Márcia Nunes dos Santos

Marger da Conceição Ventura Viana

Teorema de Tales com atividades investigatórias e História da Matemática

Versão pré-publicação
Ouro Preto | 2013

O conhecimento, ao contrário, exige uma presença curiosa do sujeito em face do mundo. Requer sua ação transformadora sobre a realidade. Demanda uma busca constante. Implica em invenção e em reinvenção. Reclama reflexão crítica de cada um sobre o ato mesmo de conhecer, pelo qual se reconhece conhecendo e, ao reconhecer-se assim, percebe o “como” de seu conhecer e os condicionamentos a que está submetido seu ato.

(FREIRE, 1977, p. 27)

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Índice

Apresentação

Caro(a) Leitor(a)

Apresentamos a coleção Cadernos de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática. Nela, você encontrará livretos com propostas de ensino e de formação de professores.

Os Cadernos representam os esforços de professores de Matemática no sentido de buscar possibilidades alternativas de ensino dessa disciplina que tenham reflexos positivos sobre a aprendizagem. Todos os autores foram alunos ou são docentes do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto e as pesquisas que subsidiaram a elaboração das propostas apresentadas tiveram como foco a sala de aula da escola, a formação de professores e os processos de ensino e de aprendizagem em geral.

Esperamos que nos Cadernos você possa encontrar subsídios para o exercício da docência em Matemática e para reflexões sobre a prática docente.

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Caro (a) Professor (a):

Compartilhamos com você um material que é resultado de nossa pesquisa para elaboração da dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

O nosso objetivo principal foi apresentar a contribuição de desenvolver em sala de aula atividades investigatórias que utilizam a História da Matemática como desencadeadora no processo de ensino-aprendizagem sobre o Teorema de Tales, porém, devidamente adaptados, podem ser aproveitados outros conteúdos.

A pesquisa foi realizada em uma escola da rede municipal de ensino de Ouro Preto, Minas Gerais, localizada em um distrito, com alunos do 9.º Ano do Ensino Fundamental, adolescentes com idade de 15 a 17 anos, portanto fora da faixa etária ideal, marcados por desobediência aos professores, resistência em fazer as atividades em sala de aula e em casa, rebeldia, violência verbal e até corporal com os colegas.

Por isso, foi necessário um cuidado especial para gerar um ambiente de estímulo à participação, interação, motivação, cooperação e, sobretudo, de respeito entre os alunos, devido às suas peculiaridades. Em resumo, foi necessário haver sintonia do professor com os alunos e destes entre si. Além disso, era imprescindível conseguir que a classe tivesse um comportamento adequado, principalmente porque foram programadas atividades investigatórias a serem realizadas fora da sala de aula e em grupos, que atingiram seus objetivos.

Vale destacar que as atividades investigatórias realizadas foram aquelas que o perfil dos alunos possibilitou. Portanto, de acordo com o contexto escolar, atividades investigatórias mais aprofundadas podem e devem ser elaboradas e realizadas. Certamente melhores condições possibilitarão melhores resultados.

Abraços

Professora Márcia Nunes

Introdução

Durante cinco anos de magistério tivemos a oportunidade de lecionar para as séries finais Ensino Fundamental (2007-2012), para o Ensino Médio (2008, 2010, 2012), para a Educação de Jovens e Adultos (2012), para o Ensino Superior (2008, 2011), incluída a Educação a Distância, na Especialização Mídias na Educação (2008-2010) e na Licenciatura em Matemática (2007-2012).

Embora a nossa experiência como educadora matemática não seja extensa (2007-2012), as turmas com as quais trabalhamos nos fizeram refletir sobre o que vem a ser o processo de ensino-aprendizagem e o que pode ser proposto a fim de promovê-lo. Consideramos que se trata de um processo que acontece de forma conjunta na relação de cooperação e interação entre professor e aluno e entre aluno e aluno. Segundo Marger da Conceição Ventura Viana Viana (2002), ele é essencialmente social, ativo, consciente, comunicativo, motivador, significativo, individual e cooperativo. Além disso, deve ocorrer em pequenos grupos para oportunizar a cooperação e o trabalho conjunto dos alunos.

Nossas reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática foram motivadas pela Licenciatura em Matemática, pela Especialização em Educação Matemática e pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática, em que se discutiram possibilidades da utilização da História da Matemática. Foi a realização de certas leituras que nos levaram a pesquisar sobre as contribuições da História da Matemática ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Procurando saber quais atividades promover com os alunos, chegamos aos livros de Iran Abreu Mendes (2008), que propõe ao professor inserir nas aulas atividades que tenham uma dinâmica investigatória e características manipulativas, extraídas e adaptadas da História da Matemática, a fim de que eles participem e compreendam o processo de formalização do conteúdo apresentado. Assim, optamos por programar atividades investigatórias do tipo sugerido por Mendes (2009a), utilizando a História da Matemática. Para possibilitar e promover a cooperação entre os participantes, as atividades foram realizadas em pequenos grupos.

Mas, pelo perfil desses alunos, foi indispensável realizar inicialmente atividades que visavam ao estabelecimento de atitudes necessárias à realização dos trabalhos propostos, extraclasse, com a participação voluntária, fora do horário escolar. Tais atividades foram passeios promovidos por nós, na situação de professora-pesquisadora, com autorização dos pais dos alunos voluntários, no próprio distrito onde está localizada a escola, durante quatro finais de semana.

O objetivo dessas atividades, portanto, foi criar vínculos de amizade entre os alunos, principalmente aqueles considerados mais rebeldes. O pretexto foi que os alunos mostrassem a variedade de recursos naturais do distrito, com a ida à Serra do Catete e a uma cachoeira. Os resultados foram suficientes para permitir a realização da pesquisa (desenvolvimento das atividades), porque se conseguiu certa camaradagem entre os alunos para a realização de trabalhos em grupos e ao ar livre. Essa interação foi importante, pois praticamente aboliu a agressividade verbal e o desinteresse anteriormente existentes entre os participantes: durante todos os encontros realizados para a pesquisa eles interagiram entre si, trocaram ideias cooperando entre si, na busca de soluções para as questões propostas.

