da matemática e o arremate dos conceitos elementares.

Lamon (2005, apud COSTA, 2007) destaca a diferença entre o conceito de proporcionalidade e o conceito de raciocínio proporcional. A proporcionalidade tem suas aplicações em situações dominadas por princípios físicos, enquanto o raciocínio proporcional é entendido como um pré-requisito necessário à compreensão de contextos e aplicações baseados na proporcionalidade.

Gonçalves (2010) considera o que:

> O conceito de raciocínio proporcional está muito além da mecanização, ou seja, do fazer uso de algoritmos na resolução de problemas de proporcionalidade. O raciocínio proporcional está relacionado à habilidade de fazer análises conscientes da relação entre quantidades, o que é perceptível quando se analisa argumentos e explicações sobre relações proporcionais.

Gonçalves (2010) ainda afirma que:

> O raciocínio proporcional envolve a compreensão de dois tipos de relações entre as grandezas. Abrange tanto a compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (invariância) como a compreensão de que essas grandezas se relacionam e variam conjuntamente (covariância).

Assim como Spinillo (2002), Lamon (1993) apud Costa (2008) afirma que o raciocínio proporcional requer um pensamento que considere os termos relativos e não absolutos. Para Lamon, isso significa dizer que a razão é uma entidade que difere das duas grandezas que se relacionam. Por exemplo, quando se determina a razão entre o número de homens e o número de mulheres de uma turma, a razão encontrada não representa nem homens e nem mulheres, mas uma nova entidade. Gonçalves (2010) ainda ressalta a importância que tem a equivalência de duas razões para o entendimento da proporcionalidade.

A concepção de Costa Júnior e Faria (2009), acerca do conceito de proporcionalidade, aproxima-se do que Spinillo (1993, p.41) define como sendo o pensamento proporcional: “o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade de estabelecer relações”. Ela assemelha-se também à ideia de Nunes

(2003) quando esclarece que o conceito de proporcionalidade, em sua origem bastante simples, nada mais é do que a relação entre duas variáveis.

2.3 Ensino e aprendizagem da proporcionalidade

Dentre os temas matemáticos considerados importantes no que se refere ao seu papel formativo e funcional, encontra-se a proporcionalidade. De fato, esse tema não somente faz parte do contexto prático, auxiliando na resolução de problemas cotidianos, como, no âmbito escolar, serve de ligação entre os diversos campos da Matemática e das outras áreas do conhecimento. Como afirmam Ponte e Silvestre (2008):

> O conceito de proporcionalidade é fundamental na interpretação de fenômenos do mundo real e na resolução de problemas do cotidiano. No contexto escolar, o raciocínio proporcional é importante para a aprendizagem da Álgebra, Geometria e Trigonometria e de outras disciplinas como a Física e a Química (PONTE; SILVESTRE, 2008, p. 1).

Ideia semelhante é manifestada por Lesh, Post e Bohr (1995). Eles afirmam que:

> O fato de que muitos aspectos de nosso mundo funcionar de acordo com regras de proporcionalidade faz com que a faculdade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 90).

Lesh, Post e Behr (1988) ainda afirmam que este conceito constitui o culminar da Matemática elementar e representa o alicerce da Matemática dos anos seguintes, assegurando que a sua aprendizagem é um dos principais objetivos do ensino desta disciplina.

Spinillo (1997) considera que este conceito é importante para vivenciar situações cotidianas, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo das pessoas.

O estudo da proporcionalidade contribui para a formação de estruturas cognitivas para que outros conceitos matemáticos sejam compreendidos, tanto em questões que envolvem apenas números, como em questões que envolvem a Geometria. O conceito de proporcionalidade permite várias aplicações no cotidiano das pessoas (ao interpretar uma estatística ou um gráfico, ao analisar ou preparar uma planta de um imóvel, ao analisar um mapa, ao estimar uma probabilidade ou ampliar uma foto, etc), em diversos domínios da Matemática e em várias outras áreas do conhecimento (Geografia, Física, Química, etc.).

Críticas (GONÇALVES, 2010; CARRAHER et al., 1986) têm sido feitas com relação ao ensino da proporcionalidade em escolas brasileiras. Uma delas é que, em geral, esse tema só é introduzido no 7º ano do Ensino Fundamental, privilegiando-se a regra de três como meio de resolução de problemas.

Outra crítica, segundo Gonçalves (2010) , sobre esse tema refere-se à sua abrangência. Se antes se falava em proporção e no algoritmo da regra de três, hoje, estabelece-se como meta o ensino/aprendizagem da proporcionalidade. Trata-se de um termo relativamente novo que, na visão de Vergnaud (2003), constitui um campo conceitual formado por uma trípleta:

- o conjunto das situações que exigem operações de multiplicação e divisão;
- o conjunto dos esquemas e dos invariantes operatórios (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) suscetíveis de serem usados para tratar essas situações;
- o conjunto de representações linguísticas, diagramas, quadros, álgebras e grafos suscetíveis de serem utilizados para representar as relações apropriadas e comunicar a respeito delas.

Boisnard et al (1994) também demonstram entendimento dessa abrangência quando afirmam que a simples aprendizagem mecânica da regra de três e de todas as regras que dela decorrem não são suficientes para fornecer um verdadeiro conhecimento da proporcionalidade. Isto é, uma boa representação do conceito subjacente a todos os problemas, todos os métodos de resolução e todas as propriedades matemáticas que compõem essa aprendizagem particular, que é designada pelo termo proporcionalidade.

Na opinião de Spinillo (1997), segundo Gonçalves (1990), os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual adequada da proporção, evitando a visão simples e errada de que o conceito se trata de um tópico do currículo de matemática onde o algoritmo, como a regra de três, é o centro do processo de aprendizagem. Esta visão deve ser superada no meio escolar.

Ao constatar que seus alunos do 9º ano do Ensino Fundamental não possuem os conhecimentos básicos de proporcionalidade para iniciar o estudo sobre semelhanças, teorema de Tales e aplicações desse teorema, o professor se pergunta nesse momento: O que devo fazer? Ensinar novamente esse conteúdo? Solicitar aos alunos que façam uma revisão do conteúdo? Considerar que este não é um problema seu, pois os alunos deveriam ter aprendido esse conteúdo em séries anteriores, e, assim, continuar a desenvolver normalmente seu plano da disciplina?

Em grande parte das escolas brasileiras, a proporcionalidade é abordada a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, deixando um hiato nas séries anteriores. Pesquisas têm mostrado que os conceitos relevantes para a formação matemática atual devem ser trabalhados com os alunos desde a fase inicial da formação escolar. Isso é válido mesmo para aqueles mais complexos como a proporcionalidade. Este ponto de vista é defendido nos PCN (BRASIL, 2008). Dizem eles:

> O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. (BRASIL, 2008, p. 22-23)

Portanto, não se espera que a construção de um conceito matemático ocorra de forma completa e num curto período de tempo. Pelo contrário, ela processa-se no decorrer de um longo período, desde estágios mais intuitivos aos mais sistematizados, conforme mencionado no BRASIL (2008).

> Tal ponto de vista apoia-se na concepção de que a construção de um conceito pelas pessoas processa-se no decorrer de um longo período, de estágios mais intuitivos aos mais sistematizados. Além disso, um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros conceitos por meio de relações, das mais simples às mais complexas. Dessa maneira, não se deveria esperar que a aprendizagem dos conceitos e procedimentos se realizasse de forma completa e num período curto de tempo. Por isso, ela é mais efetiva quando os conteúdos são revisitados, de forma progressivamente ampliada e aprofundada, durante todo o percurso escolar. É preciso, então, que esses vários momentos sejam bem articulados, em especial, evitando-se a fragmentação ou as retomadas repetitivas (BRASIL, 2008, p. 17).

Nesse sentido, a presente investigação se propõe a retomar o conteúdo de proporcionalidade no 9º ano a partir da introdução da razão áurea e de suas aplicações e verificar possíveis contribuições dessa abordagem na aprendizagem de proporcionalidade por esses alunos. Por outro lado, considerando que as aplicações da razão áurea são encontradas em várias áreas do conhecimento, esta investigação está propondo um segundo objetivo, qual seja, verificar a influência dessa abordagem na percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento.

A proporcionalidade tem sido alvo de pesquisas em Educação Matemática, Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva. No que se refere à Educação Matemática, a proporcionalidade pode ser encontrada através de pesquisas já realizadas, tal como em Costa (2005), Pontes (1996), Bernal (2004), Ávila (1985), dentre outros. Em geral, estes autores pesquisaram a abordagem da proporcionalidade em livros didáticos, como a proporcionalidade é ensinada em sala de aula e, até mesmo, como esse conceito é compreendido e utilizado por pessoas que não frequentaram uma escola.

Ruiz e Carvalho (1990) testaram uma metodologia para o ensino de proporções com ênfase na formação do conceito de proporcionalidade, levando em consideração o fato de que o raciocínio proporcional envolve uma estrutura de pensamento bastante complexa. Segundo eles, o problema não se resume em ensinar, mas, sobretudo, em como ensinar. O conteúdo de razões e proporções é ensinado no 1º grau; porém, a forma como esse tema tem sido pedagogicamente abordado não tem contribuído de forma efetiva para o seu aprendizado. A partir dos resultados colhidos na pesquisa, os autores concluem que a abordagem tradicional da proporcionalidade pouco tem contribuído para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Segundo eles:

> O conceito de proporcionalidade precisa ser ensinado e não pode limitar-se à transmissão de regras e algoritmos para serem memorizados. Daí a preocupação com o ensino de proporções visando oferecer condições para que o aluno vivencie experiências que o conduzam à formação mental do conceito de proporcionalidade e a partir disso estabelecer regras e fórmulas (RUIZ e CARVALHO, 1990, p. 102).

Os resultados alcançados por Ruiz e Carvalho (1990) com os alunos do grupo experimental nos testes aplicados os levam a afirmar que o material instrucional e os procedimentos que adotaram se revelaram eficientes constituindo-se numa opção muito válida para o ensino de proporções.

Kurtz e Karplus (1979), segundo Ruiz e Carvalho (1990), apresentam uma experiência destinada ao ensino de proporções visando capacitar os alunos do 8º e

9º anos para a aplicação do raciocínio proporcional. Usam materiais manipuláveis que, segundo eles, favorecem a participação ativa de todos os alunos e, além disso, forma uma base concreta para a formação do conceito de proporcionalidade e facilitam interação do grupo.

Freudenthal (1981), segundo Ruiz e Carvalho (1990) também manifesta preocupação com os possíveis inconvenientes de um ensino de matemática centralizado em algoritmos, ele afirma que a grande ênfase em técnicas pode estar criando um grande número de pessoas desenvolvidas abaixo de seu próprio potencial. Segundo ele é importante que o ensino vise, basicamente, ao entendimento do aluno. O entendimento não pode ser substituído pela memorização geralmente buscada em Matemática através de grande quantidade de treinamento repetitivo.

Uma estratégia de ensino alternativa, que se pode designar de exploratória (Ponte, 2005), consistiu em levar os alunos, através da exploração de situações abertas, a estabelecerem estratégias próprias para resolverem problemas de proporcionalidade. Nesse sentido, o pesquisador afirma que:

> Os alunos revelam distinguir as situações onde existem relações de natureza proporcional daquelas em que tal relação não existe. Para isso, recorrem ao seu conhecimento sobre a existência de regularidades entre os dados de relações proporcionais e são essas regularidades que procuram verificar dentro e entre grandezas, usando estratégias de natureza escalar ou funcional. Nem sempre são claros os motivos que os levam a optar por investigar relações usando uma ou outra estratégia, mas os alunos mostram saber que a constante de proporcionalidade corresponde à regularidade que encontram no quociente entre duas grandezas (PONTE, 2005, p. 25).

Associar o estudo da proporcionalidade com sua relação na História da Matemática pode contribuir para a aprendizagem do tema, pois segundo D'Ámbrósio (1996):

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino. Tal ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino de matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral [...] (D'Ambrósio, 1996, p.29).

Ávila (1996), em seu artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, fez constatações acerca do ensino desse conteúdo matemático na década de 1980. Segundo ele, o ensino de proporcionalidade não havia se modernizado até então, apresentando linguagem e representação simbólicas iguais às propostas pela teoria de Eudoxo. Ávila (1986) discordava de como era o ensino da proporcionalidade. Afirmava que, após a criação da teoria dos números reais, os números irracionais foram aceitos, o que permitiu mensurar todas as grandezas e determinar a razão entre elas. Para o autor, ao ensinar proporcionalidade, não seria necessário:

> Usar a superada teoria geométrica das proporções, muito menos resquícios que dela ficaram na terminologia, na notação e, sobretudo, na maneira de apresentar fatos, como os problemas de “regra de três”. Estes podem ser ensinados no contexto algébrico de resolução de equações com a dupla vantagem da simplificação e da unificação do ensino da Matemática. (ÁVILA, 1986, p. 2)

Do ponto de vista de Ávila, a definição de proporcionalidade direta e inversa é a seguinte:

> Definição 1. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais, mais especificamente, diretamente proporcionais, se estiverem assim relacionadas $y = kx$ ou $y/x = k$, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.
> Definição 2. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são inversamente proporcionais se $y = k/x$ ou $xy=k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade) (ÁVILA,1986, p. 3).

Segundo Ávila (1986), quando se ensina proporcionalidade, deve-se enfatizar problemas atuais não se prendendo às terminologias e notações arcaicas. O que corrobora com a opinião de tentar proporcionar ao aluno, situações nas quais a proporcionalidade esteja imbuída em seu cotidiano levando-o a perceber a real e necessária aplicação para a solução de problemas.

Lima (1986), por sua vez, afirma que, ao se compreender o conceito de grandezas proporcionais, todos os problemas relativos a regra de três e proporções se resolvem naturalmente, sem haver necessidade de regras mnemônicas ou quaisquer outros artifícios. Mais tarde, Lima (1996) expõe sua opinião concordando com a definição de Ávila sob o ponto de vista matemático, mas discordando do pondo de vista da aplicabilidade da definição. Ele sugere uma definição mais adequada:

> Suponhamos que uma grandeza z dependa de várias outras: x,y,w, etc. Isto significa que o valor de z fica determinado quando se conhecem os valores de x,y,w, etc. Nessa situação, diz-se que z é uma função das variáveis x,y,w, etc e escreve-se z = f(x,y,w,...).
> Nas condições anteriores, diz-se que z é diretamente proporcional a x quando ao multiplicarmos x por uma constante c (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica multiplicado pela mesma constante c. Analogamente, diz-se que z é inversamente proporcional a x quando ao multiplicarmos x por uma constante c (mantendo fixas as outras variáveis) o valor correspondente de z fica dividido por aquela constante c. (LIMA, 1996, p.22)

Lima considera essa definição equivalente à de Ávila sob o ponto de vista matemático e enfatiza que só discorda da proposta metodológica.

No âmbito da Psicologia, Spinillo (1997, 2002) Carraher, Carraher e Schliemann (1998), Oliveira (2000), entre outros, se preocuparam com a maneira de aquisição deste conceito e a forma como ele é tratado no contexto da sala de aula. Verificaram que a aquisição do conceito de proporcionalidade marca um período importante no processo de desenvolvimento do indivíduo: das operações concretas às formais. Além disso, indicaram a aquisição do conceito de proporcionalidade como uma possibilidade para a resolução de diversos problemas matemáticos.

A psicóloga Teresinha Carraher Nunes tem estudado como nasce o pensamento matemático nas pessoas. Ela realizou pesquisas com diversos tipos de pessoas. Na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), trabalhou com operários que mal sabiam escrever, mas que entendiam muito de escala. Mais tarde, em Londres, continuou a investigação com crianças. Nos dois grupos, detectou semelhanças: há esquemas que independem da escolarização e precisam ser considerados pelo professor. Em entrevista concedida à revista Nova Escola, Carraer (2002) destacou a proporcionalidade como conceito central da Matemática, envolvendo tanto frações como multiplicação, estando presente em todas as ciências, fazendo parte do dia-a-dia de qualquer pessoa, seja no trabalho, seja em casa.

Carraher (2002) ressalta que o conceito, bastante simples na sua origem, nada mais é do que a relação entre duas variáveis. Para compreendê-lo, faz-se uma relação com a multiplicação, mas a escola não procede assim. De fato, no início da escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com o conceito de multiplicação; contudo, muitos professores ensinam essa operação básica apenas como uma adição repetida de parcelas. Não fazem relação com a noção de proporção. A adição repetida de parcelas não mostra o sentido de proporção que existe por trás dessa conta. A proporção volta a aparecer somente na 5ª série, em um capítulo isolado.

Dando continuidade à entrevista, Carraher (2002), afirmou que o raciocínio proporcional se desenvolve independentemente da educação formal. Em um estudo conduzido junto a mestres de obras, muitos deles sem escolaridade e que mal assinavam o nome, ela constatou que o raciocínio proporcional era essencial nos afazeres deles. Na preparação da massa e cálculo de área, por exemplo, eles usavam corretamente o raciocínio proporcional. Da mesma forma, ao interpretar uma planta baixa para saber o tamanho real da parede, os trabalhadores não tinham a menor dificuldade em resolver o problema porque sabiam que a escala é uma proporção exata entre o tamanho do desenho e o da parede.

Na visão da pesquisadora (CARRAER, 2002), o raciocínio proporcional nasce quando se ensina a multiplicação usando o raciocínio de correspondência e se estimula na mente do aluno uma representação para a relação entre duas variáveis. Para ilustrar sua afirmação, ela apresenta um exemplo: Vai haver uma festa para 15 convidados. Cada um vai ganhar três balões. Quantos balões devem ser comprados? Segundo Carraher (2002), um problema de multiplicação como esse, resolvido da maneira tradicional, exige do aluno apenas uma conta. Numa concepção mais moderna, os alunos constroem uma tabela com uma variável de cada lado: o número de convidados numa coluna e o de balões na outra. Assim fazendo, fica fácil para os alunos perceberem a relação fixa entre as variáveis e, ao mesmo tempo, é uma maneira de resolver o problema.

O conceito de proporcionalidade é essencial não só no âmbito escolar, mas também no dia a dia das pessoas. Spinillo (1997) considera que este conceito é importante para vivenciar situações cotidianas, para estudar e compreender outras áreas de conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo das pessoas.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA DA PESQUISA

Tendo em vista os objetivos da pesquisa, optou-se pela escolha da pesquisa qualitativa. Com esse método, procurou-se obter dados descritivos mediante o contato direto e interativo do pesquisador com a situação o objeto de estudo. Segundo Manning (1979), o trabalho de descrição tem caráter fundamental em um estudo qualitativo, pois é por meio dele que os dados são coletados.

3.1 Participantes

Os participantes da pesquisa foram 40 alunos de uma turma do 9º ano de uma escola pública de Ensino Fundamental e Médio do município de Mário Campos, região metropolitana de Belo Horizonte, Minas Gerais. Trata-se de uma escola urbana que funciona em três turnos, contando com aproximadamente 1 200 alunos. As turmas do 9º ano são compostas por alunos de níveis socioeconômicos variados.

O pesquisador leciona nesta escola há alguns anos e, no período de aplicação da pesquisa, era professor regular dos alunos do 9º ano. Assim sendo, a investigação foi desenvolvida em horário normal de aula de matemática, não trazendo problemas à organização da disciplina. Além disso, o conteúdo abordado já constava do planejamento da série.

O pesquisador entrou em contato com a direção da escola para verificar a possibilidade de nela realizar a pesquisa. Após descrever os objetivos da investigação, as atividades que seriam aplicadas em uma turma de alunos do 9º ano, bem como todos os procedimentos de coleta de dados, ele obteve a aprovação e o apoio da direção e da supervisão para implementar a pesquisa.

Para a realização da investigação, foi solicitada aos pais dos alunos permissão para que seus filhos pudessem participar da investigação. O documento que foi enviado aos pais encontra-se no Apêndice 1.

3.2 Técnicas e Instrumentos de Coleta de dados

Para a coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: teste inicial, observação, diário de campo do pesquisador, gravações em áudio e vídeo, relatórios escritos dos alunos, teste final e relatório final dos alunos.

As observações se constituem como um instrumento de produção de dados bastante utilizado em pesquisas na área de Ciências Humanas. De acordo com Fernandes (2011), trata-se de uma técnica de levantamento de informações que pressupõe convívio, compartilhamento de uma base comum de comunicação e intercâmbio de experiências com o(s) outro(s) primordialmente através dos sentidos humanos: olhar, falar, sentir, vivenciar, raciocinar dentre outros e entre o pesquisador, os sujeitos . Os sujeitos) observados e o contexto dinâmico de relações no qual os sujeitos vivem e que é por todos construído e reconstruído a cada momento.

Portanto, essa técnica implica em estar e observar a ação tendo em vista o objetivo de pesquisa. Assim sendo, é necessária a presença do pesquisador no campo, no momento e nas condições em que as relações se manifestam.

Segundo Fernandes (2011) há quatro elementos relacionados à capacidade de raciocínio dos quais um pesquisador não pode abrir mão em qualquer pesquisa: curiosidade*,* criatividade*,* rigor teórico-metodológico e observância da ética. Quanto a esse último, ele ressalta a necessidade da adequação comportamental do pesquisador aos sujeitos observados, isto é, a necessidade do pesquisador respeitar os *ethos* ou códigos de condutas, dele próprio e dos sujeitos observados.

Para Marconi e Lakatos (2005), as observações podem ser realizadas em diferentes momentos do andamento da pesquisa. Na presente investigação, optou-se por observar os participantes durante as atividades desenvolvidas com os alunos em sala de aula. As observações foram registradas por meio de dois instrumentos: a) *diário de campo*, no qual o pesquisador registrou suas observações para análise posterior; b) recurso tecnológico (câmera de vídeo) cujas gravações foram, posteriormente, transcritas para análise. Houve o cuidado de usar tais recursos de acordo com os ditames éticos de pesquisa com seres humanos.

O diário de campo é um instrumento utilizado pelos investigadores para registar/anotar os dados recolhidos susceptíveis de serem interpretados. Nesse sentido, o diário de campo é uma ferramenta que permite sistematizar as experiências para depois analisar os resultados. Cada investigador tem a sua própria metodologia na hora de levar a cabo o seu diário de campo. Nele, pode-se incluir ideias desenvolvidas, frases isoladas, transcrições, mapas e esquemas, por exemplo. O que importa mesmo é que o investigador possa apontar no diário aquilo que vê/observa ao longo do seu processo de investigação para depois analisar e estudar.

De acordo com as recomendações dos especialistas, nesta pesquisa, o diário de campo foi dividido em duas colunas. Num lado, o investigador incluiu tudo o que dizia respeito às observações realizadas por si; no outro, as suas impressões ou conclusões sobre as situações observadas.

As gravações em áudio e vídeo constituíram-se em importantes recursos que permitiram verificar, analisar e identificar situações ocorridas durante a aplicação das atividades, oferecendo ao pesquisador condições de levantar as questões e pormenores ocorridos durante cada atividade realizada e, assim, poder relatá-las de forma fidedigna.

Os relatórios dos grupos de alunos também foram usados como instrumentos de coleta de dados da investigação. Durante a aplicação das atividades em sala de aula, os alunos trabalharam em grupo. Ao final de cada aula, foi solicitado aos grupos que discutissem e expressassem, por escrito, suas opiniões sobre as situações vivenciadas. Nos relatórios constava, de forma sucinta e objetiva, o desenvolvimento das atividades, além da manifestação espontânea deles sobre o trabalho realizado em cada aula. Para isso, cada grupo usou um caderno, onde em que anotaram suas observações.

Durante a realização de atividades sobre razão áurea, os alunos fizeram anotações em folhas de atividades. Elas, também, foram objeto de análise para a pesquisa.

No início desta pesquisa, foi aplicado um teste com doze questões sobre proporcionalidade direta e inversa (vide Apêndice 1). Esse teste, que foi denominado teste inicial, tinha por objetivo verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o objeto de estudo, qual seja a proporcionalidade. Para efeito da pesquisa, o teste inicial foi corrigido e analisado.

Também foi usado como instrumento de coleta de dados um teste escrito para verificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre os conceitos e procedimentos relativos à proporcionalidade. O teste, denominado teste final, constou de 12 questões envolvendo razão, proporção e semelhança, conforme se pode observar no Apêndice 1. Ao final do teste era solicitado aos participantes que tecessem comentários sobre o teste respondido Ele foi aplicado ao término das atividades programadas na pesquisa e corrigido pelo professor/pesquisador.

Por último, foi solicitado aos grupos de alunos um relatório final, emitindo opiniões e críticas sobre o estudo desenvolvido, sendo-lhes garantida total liberdade de expressão.

3.3 Procedimentos

Foi aplicado em sala de aula um conjunto de quatorze atividades relacionadas com a razão áurea, tendo em vista a aprendizagem da proporcionalidade pelos alunos do 9º ano da escola escolhida para o desenvolvimento da pesquisa. O conjunto apresentava quatorze (14) atividades que foram desenvolvidas em vinte e quatro (24) horas/aulas.

Para realizar as atividades programadas, os alunos foram divididos em grupos de 4 ou 5 pessoas. Cada atividade era apresentada em uma folha impressa, na qual os alunos do grupo deveriam registrar o caminho usado para resolvê-la. Ao final da aula, essas produções escritas eram recolhidas para análise, e devolvidas aos alunos na aula seguinte. Foram recolhidos, também, os relatórios produzidos pelos grupos sobre a atividade por eles realizada.

Durante a aplicação das atividades, o pesquisador buscou observar as manifestações orais dos grupos, tendo como focos: a) a aprendizagem da proporcionalidade; b) a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento. As observações foram anotadas em seu diário de campo.

Para complementar tais observações, gravações em vídeo e áudio foram feitas com o auxílio de uma professora observadora. Para tanto, ela foi previamente instruída sobre as manifestações dos alunos, que deveriam ser filmadas, de acordo com os objetivos da pesquisa.

Os alunos foram informados sobre as filmagens e sobre o fato de que poderiam se recusar a participar delas a qualquer momento. Com o intuito de minimizar a interferência das filmagens no desenvolvimento das atividades aplicadas em sala de aula, houve uma pré-experimentação com a câmera, até que os alunos se acostumassem com ela.

Ao final das atividades, foi aplicado o teste já mencionado no item anterior. Ele foi respondido pelos grupos de alunos, teve a duração de duas aulas e foi recolhido para correção e análise dos procedimentos utilizados pelos grupos.

Os relatórios finais foram elaborados pelos grupos de alunos na última aula destinada à pesquisa. Foram entregues ao pesquisador para análise.

3.4 Atividades aplicadas em sala de aula

Como foi mencionado anteriormente, foi aplicada em sala de aula um conjunto de quatorze (14) atividades. Cada uma delas recebeu um nome. Elas estão descritas no Apêndice 2.

Como se pode observar, a descrição das atividades apresenta objetivo, recursos utilizados, tempo de aplicação e procedimentos. Elas foram aplicadas pelo próprio pesquisador em uma turma de alunos do 9º ano, uma vez que ele é o professor da turma. Ao todo, foram usadas 24 aulas na aplicação da sequência didática.

Para efeito da pesquisa, foram consideradas para análise um total de seis dentre as quatorze atividades aplicadas. Na escolha dessas atividades foram consideradas as manifestações e expectativas geradas e o grande interesse dos alunos em resolvê-las.

CAPÍTULO IV
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 Considerações Iniciais

Conforme mencionado anteriormente, quatorze (14) atividades relacionadas com a razão áurea e a proporcionalidade foram aplicadas na sala de aula de alunos do 9º ano. Desse total, foram analisadas seis atividades, tendo em vista os objetivos propostos na pesquisa.

A análise de cada atividade considerou os dados coletados por meio dos relatórios elaborados pelos grupos de alunos ao final da atividade, das produções escritas dos grupos durante a realização da atividade, das observações do pesquisador, anotadas no seu diário de campo, e das gravações em áudio e vídeo. No que se segue, é apresentada a análise de cada uma das cinco questões, precedida por sua descrição detalhada. Elas receberam os seguintes títulos: a) *Aplicações da razão áurea*; b) *Retângulos áureos e não áureos*; c) Construção do segmento áureo e do retângulo áureo; d) *Sequência de Fibonacci e construção da espiral*; e) *Construção do triângulo áureo e do pentagrama*; f) *Razão áurea e fractais*.

A fim de preservar a identidade dos participantes da pesquisa, cada aluno recebeu um codinome, indicado pela letra A (de aluno) seguido de um número de 1 a 40 (correspondente ao número de alunos que participaram da pesquisa). Os grupos de alunos também foram codificados, sendo indicados pela letra G (de grupo), acompanhada de um número de 1 a 6 (quantidade de grupos).

4. 2 Atividade: *Aplicações da razão áurea*

4.2.1 Descrição da atividade

Esta atividade tinha como objetivo levar os alunos a perceberem as diversas aplicações da razão áurea na natureza, nas artes, na arquitetura, música, entre outros. Como recurso, foram exibidos dois vídeos. O primeiro deles, denominado *Donald no País da Matemática*, veiculado em um site da Internet[20], tem duração de

[20] Disponível em <www.tvescola.mec.gov.br>. Acesso em: 22/08/2012

27 minutos. O segundo foi produzido pela TV Escola, com duração de 12 minutos, tendo recebido o nome de *Arte e Matemática*[21].

Ainda em sala de aula, foi informado aos alunos que eles assistiriam a dois vídeos da área de matemática e que, ao final, participariam de um debate, seguido da elaboração de um relatório por grupos. Os grupos em questão foram formados sob a orientação do professor pesquisador e permaneceram os mesmos durante toda a pesquisa.

A seguir, os alunos foram encaminhados para assistir aos vídeos, que mostravam a razão áurea sendo aplicada na natureza e em campos do conhecimento como a biologia, as artes, a música, a arquitetura e a literatura. Após a exibição dos vídeos, o pesquisador salientou algumas partes que abordavam a razão áurea de uma forma mais destacada. Logo em seguida, foi realizado o debate, no qual os alunos apresentaram seus comentários e realizaram discussões sobre o que viram e ouviram nos vídeos. A projeção, o debate e a elaboração dos relatórios teve a duração de duas aulas de 50 minutos cada uma.

A elaboração de uma atividade usando vídeos deveu-se à revisão da literatura sobre o assunto e à experiência do pesquisador no uso desse recurso. A linguagem do vídeo responde à sensibilidade dos jovens, em que o meio de comunicação resulta do encontro entre gestos, palavras, movimentos, distanciando-se do gênero do livro didático, da linearidade das atividades no cotidiano escolar. Os vídeos são dinâmicos, incitam antes a afetividade do que a razão. Para Moran:

> O vídeo é sensorial, linguagem falada. Linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não separadas. Daí a sua força. Nos atingem por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo seduz, informa, entretém, projeta em outra realidade (no imaginário), em outros tempos e espações. O vídeo combina a comunicação sensorial-cinestésica com a áudio visual, a intuição com a lógica, a emoção com a razão. Combina, mas começa pelo sensorial, pelo emocional e pelo intuitivo, para atingir posteriormente o racional (MORAN, 1995, p. 2)

---

[21] Disponível em <www.tvescola.mec.gov.br>. Acesso em: 22/08/2012

Moran (1995) propõe a utilização do vídeo como:

> Sensibilização: é o uso mais importante na escola, Um bom vídeo é interessantíssimo para introduzir um novo assunto, para despertar a curiosidade, a motivação para novos temas. Isso facilitará o desejo de pesquisa nos alunos para aprofundar o assunto do vídeo e da matéria.
> Ilustração: muitas vezes o vídeo ajuda a mostrar o que se fala em aula, a compor cenários desconhecidos dos alunos. [...] . Um vídeo traz para a sala de aula realidades distante dos alunos.
> Conteúdo de ensino: mostra determinado assunto, de forma direta ou indireta. De forma direta, quando informa sobre um tema específico orientando a sua interpretação. De forma indireta, quando mostra um tema, permitindo abordagens múltiplas, interdisciplinares. (Moran, 1995, p.30)

4.2.2 Análise e discussão dos resultados

Durante a exibição dos vídeos, os alunos permaneceram atentos, demonstrando interesse pelo assunto. Em seu caderno de campo, o pesquisador anotou a seguinte observação: os alunos demonstravam curiosidade em saber o que estava por vir, buscavam antever o que iria acontecer. Era manifesta a ansiedade de alguns deles.

No debate, o aluno A7 disse: “Aprendi muitas coisas interessantes como o número de ouro, na verdade eu nem sabia que existia”.

Outro aluno, A13, disse:

> Achei muito interessante como a Arte está ligada com a Matemática e também com a natureza, como o número de ouro está presente nas flores e nas obras. É muito interessante a sequência de Fibonacci e como o número de ouro é encontrado em várias formas.

A motivação causada pelo vídeo ficou ainda mais evidente com a citação do aluno A28: “Achei interessante porque mostra um novo jeito de aprender Matemática, explica a Matemática de outro jeito bem mais interessante”.

Outros alunos manifestaram-se de modo semelhante. Percebe-se, daí, que os alunos se sentiram interessados em continuar a descobrir as aplicações da razão áurea na Matemática e em outras áreas do conhecimento.

Ao final do debate, reunidos em grupo, os alunos elaboraram um relatório onde puderam se expressar espontaneamente em relação aos vídeos. A seguir destacam-se algumas manifestações dos grupos.

> A música foi como um sonho porque como é que a música iria estar dentro da Matemática. (G1)

> Achei muito interessante como a arte está ligada com a Matemática e também com a natureza, como o número de ouro está presente nas flores e nas obras. É muito interessante a sequência de Fibonacci sempre dá 1,61. E como o número de ouro é encontrado em várias formas. (G3)

> Eu entendi que várias coisas na natureza estão relacionadas com a Matemática, flores, casas, quadros, etc. Aprendemos sobre uma coisa que eu não sabia que é o número de ouro e sua importância vimos o tanto que é importante a Matemática no cotidiano. (G3)

> O vídeo mostra como a Matemática habita em nossa vida. Às vezes usamos a Matemática e muitas vezes nem percebemos. Uma coisa que impressionou foi o nautillus, tem uma Matemática impressionante. A Matemática faz parte de nossa vida. (G4)

> O número fi é uma homenagem ao criador de Parthenon, Fídeas. O número de ouro tem grandes relações no dia-a-dia como na poesia. Leonardo da Vinci, Picasso e Fibonacci criaram obras através de figuras relacionadas ao número de ouro. (G5)

> A Matemática está presente na arte. Gostei muito de aprender o número de ouro, 1,618... e se dividirmos o lado maior pelo lado menor obtemos aproximadamente o número de ouro. Falamos da espiral, quadros de Portinari e sobre a Matemática na natureza, nas flores, no Nautillus e sobre Fibonacci. (G6)

Os comentários e discussões orais dos alunos, bem como os relatórios dos grupos, revelaram que a escolha dos vídeos como uma das atividades didáticas foi acertada, pois conseguiu despertar o interesse dos alunos pela Matemática em seu dia a dia através das aplicações da razão áurea.

As manifestações dos alunos e dos grupos corroboram com o segundo objetivo estabelecido na pesquisa, que era verificar se a razão áurea contribuiria para a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas do conhecimento.

Vale ressaltar que a ansiedade e curiosidade manifestadas pelos alunos após a atividade aplicada, deixou o pesquisador motivado e confiante, pois muitos alunos não teriam a oportunidade de tomar conhecimento sobre na razão áurea e suas aplicações mesmo nas aulas de Arte, pois a carga horária dessa disciplina é muito pequena. Nas atividades que se seguiram, o pesquisador sempre fazia menção aos vídeos, o que despertava ainda mais o interesse dos alunos em aprender.

Dentre alguns outros comentários surgidos durante o debate pode-se ressaltar o que foi expresso pelo aluno A3: “A Matemática é muito simples que achamos difícil, mas se tiver um pouco mais de atenção nós vamos ver como ela é fácil”.

Tal colocação apresenta evidências de que o aluno considera que a Matemática é fácil e seu entendimento depende da participação deles.

4.3 Atividade: *Retângulos áureos e não áureos*

4.3.1 Descrição da atividade

Dentre as quatorze atividades propostas aos alunos durante a pesquisa, esta foi a sexta por eles realizada. Ela foi denominada “retângulos áureos e não áureos” e teve a duração de duas aulas de cinquenta minutos cada uma. Como recursos didáticos, foram usados: régua, compasso, trena e folha de registro para a anotação dos resultados das medições e dos cálculos efetuados (vide apêndice 2). Os alunos realizaram essa atividade em grupos, já formados anteriormente, quando da realização da primeira atividade.

Inicialmente, o pesquisador relembrou com os alunos os vídeos apresentados na atividade anterior. Discutiu a parte do vídeo *Donald no País da Matemática* que trazia explicações sobre o Parthenon cuja fachada principal formava um retângulo áureo. Ressaltou que a razão entre seus lados era o número de ouro.

Curiosos e interessados, os alunos se preocuparam em medir retângulos em objetos que se encontravam na sala de aula. O professor incentivou-os a escolher os retângulos e a realizar as medições de seus lados. Assim foi feito. Os grupos realizaram medições em retângulos que eles identificavam na sala de aula, tais como: tampo da mesa, folha de papel A4, capa do livro de matemática, cartão de crédito, quadro de giz, tampa da caixa do interruptor, etc.

Usando uma calculadora, os grupos encontraram as razões entre os lados dos retângulos cujos lados haviam sido medidos. Classificaram os retângulos em áureos, quando a razão entre os lados era 1,6, em próximo ao áureo, quando a razão estava entre 1,5 e 1,7 e não áureo quando ela era menor que 1,5 e maior que 1,7.

As medições, os cálculos e as conclusões eram anotados na folha de registro da atividade. O quadro a seguir ilustra o quadro preenchido pelo grupo G3.

Figura 28 – Retângulos áureos e não áureos de superfícies do grupo G3

b) Obtenha as medidas de diversas superfícies e verifique se os retângulo que determina cada uma é áureo, se aproxima do áureo ou é não áureo.

Superfície	Unidade de medida	Dimensões	Razão	Resultado
folha A-4	cm	29,7 x 21,1	1,40	não áureo
cartão	cm	8,6 x 5,4	1,56	proximo áureo
Chiclets	cm	[illegible]	1,94	não áureo
apagado	cm	12,7 x 9,6	1,67	proximo áureo

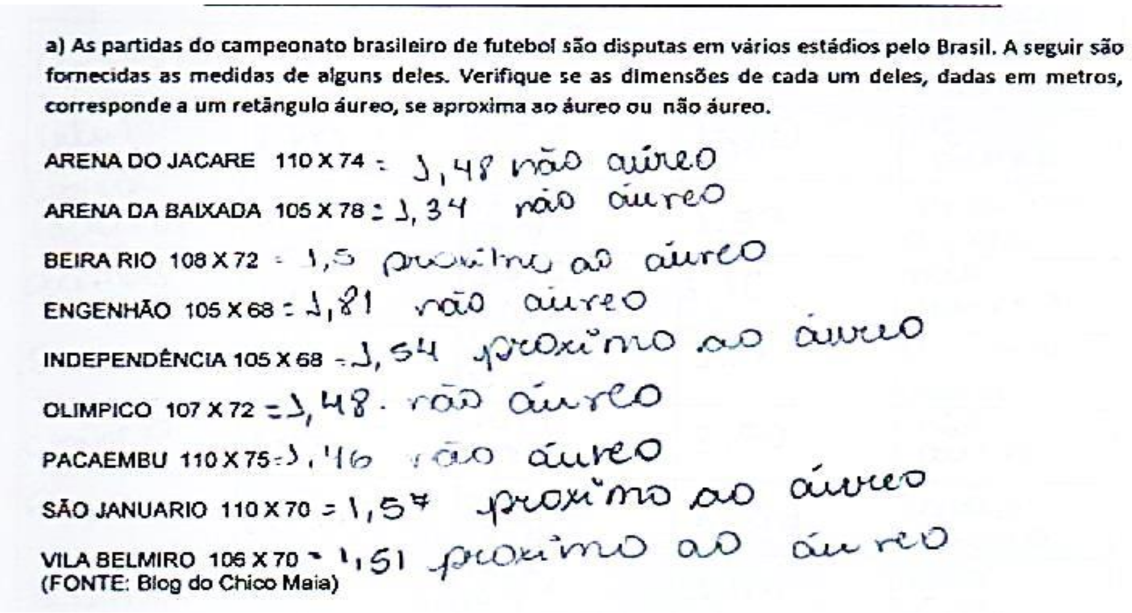
Fonte: Registro dos alunos

Duas alunas, A14 e A25, decidiram ir à biblioteca para medir a tela do monitor de quinze polegadas que lá se encontrava, bem como as capas de alguns livros, a fim de verificar se nesses objetos havia algum retângulo áureo.

A seguir, o professor foi para a quadra de esportes com os alunos para que pudessem efetuar as medidas das quadras de futsal e de vôlei. Algo que pode ser ressaltado nessa atividade foi como os alunos conseguiram manusear a trena, obtendo facilmente as medidas necessárias para verificar a razão entre os lados dos retângulos.

A segunda parte da atividade consistiu em solicitar aos grupos que: a) analisassem as medidas dos campos de futebol dos vários estádios do Brasil, onde seriam disputadas partidas de futebol pelo campeonato brasileiro; b) classificassem os retângulos em áureos e não áureos. Como ilustração, são apresentados os registros efetuados pelos alunos do grupo G3.

Figura 29 – Retângulos áureos e não áureos calculados pelo grupo G3



a) As partidas do campeonato brasileiro de futebol são disputas em vários estádios pelo Brasil. A seguir são fornecidas as medidas de alguns deles. Verifique se as dimensões de cada um deles, dadas em metros, corresponde a um retângulo áureo, se aproxima ao áureo ou não áureo.

ARENA DO JACARE 110 X 74 = 1,48 não áureo
ARENA DA BAIXADA 105 X 78 = 1,34 não áureo
BEIRA RIO 108 X 72 = 1,5 proximo ao áureo
ENGENHÃO 105 X 68 = 1,81 não áureo
INDEPENDÊNCIA 105 X 68 = 1,54 proximo ao áureo
OLIMPICO 107 X 72 = 1,48. não áureo
PACAEMBU 110 X 75 = 1,46 não áureo
SÃO JANUARIO 110 X 70 = 1,57 proximo ao áureo
VILA BELMIRO 106 X 70 = 1,51 proximo ao áureo
(FONTE: Blog do Chico Maia)

Fonte: Registro dos alunos

A terceira parte da atividade consistiu em apresentar cópias xerografadas de obras dos artistas Da Vinci, Portinari, Van Gogh e Dali aos grupos de alunos.

Figura 30: O café – Cândido Portinari

Fonte: Página de IG de A a Z [22]

Figura 31 - Detalhe de uma noite estrelada – Van Gogh

Fonte: Página de Mania de Olhar [23]

[22] Disponível em <www.colunistas.ig.com.br> Acesso em 13/08/2012.
[23] Disponível em <www.maniadeolhar.com.br> Acesso em 13/08/2012.

Figura 32 - Útima ceia - Da Vinci

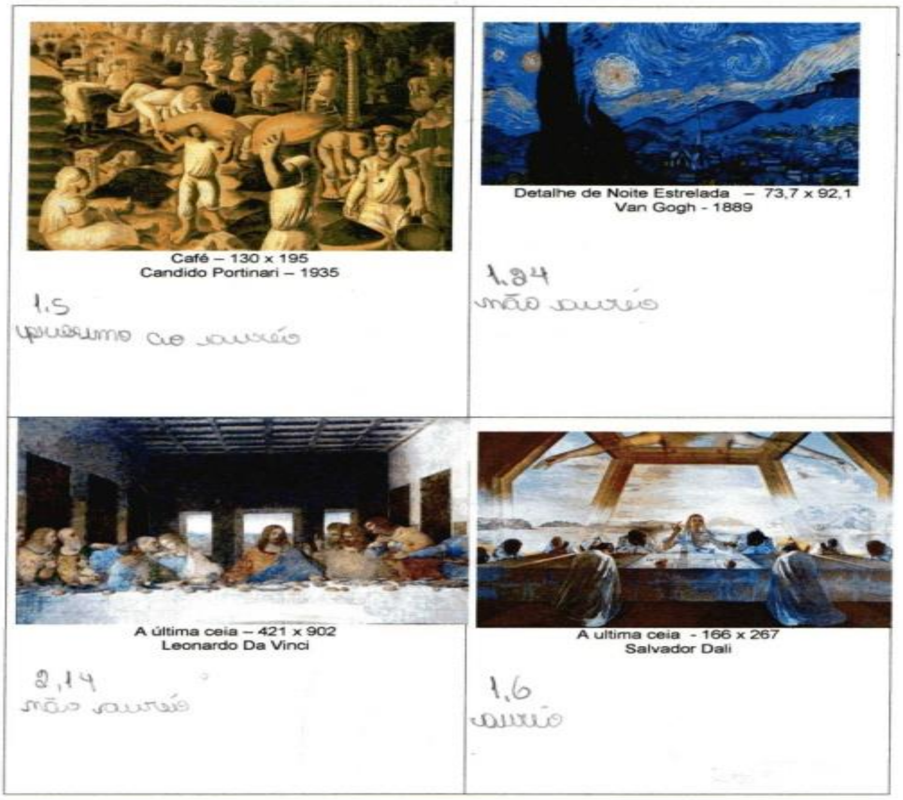
Fonte: Página da InfoEscola [24]

Figura 33 - Útima ceia - Dali

Fonte: A Matéria do Tempo[25]

Como as cópias apresentavam as obras em tamanho reduzido, foram fornecidas aos alunos as medidas originais dos lados dos retângulos que compunham as telas pintadas. Usando tais medidas, eles deveriam classificar os retângulos em áureos e não áureos. Os cálculos e resultados foram registrados na folha de atividade, conforme ilustrado no registro feito pelo grupo G5.

Figura 34 - Retângulos áureos e não áureos



Fonte: Registro dos alunos

---

[24] Disponível em <www.infoescola.com> Acesso em 13/08/2012.
[25] Disponível em <www.amateriadotempo.blogspot.com.br> Acesso em 13/08/2012.

Ao final da atividade, cada grupo elaborou um relatório onde expressaram suas considerações sobre a atividade realizada.

4.3.2 Análise e discussão dos resultados

A partir da observação realizada durante a atividade, das anotações feitas em seu caderno de campo e da análise da gravação em vídeo e áudio, o pesquisador pode constatar um grande interesse dos alunos e a efetiva participação deles durante as duas aulas. Este fato surpreendeu o pesquisador que, em princípio, havia suposto que os alunos não se interessariam muito em fazer medidas de objetos comuns de seu ambiente escolar.

Da análise dos dados, foi possível identificar algumas percepções dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento, bem como indícios das contribuições do trabalho para a aprendizagem dos alunos. Para ilustrar, são apresentadas algumas manifestações dos grupos.

> Aprendemos a medir retângulos áureos e não áureos. Aprendemos também a trabalhar em grupo. No grupo ficamos atentos a tudo principalmente nas obras de artistas como Leonardo da Vinci e salvador Dali e por sabermos que Arte e Matemática se misturam. (G1)

Como se pode observar o grupo demonstra ter aprendido a realizar medições dos lados de um retângulo usando régua e a distinguir aqueles retângulos que são áureos. O pesquisador observou que, embora esses alunos se encontrassem no 9º ano do ensino fundamental, eles não sabiam medir com régua. Além disso, é interessante observar que os alunos ressaltaram a aprendizagem de trabalhar em grupo. Ao afirmarem que a arte e a Matemática se misturam, os alunos estão demonstrando suas percepções sobre a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento.

O grupo G2 manifestou-se: "O número áureo não é tão fácil de encontrar, na sala de aula não encontramos nenhum retângulo áureo. O grupo está se dando muito bem com as atividades."

Nesse comentário, percebe-se que os alunos compreenderam o que é um retângulo áureo e que as várias medições efetuadas não os levaram a encontrar o retângulo áureo nos retângulos analisados.

O pesquisador discutiu com o grupo o porquê de nenhum dos retângulos medidos haver sido classificado como áureo. Um argumento do grupo foi que isso poderia ter ocorrido por causa da imprecisão das medidas efetuadas. Outro argumento seria que há uma grande quantidade de retângulos e que somente alguns deles seriam retângulos áureos e/ou próximos de um áureo. É interessante observar que os alunos têm conhecimento de que há muitos retângulos, mas não têm ideia de que o número de retângulos é infinito.

O grupo G3 manifestou-se: “A atividade não foi muito difícil. Nós medimos muitas coisas como porta, cadeira, etc.”

Vale ressaltar que a dinâmica da atividade proporcionou uma interação entre os componentes dos grupos e entre os grupos; isso tornou a atividade interessante e motivadora. Os alunos conseguiram diferenciar os diversos retângulos e calcular a razão entre seus lados.

O grupo G4 fez o seguinte comentário: “Hoje prestamos mais atenção na aula pois, as atividades foram diferentes das outras que costumamos fazer. Isto é legal.”

Embora o grupo não tenha mencionado explicitamente o conteúdo estudado, o pesquisador percebeu que a manifestação se referia à satisfação da aprendizagem, já que a atividade foi desenvolvida de forma interativa onde através dela os alunos puderam interagir com o conteúdo.

O grupo G5 expressou-se assim: “Aprendemos a calcular o número áureo e achamos muito interessante.”

O número de ouro despertou nos alunos um interesse muito grande. Além disso, o professor reforça sua importância relembrando o que havia sido mostrado nos vídeos que foram exibidos na primeira atividade.

O grupo G6 fez o seguinte comentário: “A impressão que temos é que a atividade é muito difícil mas quando vamos fazer é mais fácil do que pensamos. A aula de matemática só está melhorando com atividades diferentes e legais.”

De fato, quando a atividade foi proposta, imediatamente o grupo declarou: -. “É difícil!”. Contudo, ao começarem a fazer os cálculos, perceberam que se tratava de uma atividade fácil, pois o pesquisador relembrou com o grupo os vídeos da primeira atividade que mostravam o Parthenon e a razão áurea entre os lados dos diversos retângulos nele contidos.

Alguns dias após a realização dessa atividade, um aluno mencionou que a professora de Arte tinha mostrado para a turma o quadro de Van Gogh denominado *Detalhe de Noite Estrelada*. Naquela oportunidade, ele comentou com a professora que havia conhecido o quadro em uma aula da matemática. De acordo com o aluno, seu comentário havia provocando uma admiração por parte da professora.

A atividade denominada retângulos áureos e não áureos possibilitou aos alunos não somente aprender Matemática, como também ter contato com obras de artistas dos quais nunca tinham ouvido falar e relacioná-las com a Matemática.

4.4 Atividade: *Construção do segmento áureo*

4.4.1 Descrição da atividade

A atividade de construção do segmento áureo foi uma dais quais os alunos tiveram maior dificuldade, mesmo trabalhando em grupos. O manuseio da régua, do compasso e do transferidor proporcionou inicialmente certo desânimo aos alunos, pois tiveram receio de não conseguirem fazer a atividade proposta. Alguns alunos chegaram a pedir ao professor que desenhasse as figuras para eles, pois não estavam conseguido fazer o desenho. O professor interveio incentivando-os e indo até o quadro de giz para mostrar como os pontos eram obtidos. Ao final, alguns disseram: “- Custei, mas consegui!”

Deve-se ressaltar que os CBC’s propõem ao professor que utilize em suas aulas régua, compasso e transferidor, o que vem de encontro à realização da atividade.

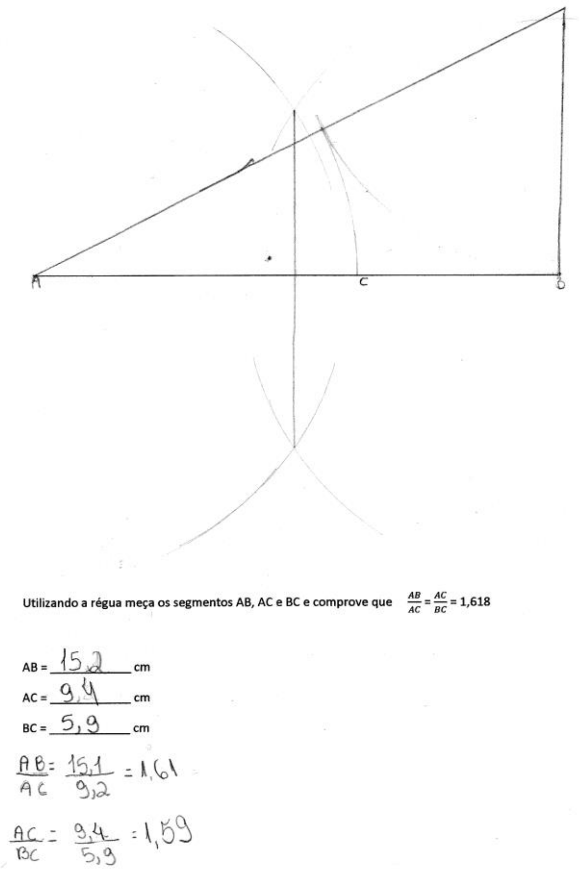
Construído o segmento áureo, os grupos foram orientados a medir os segmentos AB, AC e BC, usando a régua. Em seguida, usando a calculadora, determinaram as razões $\frac{m(AB)}{m(AC)}$ e $\frac{m(AC)}{m(BC)}$.

Os resultados obtidos eram próximos da razão áurea, o que deixou os alunos um pouco frustrados. O professor fez, então, uma discussão sobre as medidas e suas aproximações, bem como sobre a imprecisão dos instrumentos de medida. A seguir, usando o *software* Geogebra, o Datashow, e contando com a participação dos alunos, calculou as razões anteriormente mencionadas com diferentes aproximações das medidas dos segmentos AB, AC e BC. Assim sendo, os alunos chegaram à conclusão de que, medindo os segmentos com precisão, as razões seriam a razão áurea.

Durante a realização da atividade, o pesquisador aproveitou para discutir a precisão das medidas encontradas pelos alunos. O momento também foi aproveitado para tecer comentários sobre os algarismos significativos. Não havia intenção de se aprofundar no tema; apenas deixar claro para os alunos que quanto maior fosse a precisão das medidas, mais próximo se chegaria da medida esperada.

Para ilustrar o trabalho dos alunos, é apresentada a construção do segmento áureo feita pelo grupo G4.

Figura 35 Construção do segmento áureo pelo grupo G4



Fonte: Registro dos alunos

4.4.2 Análise e discussão dos resultados

Durante e após a realização da atividade, os grupos se manifestaram. Algumas das manifestações são apresentadas a seguir.

> Essa aula foi muito interessante foi muito difícil, mas eu aprendi algumas coisas. A aula foi uma das melhores porque foi tudo muito fácil, a única coisa que não sabemos fazer é mexer como o compasso. (G1)

Ficou evidente a dificuldade que muitos alunos tiveram em manusear o compasso. O professor os incentivava a tentar novamente e sempre os orientava sobre a melhor forma de usá-lo. Ao final, o grupo achou a tarefa fácil e se convenceram de que o problema era, realmente, o manuseio do instrumento.

> Voltar a trabalhar com o compasso foi um pouco mais complicado, mas ao mesmo tempo bem legal. Gostaríamos de achar mais medidas que são áureas, medir, calcular e depois achar o número áureo, é bem gratificante para o grupo. (G2)

Embora a maioria dos alunos nunca tivesse trabalhado com o compasso alguns já o haviam usado; mesmo assim, estes alunos apresentavam dificuldades de manuseá-los. Os cálculos efetuados por eles motivou o grupo a prosseguir nas atividades e deixou-os ansiosos com relação ao que estaria por vir. Como se pode observar, eles estavam motivados para encontrar o número áureo; assim sendo, mediam os segmentos e calculavam as razões sem reclamarem ou se mostrarem cansados ou desmotivados. O interesse em medir e encontrar o número de ouro mostra a curiosidade dos alunos em efetuar outras medidas para encontrá-lo.

O grupo G1 manifestou-se: “Aprendemos muita coisa ao fazer as atividades, uma matéria interessante, nova e legal, esse segmento áureo não é difícil de desenhar.”

A atividade ofereceu aos alunos a aprendizagem de um conteúdo diferente e novo, o segmento áureo, o que lhes proporcionou uma satisfação ao aprender. O pesquisador acompanhava essa construção e percebia o interesse dos componentes do grupo em tentar efetuar os passos para obter o segmento áureo.