Por outro lado, sendo significativo conhecer que conceitos básicos de Geometria e História da Matemática possuíam os participantes e o que pensavam sobre as aulas de Matemática, foi elaborado um questionário com perguntas que abrangiam essas questões e que foi respondido por eles.

Assim, partindo das leituras que fundamentaram esta pesquisa e da análise das respostas dadas ao questionário pelos alunos, foi possível elaborar atividades adequadas. Vale dizer que nas primeiras atividades a História da Matemática foi utilizada de modo explícito, como elemento desencadeador e motivador para o processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Tales.

Sugerimos que o (a) leitor(a) faça primeiro a leitura do referencial teórico para, em seguida, conhecer as atividades investigatórias realizadas na pesquisa.

Lembramos que há dúvidas quanto ao nascimento, vida e obra do matemático grego Tales de Mileto. No entanto, o importante são registros que elucidam suas contribuições à Geometria. Por exemplo, o primeiro a anunciar Tales e suas descobertas foi Heródoto por meio da sua obra escrita por volta de 440 a.C., mais de 100 anos após a morte de Tales. Depois disso, cronologicamente, Tales foi mencionado por Aristóteles (384-322 a.C), nos escritos de Metafísica, e por Proclus (420-485 d.C.).

Contudo, não é objetivo discutir o que está exposto em vários livros de História da Matemática. Assim, para nos fundamentar, consideramos como referência Fernando de Almeida e Vasconcellos (1919), Hélio Cyrino (2006), Florian Cajori (2007), Maria Elisa Esteves Lopes Galvão (2008) e Gilberto Geraldo Garbi (2009), para sustentar informações presentes nesta pesquisa.

1.Origens históricas do Teorema de Tales

O objetivo desta seção é apresentar, brevemente, as duas culturas que fizeram parte do contexto social do matemático Tales de Mileto, isto é, Egito e Grécia.

Concentrado ao longo do curso inferior do Rio Nilo, o Egito tinha características de um povo essencialmente prático, utilitário, criativo e dedicado ao trabalho artesanal, realizando criações com barro, pedra lavrada e cobre (GALVÃO, 2008). A Matemática desenvolvida pelos egípcios estava diretamente relacionada à medição de terras agricultáveis e técnicas agrícolas, principalmente após as cheias do Rio Nilo. Assim, a preocupação era criar ferramentas matemáticas suficientes para resolver seus problemas. Tais preocupações os levaram a desenvolver e aprimorar os cálculos para medidas da terra, ficando conhecido como a “geo-metria”, desenvolvida de maneira intuitiva.

Alguns historiadores da Matemática afirmam que a ênfase dada aos problemas de natureza prática limitou o desenvolvimento matemático dos egípcios, no sentido de generalização, abstração e demonstração. Diz Galvão (2008):

> A matemática egípcia era fortemente fundamentada nos processos práticos relacionados às necessidades do dia a dia (...). Não há evidências de que tiveram preocupação com processos gerais ou dedutivos, e somente a prática levou aos resultados que chegaram até nós (GALVÃO, 2008, p. 91).

Todavia foi essa Matemática considerada prática e utilitária que despertou interesse em outras civilizações, como a ousada engenharia utilizada na construção das pirâmides. Dentre elas, destaca-se a pirâmide de Quéops (ou a Grande Pirâmide de Giza), a única das Sete Maravilhas do mundo antigo existente.

Quanto à organização social, o Egito tinha uma sucessão de soberanos denominada dinastia e durante algum tempo não se envolveu em outras civilizações. Porém, em meados do século VII a.C., houve uma abertura comercial favorável ao intercâmbio comercial e intelectual que ligou o Egito com outros povos. Assim, comerciantes e sábios homens gregos intensificaram relações com os egípcios. Iniciou-se o intercâmbio entre a Grécia e o Egito, que não se limitou a mercadorias, alcançando pensamentos e ideias. Esse fato aproximou alguns gregos desejosos de expandir seus conhecimentos, como foi o caso de Tales, Pitágoras, Cenópides, Platão, Demócrito, Eudoxo, que na época tiveram o privilégio de aprender diretamente com alguns sábios egípcios diversas ciências (CAJORI, 2007).

E foi no cenário grego que Tales de Mileto se destacou, podendo-se afirmar: “a Matemática pôde alcançar gosto e interesse entre homens com imaginação e conhecimento científico, dentre eles, o destaque é para Tales, considerado um dos sete sábios da Grécia Arcaica, nascido em Mileto” (EVES, 2004, p.94). Tales foi assim conceituado porque, na Grécia, “era considerado sábio aquele que fosse capaz de apresentar uma explicação teórica sobre o Universo, e de assumir, também, uma atitude elevada da vida” (CYRINO, 2006, p. 32).
Segundo Cajori (2007), Tales nasceu por volta do ano de 640 a.C., na cidade de Mileto, e faleceu com pouco mais de 90 anos. A última data foi determinada com base no eclipse solar ocorrido em 28 de maio de 585 a.C., acontecimento que o próprio Tales previu e que assombrou seus contemporâneos (CYRINO, 2006).

Segundo Vasconcellos (1919, p.149), Tales foi “o primeiro matemático grego em ordem cronológica” e suas descobertas deram início a uma Matemática mais formal e rigorosa. Podem ser consideradas como suas contribuições:

a) “Qualquer ângulo inscrito em um semicírculo é reto” (GARBI, 2009, p. 23).
b) “Quando duas rectas se cortam, os ângulos opostos pelo vértice são iguais” (VASCONCELLOS, 1919, p. 151).
c) “Um círculo é bissectado pelo seu diâmetro” (HARUNA, 2009, p. 20).
d) “Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais” (GARBI, 2009, p. 23).
e) “Dois triângulos que tenham um lado e os ângulos a ele adjacentes respectivamente iguais são iguais” (GARBI, 2009, p. 24).
f) “Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 98).