O grupo G3 disse: “Achamos a atividade muito interessante desenhar o triângulo e achar o segmento áureo 1,6.”

Nessa atividade, os alunos construíram um segmento áureo utilizando um triângulo. O que tornou a atividade interessante foi o fato de que, a partir dele, e efetuando as suas medidas, eles obtiveram o segmento áureo, cuja medida encontrada pelo grupo foi 1,6.

O grupo G4 fez o seguinte comentário: “Achamos interessante e diferente construir a razão áurea, é muito interessante.”

Por se tratar de algo diferente de que nunca tinham ouvido falar até o momento, a razão áurea despertou o interesse e a motivação dos alunos, conforme mostra o comentário do grupo G4.

O grupo G5 fez o seguinte comentário: “Aprendemos muitas coisas, a razão áurea e várias outras. Gostamos muito da atividade, pois ensina bem a arte da Matemática.”

Mais um grupo que ressaltou a razão áurea como algo novo para eles. Os alunos do grupo expressam que gostaram de fazer a atividade. Relacionaram a Arte com a Matemática. Afirmam que aprenderem coisas novas tal como construir o segmento áureo e obter razão áurea.

Segundo o grupo G6: “A atividade foi muito legal porque aprendemos a fazer o segmento áureo e a razão dele dar 1,6”.

Assim como este grupo e o anterior, os demais outros se manifestaram dizendo que gostaram de realizar essa atividade, de ter aprendido a construir o segmento áureo e, a partir dele, encontrar a razão áurea. Assim como os demais grupos, o G6 encontrou o valor 1,6 para as razões $\frac{m(AB)}{m(AC)}$ e $\frac{m(AC)}{m(BC)}$. Conversando com o professor durante a atividade, os alunos lhe perguntaram o porquê de terem conseguido o valor 1,6 e não 1,618. Coube ao professor deixar claro ao grupo que esse valor não poderia ser encontrado devido a precisão do instrumento de medida por eles usado.

4.5 Atividade: *Sequência de Fibonacci e construção da espiral áurea*

4.5.1 Descrição da atividade

Esta atividade foi realizada pelos alunos reunidos em grupos em duas aulas de cinquenta minutos cada uma. Tinha como objetivo levá-los a construir a sequência de Fibonacci e a espiral áurea.

Inicialmente, o professor solicitou aos alunos que indicassem dois números inteiros quaisquer. Foram indicados os números 3 e 5, que foram escritos no quadro de giz. A seguir, o professor pediu que eles indicassem a soma desses dois números. Essa soma (8) seria o terceiro termo da sequência que estava sendo construída. O quarto termo seria a soma dos dois termos imediatamente anteriores, e assim por diante. Os alunos foram indicando os termos da sequência, que foram sendo escritos no quadro.

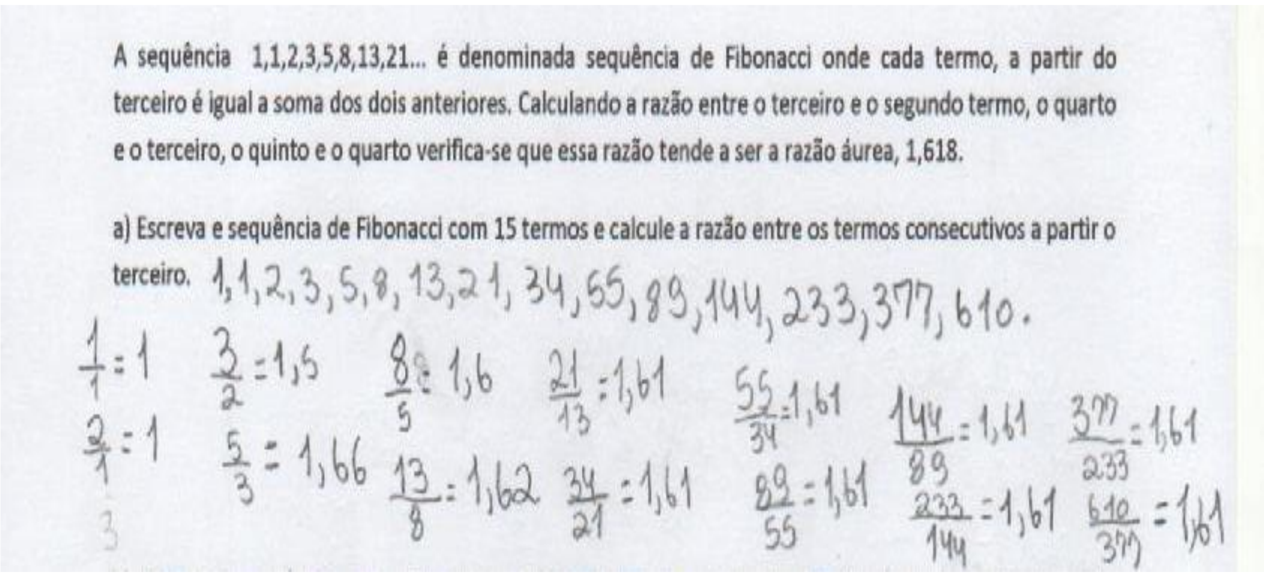
Usando o quadro, o professor apresentou uma nova sequência para que os alunos procedessem como na sequência anterior. Isto é, cada termo deveria ser o resultado da soma dos dois números imediatamente anteriores.

Após esse trabalho, os alunos receberam uma folha de registro com três tarefas a serem executadas (vide apêndice 2).

Com a ajuda de uma calculadora, eles escreveram a sequência de Fibonacci com quinze termos (1ª tarefa). Em seguida, calcularam a razão entre seus termos. A partir daí, quando percebiam que a razão entre os termos era a razão áurea, ficavam admirados e perguntavam: - Como pode? Qual a mágica que tem aqui? Será que sempre será assim? Daí, o professor incentivou os grupos a calcular mais termos da sequência e, em seguida, calcular a razão entre eles. Comprovaram, assim, o que eles a priori não acreditavam: a razão áurea ocorria também com os novos termos que foram acrescentados à sequência.

Para ilustrar a execução desta tarefa é apresentado o registro realizado pelo grupo G2.

Figura 36 – Sequência de Fibonacci construída pelo grupo G2



A sequência 1,1,2,3,5,8,13,21... é denominada sequência de Fibonacci onde cada termo, a partir do terceiro é igual a soma dos dois anteriores. Calculando a razão entre o terceiro e o segundo termo, o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto verifica-se que essa razão tende a ser a razão áurea, 1,618.

a) Escreva e sequência de Fibonacci com 15 termos e calcule a razão entre os termos consecutivos a partir o terceiro. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

$\frac{1}{1}=1$ $\frac{2}{1}=1$ $\frac{3}{2}=1{,}5$ $\frac{5}{3}=1{,}66$ $\frac{8}{5}=1{,}6$ $\frac{13}{8}=1{,}62$ $\frac{21}{13}=1{,}61$ $\frac{34}{21}=1{,}61$ $\frac{55}{34}=1{,}61$ $\frac{89}{55}=1{,}61$ $\frac{144}{89}=1{,}61$ $\frac{233}{144}=1{,}61$ $\frac{377}{233}=1{,}61$ $\frac{610}{377}=1{,}61$

Fonte: Registro dos alunos

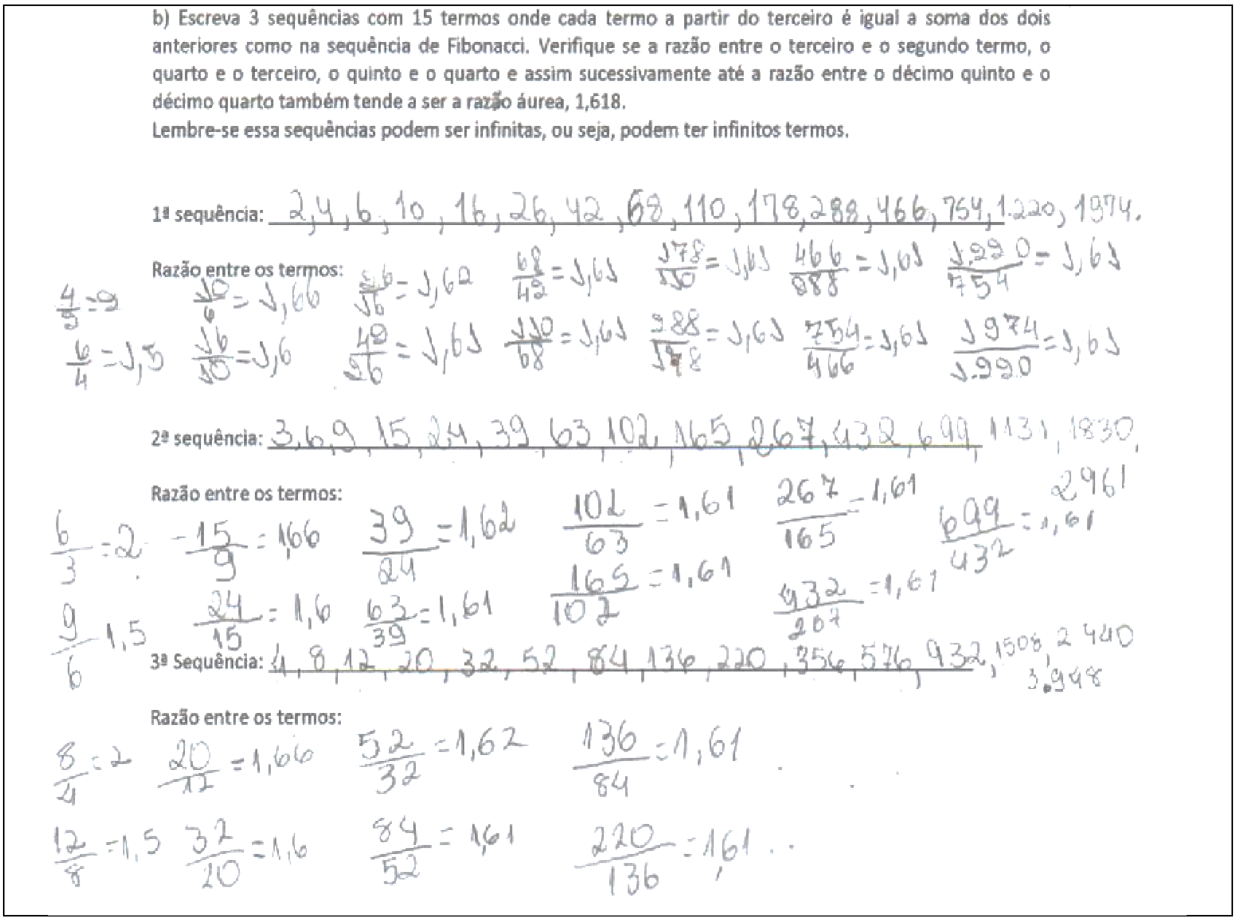
A segunda tarefa da atividade consistiu em escrever três sequências. Os próprios grupos indicavam os dois primeiros termos de cada uma delas. A partir daí, o terceiro termo seria a soma do primeiro com o segundo; o quarto, a soma do segundo com o terceiro; e assim sucessivamente. Ou seja, cada termo da sequência, a partir do terceiro, era igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

Construídas as sequências, os grupos deveriam calcular as razões entre os termos de cada uma delas a fim de verificar se, em cada sequência, as razões encontradas tenderiam ao número de ouro.

Foi discutido com os alunos que, independentemente dos dois primeiros números indicados, as razões entre os termos consecutivos de uma sequência com essa lei de formação tendiam à razão áurea.

A seguir, para ilustrar o trabalho realizado pelos alunos, são apresentadas três sequências construídas pelo grupo G2.

Figura 37 – Sequências construídas pelo grupo G2


b) Escreva 3 sequências com 15 termos onde cada termo a partir do terceiro é igual a soma dos dois anteriores como na sequência de Fibonacci. Verifique se a razão entre o terceiro e o segundo termo, o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto e assim sucessivamente até a razão entre o décimo quinto e o décimo quarto também tende a ser a razão áurea, 1,618.
Lembre-se essa sequências podem ser infinitas, ou seja, podem ter infinitos termos.

1ª sequência: 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, 1.220, 1974.

Razão entre os termos:

2ª sequência: 3, 6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165, 267, 432, 699, 1131, 1830,

Razão entre os termos:

3ª Sequência: 4, 8, 12, 20, 32, 52, 84, 136, 220, 356, 576, 932, 1508, 2440, 3948

Razão entre os termos:

Fonte: Registro dos alunos

Mais uma vez, os grupos ficaram se perguntando - Como pode? Qual a mágica nisso? O professor é um “bruxo” e fica inventando essas coisas. Tais comentários causaram gargalhadas dos alunos e do pesquisador. A todo o momento, o professor comentava que, se as razões eram iguais, isto significava que os números eram proporcionais.

Para analisar um pouco mais a lei de formação desse tipo de sequência e o limite das razões, o pesquisador utilizou o software Excel. Com a ajuda dos alunos foram construídas outras sequências que eram mostradas por meio de projeções com o datashow, conforme mostra o quadro seguinte.

Figura 38 – Sequências elaboradas pelo professor

A_n	A_{n+1} / A_n	A_n	A_{n+1} / A_n	A_n	A_{n+1} / A_n
7		-5		-17	
12	1,714286	19	-3,8	-9	0,529412
19	1,583333	14	0,736842	-26	2,888889
31	1,631579	33	2,357143	-35	1,346154
50	1,612903	47	1,424242	-61	1,742857
81	1,62	80	1,702128	-96	1,57377
131	1,617284	127	1,5875	-157	1,635417
212	1,618321	207	1,629921	-253	1,611465
343	1,617925	334	1,613527	-410	1,620553
555	1,618076	541	1,61976	-663	1,617073
898	1,618018	875	1,617375	-1073	1,618401
1453	1,61804	1416	1,618286	-1736	1,617894
2351	1,618032	2291	1,617938	-2809	1,618088
3804	1,618035	3707	1,618071	-4545	1,618014
6155	1,618034	5998	1,61802	-7354	1,618042
9959	1,618034	9705	1,618039	-11899	1,618031
16114	1,618034	15703	1,618032	-19253	1,618035
26073	1,618034	25408	1,618035	-31152	1,618034
42187	1,618034	41111	1,618034	-50405	1,618034
68260	1,618034	66519	1,618034	-81557	1,618034
110447	1,618034	107630	1,618034	-131962	1,618034
178707	1,618034	174149	1,618034	-213519	1,618034
289154	1,618034	281779	1,618034	-345481	1,618034
467861	1,618034	455928	1,618034	-559000	1,618034

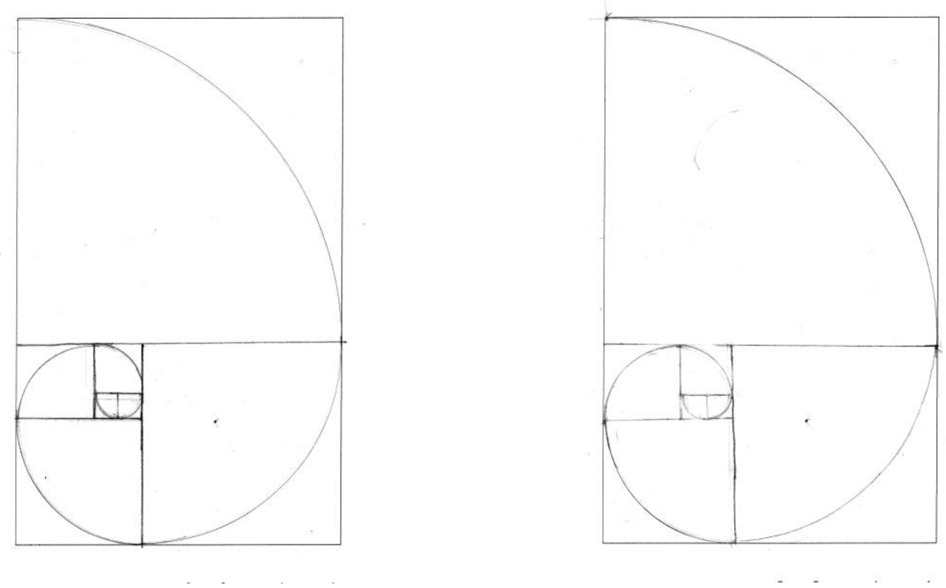
Fonte: elaborada pelo autor

A terceira tarefa exigiu um pouco mais dos alunos, já que eles não tinham o hábito de trabalhar com instrumentos de desenho, conforme já constatado na atividade relacionada à construção do segmento áureo. Foi proposto aos grupos que desenhassem a espiral áurea, a partir de um retângulo dado na folha de registro da atividade cujas dimensões eram 21cm por 13cm.

Ao tomarem conhecimento das medidas do retângulo, os alunos verificaram que eles eram números da sequência de Fibonacci. A partir daí, foram construindo os quadrados cujos lados tinham como medida os números desta sequência.

Esta tarefa também exigiu mais dos alunos, pois eles não tinham habilidade de trabalhar com régua e compasso. O professor foi orientando os passos da construção da tarefa. A figura ilustra as construções feitas, respectivamente, pelos grupos G1 e G4.

Figura 39 - Espirais áureas construídas pelos grupos G1 e G4, respectivamente.



Fonte: Registro dos alunos

4.5.2 Análise e discussão dos resultados

Por meio do relatório elaborado pelos grupos e das observações realizadas pelo pesquisador, foi possível detectar manifestações e impressões dos alunos relacionadas com os objetivos da pesquisa. Para ilustrar, algumas delas são apresentadas a seguir.

O grupo G1 manifestou-se: “Pudemos ver como a Matemática está presente nas pinturas e obras.”

O grupo G2, por sua vez, apresentou o seguinte comentário:

> Aprendemos que a natureza, as pinturas, a música seguem sequências que é chamada sequência de Fibonacci, como as flores, o nautillus, algumas obras de Dali e da Vinci como Monalisa e Anunciação e a Última Ceia de da Vinci e Dali. E que a Matemática está em todo lugar e em tudo desde casa até nos lugares aonde vamos. (G2)

A riqueza de detalhes desses comentários apresenta evidências de que os alunos estavam percebendo a importância da Matemática e sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Vale ressaltar também que eles estavam relacionando o tema estudado com objetos conhecidos de seu espaço.

O grupo G3 manifestou-se: “É interessante sobre a sequência de Fibonacci e a espiral áurea na natureza. Nosso grupo aprendeu várias coisas que nos nem sabíamos.”

Nesse comentário, pode-se perceber que os componentes do grupo ressaltam que houve aprendizagem dos temas abordados e que se surpreendem por conhecer coisas que nunca haviam imaginado.

O grupo G4, disse: “Achamos interessante, pois quanto mais aumentavam as raízes mais perto chegava do número de ouro, com a calculadora verificamos algumas relações matemáticas com a razão áurea. Achamos muito simples.

Esse grupo mostra que houve aprendizagem de proporcionalidade utilizando a razão áurea. O uso da calculadora para realizar a atividade contribuiu para que a aprendizagem não se limitasse à memorização e aos cálculos. Assim, os alunos puderam se dedicar à descoberta das relações. Nesta e em outras atividades, o professor frisava que o número de ouro ou a razão áurea significavam a mesma coisa.

Na opinião do grupo G5 “Essa atividade foi uma experiência muito legal, nós aprendemos muitas coisas novas”.

A razão áurea certamente foi nova para os alunos, e o fato de mostrar que esse número pode aparecer em situações em que eles menos esperavam provocou neles esse sentimento do aprender algo novo, mas que, na realidade, vem desde Euclides.

O grupo G6 manifestou-se : "Achamos o trabalho muito importante queríamos agradecer por esse momento, gostamos muito do trabalho. Queremos aprender mais coisa boa".

Esse comentário foi discutido pelo professor com os componentes do grupo, já que eles não haviam relatado o fato de trabalhar com a razão áurea. Eles explicaram que a atividade os havia deixados tão admirados e impressionados que, ao final dela, o sentimento que haviam experimentado era este: o de agradecer pela oportunidade de aprender algo novo e bom e que poderia lhes ser útil.

Em suma, com esta atividade, foi possível verificar que houve aprendizagem dos conceitos e procedimentos explorados e que os alunos, mais uma vez, relacionaram a Matemática com a Arte.

4.6 Atividade: *Construção do triângulo áureo e do pentagrama*

4.6.1 Descrição da atividade

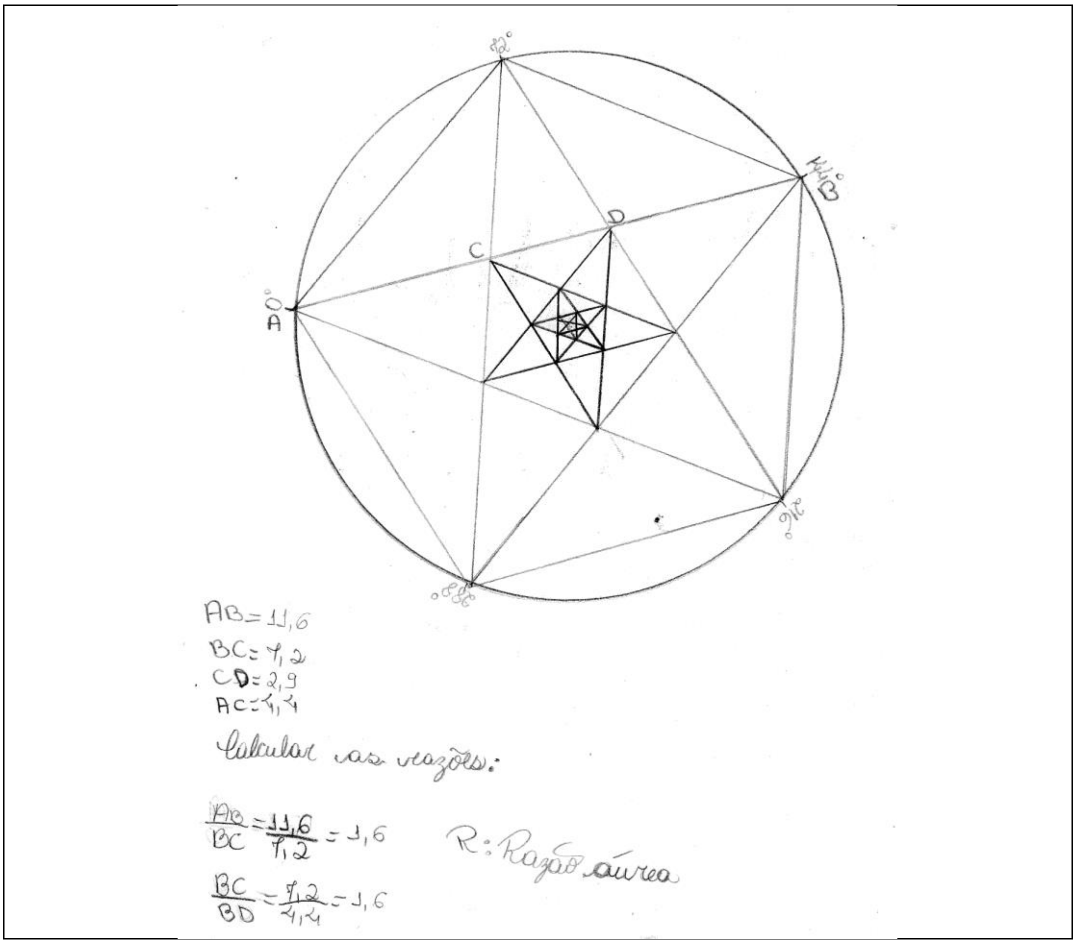
A atividade de construção do pentagrama e do decágono teve a duração prevista de duas aulas. Os recursos usados nesta atividade foram: régua, compasso e transferidor.

Os objetivos desta atividade eram: a) identificar o pentagrama e o triângulo áureo; b) construir o triângulo áureo e o pentagrama; c) analisar a relação do triângulo áureo inscrito no decágono com a razão áurea; d) analisar a relação do pentagrama com a razão áurea.

O professor relembrou com os alunos o vídeo *Donald no País da Matemágica* e, mais especificamente, a parte referente à aplicação do pentagrama, que era o símbolo dos pitagóricos. Após os comentários sobre o vídeo, os grupos se reuniram e promoveram outro debate, para saber um pouco mais sobre os pitagóricos e o pentagrama.

Em seguida, o pesquisador entregou aos grupos a folha de registro da atividade a ser realizada (vide apêndice 2). Nela era solicitado que fossem construídos o triângulo áureo e o pentagrama. A figura seguinte ilustra construção do pentagrama feita pelo grupo G4.

Figura 40 - Pentagrama construído pelo grupo G4.



Fonte: Registro dos alunos

O triângulo áureo foi construído pelo grupo G6 a partir do decágono. Como se pode observar, os alunos mediram os comprimentos dos segmentos AB, BC CD e AC, conforme solicitado pelo professor. A seguir, calcularam as razões entre os comprimentos dos segmentos AB e BC, bem como de BC e CD. Concluíram que se tratava da razão áurea.

A segunda tarefa solicitada aos grupos nesta atividade foi a construção de um triângulo áureo, com a orientação, passo a passo, do professor:

1º) construir uma circunferência usando o transferidor;

2º) dividir a circunferência em 10 partes iguais;

3º) desenhar um polígono cujos vértices seriam os pontos da divisão da circunferência;

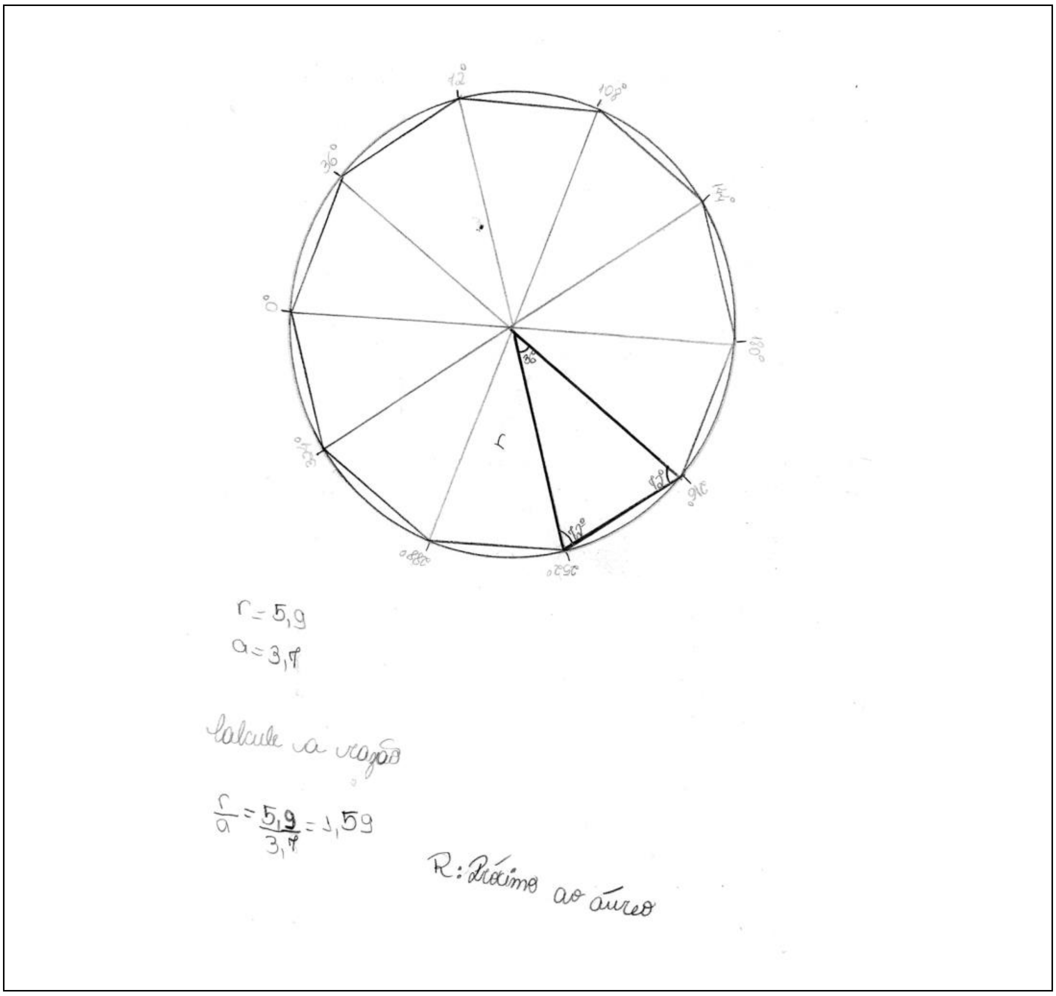
4º) traçar as diagonais do polígono (decágono);

5º) escolher um dos triângulos formados;

6º) medir os lados do triângulo e calcular a razão entre o comprimento de um dos lados maiores pelo comprimento do lado menor.