Dessas contribuições matemáticas atribuídas a Tales, a última tornou-se conhecida como Teorema de Tales, um dos teoremas fundamentais da Geometria Elementar (PEREIRA, 2005).

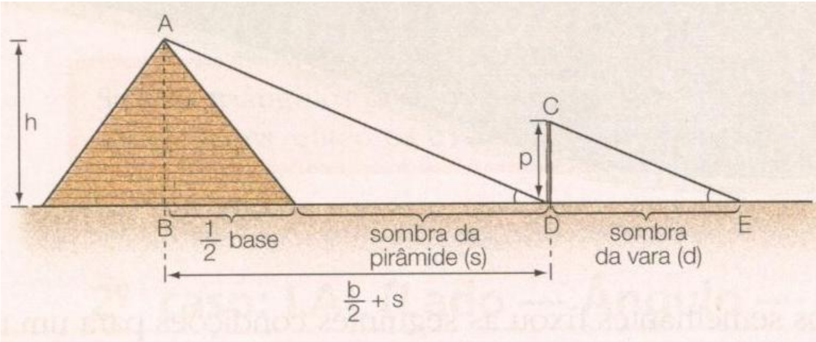
Segundo Howard Eves (2004), uma origem ou motivação para o Teorema de Tales foi o próprio cálculo utilizado para a medição da altura da pirâmide de Quéops. Para fazê-la, Tales observou a pirâmide e lançou mão de alguns conceitos matemáticos conhecidos, como semelhança de triângulos, razão e proporção. Na análise de como aconteceu essa medição, considera-se que Tales recorreu à projeção da sombra da pirâmide. Provavelmente observou objetos de altura menor e foi analisando o momento em que a sombra do objeto era igual à altura. Essa hipótese, citada por Hierônimos, discípulo de Aristóteles, é a mais simples que se pode fazer: "O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava" (EVES, 2004, p. 115).

Outra suposição de como Tales determinou a altura da pirâmide seria analisar a altura e a sombra projetada por um objeto de comprimento conhecido, como uma vara, um bastão ou ele próprio. Nesse caso, Tales teria escrito a razão entre as medidas do comprimento do objeto e da sombra projetada e, imediatamente, registrado o comprimento da sombra projetada pela pirâmide e relacionado com a altura desconhecida da pirâmide. Como a ideia de proporcionalidade era conhecida por Tales, podia desenvolver corretamente os cálculos necessários. Quanto a essa hipótese, tem-se uma afirmação dada por Plutarco:

> ... gostou da tua maneira de medir a pirâmide limitando-se a colocar o bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio tangente dois triângulos, demonstraste que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão. Mas também te acusaram de não gostares de reis (SERRES, 1997, p. 167; apud HARUNA, 2000, p. 7).

Por essa hipótese, Tales também observou que uma parte da sombra se escondia no interior da base da pirâmide, pois, segundo Garbi (2009), a pirâmide de Quéops possui "base quadrada com aproximadamente 230 metros de lado" (GARBI, 2009, p. 8). Realizando essas observações, Tales verificou que deveria somar o comprimento da sombra da pirâmide e a metade da medida da base da pirâmide. Considerou também que as sombras projetadas eram relativamente de medidas comuns e os raios solares paralelos. A Figura 1, a seguir, mostra como, possivelmente, essa situação foi analisada.

Figura 1- Modelo da resolução de Tales na medição da altura da Pirâmide de Quéops



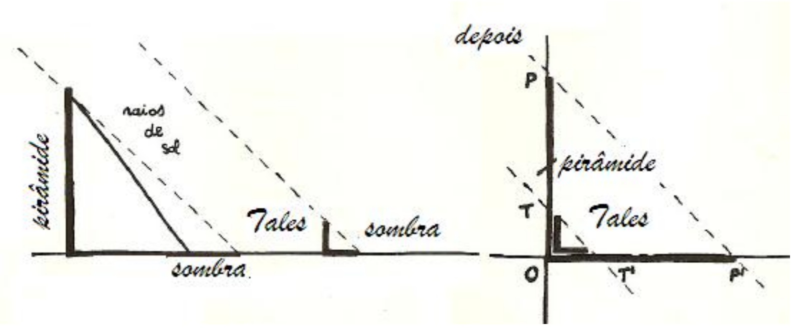
Fonte: Iezzi; Dolce; Machado, 2009, p. 117

Porém havia um detalhe a ser considerado: como saber que a altura da pirâmide, os raios solares e a base dessas figuras formariam triângulos semelhantes? A resposta estava baseada no conhecimento prévio:

> o monumento em questão [pirâmide] fora construído de maneira que uma das faces fosse voltada para o sul. Por isso concluiu-se que a sombra seria perpendicular no momento em que o Sol estivesse em seu ponto mais "alto", o qual se encontra na direção da vertical ascendente ao ponto de observação. Em outras palavras, ao meio-dia (SANTOS, 2010, p. 64).

A partir desse conhecimento, Tales conseguiu calcular a altura da pirâmide, o que, segundo Eves (2004), foi responsável para o desenvolvimento do que se conhece atualmente por Teorema de Tales. Uma suposição para esse cálculo é apresentada na Figura 2, a seguir, conforme esquema de Guedj (1999 apud SANTOS, 2010, p. 65).

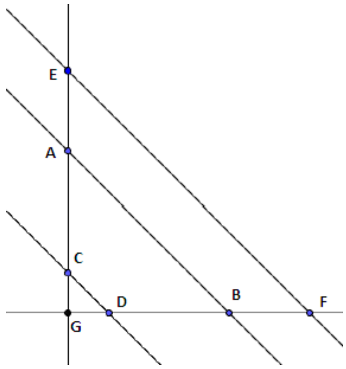
Figura 2 - Esquema para o cálculo da altura da pirâmide.



Fonte: Guedj (1999 apud Santos (2010, p. 65).

Refazendo o esquema somente com feixe de retas, pode-se visualizar a situação pela Figura 3, a seguir.