O grupo G6 apresentou a seguinte construção

Figura 41 - Construção do triângulo áureo pelo grupo G6.



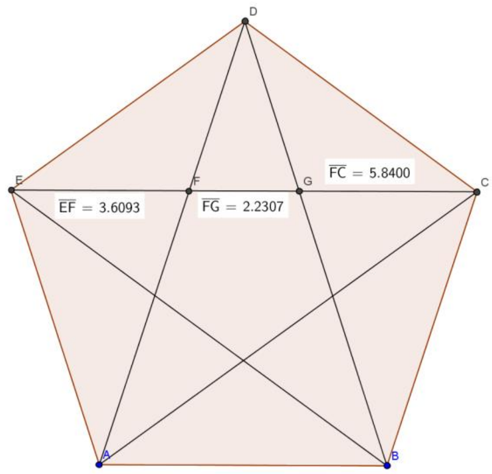
Fonte Registro dos alunos

Apesar da dificuldade manifestada por alguns alunos no manuseio dos instrumentos de desenho, ao final, todos os grupos conseguiram construir as figuras propostas. Como era esperado, as razões encontradas pelos grupos variavam em função da precisão das medidas por eles efetuadas. Esses resultados foram discutidos entre os grupos. Assim como na tarefa anterior, constataram que o valor mais próximo do número áureo encontrado havia sido 1,6.

Houve questionamentos e discussão sobre se as razões encontradas eram ou não razões áureas e sobre a imprecisão das medidas efetuadas. Diante dessa situação, o professor construiu um decágono usando o *software* Geogebra. Por meio de projeção com o *Datashow*, os alunos acompanharam as construções, medidas e os cálculos das razões apresentadas no Geogebra. Concluíram que quanto mais precisas fossem as medidas, mais próximas do número de ouro seriam as razões procuradas.

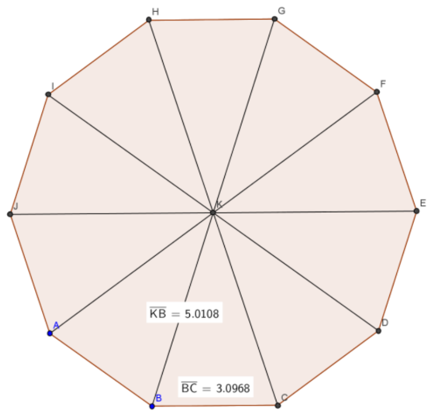
Para completar a atividade, foram apresentadas aos alunos duas figuras (pentagrama e decágono) com medidas mais precisas para que eles tivessem oportunidade de concluir que quanto maior fosse a precisão das medidas mais próximo da razão áurea seriam as razões com as quais eles haviam lidado em suas construções.

Figura 42 - Pentágono, pentagrama e suas medidas



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 43 - Decágono, o triângulo áureo e suas medidas.



Fonte: elaborada pelo autor

4.6.2 Análise e discussão dos resultados

A atividade de construção do pentagrama e do decágono, prevista para duas aulas de cinquenta minutos, também gerou alguma dificuldade para alguns grupos, pois os alunos teriam que manusear novamente os instrumentos de desenho: régua, compasso e transferidor. Contudo, o grau da dificuldade desta vez foi bem menor do que a experimentada anteriormente.

Ao fazer a construção, o aluno A34 disse: - “O pentagrama eu até já conhecia, mas nunca tinha percebido que ia formando outros e assim por diante”.

Sobre a atividade realizada, os grupos fizeram vários comentários. Tendo em vista os objetivos da pesquisa, são apresentados alguns deles.

O grupo G1 manifestou-se: “Eu achei essa aula boa e eu gostei bastante, pois eu consegui resolver e achar a resposta. Foi legal esta aula, adorei.”

A satisfação dos alunos em conseguir resolver as atividades propostas gerou um bem estar entre eles. Quando os alunos não conseguem chegar à resposta, isso pode trazer a uma desmotivação. Mas em uma atividade na qual os participantes se envolvem, procurando entender e aprender, isso origina uma situação de conforto tanto para os alunos como para o professor.

Como se pode observar ficaram satisfeitos em resolver a tarefa. Eles também disseram que, construindo as figuras, ficava mais fácil aprender e visualizar as situações onde a Matemática está presente e que o pentagrama, símbolo dos pitagóricos, era muito legal.

O grupo G2 disse: Aprendemos a criar um triângulo áureo e a calcular a razão áurea de um decágono e também as relações com a razão áurea e o pentagrama.

Ficou evidente a satisfação do grupo em construir e calcular as razões áureas presentes no pentagrama e no triângulo áureo, apesar de alguma dificuldade na construção das figuras e nas medidas. Foi constatado que os alunos estavam se sentindo bem ao terminarem a atividade.

> Eu aprendi que a Matemática não precisa ser chata como todos dizem e sempre há um jeito mais divertido e talvez até mais fácil de fazer as coisas e com um pouco de paciência e atenção fica mais fácil ainda de fazer. (G3)

Fica evidenciado nessa fala que alguns alunos consideram a Matemática uma disciplina chata, sem sentido. Contudo, participando de uma atividade que eles consideraram como diferenciada, pois puderam construir as figuras, realizar as medições e efetuar os cálculos de uma forma divertida, ela foi considerada fácil e divertida.

> Essa atividade foi um pouco mais difícil, porque tínhamos que usar compasso transferidor e régua para medir os lados de um pentagrama e de um decágono. As medidas dos lados do decágono e do pentagrama deram o número de ouro. (G4)

Quando um grupo manifestava dificuldade no manuseio dos instrumentos, o professor interferia com orientações e incentivava-os a prosseguir, o que fez com que a atividade transcorresse tranquilamente.

Quando os alunos disseram que as medidas das figuras deram o número de ouro, ficou claro para o professor que o objetivo da atividade fora alcançado.

O grupo G5 manifestou-se: “Construir o decágono foi muito interessante, no decágono a gente acha vários triângulos e medindo eles acha o valor de 1,618”.

Conseguir efetuar as medidas e encontrar 1,618 deixou os alunos seguros e certos de que aprender Matemática é muito interessante. Ainda mais, quando são eles que chegam aos resultados, conforme mostra o aluno A3: - “Quando a gente faz fica mais fácil e interessante, esse negócio do professor fazer e a gente copiar dá preguiça”.

O grupo G6 manifestou-se: “Aprendemos a criar um triângulo áureo e a calcular a razão áurea de um decágono e também as relações com a razão áurea de um pentagrama”.

O grupo manifesta que seus participantes aprenderam a calcular a razão áurea nas figuras construídas, o que, de fato, foi constatado pelo pesquisador durante a atividade. Os alunos demonstravam estar se sentindo bem ao aprender com a atividade.

Por fim, é apresentado o comentário do aluno A13. Segundo ele, “É muito legal fazer essas atividades, estou adorando, podia ser sempre assim”.

A análise dos dados da atividade em questão mostrou que o estudo da razão áurea motiva os alunos, possibilitando a aprendizagem de razões e, consequentemente, da proporcionalidade.

4.7 Atividade: *Razão áurea e fractais*

4.7.1 Descrição da atividade

Nesta atividade, com tempo previsto de duas aulas, em primeiro lugar, foi exibido o vídeo sobre Geometria Fractal denominado *Arte e Matemática em Formas Naturais*[26] de Andrios Bemfica. Nele são apresentados diversos tipos de fractais: geométricos; na natureza; curiosos.

Durante a exibição do vídeo, o professor interrompeu a exibição algumas vezes para chamar a atenção em relação à proporcionalidade e salientar que os fractais eram cópias reduzidas à mesma razão do original. Ao final do vídeo, foi

[26] Disponível em: <www.professorandriosbemfica.blogspot.com.br>. Acesso em: 22/08/2012.

disponibilizado um tempo para que cada aluno pudesse apresentar suas impressões sobre o que havia acabado de ver.

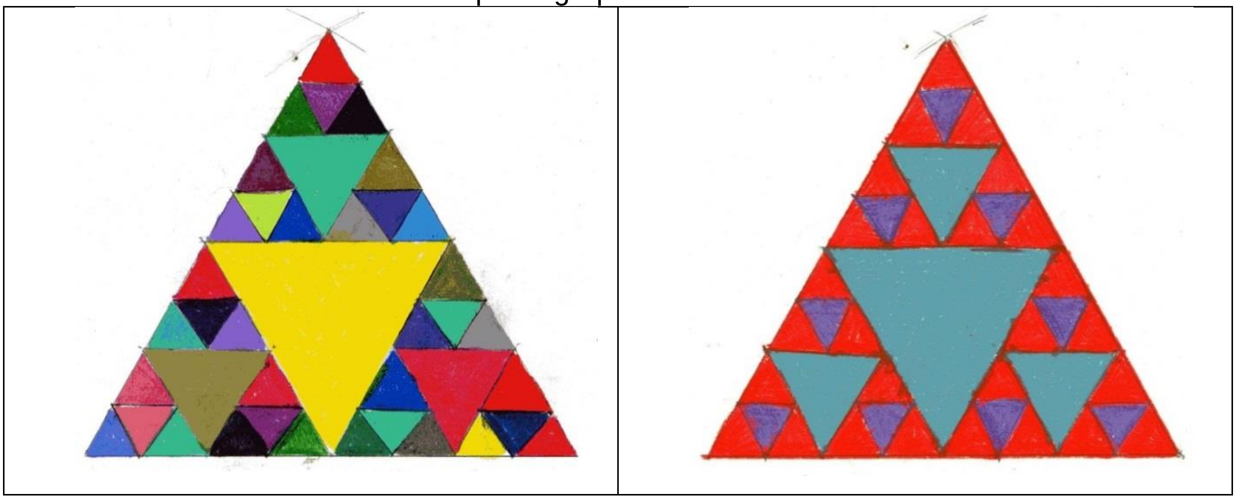
Em seguida, os alunos formaram os mesmos grupos para construírem um fractal simples denominado triângulo de Sierspinky. Foi possível observar uma maior desinibição dos alunos e uma maior segurança em fazer a atividade, pois utilizavam a régua e o compasso com maior facilidade para efetuar as medidas e fazer as construções.

Inicialmente, foi solicitado aos grupos que construíssem na folha de registro um triângulo equilátero cujo lado media 16 cm. Depois, foi pedido que marcassem o ponto médio de cada lado. Usando os pontos médios encontrados, deveriam construir outro triângulo tendo esses pontos como vértices. Tal procedimento deveria ser aplicado sucessivamente, até obter um triângulo com lados medindo 2 cm.

A atividade transcorreu de forma agradável e tranquila. Ao final, foi proposto aos grupos que utilizassem lápis de cor para colorir os triângulos. Eles obtiverem figuras com diversos contrastes e puderam perceber que os triângulos pequenos eram reduções do maior. Incentivados, eles conseguiram determinar a razão de redução. Também observaram que os triângulos maiores eram ampliações dos menores e obtiveram a razão de ampliação.

Como exemplos, são apresentados os fractais construídos por G1 e G5.

Figura 44 - Triângulos de Sierspinky construídos, respectivamente, pelos grupos G1 e G5.



Fonte: Registro dos alunos

4.7.2 Análise e discussão dos resultados

Os alunos demonstraram um grande interesse pelo vídeo, permanecendo atentos durante toda a exibição. Alguns comentários como “que doido meu”, “da hora”, “massa demais” e outros foram ditos pelos alunos, que ficaram muito interessados em descobrir a beleza dos fractais.

Dentre todos os exemplos mostrados no vídeo, os que mais chamaram a atenção foram os relacionados com a natureza. Sobre eles, ouviam-se comentários como: não imaginava que era assim; nunca passou pela minha cabeça isso.

Ao final do vídeo, os alunos expressaram sua admiração pelo que haviam visto, pois, segundo eles, jamais haviam pensado que aquilo existisse.

Terminada a atividade, os grupos elaboraram um relatório, expondo, de forma espontânea, suas impressões e considerações sobre a atividade proposta. Nos parágrafos seguintes são apresentadas algumas manifestações dos grupos relativas à atividade realizada.

O grupo G1 manifestou-se do seguinte modo: “Os fractais são muito interessantes porque eles vão se formando em triângulos grandes, médios e pequenos. Na folha que fizemos vão formando muitos fractais”.

Quando disseram grandes, médios e pequenos o pesquisador questionou os componentes do grupo sobre essa ideia. Eles então responderam que é como se o pequeno fosse aumentando ou o grande diminuindo. O pesquisador fez outra pergunta: - Mas eles crescem de qualquer jeito? O aluno A 17 respondeu: - “Não, eles vão crescendo mantendo o mesmo jeito”. O pesquisador pergunta: - Seria então uma ampliação e uma redução? “Isso mesmo”, responde o aluno A31. Os demais componentes do grupo apoiaram a resposta de A31.

Ao efetuarem as medidas, os alunos verificaram que todos os lados do triângulo aumentaram o mesmo “tanto”. O professor disse, então, que se as razões entre os lados correspondentes fossem calculadas, elas deveriam ser iguais. Os alunos efetuaram as medidas e conseguiram chegar a essa conclusão, concordando com o professor.

Em seguida, o pesquisador aproveitou a situação para discutir o que seriam lados correspondentes, já que ninguém perguntara sobre isso. Dirigiu-se até o quadro, fez alguns desenhos mostrando os lados correspondentes das figuras desenhadas. Voltando ao fractal, os grupos conseguiram identificar esses lados, embora com alguma dificuldade.

O grupo G2 manifestou-se assim: “Em nossa opinião foi a aula mais bacana de todas, pois o vídeo mostrou fractais maravilhosos onde nem imaginávamos. Fizemos um fractal em forma de triângulo”.

O grupo relatou que não conhecia esses fractais e que eles eram maravilhosos, mas o pesquisador perguntou aos componentes do grupo a que conclusão se poderia chegar a respeito da repetição ora grande ora pequena da mesma figura. O aluno A10 disse, “[...] professor eles tem o mesmo jeito, só aumenta e diminui, é como nas fotos, a gente não sai do mesmo tamanho, mas sai do mesmo jeito”.

O pesquisador aproveitou a oportunidade para esclarecer aos grupos que havia uma proporção entre os triângulos pequenos, médios e grandes, em virtude da razão constante entre as medidas dos lados.

O grupo G3 manifestou-se: “Gostamos muito de formar figuras com triângulos. Eu gostaria que ficássemos fazendo essas atividades até o ano acabar”.

A satisfação do grupo em conseguir construir o fractal proporcionou aos componentes um momento de descontração. Os componentes foram questionados pelo pesquisador sobre o ocorrido com os grupos anteriores, verificando que conseguiram estabelecer a razão entre a medida dos lados do triângulo relacionando os grandes, médios e pequenos.

O grupo G4 manifestou-se: “Aprendemos que fractal é tudo aquilo que é igual e se repete várias vezes”.

Quando os alunos relataram que fractal é tudo aquilo que é igual e se repete várias vezes, verifica-se que eles perceberam a proporcionalidade entre as figuras, que ora aumentava ora diminuía. O pesquisador interveio algumas vezes para explorar conceitos como ampliação e redução proporcional e não proporcional.

O grupo G5 manifestou-se: “Foi uma experiência muito legal foi uma nova forma de aprender a matéria muito legal. Gostamos muito poderia explicar as matérias sempre assim foi muito legal”.

O grupo afirma que aprendeu o assunto abordado. Além disso, os alunos manifestaram seu contentamento em aprender da forma como a atividade lhes foi apresentada.

O grupo G6 manifestou-se “Aprendemos coisas interessantes e legais. Aprendemos a fazer triângulos fractais usando compasso e régua. Foi legal e agradável”.

As manifestações mostram a satisfação dos alunos na realização da atividade e o desenvolvimento no manuseio do compasso e régua. Também indicam que houve aprendizagem dos conceitos nela abordados.

4.8 Análise da Atividade final

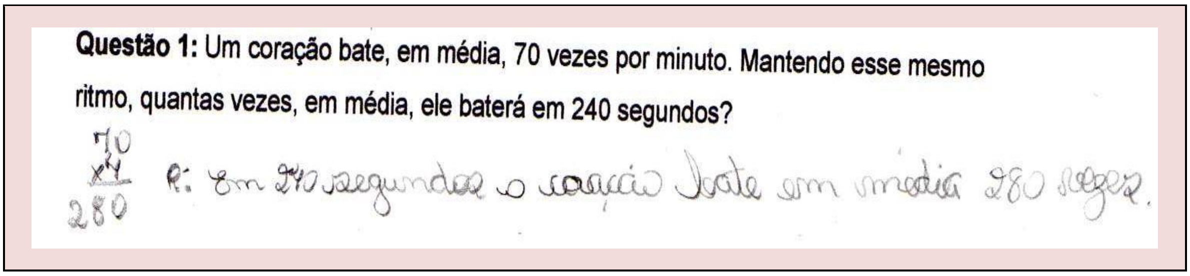
Ao final da pesquisa, foi aplicado um teste, no qual o pesquisador propunha aos alunos reunidos nos mesmos grupos, que resolvessem, durante duas aulas, doze questões sobre proporcionalidade direta e inversa.

A atividade constava de questões que procuravam contextualizar o assunto envolvendo o dia a dia dos alunos. Foram classificadas em fáceis, médias e difíceis e o objetivo era verificar a contribuição da razão áurea na aprendizagem de proporcionalidade.

A seguir, são apresentadas algumas questões do teste resolvidas por grupos de alunos, bem como a análise de cada uma.

a) A questão 1 e a resolução do grupo G4:

Figura 45 – Resolução da questão 1 da atividade final pelo grupo G4


Questão 1: Um coração bate, em média, 70 vezes por minuto. Mantendo esse mesmo ritmo, quantas vezes, em média, ele baterá em 240 segundos?

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times 4 \\ \hline 280 \end{array}$$

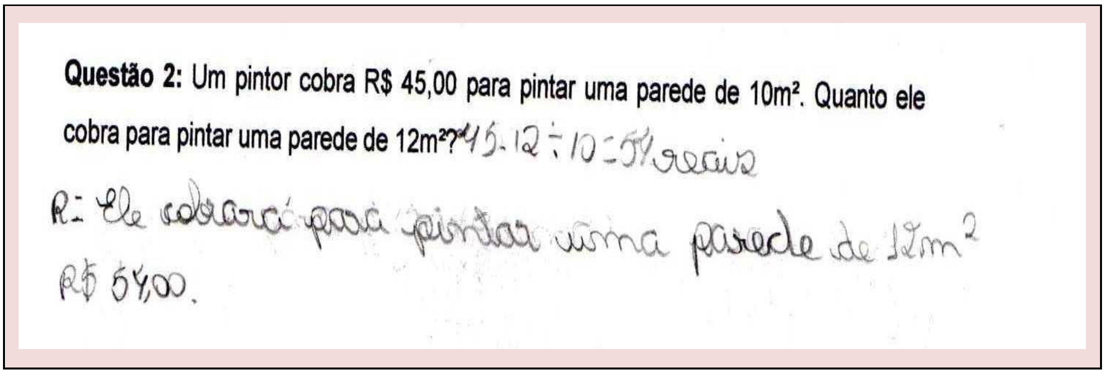
R: Em 240 segundos o coração bate em média 280 vezes.

Fonte: Atividade Final do grupo G4

A resolução da questão mostra que os alunos compreenderam o conceito de proporcionalidade já que: a) conseguiram primeiramente determinar o tempo de 240 segundos em 4 minutos; b) associar o aumento do tempo ao aumento do número de batidas do coração. Portanto, o grupo encontrou a resposta correta da questão.

b) A questão 2 e a resolução do grupo G1:

Figura 46 – Resolução da questão 2 da atividade final pelo grupo G1


Questão 2: Um pintor cobra R$ 45,00 para pintar uma parede de $10m^2$. Quanto ele cobra para pintar uma parede de $12m^2$? $45 \cdot 12 \div 10 = 54$ reais

R: Ele cobrará para pintar uma parede de $12m^2$ R$ 54,00.

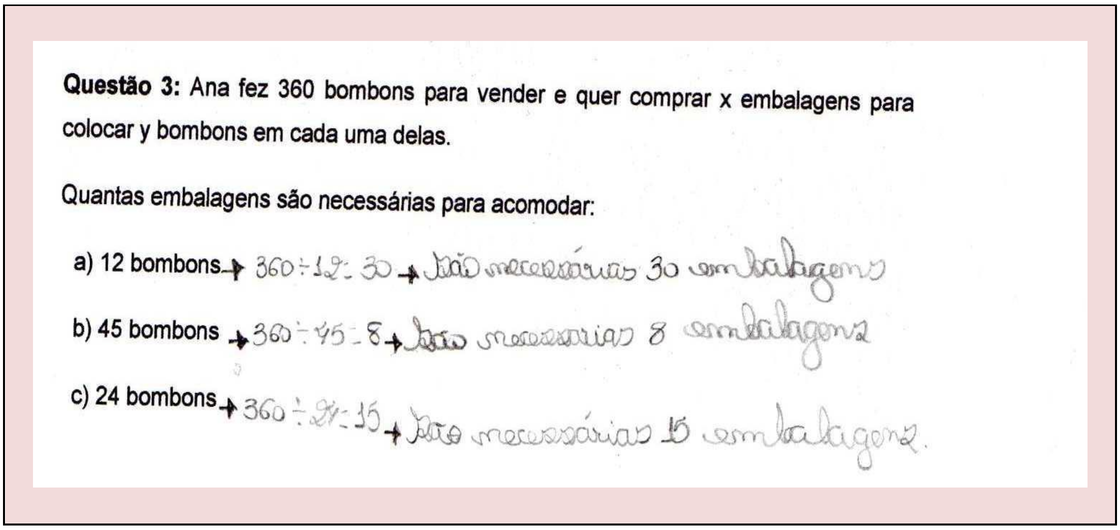
Fonte: Atividade Final do grupo G1

Nesta questão, o grupo multiplica 45 por 12 e divide o resultado por 10 para encontrar uma razão entre a área que se quer pintar e a área cujo valor é conhecido.

Embora haja outras formas de resolver essa questão, deve-se salientar que o conceito de razão ajudou o grupo a encontrar a resposta correta.

c) A questão 3 e a resolução do grupo G2:

Figura 47 – Resolução da questão 3 da atividade final pelo grupo G2



Questão 3: Ana fez 360 bombons para vender e quer comprar x embalagens para colocar y bombons em cada uma delas.

Quantas embalagens são necessárias para acomodar:

a) 12 bombons → 360÷12= 30 → São necessárias 30 embalagens

b) 45 bombons → 360÷45= 8 → São necessárias 8 embalagens

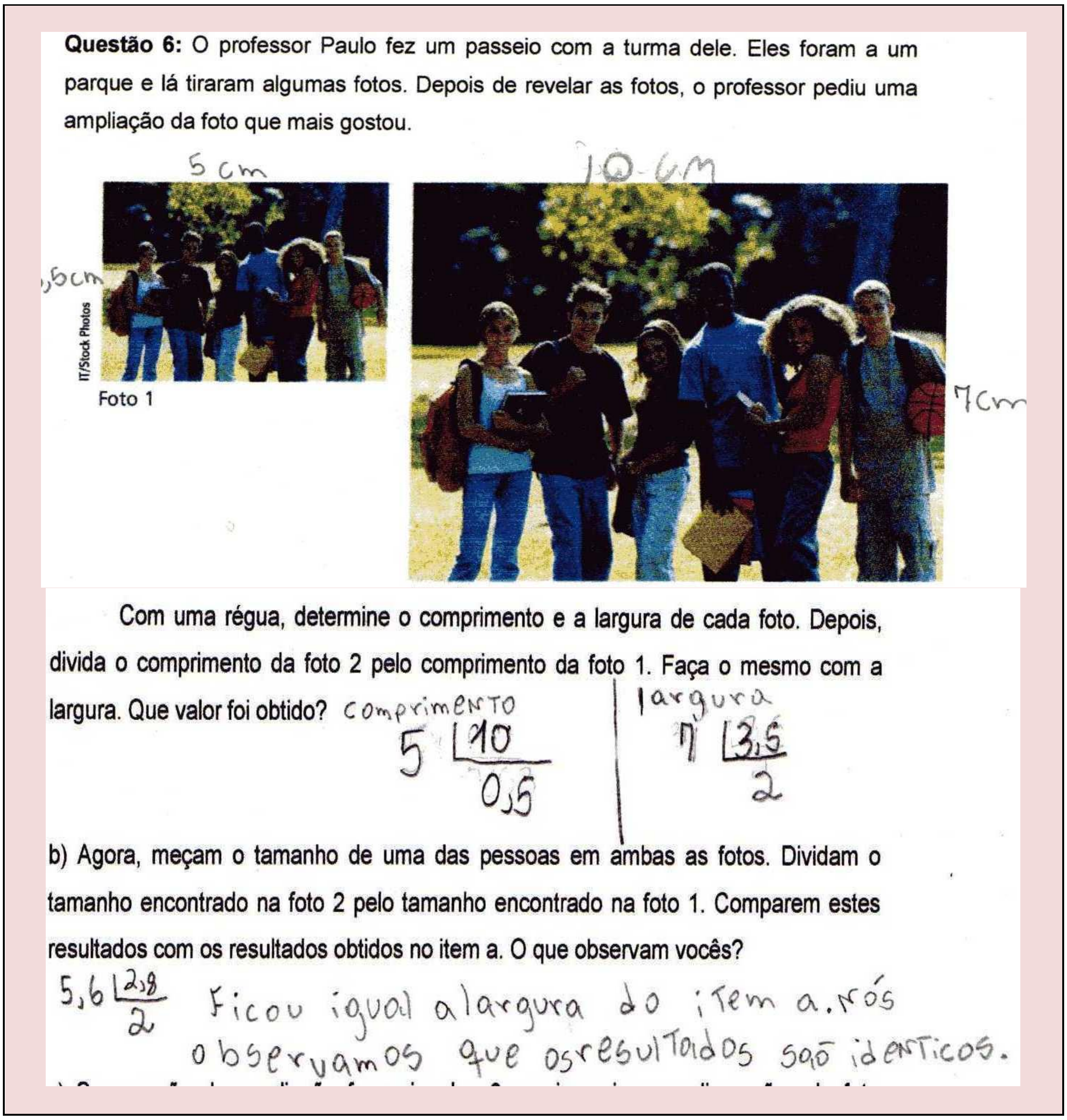
c) 24 bombons → 360÷24= 15 → São necessárias 15 embalagens.

Fonte: Atividade Final do grupo G2

Na resolução dessa questão, o pesquisador observou como a organização das ideias ajudou (nesse procedimento). Para encontrarem a resposta, os alunos calcularam a razão entre o número total de bombons e o número de bombons que cabia em cada embalagem. Durante a resolução, os componentes do grupo observaram que, se o número de bombons em cada embalagem fosse maior, seria preciso um número menor de embalagens, demonstrando compreensão do conceito de proporção inversa.

d) A questão 6 e a resolução do grupo G6:

Figura 48 – Resolução da questão 6 da atividade final pelo grupo G6



Questão 6: O professor Paulo fez um passeio com a turma dele. Eles foram a um parque e lá tiraram algumas fotos. Depois de revelar as fotos, o professor pediu uma ampliação da foto que mais gostou.

5 cm

10 cm

,5cm

IT/Stock Photos

Foto 1

7cm

Com uma régua, determine o comprimento e a largura de cada foto. Depois, divida o comprimento da foto 2 pelo comprimento da foto 1. Faça o mesmo com a largura. Que valor foi obtido? comprimento

5 | 10 → 0,5

largura

7 | 3,5 → 2

b) Agora, meçam o tamanho de uma das pessoas em ambas as fotos. Dividam o tamanho encontrado na foto 2 pelo tamanho encontrado na foto 1. Comparem estes resultados com os resultados obtidos no item a. O que observam vocês?

5,6 | 2,8 → 2

Ficou igual a largura do item a. nós observamos que os resultados são idênticos.