Figura 3 - Representação dos raios solares e das sombras do objeto e da pirâmide



Fonte: Santos (2010, p. 65)

De acordo com a Figura 3, os segmentos de retas $\overline{CD}, \overline{AB}$ e $\overline{EF}$ são paralelos (representados pelos raios solares); os segmentos $\overline{CG}$ e $\overline{AG}$ são as alturas de Tales e da pirâmide, respectivamente, e os segmentos $\overline{GD}$ e $\overline{GB}$ são as sombras projetadas por Tales e pela pirâmide, respectivamente.

Assim, talvez essa tenha sido a motivação que Eves (2004) havia mencionado para o surgimento do Teorema de Tales. Uma possível generalização pode ser compreendida pela proporção $\frac{GC}{GE} = \frac{GD}{GF}$, que, para os gregos, estava diretamente relacionado à ideia de subtração mútua:

> aparentemente os gregos usaram a idéia de que quatro quantidades estão em proporção a:b = c:d, se as duas razões a:b e c:d têm a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes, e assim por diante (BOYER, 1998, p. 61).

Essa ideia de proporcionalidade era valorizada pelos gregos e pode ser compreendida da seguinte maneira: sendo a razão a:b, na qual a grandeza a é um múltiplo da grandeza b, por exemplo, a = 6 e b = 3, então b caberia exatamente duas vezes em a; a outra razão c:d seria igual a a:b se apresentasse a mesma propriedade, ou seja, se d coubesse também duas vezes em c. Portanto, após subtrair duas vezes b de a ou d de c, os restos, em cada caso, seriam iguais a zero. Esse era o conceito de proporção para os gregos.

A dificuldade se revelava quando a divisão não era exata. Isso porque o trabalho dos gregos concentrava-se na razão entre dois números inteiros, ou seja, casos em que os segmentos (grandezas) eram comensuráveis. Porém era inevitável o surgimento de grandezas incomensuráveis, fato que motivou a chamada “crise dos incomensuráveis”.

Além disso, a incomensurabilidade não impossibilitou que matemáticos gregos se empenhassem e contornassem a desagradável situação que a noção de grandezas incomensuráveis havia lançado. Esse transtorno foi satisfatoriamente solucionado com a descoberta da Teoria das Proporções de Eudoxo de Cnido (408 a.C.-355 a.C.), encontrada no Livro V de *Os Elementos*, de Euclides (PEREIRA, 2005). Diversas questões matemáticas foram retomadas e solucionadas, porque envolviam grandezas incomensuráveis, que eram desconsiderados até o momento.

Segundo pesquisa realizada por Henry Plane (1995 apud Haruna, 2000), o registro do Teorema de Tales em livros é algo relativamente contemporâneo. O primeiro enunciado “só surgiu na França no final do século XIX e meados do século XX, e não foi encontrado nos livros mais famosos” (HARUNA, 2000, p.10). Somente a partir da segunda metade do século XX “surgiu uma variedade de enunciados referentes ao teorema de Thales e este passa então a ser citado nos programas franceses” (HARUNA, 2000, p. 12). Pereira (2005) mostra a variação do enunciado do Teorema de Tales em três países europeus, conforme ilustra o Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Enunciado do Teorema de Tales na Itália, Alemanha e Espanha.

País	Enunciado do Teorema de Tales
Itália	Os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais.
Alemanha	Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo.[1]
Espanha	Se cortamos duas retas quaisquer por várias retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados em ambas, são proporcionais

Fonte: Pereira (2005, p. 30).

No Brasil, o surgimento do Teorema de Tales com o enunciado adotado nesta pesquisa aconteceu somente na segunda metade do século XX, havendo variações. Afirma Pereira (2005):

> o aparecimento do nome teorema de Thales relacionado ao teorema da Proporcionalidade surgiu na metade do século XX, principalmente nos livros-texto que caracterizaram o Movimento da Matemática Moderna, como o livro do autor Osvaldo Sangiorgi. A partir desse movimento começou a surgir uma variedade de enunciados referentes ao teorema de Thales (PEREIRA, 2005, p. 29).

[1] Na Alemanha, o Teorema de Tales é conhecido como “Teorema dos Segmentos Proporcionais”. Ele faz menção ao triângulo inscrito numa semicircunferência (SANTOS, 2010, p.66).
.

Ainda segundo Pereira (2005), autores que antecederam essa época já haviam se referido ao Teorema de Tales, mas para associá-lo ao conteúdo de semelhança de triângulos.

As contribuições geométricas de Tales influenciaram outras civilizações e motivaram novas contribuições ao desenvolvimento da Matemática, conforme afirma Garbi (2009):

> Uma pessoa como Tales certamente estava destinada a exercer marcante influência sobre outras, a despertar interesse e a motivar talentos a sua volta. Diversos filósofos floresceram em Mileto a partir dele (...). Mesmo após a morte, seu nome e a sua fama continuaram a espalhar-se por toda a Grécia antiga e, tanto hoje quanto nos séculos futuros, a Humanidade deverá sempre render-lhe o merecido tributo (GARBI, 2009, p. 24).

É verdade que o estudo do Teorema de Tales persiste na Educação Básica, sinal de que realmente permanece importante. Nesta pesquisa, o foco não é contar história, mas fazer com que ela motive e desencadeie o processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Tales, partindo da própria motivação que Tales supostamente teve.

1. Referencial Teórico

Fundamentamos esta pesquisa em três pilares teóricos: uma visão do processo de ensino-aprendizagem, as contribuições da História da Matemática na sala de aula e atividades investigatórias.

2.1 Considerações sobre o processo de ensino-aprendizagem

Nesta pesquisa o processo de ensino-aprendizagem é considerado indissociável de uma relação de cooperação entre alunos e professor, conforme mostra Viana (2002):

> Do enfoque histórico-cultural e de sua concepção de aprendizagem se deduz a importância que deve ser dada à atividade conjunta, da relação de cooperação dos alunos entre si e com o professor. Esta concepção muda a relação tradicional de autoridade e distância existente entre os participantes do processo. Já não se pode conceber isoladamente um professor que ensina e um aluno que aprende. O processo de ensino aprendizagem é algo que realmente não se pode separar (VIANA[2], 2002, p. 75; tradução nossa).