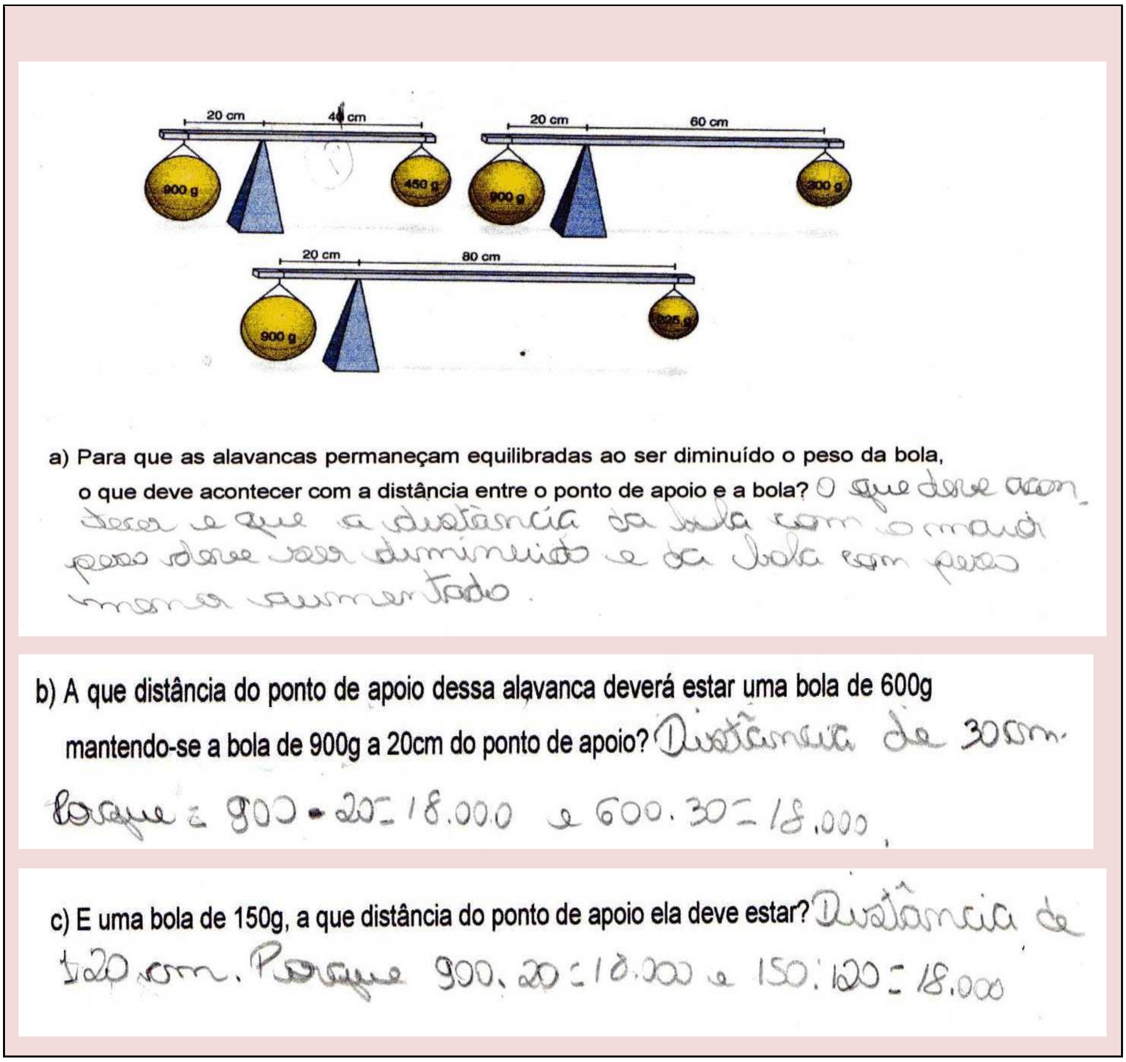
Fonte: Atividade Final do grupo G6

Nessa atividade, os alunos puderam utilizar o que aprenderam durantes as atividades no que se refere à utilização da régua para efetuar medidas. Eles obtiveram as medidas de forma correta.

Pode-se observar que, ao calcularem a razão entre os comprimentos dos lados dos retângulos, o grupo calculou a razão entre o comprimento da foto menor pelo da foto maior e a razão entre a largura da foto maior pela largura da foto menor. Ao serem questionados porque a razão não era a mesma, o aluno A29 disse: - “[...] é que pegamos as medidas ao contrário”. Ao serem indagados pelo professor, eles perceberam que, em um sentido, as medidas da foto maior eram o dobro das medidas da foto menor e, no sentido contrário, as medidas eram a metade. Ao final, o aluno A36 disse: - “Foi mal fessô, vou ficar mais ligado nessa paradinha”.

e) A questão 7 a resolução do grupo G3:

Figura 49 – Resolução da questão 7 da atividade final pelo grupo G3



a) Para que as alavancas permaneçam equilibradas ao ser diminuído o peso da bola, o que deve acontecer com a distância entre o ponto de apoio e a bola? O que deve acontecer é que a distância da bola com o maior peso deve ser diminuído e da bola com peso menor aumentado.

b) A que distância do ponto de apoio dessa alavanca deverá estar uma bola de 600g mantendo-se a bola de 900g a 20cm do ponto de apoio? Distância de 30cm. Porque = 900 • 20 = 18.000 e 600 . 30 = 18.000.

c) E uma bola de 150g, a que distância do ponto de apoio ela deve estar? Distância de 120 cm. Porque 900 . 20 = 18.000 e 150 . 120 = 18.000

Fonte: Atividade Final do grupo G3

Essa questão pode ser considerada difícil, pois envolve a razão inversa. Ao ser interpelado pelos componentes do grupo sobre a resolução desse problema, o professor disse apenas: - “Lembrem-se da gangorra na qual uma pessoa com maior massa e outra com menor massa vão brincar. Onde elas devem se sentar para que fiquem na mesma posição, ou seja, nenhuma das duas fique em uma posição mais alta ou mais baixa que a outra? Para que isso aconteça, em que posição as pessoas devem se assentar na gangorra?”

Nem todos os grupos conseguiram resolver essa questão, mas o grupo G3 conseguiu estabelecer a relação entre o peso e a distância ao ponto de apoio. Antes de continuar a resolução, o pesquisador também comentou sobre o que seria uma situação de equilíbrio.

Pela resolução percebe-se que os alunos conseguiram compreender que, para equilibrar a situação, a distância entre o maior peso deve ser diminuída e do maior peso aumentada. Esse problema envolve um conceito da Física, momentos de uma força, que o pesquisador sequer comentou durante as atividades da investigação. Mas junto com eles elaborou o seguinte raciocínio, se ao calcular a razão entre duas grandezas elas ficam proporcionais se mantiver a razão, ou seja, aumenta uma aumenta a outra, daí a razão (divisão) e nesse caso não seria assim teria que encontrar uma maneira de estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas. Um silêncio pairou sobre o grupo. O pesquisador disse se no primeiro caso vocês dividiram, nesse caso terão que fazer o que? Multiplicar, disse os componentes do grupo. (quis mostrar a ideia construída por eles de razão inversa)

Demorou-se um bom tempo até conseguirem estabelecer essa relação, mas depois de pensarem, discutirem sobre a situação e fazerem algumas continhas conseguiram estabelecer essa relação como pode ser visto na letra b e letra c da questão.

f) A questão 8 e a resolução do grupo G4:

Figura 50 – Resolução da questão 8 da atividade final pelo grupo G4

Questão 8: Leiam e analisem a historieta e a receita apresentadas a seguir.

WATTERSON, Bill. Algo babando embaixo da cama: mais uma coletânea de Calvin e Haroldo. Cedibra, 1988. p. 6.

Receita de panqueca

2 ovos

½ xícara de farinha de trigo

½ xícara de maisena

1 ½ xícara de leite

Sal a gosto

Recheio a gosto

Rendimento: 20 panquecas

Respondam:

a) Quantas receitas de panquecas Calvin deve usar para obter 30 panquecas?

$1\frac{1}{2}$, uma e meia.

b) Sabendo-se que 1 xícara de leite equivale a 250mL, quantas receitas de panquecas iguais a essa Calvin pode fazer com 1 L de leite?

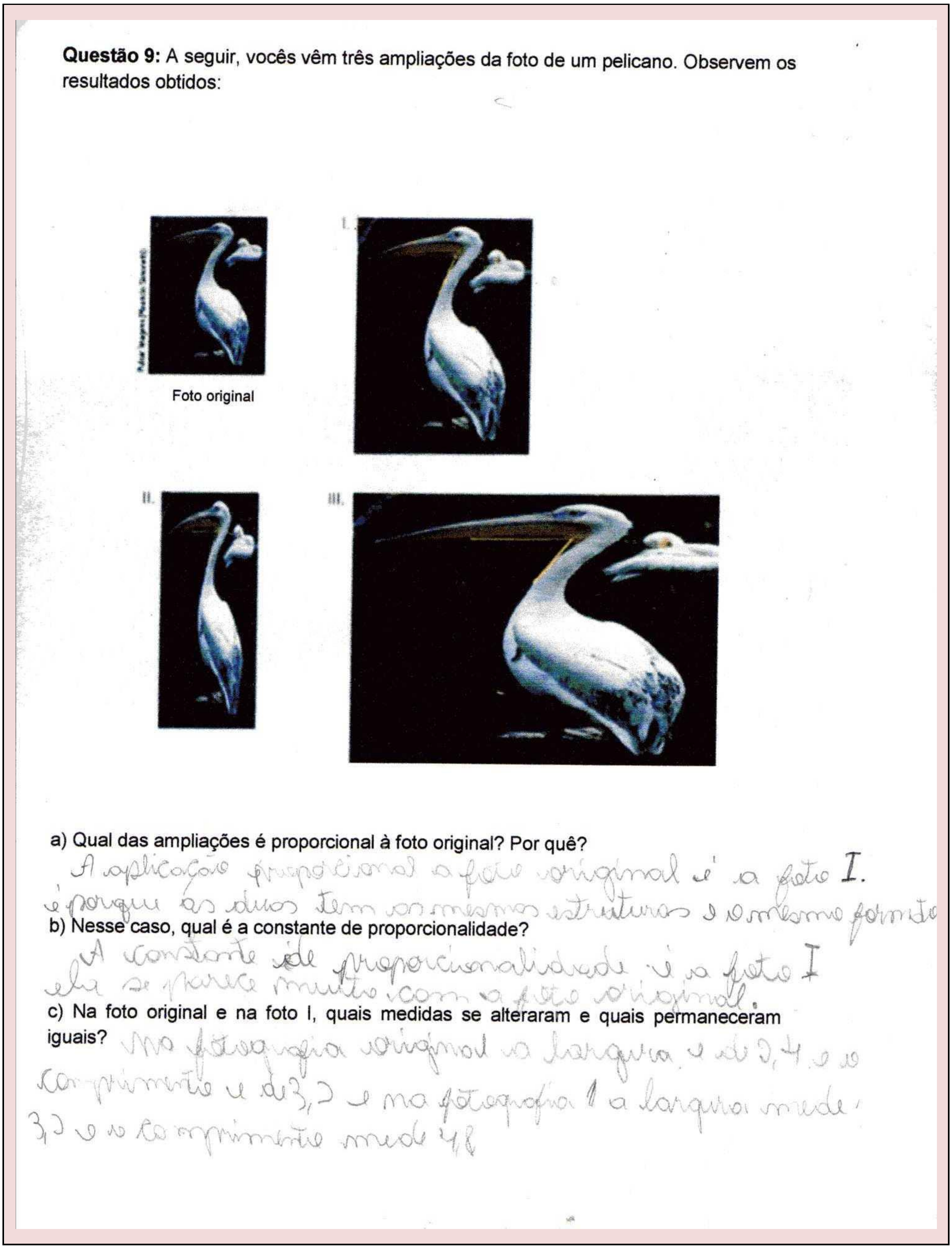
2 receitas, sendo que cada uma gastará 375 mL. e sobrará 250 mL, uma xícara.

Fonte: Atividade Final do grupo G4

Nesse problema, que envolve uma receita, pode-se verificar que os alunos conseguiram estabelecer a razão entre o número de panquecas e o número de receitas, além de encontrar a quantidade de leite necessária para uma receita e meia e a quantidade de leite que sobrou. Além disso, eles concluíram que a quantidade de leite que sobrou não seria suficiente para fazer uma nova receita.

g) A questão 9 e a resolução do grupo G3:

Figura 51 – Resolução da questão 9 da atividade final pelo grupo G3



Questão 9: A seguir, vocês vêm três ampliações da foto de um pelicano. Observem os resultados obtidos:

Foto original

I.

II.

III.

a) Qual das ampliações é proporcional à foto original? Por quê?

A aplicação proporcional a foto original é a foto I. é porque as duas tem os mesmos estruturas e o mesmo formato

b) Nesse caso, qual é a constante de proporcionalidade?

A constante de proporcionalidade é a foto I ela se parece muito com a foto original.

c) Na foto original e na foto I, quais medidas se alteraram e quais permaneceram iguais?

Na fotografia original a largura é de 2,4 e o comprimento é de 3,2 e na fotografia 1 a largura mede 3,2 e o comprimento mede 4,8

Fonte: Atividade Final do grupo G3

Este problema também exigiu a utilização de régua. Após efetuarem as medidas necessárias, os componentes do grupo chegaram às respostas corretas. Vale ressaltar que, quando o grupo respondeu na letra b, que a foto se parece muito com a foto original, revela o conceito de proporcionalidade direta, ou seja, seus lados aumentam à mesma razão. Na letra c, os alunos conseguiram perceber que as medidas que permaneceram iguais não se referem à mesma dimensão.

Em resumo, o teste reforça as manifestações orais e escritas dos alunos, bem como as observações do pesquisador, sobre a contribuição do estudo da razão áurea e de suas aplicações para a aprendizagem da proporcionalidade dos alunos participantes da pesquisa.

CAPÍTULO V
CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Considerações em relação ao Primeiro Objetivo.

O primeiro objetivo da pesquisa era verificar a conjectura seguinte: “O estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuem para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública”.

Para tanto, numa primeira etapa, foi feita uma revisão da literatura referente aos temas razão áurea e proporcionalidade. Buscou-se com ela identificar as possíveis causas das dificuldades manifestadas pelos alunos do Ensino Fundamental na aprendizagem da proporcionalidade, analisar as pesquisas e estudos sobre o tema e verificar a potencialidade da razão áurea para o ensino e aprendizagem de proporções.

A segunda etapa consistiu na elaboração de um conjunto de quatorze (14) atividades, tendo como elemento unificador a razão áurea e suas aplicações na Matemática, na natureza e em outras áreas de conhecimento. As atividades foram aplicadas em 40 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública.

Sendo a investigação do tipo qualitativa, em virtude dos objetivos propostos, foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: os relatórios escritos e as manifestações orais dos alunos; as gravações em vídeo e áudio; as anotações feitas pelo pesquisador em seu diário de campo a partir das observações realizadas em classe; o teste escrito sobre proporcionalidade aplicado ao final do conjunto de atividades.

As análises precedentes, relativas aos dados coletados durante a aplicação do conjunto de atividades didáticas, apresentaram fortes evidências de que os alunos compreenderam o conceito de razão áurea, pois foram capazes de aplicá-lo na identificação e construção de retângulos e triângulos áureos, da espiral áurea, do pentagrama, do decágono, da sequência de Fibonacci, do segmento áureo, entre outros.

O teste aplicado ao final das atividades mostrou que os grupos conseguiram resolver problemas envolvendo proporções direta e inversa, corroborando com os resultados das análises dos dados coletados em sala de aula.

Portanto, a pesquisa leva à conclusão que o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuiu para a aprendizagem da proporcionalidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Assim sendo, a primeira conjectura proposta nesta pesquisa parece ter sido confirmada.

5.2 Considerações em relação ao Segundo Objetivo

O segundo objetivo da pesquisa era verificar a conjectura: "O estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuem para a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento".

Desde o início das atividades, quando foram exibidos os dois primeiros vídeos, os alunos se interessaram pelo assunto, sempre perguntando o que teria a mais para fazer. As análises mostraram que eles ficavam impressionados ao encontrar a razão áurea em áreas tão diversas como pintura, arquitetura, música, natureza, entre outras. O mesmo ocorreu ao fazerem construções matemáticas e nelas encontrarem a razão áurea: retângulos e triângulos áureos; segmentos áureos; pentagrama; decágono; poliedros de Platão; sequência de Fibonacci. Como eles próprios diziam tudo era novo, diferente, nunca antes haviam imaginado que tais coisas existissem.

Para alguns alunos, o estudo do número de ouro mostrou o quanto a Matemática é importante no cotidiano das pessoas. Outros disseram que a Matemática habitava em suas vidas ou que ela fazia parte de suas vidas. Houve grupos que disseram que haviam entendido que a Matemática é muito importante. Outro grupo disse que podiam encontrar a Matemática em qualquer lugar onde estivessem.

Em suma, os resultados indicam que o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuiu para a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento. Em consequência, a segunda conjectura proposta nesta pesquisa também parece ter sido confirmada.

Considerando os resultados e conclusões precedentes, somos levados a afirmar que os dois objetivos propostos na investigação foram atingidos. Com efeito, de uma parte, foi possível verificar que o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuiu para a aprendizagem da proporcionalidade dos participantes da pesquisa. De outra parte, foi mostrado que o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuiu para a percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento.

5.3 Outras contribuições da Pesquisa

Neste capítulo também foram efetuadas algumas análises complementares a propósito da satisfação dos alunos sobre o conjunto das atividades trabalhadas em sala de aula, o trabalho em grupo e os instrumentos usados nas construções geométricas solicitadas nas atividades. Também foi verificado se os alunos demonstraram ou não satisfação em aprender matemática. Trata-se de análises sumárias, e não essenciais tendo em vista os objetivos da pesquisa, mas susceptíveis de fornecer algumas indicações gerais interessantes para o ensino da Matemática.

Na aplicação do conjunto de atividades, os alunos trabalharam em grupo para realizarem as tarefas nelas propostas. Em vários momentos, durante as atividades, e também nos relatórios, os alunos se exprimiram dizendo como foi agradável e proveitoso trabalhar em grupo. Salientaram que se sentiam mais confiantes ao trabalhar em grupos e que podiam trocar informações e tirar dúvidas uns dos outros.

O trabalho em grupo contribuiu muito para a aprendizagem, pois a partir de discussões entre os colegas do grupo cada aluno pode construir à sua maneira a solução da atividade proposta. Isso ficou claro para o pesquisador, pois participou de várias discussões entre os grupos. Também foi observado que a solidariedade manifestada entre os participantes e a paciência de uns com os outros contribuía muito para o sucesso dos trabalhos.

A retomada do estudo da proporcionalidade a partir da razão áurea mostrou-se frutífera. Considerando que ela é encontrada na natureza, no corpo humano, em figuras geométricas e em outras áreas do conhecimento, os alunos se sentiam motivados a procurá-la e a descobri-la nesses ambientes. Consideravam, então, que estavam aprendendo Matemática de uma forma nova e divertida. Sentiam-se satisfeitos e alegres, o que proporcionava uma pré-disposição para a aprendizagem.

Na atividade referente à sequência de Fibonacci, por exemplo, os alunos puderam explorar as aplicações da razão áurea na natureza, pintura, arquitetura, música e matemática . A atividade apresentava flores que continham um número de pétalas que seguia onde cada uma tinha um número de pétalas seguia a sequência de Fibonacci. Algumas obras como a Última Ceia e Monalisa de Leonardo da Vinci e a Última ceia de Salvador Dali, a catedral de Nottre Damme, o arco do triunfo, o Parthenon, constavam nas atividades e possibilitando aos alunos verificar a relação delas com a razão áurea, efetuando medições nas próprias figuras. Alguns alunos ficaram admirados com a beleza das obras, das construções e realizaram a atividade de forma agradável e tranquila, mostrando satisfação no estudo do tema.

Com relação aos instrumentos de desenho, os grupos usaram régua, esquadro, compasso e transferidor em determinadas das atividades propostas. Alguns alunos confessaram que nunca haviam usado o compasso. Os demais, entretanto, também mostraram muita dificuldade em manejar os instrumentos de desenho, inclusive a régua.

As análises complementares mostraram o acerto ao se propor atividades que requeriam o uso dos referidos instrumentos. Embora, inicialmente, os alunos experimentassem dificuldades em seu manuseio, causando atraso no cumprimento das atividades, o resultado foi muito bom. Eles reconheceram que haviam aprendido a medir e a usar o compasso, ficando mais experientes com os instrumentos e gostando de usá-los. Um dos grupos comentou que haviam aprendido a fazer triângulos fractais usando compasso e régua e que isso fora legal e agradável. Outro, disse que a matéria da construção da espiral áurea foi muito boa porque os ensinou a fazer medidas áureas com o uso do compasso.

Foi observado que a aplicação, em sala de aula, do conjunto de atividades programadas permitiu explorar a interdisciplinaridade, haja vista que os alunos puderam relacionar a Matemática com as Artes, Arquitetura, Biologia, Música dentre outras, oferecendo uma oportunidade de encontrar matemática em diversas situações cotidianas.

Por fim, uma última contribuição da presente investigação merece ser explicitada. Ela tem relação com o próprio pesquisador. Como já foi mencionado anteriormente, em seu trabalho com os alunos, ele constatava as dificuldades por eles apresentada no trato com as razões e as proporções. Ele se sentia desolado porque não dispunha de recursos pedagógicos efetivos que pudesse usar para garantir a aprendizagem desses conteúdos pelos alunos. A pesquisa mostrou ao pesquisador que, a partir da razão áurea e de suas aplicações, era possível preparar atividades que levassem os alunos à aprendizagem dos conteúdos citados. Além disso, a pesquisa contribuiu para reforçar a ideia da importância do trabalho de grupo em sala de aula, do uso de mídias como, por exemplo, os vídeos e dos instrumentos de desenho. Finalmente, o pesquisador pode perceber a importância de levar os alunos a aprenderem Matemática com alegria e satisfação.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica*. Brasília, 2002.

________ Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática*. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 03/04/2008.

______ Ministério da Educação. *Guia de livros didáticos PNLD - Anos Finais do Ensino Fundamental - Matemática.* Brasília, 2008. 152 p.

BARBOSA, Ruy Madsen *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*; 3ª edição; Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.

BOISNARD, D. et al. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris: Hachette, 1994.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*; 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1991.

CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007. 654p.

COSTA, S. *O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2007. Dissertação (Mestrado).

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. (1993). *Learning and teaching ratio and proportion: Research implications*. Disponível em http://education.umn.edu/rationalnumberproject/93_4.html. Acesso: 12/06/06.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2007.

FERNANDES, F. M. B. Considerações Metodológicas sobre a Técnica da Observação Participante. In MATTOS, R. A.; BAPTISTA, T. W. F. *Caminhos para análise das políticas de saúde*, 2011. p. 262-274.

FLETCHER, R. *An American Vision of Harmony: Geometric Proportions in Thomas Jefferson's Rotunda at the University of Virginia*. Disponível em: http://www.nexusjournal.com/Fletcher-v5n2.html*. Acesso em:* 10/06/2012*.*

FRINGS, M. *The Golden Section in Architectural Theory*. Disponível em http://www.nexusjournal.com/Frings.html . Acesso em 12/06/2012.

GONÇALVES, Maria J. S. V. *Raciocínio Proporcional: estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.* Dissertação de mestrado – PPGEM – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Mato Grosso do Sul. 2010.

HUNTLEY, H. E*. A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática.* Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1985. 178p.

HUYLEBROUCK, Dirk; LABARQUE, Patrick. More True Applications of the Golden Number. Disponível em: http://www.nexusjournal.com/Huy-Lab.html. Acesso em 12/062012.

KENT, L.; ARNOSKY, J.; MCMONAGLE, J. Using representational contexts to support multiplicative reasoning. In: *Making sense of fractions, ratios and proportions*. Reston, VA: NCTM, 2002, p. 145-152.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988, p. 93-118.

LÍVIO, Mário*. Razão áurea, a história de fi, um número surpreendente*. 2ª edição, Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2007.

MANNING, P. K, Methaphors of the Field: varieties of organizational discourse. In *Administrative Science Quarterly*, 1979, v. 24, no. 4, p. 660-671.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. *Proposta Curricular (CBC): Matemática, Ensinos Fundamental e Médio.* Belo Horizonte, SEE/MG, 1995.

MORAN, José Manuel . *O vídeo na sala de aula .* Revista Comunicação & Educação . ECA . Editora Moderna . São Paulo. Jan/Abr 1995.

OLIVEIRA, I. A. F. G. & SANTOS, M. C. Era uma vez... a regra de três. Reunião Anual da ANPEd. Caxambú, MG, 2000.

PONTES, M. G. O. *Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1996, 227 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

POST, T. e al. *Research on rational number, ratio and proportionality*. 1998. Disponível em: http://education.umn.edu/rationalnumberproject/98_1.html. Acesso em: 12/06/2012.

RESNICK, L.; SINGER, J. Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Orgs), *Rational number: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1993, p. 107-30.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bonterim de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*, 2ª edição. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

SCHLIEMANN, A.; NUNES, T. A situated schema of proportionality. *British Journal of Developmental Psychology*, 1990, v. *8*, p. 259-268.

SINGER, J.; KOHN, S.; RESNICK, L. Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. Hove: Psychology Press. 1997, p. 115-132.

SPINILLO, A. (2003). Ensinando proporção a crianças: Alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim do GEPEM*, *43*(3), p. 11-47.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manoela S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem de Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

TOSATTO, Cláudia Míriam et al. *Matemática* - 7ª e 8ª série. 2ª edição. Curitiba: Positivo, 2005.

VERGNAUD, G. A psicologia da educação. In: PLAISANCE, E.; VERGNAUD, G. *As Ciências Da Educação.* São Paulo: Loyola, 2003.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York, NY: Academic Press. 1983, p. 127-174.

APÊNDICE 1

TERMO DE CONSENTIMENTO DOS PAIS

TESTE INICIAL

TESTE FINAL

UFOP Universidade Federal de Ouro Preto	**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO** **Universidade Federal de Ouro Preto** **Mestrado Profissional em Educação Matemática** **Departamento de Matemática – ICEB / UFOP**	DEMAT Departamento de Matemática DEMAT-ICEB/UFOP

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os pais

Prezado pai, mãe ou responsável pelo aluno(a) ________________________.

Após conversar com a direção e coordenação desta escola e com seu (sua) filho (a) e contar com sua colaboração e consentimento, eu convido seu (sua) filho (a) a participar de uma pesquisa que será realizada por mim, *Alexandre Ramon de Souz*a, sob a orientação da *Profa. Dra. Maria do Carmo Vila*. A pesquisa será realizada nas aulas de Matemática ministradas por mim no decorrer do segundo semestre letivo de 2012.

Aplicarei uma proposta didática com o objetivo de apresentar a razão áurea e suas aplicações como abordagem para o ensino de proporcionalidade, tendo em vista um melhor desempenho dos alunos no estudo e aprendizagem desse conteúdo.

O Programa da disciplina será cumprido integralmente, pois as aulas constantes da proposta serão aquelas indicadas no Programa. A pesquisa em nada alterará o plano de ensino referente à ementa da disciplina, contida no Currículo da escola, pois as atividades nela propostas serão elaboradas levando-se em conta os conteúdos pertinentes a esta etapa. Assim, não haverá qualquer prejuízo quanto ao cumprimento do currículo escolar.

A abordagem proposta não representará problemas para a aprendizagem dos alunos. Caso algum problema seja detectado, retornar-se-á à metodologia tradicional, não havendo assim prejuízos à aprendizagem em função da metodologia proposta nesta pesquisa. Outra possibilidade será propor outras atividades após o término da pesquisa para que o retome aprenda o que ainda não houver aprendido As atividades propostas não servirão para efeito de avaliação, e nem lhe serão atribuídos pontos a serem considerados no bimestre.

Participarão desse trabalho os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que, voluntariamente, assim o decidirem e contarem com o consentimento do(a) Senhor(a). As aulas ocorrerão no horário estabelecido pela escola em período regular.

Como tal trabalho fará parte de uma pesquisa de Mestrado, solicito sua permissão para gravar em áudio e vídeo alguns momentos em sala de aula. Os dados coletados, uma vez organizados, estarão à sua disposição. Porém, nenhum aluno, pai, professor ou escola, terá seu nome mencionado na pesquisa, pois serão utilizados códigos conhecidos apenas pelos pesquisadores. A qualquer momento o aluno poderá decidir não participar e nenhuma reprimenda lhe caberá. Esclareço, ainda, que toda a pesquisa será realizada sem ônus para a família ou para a escola.

Os alunos que não se sentirem à vontade para participarem desta pesquisa farão as atividades normais programadas para a outra turma do 9º ano sob a orientação do professor; contudo, não terão os dados coletados e utilizados pelo pesquisador.

Caso ainda tenha alguma dúvida, por favor, sinta-se à vontade para me consultar a minha orientadora ou o Comitê de Ética da UFOP**,** cujo endereço se encontra no rodapé desta página.

Informamos que realizaremos uma reunião para esclarecimento de alguma dúvida ainda restante sobre a proposta e gostaríamos de convidá-lo (a) a participar dela juntamente com seu (sua) filho(a).

No entanto, caso o(a) senhor(a) já se sinta totalmente esclarecido(a) em relação à proposta e concordar que seu (sua) filho(a) participe voluntariamente desta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar e devolver o termo de consentimento.

Atenciosamente,

Profa. Dra. Maria do Carmo Vila
Orientadora – (31) 35591355 – mcvila@cead.ufop.br

Alexandre Ramon de Souza
Mestrando – (31) 91504247 – rmn1313@gmail.com

Para ser preenchido por um dos pais do(a) aluno(a):

Eu, ____, autorizo meu (minha) filho(a)   a participar da pesquisa.

___________________ , ___ de __________ de 2010.

____

Assinatura do (a) responsável

TESTE INICIAL

Componentes: ____

____

____

____

____

Baseando-se em seus conhecimentos adquiridos nos anos anteriores respondam às questões a seguir para que possamos sondá-los.

Questões:

1) A base e a altura de um desses retângulos são proporcionais à base a à altura do outro. Quais são esses dois retângulos?

2) Em nosso país, muita gente ganha pouco. Para você ter uma ideia: 2 em casa 5 pessoas que trabalham ganham salário mínimo. No Brasil há cerca de 25 000 000 de trabalhadores. Quantos ganham salário mínimo?

3) A carga máxima de um elevador é esta: 7 adultos de 80 kg cada um. Essa carga máxima é de quantos adolescentes de 56 kg?

4) Cinco torneiras idênticas enchem uma tanque em 6 horas. Em quanto tempo três torneiras encheriam o mesmo tanque?

5) Num final de tarde, medi minha sombra. Minha altura é 1.40m e minha sombra media 10m. Naquele mesmo instante, qual era o comprimento da sombra de meu pai, cuja altura é 1,82m?

6) Com velocidade de 70km/h, Vitória gastou 5 horas para fazer uma viagem. Quanto tempo ela gastaria à velocidade de 100km/h?

7) A distância entre duas cidade é de 800km. Um trem com velocidade constante percorreu em 3 horas os primeiros 120km. Quanto tempo levará o trem para percorrer os quilômetros restantes?

8) Uma mercearia está fazendo a seguinte promoção: pague 1 dúzia de ovos e leve 13. Se paguei por 96 ovos, quantos ovos levei para casa?

9) Sr Manoel, em sua loja, deseja lucrar R$2,00 em cada R$ que paga ao adquirir suas mercadorias. Se o objeto custou-lhe R$ 42,00, por quanto deverá vendê-lo?

10) Cláudia tem uma foto 4cm de largura e 6cm de comprimento e deseja fazer uma ampliação dessa foto com 10cm de largura. Qual será a largura da ampliação?

11) Duas piscinas têm a mesma largura e a mesma profundidade e comprimentos diferentes. Na piscina que tem 8m de comprimento, a quantidade de água que cabe na piscina é de 45000 litros. Quantos litros de água cabem na piscina que tem 10m de comprimento?

12) Dois operários constroem um muro em 4 dias. Um deles, trabalhando sozinho, constrói o mesmo muro em 5 dias. Pergunta-se: em quantos dias o outro operário, trabalhando sozinho, conseguiria executar a mesma tarefa?

TESTE FINAL

Componentes: ____

____

____

____

____

Baseando-se no processo que o grupo participou através das atividades realizadas, respondam às questões a seguir para que possamos verificar sua aprendizagem.

.

Questão 1: Um coração bate, em média, 70 vezes por minuto. Mantendo esse mesmo ritmo, quantas vezes, em média, ele baterá em 240 segundos?

Questão 2: Um pintor cobra R$ 45,00 para pintar uma parede de 10m². Quanto ele cobra para pintar uma parede de 12m²?

Questão 3: Ana fez 360 bombons para vender e quer comprar x embalagens para colocar y bombons em cada uma delas.

Quantas embalagens são necessárias para acomodar:

a) 12 bombons

b) 45 bombons

c) 24 bombons

Questão 4: Observem as embalagens e respondam:

Figura 52 - Embalagens

Fonte: Tosatto, et al, 2005, p.15

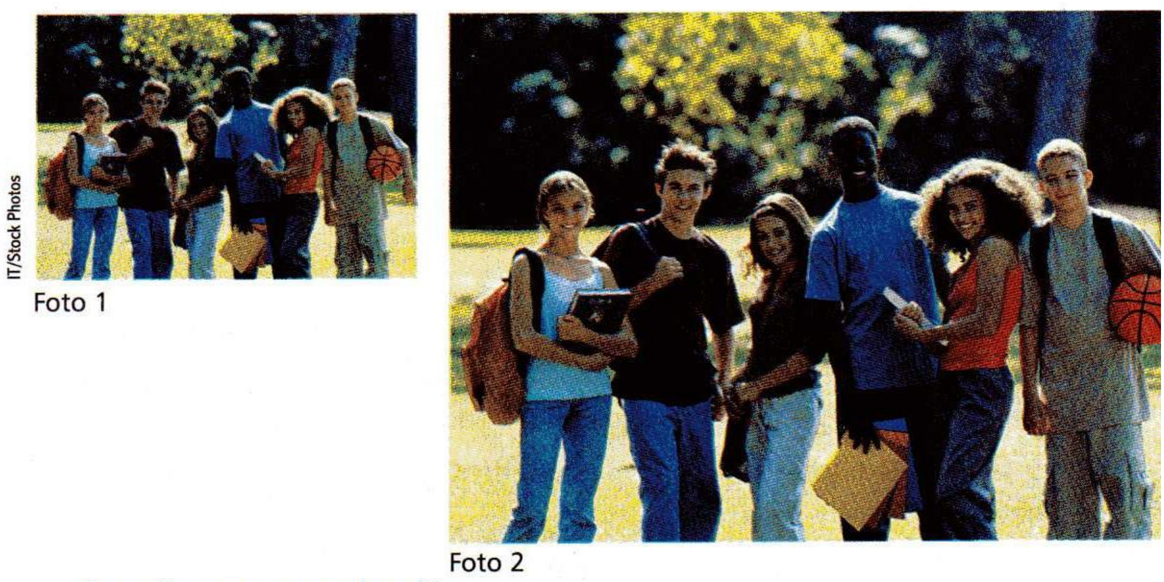
a) Qual das embalagens é mais econômica? Justifiquem sua resposta.

b) Quanto deveria custar a embalagem de 200g para que seu preço fosse proporcional ao da embalagem de 500g?

Questão 5: Se 5 pedreiros levam 4 dias para construir um muro, quantos dias 2 pedreiros levam para construir o mesmo muro?

Questão 6: O professor Paulo fez um passeio com a turma dele. Eles foram a um parque e lá tiraram algumas fotos. Depois de revelar as fotos, o professor pediu uma ampliação da foto que mais gostou.

Figura 53 - Fotografias



Fonte: Tosatto, et al, 2005, p.23

Com uma régua, determine o comprimento e a largura de cada foto. Depois, divida o comprimento da foto 2 pelo comprimento da foto 1. Faça o mesmo com a largura. Que valor foi obtido?

b) Agora, meçam o tamanho de uma das pessoas em ambas as fotos. Dividam o tamanho encontrado na foto 2 pelo tamanho encontrado na foto 1. Comparem estes resultados com os resultados obtidos no item a. O que observam vocês?

c) Se a razão de ampliação fosse igual a 3, quais seriam as dimensões da foto ampliada?

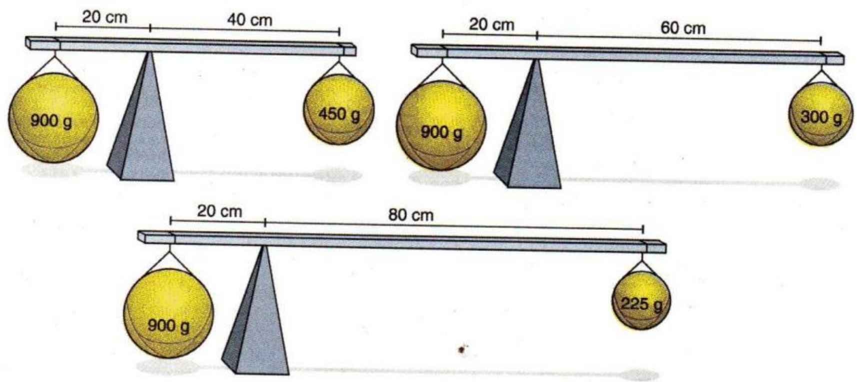
d) Reduzindo-se a foto na razão de 0,5, quais seriam as dimensões da foto?

e) O que aconteceria se a razão fosse igual a 1?

Questão 7: Se 5 pedreiros levam 4 dias para construir um muro, quantos dias 2 pedreiros levam para construir o mesmo muro?

Questão 8: Observem estas alavancas e responda:

Figura 54 - Alavancas



Fonte: Tosatto, et al, 2005, p.31

a) Para que as alavancas permaneçam equilibradas, ao ser diminuído o peso da bola, o que deve acontecer com a distância entre o ponto de apoio e a bola?

b) A que distância do ponto de apoio dessa alavanca deverá estar uma bola de 600g mantendo-se a bola de 900 g a 20 cm do ponto de apoio?

c) E uma bola de 150g, a que distância do ponto de apoio ela deve estar?

Questão 9: Leiam e analisem a historieta e a receita apresentadas a seguir.

Figura 55 – Calvin e Haroldo – Receita

WATTERSON, Bill. Algo babando embaixo da cama: mais uma coletânea de Calvin e Haroldo. Cedibra, 1988. p. 6.

Fonte: Tosatto, et al, 2005, p.15

Receita de panqueca

2 ovos

½ xícara de farinha de trigo

½ xícara de maisena

1 ½ xícara de leite

Sal a gosto

Recheio a gosto

Rendimento: 20 panquecas

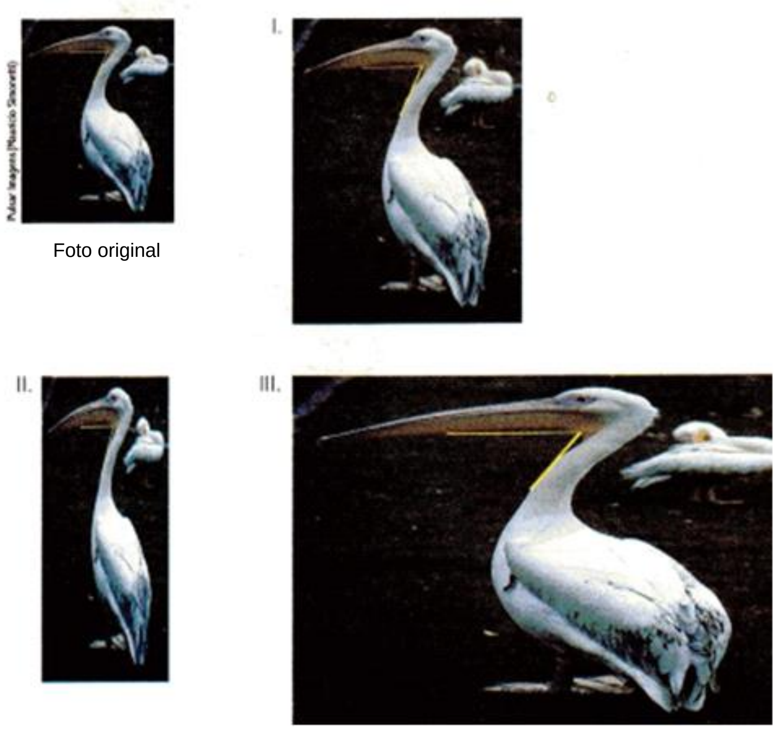
Respondam:

a) Quantas receitas de panquecas Calvin deve usar para obter 30 panquecas?

b) Sabendo-se que 1 xícara de leite equivale a 250mL, quantas receitas de panquecas iguais a essa Calvin pode fazer com 1 L de leite?

Questão 10: A seguir, vocês vêm três ampliações da foto de um pelicano. Observem os resultados obtidos:

Figura 56 - Fotografias



Fonte: Tosatto, et al, 2005, p. 21

a) Qual das ampliações é proporcional à foto original? Por quê?

b) Nesse caso, qual é a constante de proporcionalidade?

c) Na foto original e na foto I, quais medidas se alteraram e quais permaneceram iguais?

Questão 11: Leia o pequeno texto a seguir.

A Monalisa, pintura famosa em todo mundo por seu sorriso enigmático, é uma obra de Leonardo da Vinci fascinado pelas proporções do corpo humano. Outros artistas, mesmo conhecendo as proporções entre as partes do corpo humano, deformaram seus personagens para retratar com mais expressividade a ideia que desejavam passar.

Por exemplo, a pintura denominada Abaporu, uma das obras mais importantes e valiosas da artista brasileira Tarsila do Amaral, por sua estranheza, causou polêmica entre os artistas da época e trouxe grandes mudanças para a arte brasileira.

Cândido Portinari foi outro artista brasileiro que também utilizou a deformação das proporções do corpo humano em suas obras de arte. No quadro Café, representou desproporcionalmente algumas partes do corpo com o intuito de retratar a vida sofrida e o trabalho excessivo do povo brasileiro.

Figura 57 – O Café e Abaporu

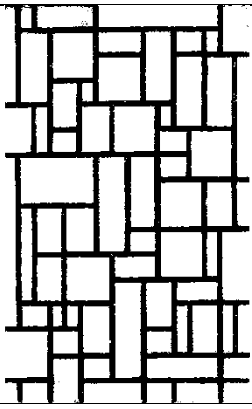
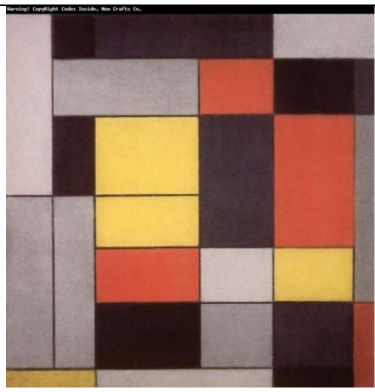
	
PORTINARI, Cândido. Café. 1935. Pintura a óleo/tela; 130x195cm. Coleção Museu Nacional de Belas Artes/MNBA Rio de Janeiro – RJ	AMARAL, Tarsila do. Abaporu. 1928. Óleo sobre tela; 85x73cm. Coleção Eduardo Constantino, Argentina.

Fonte: Tosatto, et al, 2005, p. 8

Observando esses quadros de Portinari e de Tarsila do Amaral, quais partes dos corpos estão representadas de maneira desproporcional? Qual seria o significado dessa desproporção?

Questão 12: Nas composições de Mondrian a seguir identifique os retângulos áureos.

Figura 58 – Composições de Mondrian

Fonte: Tosatto, et al, 2005

APÊNDICE 2

ATIVIDADES APLICADAS EM SALA DE AULA

Atividade 1: Construção do segmento áureo

Objetivo:

Construir o segmento áureo usando régua e compasso.

Recursos:

Papel, régua e compasso.

Tempo previsto:

1 aula de 50 minutos

Descrição da atividade:

A atividade de construção do segmento áureo foi uma dais quais os alunos tiveram maior dificuldade, mesmo trabalhando em grupos. O manuseio da régua, do compasso e do transferidor proporcionou inicialmente certo desânimo aos alunos, pois tiveram receio de não conseguirem fazer a atividade proposta. Alguns alunos chegaram a pedir ao professor que desenhasse as figuras para eles, pois não estavam conseguido fazer o desenho. O professor interveio incentivando-os e indo até o quadro de giz para mostrar como os pontos eram obtidos. Ao final, alguns disseram: “- Custei, mas consegui!”

Deve-se ressaltar que os CBC’s propõem ao professor que utilize em suas aulas régua, compasso e transferidor, o que vem de encontro à realização da atividade.

Construído o segmento áureo, os grupos foram orientados a medir os segmentos AB, AC e BC, usando a régua. Em seguida, usando a calculadora, determinaram as razões $\frac{m(AB)}{m(AC)}$ e $\frac{m(AC)}{m(BC)}$.

Os resultados obtidos eram próximos da razão áurea, o que deixou os alunos um pouco frustrados. O professor fez, então, uma discussão sobre as medidas e suas aproximações, bem como sobre a precisão dos instrumentos de medida. A seguir, usando o *software* Geogebra, o Datashow e contando com a participação dos alunos, calculou as razões anteriormente mencionadas com diferentes aproximações das medidas dos segmentos AB, AC e BC. Assim sendo, os alunos chegaram à conclusão de que, medindo os segmentos com precisão, as razões seriam a razão áurea.

Durante a realização da atividade, o pesquisador aproveitou para discutir sobre a precisão dos instrumentos de medida. O momento também foi aproveitado para tecer comentários sobre os algarismos significativos. Não havia intenção de se aprofundar no tema; apenas deixar claro para os alunos que quanto maior fosse a precisão das medidas, mais próximo se chegaria da medida esperada.

Atividade 1: Construção segmento áureo
(Instruções)

Componentes:____

____

____

____

____

Utilizando régua e compasso divida o segmento a seguir em média e extrema razão (segmento áureo)

____

Utilizando a régua meça os segmentos AB, AC e BC e verifique se $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = 1{,}618$

AB= __________ cm AC = __________ cm BC = __________cm

$\frac{AB}{AC} =$ $\frac{AC}{BC} =$

Relatório da atividade 1: Construção do segmento áureo

Componentes:____

____

____

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 2: Aplicações da razão áurea

Objetivo:

Perceber as diversas aplicações da razão áurea na natureza, nas artes, na arquitetura, música, entre outros, através do vídeo *Arte e Matemática: o número de ouro* e *Donald no país da Matemágica*.

Recursos:

Sala multimídia ou projetor e vídeos.

Tempo previsto:

2 aulas de cinquenta minutos cada

Descrição da atividade:

Esta atividade tinha como objetivo levar os alunos a perceberem as diversas aplicações da razão áurea na natureza, nas artes, na arquitetura, música, entre outros. Como recurso, foram exibidos dois vídeos. O primeiro deles, denominado *Donald no País da Matemática*, veiculado em um site da Internet , tem duração de 27 minutos. O segundo foi produzido pela TV Escola, com duração de 12 minutos, tendo recebido o nome de *Arte e Matemática*[27].

Ainda em sala de aula, foi informado aos alunos que eles assistiriam a dois vídeos da área de Matemática e que, ao final, participariam de um debate, seguido da elaboração de um relatório por grupos. Os grupos em questão foram formados sob a orientação do professor pesquisador e permaneceram os mesmos durante toda a pesquisa.

A seguir, os alunos foram encaminhados para assistir aos vídeos, que mostravam a razão áurea sendo aplicada na natureza e em campos do conhecimento como a biologia, as artes, a música, a arquitetura e a literatura. Após a exibição dos vídeos, o pesquisador salientou algumas partes que abordavam a razão áurea de uma forma mais destacada. Logo em seguida, foi realizado o debate, no qual os alunos apresentaram seus comentários e realizaram discussões sobre o que viram e ouviram nos vídeos.

[27] Disponível em <www.tvescola.mec.gov.br>. Acesso em: 22/08/2012

Relatório da atividade 2: Aplicações da razão áurea

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 3: Construção do retângulo áureo

<u>Objetivos</u>:

Construir o retângulo áureo.

Identificar a razão áurea através das medidas dos lados do retângulo áureo.

<u>Material utilizado</u>:

Régua, compasso, folha de papel, objetos de uso cotidiano (cartão de crédito, tela de televisão, folha A4, etc.)

<u>Tempo previsto</u>:

2 aulas de 50 minutos cada

<u>Descrição da atividade</u>:

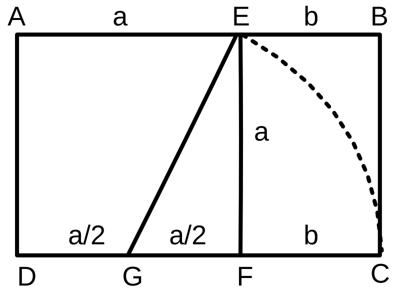
O professor solicitou aos grupos que construíssem o retângulo áureo a partir de um quadrado com 10 cm de lado, utilizando a régua e o compasso conforme a figura a seguir e os seguintes passos:

1º) determinar com a régua o ponto médio, G, do lado DF do quadrado;

2º) unir o ponto G ao ponto E, para obter o segmento EG;

3º) prolongar o lado DF do quadrado ADEF;

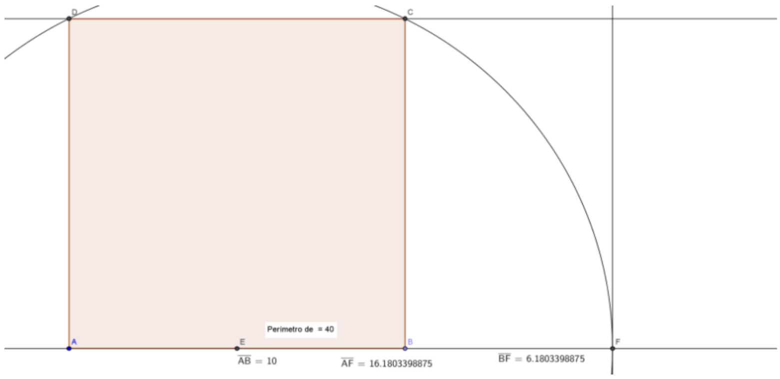
4º) com centro do compasso em G e abertura EG, determinar o ponto C no prolongamento de DF; obtendo-se, daí, o retângulo ABCD, que é áureo.



Por se tratar de uma construção utilizando instrumentos de desenho, os alunos tiveram dificuldade como na atividade anterior. O professor, interveio, auxiliando-os sempre que era necessário utilizando os instrumentos no quadro.

Ao final da construção, o professor pediu aos alunos que medissem os comprimentos dos segmentos CD, DF, CF, utilizando a régua. Após isso, os alunos calcularam as razões $\frac{CD}{DF}$ e $\frac{DF}{CF}$ e verificaram que elas eram próximas à 1,618.

Assim como na atividade 1, podem ocorrer divergências devido à precisão do instrumento de medida e de não se encontrar o valor esperado. O professor utilizou o software Geogebra para mostrar o resultado seria 1,618, se fossem usadas medidas com maior precisão.

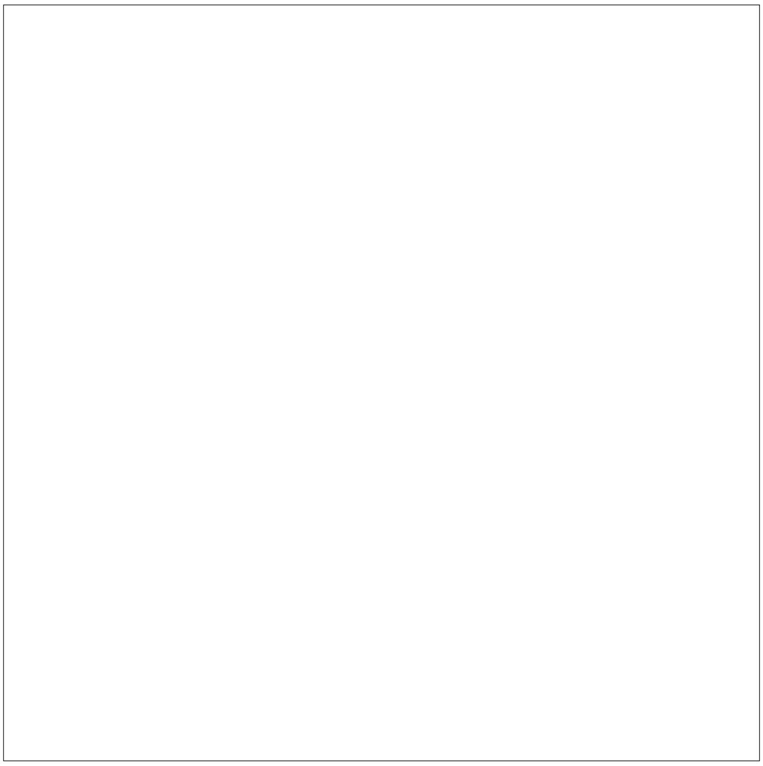


Observação: Essa atividade pode auxiliar os alunos, no estudo de figuras semelhantes. Basta para isso alterar a medida do lado do quadrado, obtendo uma outra figura. Os alunos poderão, então, comparar as duas figuras, determinando as razões entre as medidas de seus lados correspondentes.

Atividade 3: Construção do retângulo áureo
(Instruções)

Componentes:____
____
____
____
____

A partir do quadrado a seguir, construa um retângulo áureo usando régua e compasso.



Utilizando a régua meça os lados do retângulo construído e verifique se estão em razão áurea.

Lado maior: __________cm Lado menor: _________cm

Razão:___________

Relatório da atividade 3: Construção do retângulo áureo

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 4: Sequência de Fibonacci, construção da espiral áurea

Objetivos:

Identificar a sequência de Fibonacci.

Construir a espiral áurea utilizando régua e compasso.

Fazer uma pesquisa na Internet.

Recursos:

Régua, compasso, folha de papel e calculadora.

Tempo previsto:

2 aulas de cinquenta minutos cada

Descrição da atividade:

Esta atividade foi realizada pelos alunos reunidos em grupos em duas aulas de cinquenta minutos cada uma. Tinha como objetivo levá-los a construir a sequência de Fibonacci e a espiral áurea.

Inicialmente, o professor solicitou aos alunos que indicassem dois números inteiros quaisquer. Foram indicados os números 3 e 5, que foram escritos no quadro de giz. A seguir, o professor pediu que eles indicassem a soma desses dois números. Essa soma (8) seria o terceiro termo da sequência que estava sendo construída. O quarto termo seria a soma dos dois termos imediatamente anteriores, e assim por diante. Os alunos foram indicando os termos da sequência, que foram sendo escritos no quadro.

Usando o quadro, o professor apresentou uma nova sequência para que os alunos procedessem como na sequência anterior. Isto é, cada termo deveria ser o resultado da soma dos dois números imediatamente anteriores.

Após esse trabalho, os alunos receberam uma folha de registro com três tarefas a serem executadas.

Com a ajuda de uma calculadora, eles escreveram a sequência de Fibonacci com quinze termos (1ª tarefa). Em seguida, calcularam a razão entre seus termos. A partir daí, quando percebiam que a razão entre os termos era a razão áurea, ficavam admirados e perguntavam: - Como pode? Qual a mágica que tem aqui? Será que sempre será assim? Daí, o professor incentivou os grupos a calcular mais termos da sequência e, em seguida, calcular a razão entre eles. Comprovaram, assim, o que eles a priori não acreditavam: a razão áurea ocorria também com os novos termos que foram acrescentados à sequência.

A segunda tarefa da atividade consistiu em escrever três sequências. Os próprios grupos indicavam os dois primeiros termos de cada uma delas. A partir daí, o terceiro termo seria a soma do primeiro com o segundo; o quarto, a soma do segundo com o terceiro; e assim sucessivamente. Ou seja, cada termo da sequência, a partir do terceiro, era igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

Construídas as sequências, os grupos deveriam calcular as razões entre os termos de cada uma delas a fim de verificar se, em cada sequência, as razões encontradas tenderiam ao número de ouro.

Foi discutido com os alunos que, independentemente dos dois primeiros números indicados, as razões entre os termos consecutivos de uma sequência com essa lei de formação tendiam à razão áurea.