Logo não há separação no processo de ensino-aprendizagem, como afirma Labarrere Sarduy (1997, apud VIANA, 2004, p. 14): "Somos proclives a considerar los procesos de la enseñanza y aprendizaje como complejas redes de interacciones entre el profesor y el alumno, a partir de una asimetría natural, aunque por lo común exagerada."

2 Del enfoque Histórico-Cultural y de su concepción de aprendizaje se deduce la importancia que debe ser dada a la actividad conjunta, a la relación de coperación de los alumnos entre si y con el profesor. Esta concepción cambia la relación tradicional de autoridad y distancia existente entre los participantes Del proceso. Ya no se puede concebir aisladamente un profesor que enseña y un alumno que aprende. El proceso de enseñanza/aprendizaje ES algo que realmente no se puede separar (VIANA, 2002, p.75).

De fato, embora possa haver alguém que diga “ensinei, mas os alunos não aprenderam”, torna-se necessário reavaliar essa prática. É importante que o resultado do ensino seja a aprendizagem. Mesmo existindo pessoa autodidata, há interação entre o que aprende e o objeto de aprendizagem. É o que ocorre na Educação a Distância (EAD): não há aulas tradicionais, mas o aluno pode aprender, porque entra em interação com os objetos de aprendizagem e outros materiais disponibilizados, com a avaliação contínua e a autoavaliação.

Segundo Viana (2004), como foi dito, o processo de ensino-aprendizagem assume caráter social, ativo, consciente, comunicativo, motivante, significativo, individual e cooperativo. Quanto às formas organizativas do processo, deve ocorrer em pequenos grupos, pois é necessário haver oportunidade para exercitar a cooperação e o trabalho conjunto dos alunos (VIANA, 2004). Nesse sentido, a cooperação exige troca de ideias, exposição de opiniões, questionamentos a respeito do caminho mais adequado para solucionar a situação e compreensão dos conteúdos. Portanto há o desenvolvimento de capacidades, especialmente quando o professor assume o papel de orientador do processo.

Desse modo, o processo de ensino-aprendizagem coloca no centro de atenção o sujeito ativo, consciente, orientado para a interação com outros sujeitos, isto é, o professor e os alunos, e suas ações com o objeto, com a utilização de diversos meios em condições sócio-históricas determinadas (VIANA, 2004).

Corroborando essas ideias, Mendes (2005) afirma que aspectos históricos podem ser incorporados às atividades que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, pois podem ser úteis à explicação de porquês e oferecer aos alunos conhecer etapas da construção do pensamento matemático e ao professor, problematizar a ação pedagógica no sentido de se criarem estratégias apropriadas para processo de ensino-aprendizagem da Matemática, apresentando-a como uma ciência em construção.

Nesta pesquisa, nós nos preocupamos em apresentar, resumidamente, origens históricas que justificassem a concepção do Teorema de Tales, sem exigir que as atividades investigatórias propostas fossem, em sua totalidade, históricas. Pelo contrário, a História da Matemática foi um elemento desencadeador da situação problemática a ser investigada por meio de atividades que propiciassem ao professor uma dinâmica experimental investigatória e aos alunos a compreensão do movimento cognitivo estabelecido pelos homens no seu contexto sociocultural e sócio-histórico (MENDES, 2008).

Feitas essas considerações favoráveis à inserção da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, apresentamos possíveis contribuições desta área do conhecimento na sala de aula.

2.2 Papel motivacional da História da Matemática na sala de aula

A História da Matemática foi utilizada como um recurso, uma ferramenta, isto é, um meio de auxiliar os alunos no processo de ensino-aprendizagem. A utilização pode ser implícita, no caso de não haver menção direta. No caso, ela é empregada para que se compreendam dificuldades dos alunos, por conhecer as dificuldades pelas quais passaram os matemáticos na solução, descoberta ou construção de conceitos. E explícita, quando a História da Matemática é mencionada de modo direto, como neste pesquisa.

Também motivou a inserção da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem o desejo de desenvolver a autonomia dos alunos. Partimos da hipótese de que, se eles conhecessem as necessidades e as dificuldades encontradas pelos matemáticos para criar e formalizar os conceitos matemáticos, seria possível romper a ideia de que a Matemática não tem sentido, é apartada da realidade e de outras áreas do conhecimento. E, além disso, está pronta e acabada e é de difícil compreensão. Com isso conseguiríamos desmistificá-la.

Segundo Mendes (2006), “a matemática deve ser acessível a todos, à medida que as atividades matemáticas educativas desenvolvidas dentro da escola ou fora dela se mostrem de forma clara, simples e sem mistérios, buscando sempre o crescimento integral da sociedade humana” (MENDES, 2006, p. 92).

Além disso, uma possível contribuição da História da Matemática é a questão motivacional. Segundo Mendes (2006), a motivação atribuída às informações históricas está diretamente relacionada às atividades programadas pelo professor:

> A história como uma fonte de motivação para a aprendizagem da matemática é considerada imprescindível para que as atividades de sala de aula se tornem atraentes e despertem o interesse dos estudantes para a matemática. O caráter motivador deve estar presente também nas atividades contidas nos livros didáticos, devendo configurar-se concretamente na ação docente (MENDES, 2006, p. 91).

E Mendes (2006) completa:

> É necessário, porém, que a escola inicie, mesmo com certo atraso, o desenvolvimento de uma prática docente centrada no uso de atividades voltadas ao ensino de matemática que tenha como fio condutor a investigação dos aspectos históricos de cada tópico a ser aprendido, buscando sempre estabelecer uma aproximação sociocultural da matemática, principalmente considerando a perspectiva transdisciplinar configurada pela história da matemática (MENDES, 2006, p. 99).

Assim, quando informações históricas são oportunizadas na sala de aula, de maneira direcionada e objetiva, é possível fazer com que os alunos perguntem sobre a geração e a formalização dos conceitos matemáticos propostos. Por outro lado, utilizar a História da Matemática em atividades nas aulas não pressupõe repetir os passos da sua criação, isto é, não significa fazer com que cada aluno percorra toda a história.

Em linhas gerais, a História da Matemática pode inverter a condição dos alunos, fazendo-os deixar de ser observadores, tornando-se ativos, protagonistas da construção do seu conhecimento matemático.

2.3 Atividades investigatórias na construção do conhecimento matemático na sala de aula

Após conhecer algumas contribuições da História da Matemática para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, levantou-se a seguinte questão: Como utilizar a História da Matemática na sala de aula a fim de desencadear uma aprendizagem satisfatória do Teorema de Tales em uma turma do 9.º Ano do Ensino Fundamental?

À procura de resposta, encontramos em Mendes (2005) atividades que apresentam características marcantes para um ensino prático e dinâmico tanto por parte do professor quanto dos alunos. O fundamento é considerar a história e a investigação como agentes de desenvolvimento da cognição em sala de aula, sendo professor e alunos sujeitos de atividades práticas e de experimentos.

Afirma-se:

> O princípio que articula as atividades de ensino aprendizagem via história da matemática é a investigação, constituindo-se no sustentáculo da proposta, fruto das nossas reflexões sobre a produtividade acadêmica ligada ao tema. Acreditamos que o uso desse processo investigatório nas aulas de matemática pressupõe a valorização do saber e do fazer históricos na ação cognitiva dos estudantes (MENDES, 2006, p. 100).

Nessa perspectiva, Mendes (2005) diz que quando há interação e participação dos alunos durante a realização da atividade, eles deixam de ser espectadores e passam a assumir um papel de investigadores criativos, ou seja, a pesquisa passa a ter um princípio científico e investigativo. Dessa forma, a Matemática passa a ser um importante componente na compreensão do mundo. Assim, o autor afirma:

> (...) o professor deve propor situações que conduzam os alunos à (re) descoberta do conhecimento através do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigativos, através de explorações (investigações), pois nessa perspectiva metodológica espera-se que eles aprendam o "quê" e o "porquê" fazem/sabem desta ou daquela maneira, para que, assim, possam ser criativos, críticos, pensar com acerto, a colher informações por si mesmos face a observação concreta e usar o conhecimento com eficácia na solução dos problemas do cotidiano.

> Essa prática, então, dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, através da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios (MENDES, 2005, p. 54).

Mendes (2001) completa: a investigação conduz ao amadurecimento matemático, à autonomia e à curiosidade como possibilidade de os alunos buscarem o conhecimento por meio da investigação. Por isso, além da curiosidade, é necessário o desejo de solucionar o que foi proposto na atividade. Assim, a preocupação inicial do professor está na elaboração da atividade investigatória, cuidando para que ela não seja nem tão difícil nem tão fácil que desanime e desmotive os alunos. A intenção é que a investigação inspire o desenvolvimento da autonomia dos alunos, promovendo oportunidade de criar estratégias.

O que consideramos nesta pesquisa é que a atividade de natureza investigatória proporciona aos alunos a oportunidades de desenvolver diferentes estratégias de resolução e usar da criatividade. Dessa maneira, eles assumem o papel de investigadores matemáticos, devendo, portanto, ser consideradas as motivações e os objetivos para a realização da atividade. Afinal, a atividade investigatória[3] pode despertar a capacidade de investigar, imaginar e questionar os resultados obtidos:

> Favorece o desenvolvimento do pensamento interrogativo nos estudantes, levando-os a uma prática de interpretação da realidade. Esse processo de leitura matemática do mundo pode contribuir para que os estudantes discutam suas ideias no entorno da escola e até mesmo fora dela, independentemente das condições materiais que a mesma possua (MENDES, 2009a, p. 58).

Pelo exposto, foi possível apresentar uma resposta satisfatória à questão apresentada no início desta subseção, ou seja, utilizamos a História da Matemática na sala de aula como desencadeadora do processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Tales por meio do desenvolvimento de atividades investigatórias. Para isso, foram elaboradas onze atividades investigatórias para os 29 participantes de uma classe do 9.º ano do Ensino Fundamental.

[3] Atividade investigatória é o termo utilizado por Mendes para se referir às atividades que têm como princípio a história e a investigação como agente de desenvolvimento da cognição em sala de aula (MENDES; FOSSA; VALDÉS, 2006).

3.Atividades investigatórias

As orientações apresentadas por Mendes (2009b) para atividades investigatórias nortearam a elaboração da proposta utilizada na pesquisa e sugerida neste livreto. Dentre elas esta: o professor deve ter bem claro o objetivo em cada atividade e apresentá-la em uma linguagem concisa em seu plano de aula.

O título da atividade é muito importante para os alunos, por isso deve ser criativo, evidenciar o tema central a ser investigado e suscitar a imaginação deles. O texto a ser distribuído precisa ser escrito numa linguagem acessível aos alunos.

Após a descrição de cada atividade há algumas orientações ao professor sobre como desenvolvê-la com seus alunos. Também foi adicionado o relato de algum fato relevante ocorrido durante a realização da atividade. O contexto histórico com caráter motivador foi inserido para gerar curiosidade nos alunos. A descrição de cada atividade a ser realizada foi dada a conhecer aos alunos por meio de um texto impresso distribuído a cada um deles.

Atividade 1

Título: Investigando... O detetive sou eu

Descrição

Você deverá criar uma situação que precisa ser investigada urgentemente. O assunto é do seu interesse, por exemplo, moda, cultura e costumes de algum lugar, violência, etc. Ao decidir sobre o que você deseja investigar, justifique o motivo desse assunto, elabore estratégias ou sugira possibilidades para solucionar o que você criou como suspeita ou como o que necessita de investigação.

Objetivos:

- Estimular um debate em sala de aula para promover a participação e interação entre os alunos.

- Orientar os alunos na elaboração de um relatório contendo a justificativa, estratégias e possíveis soluções para a situação escolhida para ser investigada.

Orientações:

Por ser a primeira atividade desta proposta, é necessário provocar um debate entre os alunos para que haja interação entre eles, principalmente se forem pouco participativos e desinteressados.