Atividade 4: Sequência de Fibonacci e construção da espiral áurea (Instruções)

Componentes:____

____

____

____

____

A sequência 1,1,2,3,5,8,13,21, ... é denominada sequência de Fibonacci onde cada termo, a partir do terceiro é igual a soma dos dois anteriores. Calculando a razão entre o terceiro e o segundo termo, o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto verifica-se que essa razão tende a ser a razão áurea, 1,618.

a) Escreva a sequência de Fibonacci com 15 termos e calcule a razão entre os termos consecutivos a partir do terceiro.

b) Escreva 3 sequências com 15 termos onde cada termo a partir do terceiro é igual a soma dos dois anteriores como na sequência de Fibonacci. Verifique se a razão entre o terceiro e o segundo termo, entre o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto e assim sucessivamente até a razão entre o décimo quinto e o décimo quarto também tende a ser a razão áurea, 1,618.

Lembrem-se de que essas sequências podem ser infinitas, ou seja, podem ter infinitos termos, 1ª sequência: ____

Razão entre os termos:

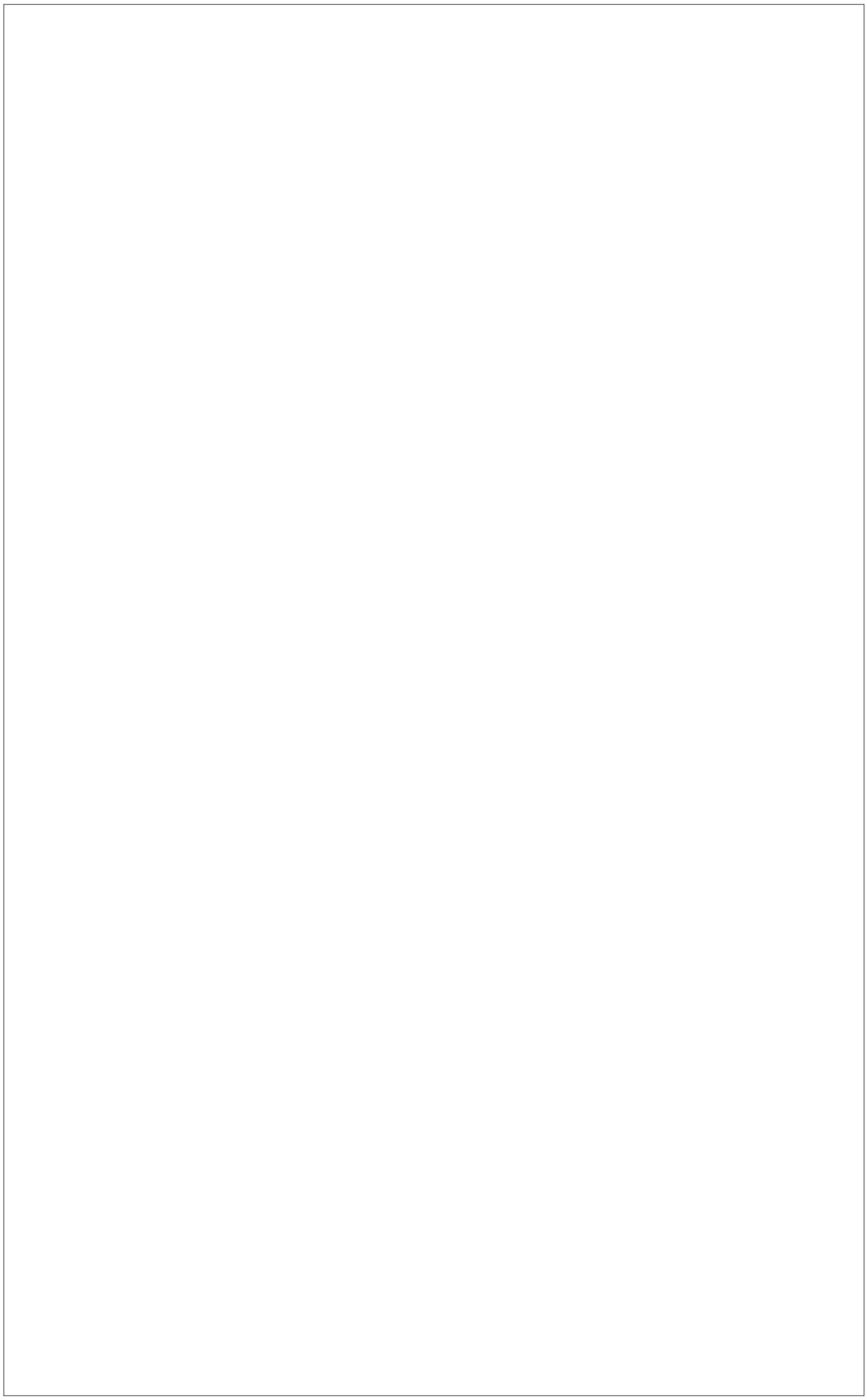
2ª sequência: ____

Razão entre os termos:

3ª sequência: ____

Razão entre os termos:

c) Construir a espiral áurea a partir do retângulo a seguir:



Relatório da atividade 4: Sequência de Fibonacci e construção da espiral áurea

Componentes:____

____

____

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 5: Sequência de Fibonacci e espiral áurea na natureza

Objetivo:

Identificar a sequência de Fibonacci e a espiral áurea em objetos e fenômenos da natureza (molusco, galhos de árvore, crescimento de uma população de coelhos, plantas e outras).

Recursos:

Fotografias, régua e calculadora.

Tempo previsto:

1 aula de 50 minutos.

Descrição da atividade:

O professor apresentou aos alunos algumas figuras. Foi, então, proposto que eles identificassem nelas a presença da espiral áurea e da sequência de Fibonacci. O professor aproveitou a oportunidade para falar um pouco mais sobre a espiral áurea e a sequência de Fibonacci.

Os grupos tiveram, também, a oportunidade de verificar que, em várias plantas, o número de pétalas é um número da sequência de Fibonacci.

O professor orientou os alunos quanto à observação de cada figura para que eles pudessem nela identificar a espiral áurea e a sequência de Fibonacci.

Atividade 5: Sequência de Fibonacci e espiral áurea na natureza (Instruções)

Componentes:____

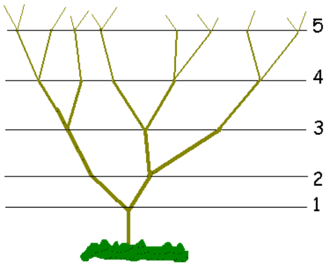
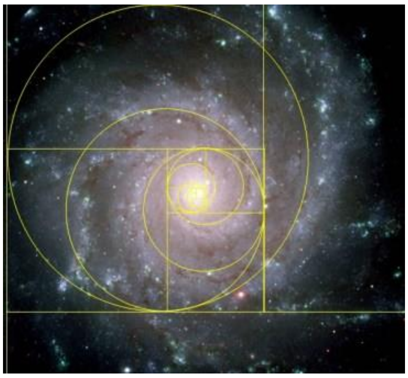
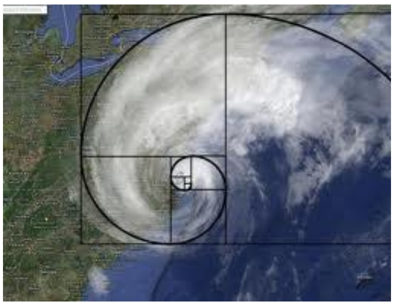
____

____

____

____

Verifique a presença da espiral áurea e da sequência de Fibonacci nas figuras a seguir:

b) Verifique a presença da sequência de Fibonacci no número de pétalas de flores.

3 pétalas: lírios e íris		
5 pétalas: columbinas, rainúnclos amarelos e esporas		
8 pétalas: delfíneos		
13 pétalas: crisântemos, cinerária e tasna		
21 pétalas: asteráceas		
34 pétalas: banana na terra e malmequer		

Relatório da atividade 5: Sequência de Fibonacci e a espiral áurea na natureza

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 6: Retângulos áureos e não áureos

Objetivo:

Identificar retângulos áureos e não áureos.

Recursos:

Régua e calculadora

Tempo previsto:

2 aulas de 50 minutos cada.

Descrição da atividade:

Dentre as quatorze atividades propostas aos alunos durante a pesquisa, esta foi a sexta por eles realizada. Ela foi denominada “retângulos áureos e não áureos” e teve a duração de duas aulas de cinquenta minutos cada uma. Como recursos didáticos, foram usados: régua, compasso, trena e folha de registro para a anotação dos resultados das medições e dos cálculos. Os alunos realizaram essa atividade em grupos, já formados anteriormente, quando da realização da primeira atividade.

Inicialmente, o pesquisador relembrou com os alunos os vídeos apresentados na atividade anterior. Discutiu a parte do vídeo *Donald no País da Matemática* que trazia explicações sobre o Parthenon cuja fachada principal formava um retângulo áureo. Ressaltou que a razão entre seus lados era o número de ouro.

Curiosos e interessados, os alunos se preocuparam em medir retângulos em objetos que se encontravam na sala de aula. O professor incentivou-os a escolher os retângulos e a realizar as medições de seus lados. Assim foi feito. Os grupos realizaram medições em retângulos que eles identificavam na sala de aula, tais como: tampo da mesa, folha de papel A4, capa do livro de matemática, cartão de crédito, quadro de giz, tampa da caixa do interruptor, etc.

Usando uma calculadora, os grupos encontraram as razões entre os lados dos retângulos cujos lados haviam sido medidos. Classificaram os retângulos em áureos, quando a razão entre os lados era 1,6, em próximo ao áureo, quando a razão estava entre 1,5 e 1,7 e não áureo quando ela era menor que 1,5 e maior que 1,7.

As medições, os cálculos e as conclusões eram anotados na folha de registro da atividade.

Atividade 6: Retângulos áureos e não áureos
(Instruções)

Componentes:____

____

____

____

____

a) As partidas do campeonato brasileiro de futebol são disputadas em vários estádios pelo Brasil. A seguir são fornecidas as medidas de alguns deles. Verifique se as dimensões de cada um deles, dadas em metros, correspondem a um retângulo áureo, se aproxima do áureo ou não áureo.

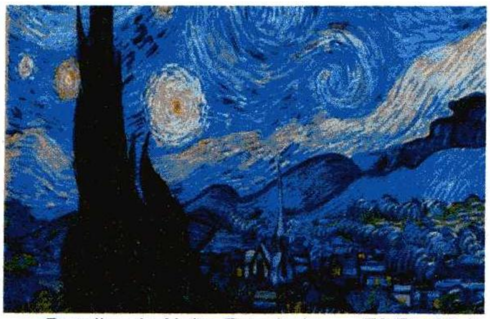
Arena do Jacaré 110x74
Arena da Baixada 105x78
Beira Rio 108x72
Engenhão 105x68
Independência 105x68
Olímpico 107x72
Pacaembu 110x75
São Januário 110x70
Vila Belmiro 106x70
(Fonte: Blog do Chico Maia)

b) Obtenha as medidas de diversas superfícies e verifique se o retângulo que determina cada uma é áureo, se aproxima do áureo ou é não áureo.

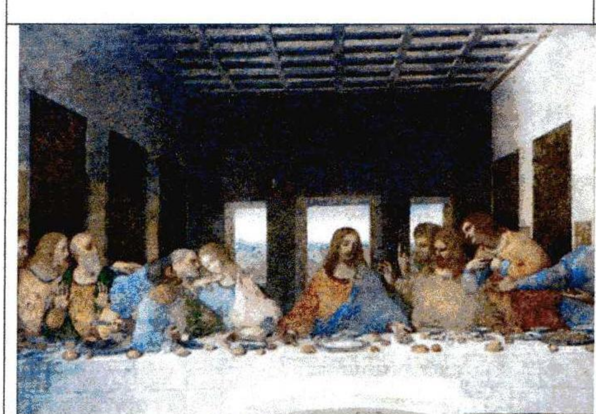
Superfície	Unidade de medida	Dimensões	Razão	Resultado

c) A seguir são apresentadas obras de alguns artistas. Verifique se o retângulo que a contém é áureo, aproxima do áureo ou não áureo.

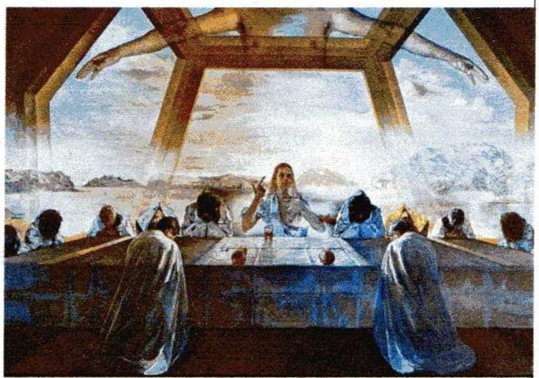
Café – 130 x 195
Candido Portinari – 1935



Detalhe de Noite Estrelada – 73,7 x 92,1
Van Gogh - 1889



A última ceia – 421 x 902
Leonardo Da Vinci



A ultima ceia - 166 x 267
Salvador Dali

Relatório da atividade 6: Retângulos áureos e não áureos

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 7: Construção do triângulo áureo e pentagrama

Objetivos:

Identificar o triângulo áureo e o pentagrama.

Construir o triângulo áureo.

Analisar a relação do triângulo áureo com o decágono e a razão áurea.

Construir o pentagrama.

Analisar a relação entre o pentagrama e a razão áurea

Recursos:

Papel, régua e transferidor.

Tempo previsto:

1 aula de 50 minutos

Descrição da atividade:

Os objetivos desta atividade eram: a) identificar o pentagrama e o triângulo áureo; b) construir o triângulo áureo e o pentagrama; c) analisar a relação do triângulo áureo inscrito no decágono com a razão áurea; d) analisar a relação do pentagrama com a razão áurea.

O professor relembrou com os alunos o vídeo *Donald no País da Matemágica* e, mais especificamente, a parte referente à aplicação do pentagrama, que era o símbolo dos pitagóricos. Após os comentários sobre o vídeo, os grupos se reuniram e promoveram outro debate, para saber um pouco mais sobre os pitagóricos e o pentagrama.

Em seguida, o pesquisador entregou aos grupos a folha de registro da atividade a ser realizada. Nela era solicitado que fossem construídos o triângulo áureo e o pentagrama.

A segunda tarefa solicitada aos grupos nesta atividade foi a construção de um triângulo áureo, com a orientação, passo a passo, do professor:

1º) construir uma circunferência usando o transferidor;

2º) dividir a circunferência em 10 partes iguais;

3º) desenhar um polígono cujos vértices seriam os pontos da divisão da circunferência;

4º) traçar as diagonais do polígono (decágono);

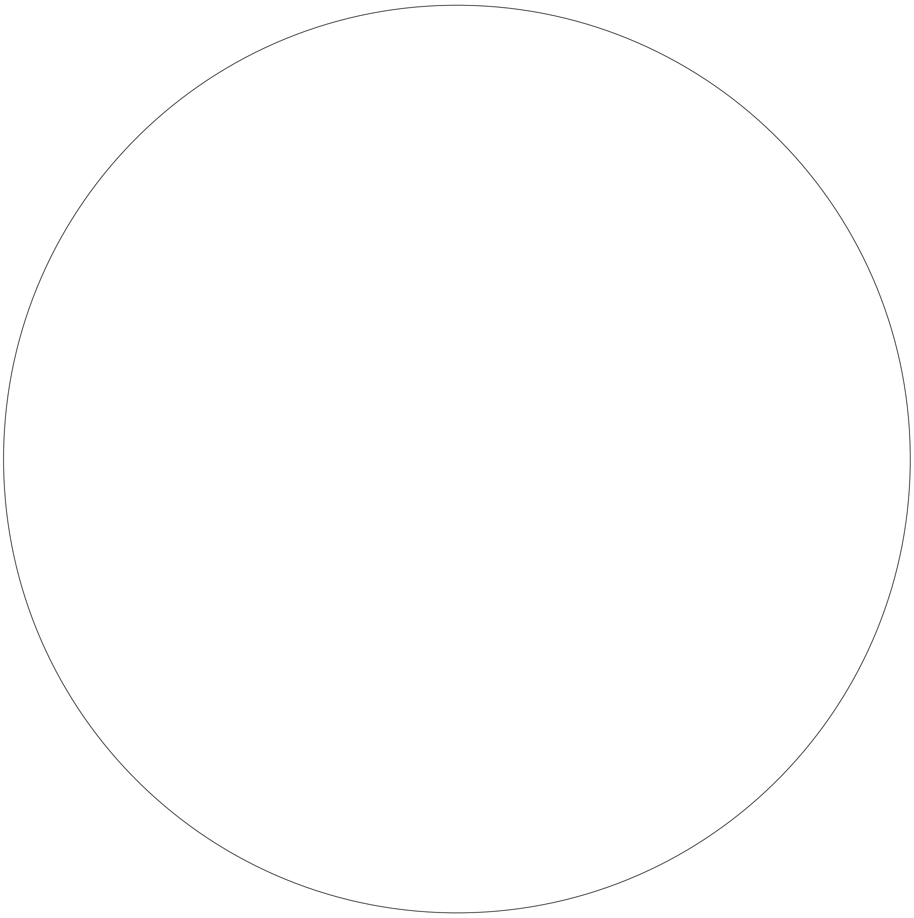
5º) escolher um dos triângulos formados;

6º) medir os lados do triângulo e calcular a razão entre o comprimento de um dos lados maiores pelo comprimento do lado menor.

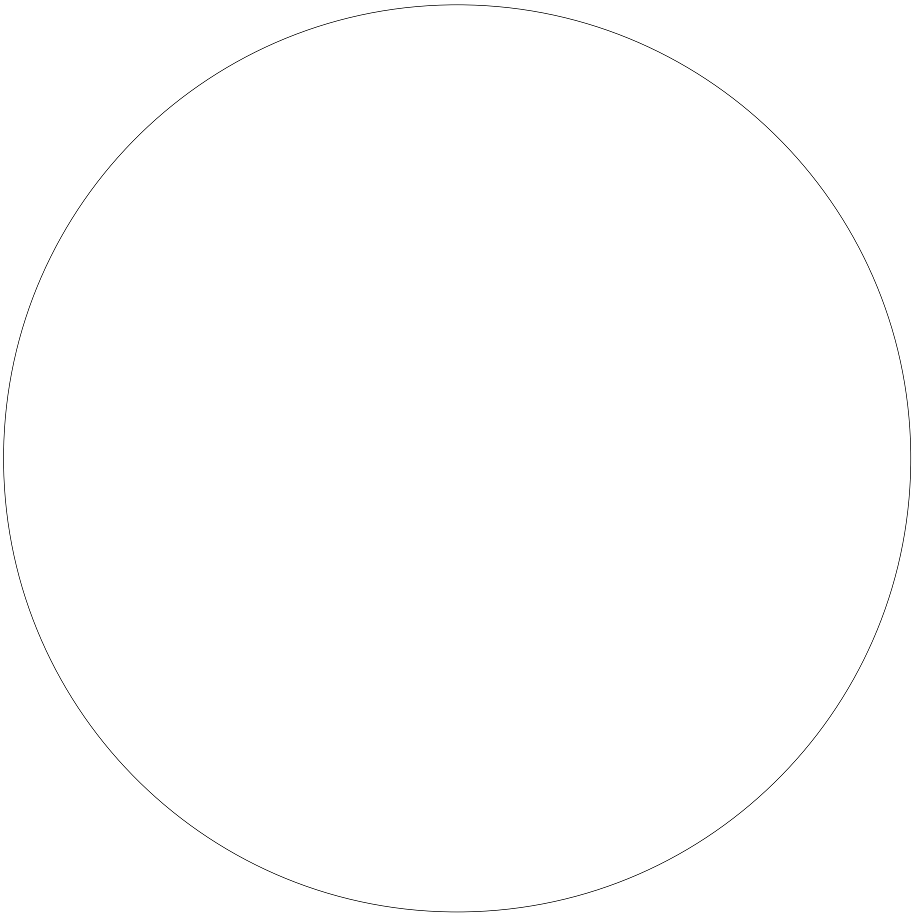
Atividade 7: Triângulo áureo e pentagrama
(Instruções)

Componentes:

a) Construir um pentagrama a partir de um pentágono e verificar as suas relações com a razão áurea.



b) Construir o triângulo áureo a partir do decágono e verificar suas relações com a razão áurea.



Relatório da atividade 7: Triângulo áureo e pentagrama

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 8: Novas aplicações da razão áurea

Objetivo:

Apresentar um personagem conhecido, pato Donald, aventurando-se a mostrar, em um vídeo, a razão áurea e suas aplicações.

Recursos:

Sala multimídia

Tempo previsto:

1 aula de cinquenta minutos

Descrição da atividade:

Os alunos foram levados para a sala multimídia onde assistiram novamente ao vídeo "*Donald no país da matemágica*". Logo após, eles participaram de um debate sobre os pitagóricos e o pentagrama. Em seguida, cada grupo elaborou um relatório sobre o debate.

Trata-se de uma atividade de complementação à anterior na qual o símbolo dos pitagóricos foi estudado, o pentagrama foi construído, as relações entre as medidas da figura foram calculadas e verificadas que se tratavam da razão áurea.

Relatório da atividade 8: Aplicações da razão áurea

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 9: Aplicações da razão áurea na arquitetura

Objetivo:

Identificar algumas aplicações da razão áurea na arquitetura.

Recursos:

Régua, desenhos de construções arquitetônicas.

Tempo previsto:

1 aula de 50 minutos

Descrição da atividade:

Reunidos em grupos, os alunos receberam fotografias ampliadas de construções arquitetônicas que são mostradas na folha de registro.

O professor fez um relato histórico sobre cada construção, chamando a atenção sobre sua localização, data da construção e de outros detalhes que ele julgava importante.

Usando uma régua, os grupos efetuaram medidas e identificaram a presença da razão áurea nas fotografias das construções analisadas.

Deve-se salientar que, em algumas fotos, não é possível obter o valor das, medidas, pois as fotos estão distorcidas em relação ao plano horizontal. Nesse caso, professor chamou a atenção sobre esse fato e, mais uma vez, mostrou aos alunos que a precisão das medidas interfere diretamente no cálculo da razão áurea.

Atividade 9: Aplicações da razão áurea na arquitetura
(Instruções)

Componentes:____

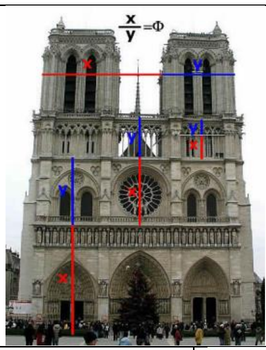
____

____

____

____

Utilizando a régua, encontre, se possível, as medidas dos retângulos e dos segmentos e verifique se estão em razão áurea.



Relatório da atividade 9: Aplicações da razão áurea na arquitetura

Componentes:____

____

____

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 10: Aplicações da razão áurea nas pinturas e na música

Objetivo:

Identificar algumas aplicações da razão áurea nas pinturas e na música.

Recursos:

Régua, fotografias de pinturas e instrumento de música.

Tempo previsto:

2 aulas de 50 minutos cada.

Descrição da atividade:

Reunidos em grupos, os alunos receberam fotografias de pinturas e de um violino. Usando uma régua, eles efetuaram as medidas, a fim de verificar a presença da razão áurea nas fotografias analisadas. Na folha de registro, os alunos receberam uma ampliação de cada fotografia apresentada na folha de registro.

Ao iniciar a atividade, o professor fez um relato histórico sobre cada obra, apresentando: o período em que ela foi feita; um breve estudo da obra ressaltando aspectos sobre conceitos matemáticos e históricos; o autor e sua relação entre a matemática e a arte.

Utilizando a régua, os grupos encontraram as medidas, x e y, dos retângulos que foram desenhados sobre cada obra e verificaram se a razão $\frac{x}{y}$ era a razão áurea.

Atividade 10: Aplicações da razão áurea nas pinturas e na música (Instruções)

Componentes:____

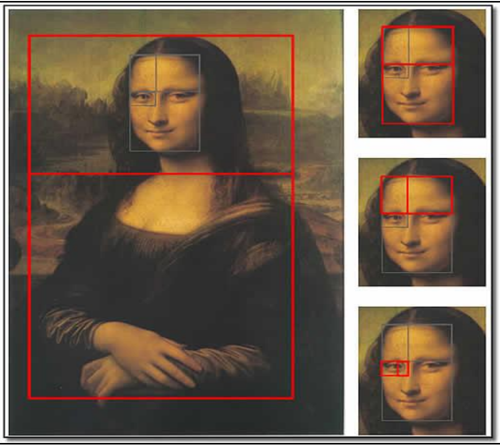
____

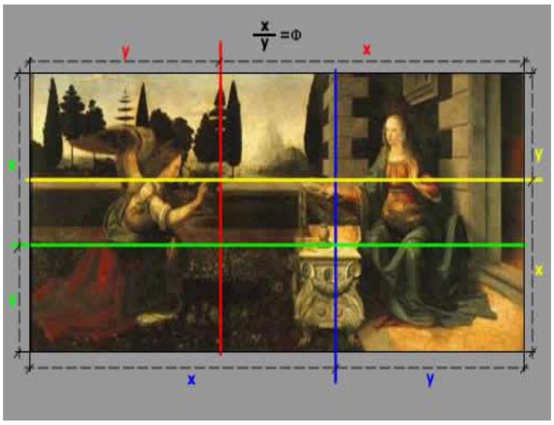
____

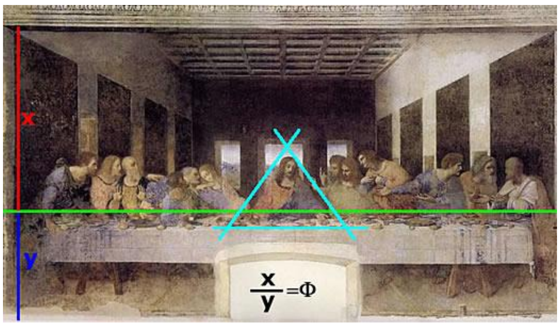
____

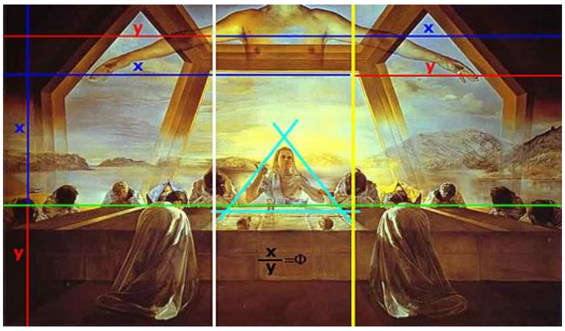
____

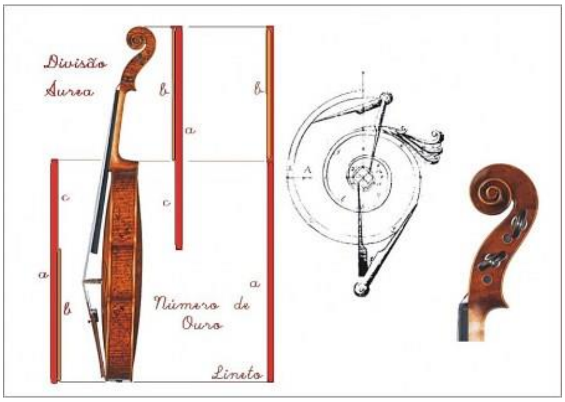
Utilizando a régua, determine o valor das medidas x e y em cada figura e verifique se estão em razão áurea.











Relatório da atividade 10: Aplicações da razão áurea nas pinturas e na música

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 11: Poliedros de Platão, suas propriedades e suas relações com a razão áurea

Objetivos:

Construir os poliedros de Platão a partir de suas planificações.

Identificar as propriedades dos poliedros de Platão.

Identificar as relações das propriedades com a razão áurea.

Recursos:

Planificação dos poliedros de Platão, lápis de cor, cola e régua.

Tempo previsto:

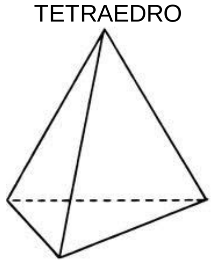
2 aulas de cinquenta minutos cada.

Descrição da atividade:

Inicialmente, os grupos receberam os poliedros de Platão na folha registro. Foi pedido que eles colorissem as faces de cada um e recortassem nas dobras. Em seguida, usando cola, eles montaram os poliedros.