Esta atividade pode ser realizada individualmente durante uma aula (50min). Os primeiros 15min serão destinados a escolha dos temas e debates e os 35min restantes a registros. Caso o momento de debate extrapole os 15min, permite-se que os alunos os concluam em casa e entreguem seus textos na aula seguinte. É possível desenvolver essa atividade da seguinte maneira:

- Perguntar aos alunos: “o que é investigação para você?”

- Explicar para os alunos o que é atividade investigatória, sem comentar sobre o Teorema de Tales.

- Despertar nos alunos o interesse em realizar a atividade.

- Sugerir exemplos e incentivar a imaginação e criatividade dos alunos, chamando a atenção para situações de violência em geral.

- Solicitar que cada aluno crie uma situação problemática para ser investigada, justificando o motivo da escolha feita, ou seja, por que esse assunto deve ser investigado.

- Pedir que cada aluno elabore estratégias ou sugira possibilidades para solucionar a situação a ser enfrentada.

Realizada a atividade, procura-se saber quais foram as principais dificuldades, o que os alunos acharam de interessante e se já haviam feito uma atividade deste tipo.

Atividade 2

Título: Investigando... O matemático sou eu

Descrição:

O que você gostaria de aprender com a História da Matemática?Você irá escolher um assunto matemático, conhecer a sua história e preparar uma investigação, com base na História da Matemática, e apresentar aos seus colegas na sala de aula. Nessa investigação você deverá explicitar as necessidades e o contexto sociocultural que influenciou a criação do assunto escolhido. Seja curioso e investigue o máximo o que puder!

Objetivos:

- Promover a curiosidade, a participação, a interação, a compreensão histórica dos conteúdos matemáticos pré-selecionados e o interesse em conhecer mais sobre a História da Matemática.

- Mostrar aos alunos que a Matemática tem história e que é possível aprender Matemática com a história.

- Apresentar a História da Matemática a partir de conteúdos matemáticos já conhecidos dos alunos.

O material a ser utilizado pelos alunos:

Alguns exemplares dos livros paradidáticos: Para que serve a matemática? (IMENES; JAKUBOVIC; LELLIS, 1992a, 1992b, 1992c, 1992d, 1992e, 1993) e Contando a Historia da Matemática (GUELLI, 2004a, 2004b, 2004c).

Motivo da seleção desses livros:
-Excelente qualidade pedagógica (atender às necessidades e aos objetivos propostos).

-Facilidade de obtenção (foram emprestados pela Biblioteca da UFOP e devolvidos ao término da pesquisa).

A atividade foi realizada com livros paradidáticos devido à falta de outros recursos na escola onde foi desenvolvida a pesquisa, que não tem laboratórios ou biblioteca para uso dos alunos.

Orientações:

- Caso não sejam localizados os textos utilizados nesta pesquisa, sugerimos que o professor elabore textos com informações históricas e curiosidades sobre os conteúdos matemáticos que possam ser investigados pelos alunos.

- Caso a escola tenha um laboratório de informática, por exemplo, pode-se solicitar que cada grupo de alunos pesquise em sites (indicados ou não pelo professor).

Observações:

Devido às condições descritas e ao material disponível, foram selecionados nove conteúdos matemáticos para a atividade: a invenção dos números, origem do zero, história de potências e raízes, números negativos, ângulos, frações e decimais, proporções, semelhança, Teorema de Pitágoras. Os participantes foram distribuídos em grupos de três alunos.

Diálogos:

Apresentamos nesta seção alguns momentos interessantes que aconteceu em sala de aula, depois que os participantes receberam os livros paradidáticos para folhear e decidir sobre o tema que investigariam (já selecionados pelo professor).
Ao receber o paradidático “A invenção dos números” da coleção Contando a História da Matemática, um aluno, identificado por P22[4], reagiu da seguinte maneira:

P22: Olha só! É com a História da Matemática mesmo. Eu pensava que era outra coisa, sei lá.
Professora: Outra coisa como? Eu mesma havia comentado com vocês que a Matemática tem história e que é importante conhecermos um pouco sobre essa história!
P22: Sim, Nunes[5]. Mas... é porque eu achava que era uma coisa meio que invenção sua. Afinal, você cria cada coisa e eu bem falei isso com o P13 quando a gente estava fazendo a outra atividade que você deu, que era sobre uma investigação de assunto escolhido pela gente.
Professora: Olhe P22, a História da Matemática existe para nos mostrar que a Matemática é uma criação humana. Inventada por pessoas que ficaram curiosas com alguma coisa ou porque foi necessário criar certo conteúdo em determinada época. Então devemos parar de achar que não daremos conta de aprender Matemática. Por mais que a Matemática pareça difícil ela não é impossível e nem uma matéria do outro mundo.
P02: Na verdade só os melhores conseguem né?
P09: Por isso que eu nunca vou aprender. E na verdade fessora, foi um bando de desocupado que criou a Matemática, né. E veja como eles só ficavam nos lombos dos burros.
(Nesse momento o participante P09 estava com o paradidático “Equação: o idioma da Álgebra” da Coleção Contando a história da Matemática (GUELLI, 2000, p. 25).

[4] Os alunos que participaram dessa pesquisa foram identificados por meio da numeração de P01 até P29, ou seja, o primeiro participante foi denotado por P01, o segundo, P02, até o último participante, P29. Essa escolha aconteceu por sorteio, sem qualquer alusão a nome, ordem de chamada ou outra qualquer e sem informação de sexo, pois não haveria comparação por gênero.
[5] Nunes é o sobrenome da pesquisadora/professora e a maneira que os alunos se dirigiam a ela.

P25: Cara, você é burro mesmo. Desde quando isso é burro, seu jumento? Isso são camelos. Essa história que está com você deve ser lá dos Egitos (sic) ou próximo deles. Burro! Não sabe nem diferenciar os animais da sua família...Você é muito mais do que burro mesmo, rsrsrsrs. (Riso geral na sala).

Por causa desse comentário foi necessário intervenção da professora, para que não houvesse agressões verbais, afinal eram alunos que se insultavam por pouco ou nenhum motivo.