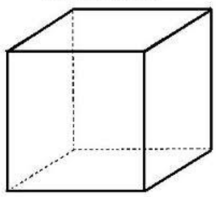
A seguir o professor apresentou aos alunos as propriedades dos poliedros de Platão relacionadas com a razão áurea.

TETRAEDRO



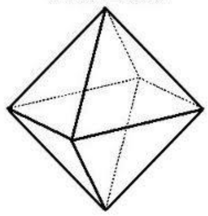
Possui 4 faces que são triângulos equiláteros.

HEXAEDRO



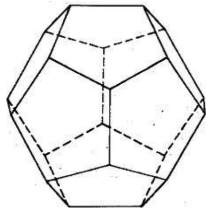
Possui 6 faces que são quadrados.

OCTAEDRO



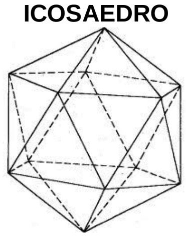
Possui 8 faces que são triângulos equiláteros.

DODECAEDRO



Possui 12 faces que são pentágonos regulares.

ICOSAEDRO



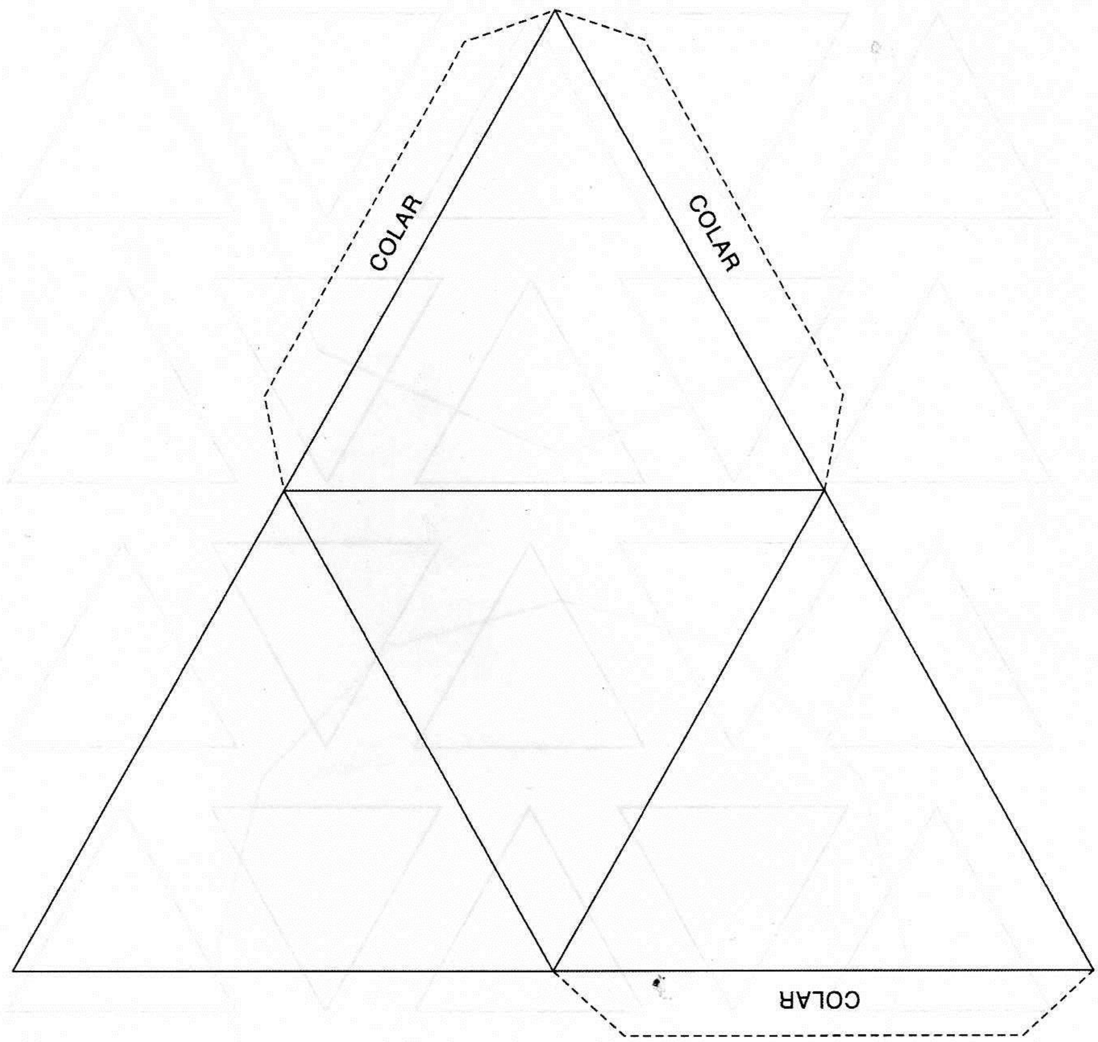
Possui 20 faces que são triângulos equiláteros.

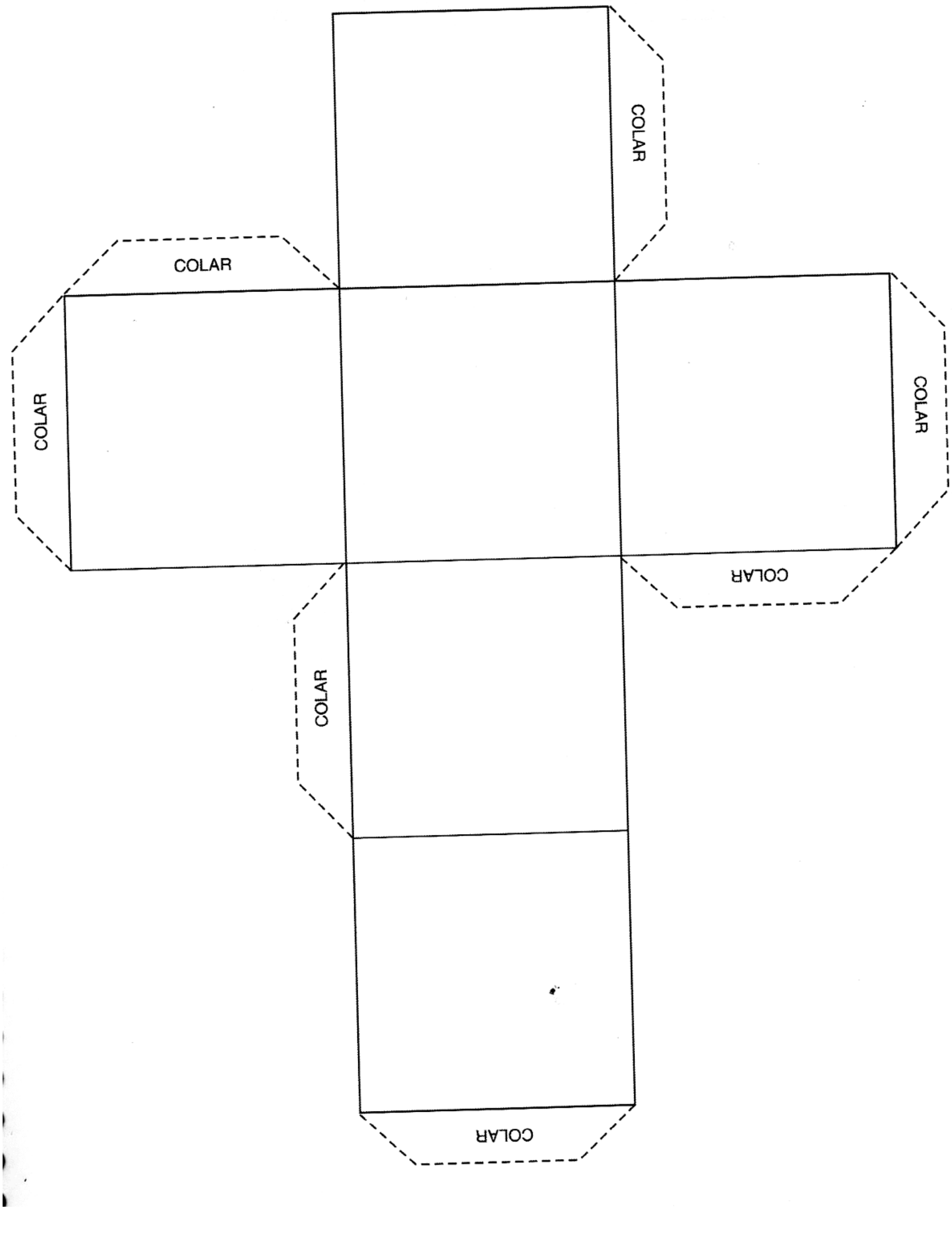
Atividade 11: Poliedros de Platão; suas propriedades e suas relações com a razão áurea

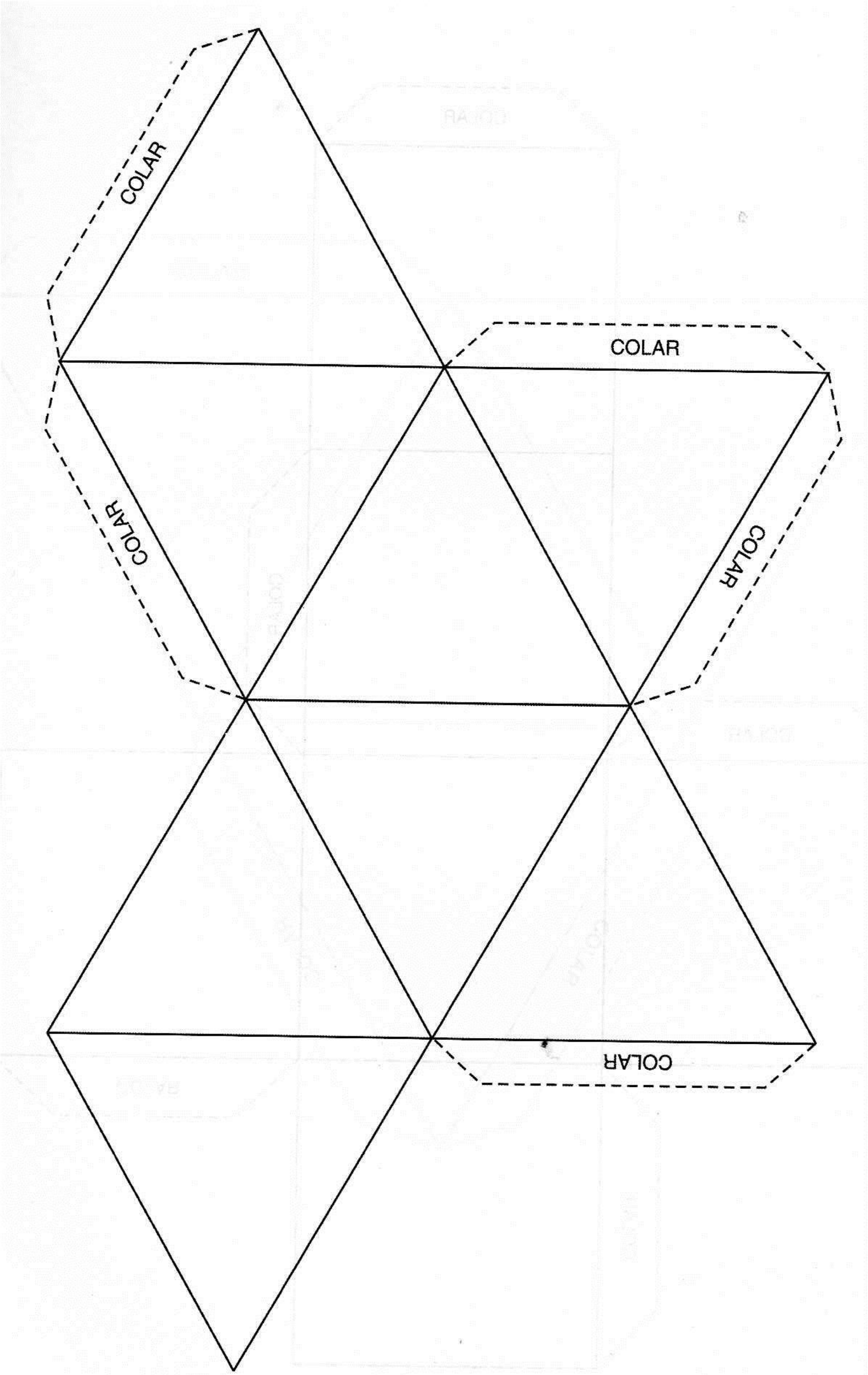
(Instruções)

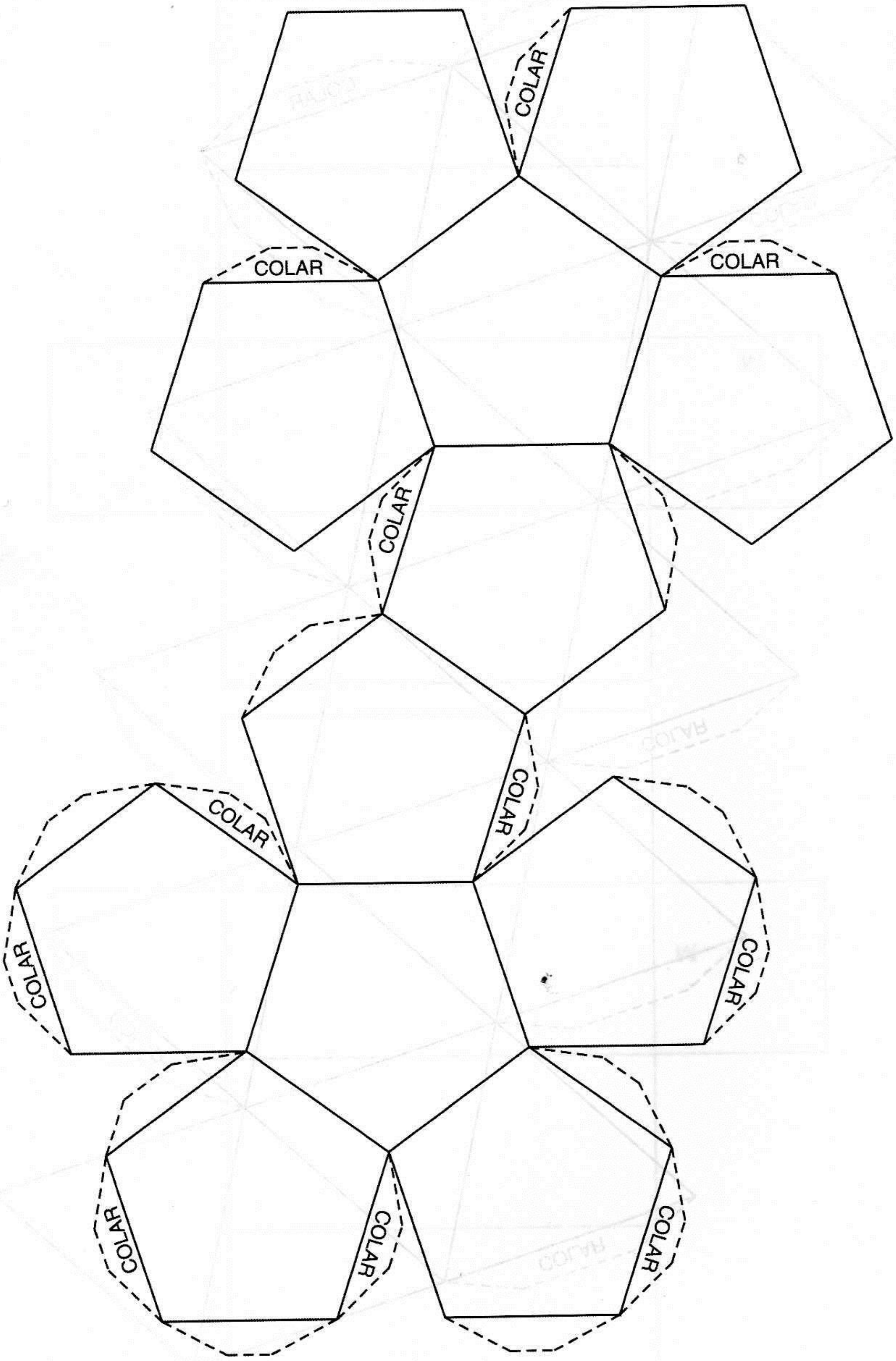
Componentes:____

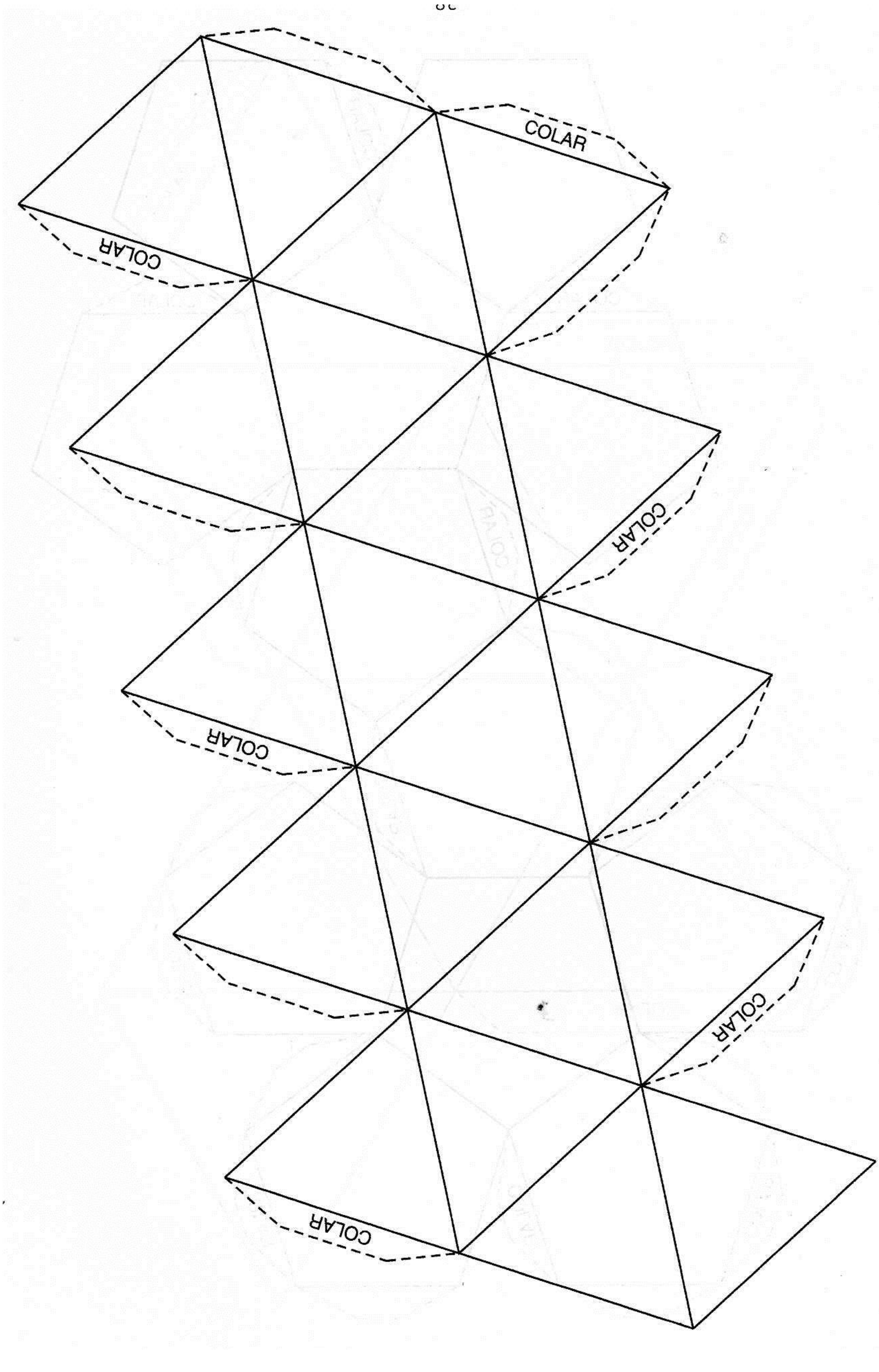
Use lápis de cor para colorir as planificações, recorte, dobre e cole formando os poliedros de Platão.


COLAR
COLAR
COLAR


COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR


COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR


COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR


COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR
COLAR

Relatório da atividade 11: Poliedros de Platão; suas propriedades e suas relações com a razão áurea

Componentes:

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 12: Razão áurea e fractais

Objetivos:

Reconhecer um fractal.

Identificar as relações de um fractal com a razão áurea.

Recursos:

Vídeo, desenhos, papel, régua e compasso.

Tempo previsto:

2 aulas de 50 minutos cada.

Descrição da atividade:

Inicialmente, foi exibido o vídeo sobre geometria fractal denominado *Arte e Matemática em Formas Naturais*[28] de Andrios Bemfica. Nele são apresentados diversos tipos de fractais: geométricos; na natureza; curiosos.

Durante a exibição do vídeo, o professor interrompeu a exibição algumas vezes para chamar a atenção em relação à proporcionalidade e salientar que os fractais eram cópias reduzidas à mesma razão do original. Ao final do vídeo, foi disponibilizado um tempo para que cada aluno pudesse apresentar suas impressões sobre o que havia acabado de ver.

Em seguida, os alunos formaram os mesmos grupos para construírem um fractal simples denominado triângulo de Sierspinky. Foi possível observar uma maior desinibição dos alunos e uma maior segurança em fazer a atividade, pois utilizavam a régua e o compasso com maior facilidade para efetuar as medidas e fazer as construções.

Inicialmente, foi solicitado aos grupos que construíssem na folha de registro um triângulo equilátero cujo lado media 16 cm. Depois, foi pedido que marcassem o ponto médio de cada lado. Usando os pontos médios encontrados, deveriam construir outro triângulo tendo esses pontos como vértices. Tal procedimento deveria ser aplicado sucessivamente, até obter um triângulo com lados medindo 2 cm.

A atividade transcorreu de forma agradável e tranquila. Ao final, foi proposto aos grupos que utilizassem lápis de cor para colorir os triângulos. Eles obtiverem figuras com diversos contrastes e puderam perceber que os triângulos pequenos

---

Disponível em: < www.professorandriosbemfica.blogspot.com.br>.Acesso em 22/8/2013 eram reduções do maior. Incentivados, eles conseguiram determinar a razão de redução. Também observaram que os triângulos maiores eram ampliações dos menores e obtiveram a razão de ampliação.

Atividade 12: Razão áurea e fractais
(Instruções)

Componentes:____

____

____

____

____

Construa um triângulo equilátero e a seguir um fractal simples, usando o segmento abaixo de comprimento igual a 16m.

Relatório da atividade 12: Construindo fractais

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 13: Proporcionalidade e Pirâmides de Gizeh

Objetivos:

Identificar as propriedades das pirâmides de Gizeh.

Montar uma pirâmide semelhante a uma das pirâmides de Gizeh, usando a planificação fornecida pelo professor.

Recursos:

Papel, cola e régua.

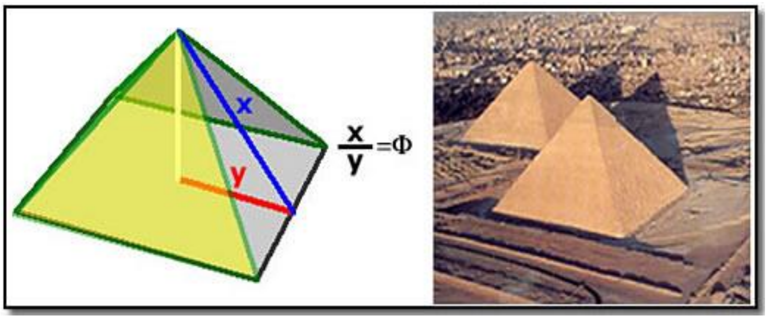
Tempo previsto:

2 aulas de cinquenta minutos cada.

Descrição da atividade:

Inicialmente, o professor fez um relato sobre quem eram os faraós, as pirâmides do Egito, como eram construídas e para que foram construídas. Ele destacou que elas consistiam em uma das sete maravilhas da Antiguidade e que as três mais importantes eram a Quéops, Quéfren e Miquerinos.

Os alunos, reunidos em grupo, coloriram a planificação da pirâmide. Em seguida, fizeram as dobras e montaram a pirâmide.



Realizaram medições na planificação usando a régua para identificar a presença da razão áurea na pirâmide construída, conforme ilustração.

Atividade 13: Proporcionalidade e Pirâmides de Gizeh
(Instruções)

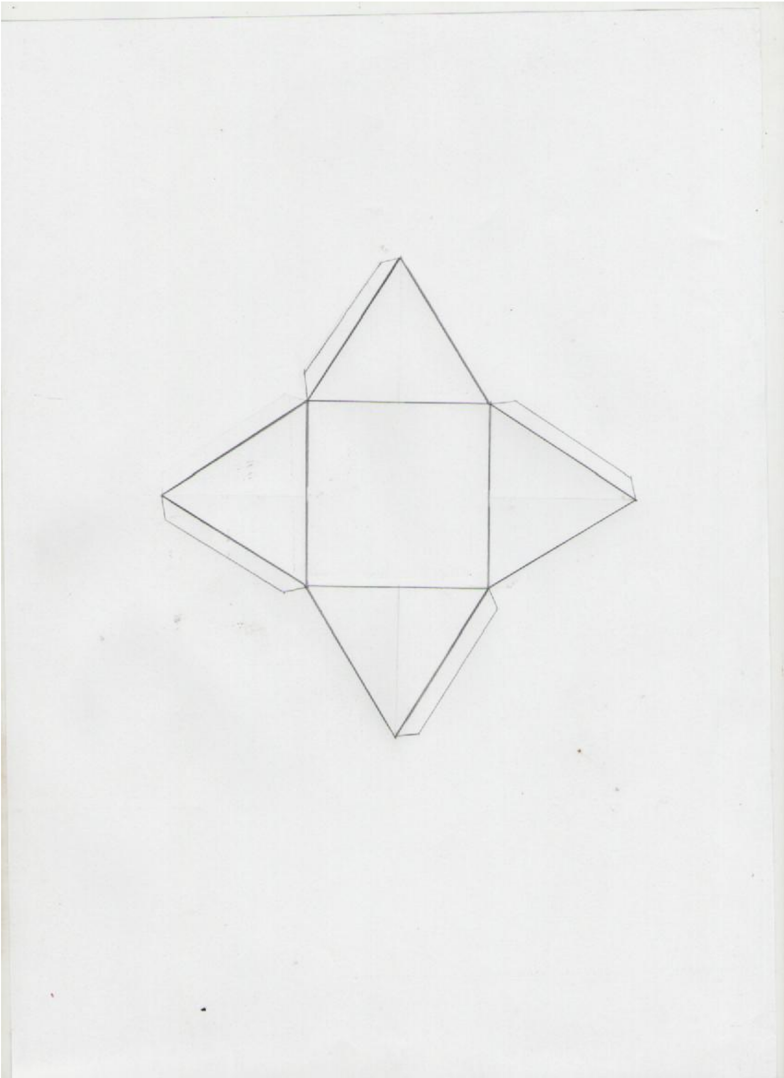
Componentes:____

____

____

____

____



Relatório da atividade 13: Proporcio*n*alidade e Pirâmides de Gizeh

Componentes:____

____

____

____

____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.

Atividade 14: Aplicações matemáticas envolvendo a razão áurea

Componentes:____

____

____

____

____

Verifique as aplicações matemáticas envolvendo a razão áurea.

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi + 1$$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}}}$$

$$\varphi = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}}}$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}$$

Em seguida, os grupos analisaram e discutiram a demonstração do cálculo da razão áurea (Fi), conforme apresentada no quadro seguinte.

Cálculo da razão áurea (Φ)

Calculando a razão extrema e média do segmento obteremos:

$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$

$x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Determinando as raízes da equação:

$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Desconsiderando a raiz negativa obtemos:

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Que resulta aproximadamente em:

$$\Phi = 1{,}618$$

Relatório da atividade 14: Aplicações matemáticas envolvendo a razão áurea (Instruções)

Componentes:____

Elabore um relatório sobre a atividade realizada. O grupo deve escrever sobre a aprendizagem, interesse, impressões, desenvolvimento da atividade e algo mais que julgar relevante.