Esse breve diálogo escolhido revela que em pouco tempo a História da Matemática e o contato com materiais despertaram o interesse e a curiosidade desses alunos, exatamente pelo total desconhecimento da História da Matemática. A partir dessa atividade eles mesmos perguntaram se a cada assunto estudado eles conheceriam a história. Desde o início da pesquisa, a potencialidade motivacional atribuída à História da Matemática foi evidenciada.

Atividade 3

Título: Medindo o que não se alcança...

Descrição

Como poderia ser medida a altura de uma árvore, ou de um poste, ou qualquer objeto de difícil acesso, utilizando apenas lápis, papel, calculadora e fita métrica como recursos disponíveis?Não é permitido escalar o objeto.

Objetivos:

- Apresentar a importância dos conceitos de semelhança, razão e proporção, principalmente para os gregos.
- Estimular e direcionar a imaginação dos alunos para cálculos de altura de objetos utilizando proporcionalidade e projeção de sombras.
- Apresentar a história e os feitos do matemático Tales de Mileto.

Material:

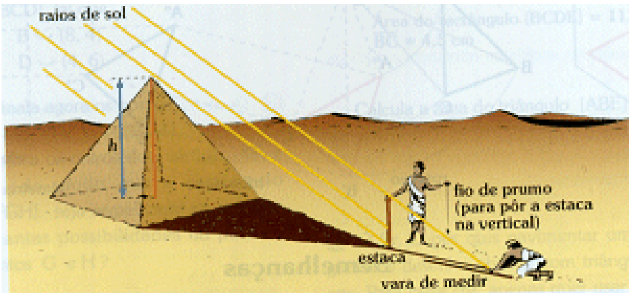
O texto distribuído aos alunos foi o seguinte:
Foram as contribuições matemáticas do grego Tales de Mileto e a viagem realizada por ele ao Egito, no século VI a.C., que marcaram o início do desenvolvimento rigoroso e axiomático da Geometria.
A História da Matemática conta que Tales era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante, e acredita-se que tenha nascido no ano 625 a.C, mas não se sabe ao certo em que ano morreu.

Durante essa viagem ao Egito, Tales foi abordado pelos escribas egípcios (estudiosos da época) para que, em nome do Faraó, calculasse a altura da pirâmide de Quéops, que havia sido construída por volta de 2.650 a.C. Tales não recusou o desafio e utilizou seus conhecimentos geométricos para determinar a altura dessa pirâmide, que hoje sabemos ser de aproximadamente 146 metros.

Para a medição, Tales fincou na areia, verticalmente, uma estaca, cujo comprimento ele conhecia, e mediu a sombra projetada. Depois mediu a sombra da pirâmide, e em seguida concluiu que as sombras (da estaca e da pirâmide) e as alturas (da estaca e da pirâmide), quaisquer que fossem seus tamanhos, eram proporcionais.

O que Tales provavelmente fez está apresentado na Figura 4, a seguir, que pressupõe o desenvolvimento prático dessa ideia.

Figura 4: Ideia prática de medição da altura da pirâmide apresentada por Tales de Mileto

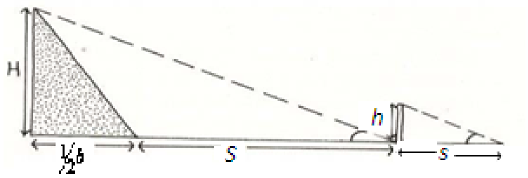


Fonte: Mendes (2009a, p.26)

Um detalhe observado por Tales foi a necessidade de acrescentar à medida da sombra projetada pela pirâmide a metade da medida do comprimento da base, porque a pirâmide era muito extensa, escondendo-se uma parte da sombra.

De acordo com a Figura 4, é possível interpretar essa ideia por meio de um esquema semelhante ao apresentado na Figura 5, a seguir.

Figura 5: Esquema apresentado para a prática da medição da altura da pirâmide apresentada por Tales de Mileto



Fonte: Mendes (2009a, p.26)

Nesse momento, fazendo uso do conhecimento geométrico sobre semelhança dos triângulos, razão e proporção, Tales mostrou: a altura da pirâmide (H) está para a metade da base da pirâmide (1/2b), mais a medida da sombra da pirâmide (S), assim como a altura da vara (h) está para a medida da sombra da vara (s).

Dessa maneira, Tales conseguiu responder ao desafio que lhe havia sido proposto pelo Faraó, ou seja, determinou a altura da pirâmide de Quéops.

Orientações:

-Realizar um debate sobre possíveis soluções para as questões propostas. É necessário despertar nos alunos a curiosidade para a obtenção de possíveis respostas para as questões propostas. Somente quando não houver sugestões satisfatórias dos alunos, a história de Tales e o desafio para a medição da altura da pirâmide devem ser narrados pelo professor.

-Distribuir o texto, pois os alunos, provavelmente, não terão respostas.

-Ler (cada aluno lê uma parte) em voz alta e comentar o texto, pois muitos alunos não dominam totalmente a leitura e a escrita. É necessário observar se a história provocou motivação e compreensão da importância dos conceitos de razão e proporção para os gregos.

-Explicar a estratégia desenvolvida por Tales de Mileto para determinar a altura da pirâmide de Quéops, se necessário for.

-Retornar à questão apresentada nesta atividade e perguntar aos alunos sobre o que deve ser feito para determinar a altura de um poste ou de uma árvore, utilizando a ideia de Tales.

-Conduzir os alunos ao ar livre onde exista um objeto cuja altura não possa ser medida com fita métrica ou trena (árvore, poste, torre, ou outro objeto) para determinar a altura.

-Organizar os alunos em duplas para resolver a questão. A realização desta atividade em duplas se justifica por meio da análise da Figura 4, que mostra que Tales contou com ajuda para desenvolver sua estratégia. Esse fato favorece e reforça a importância da interação e cooperação entre os alunos.

-Adaptar a estratégia utilizada por Tales: substituir a pirâmide por um poste ou por uma árvore (a mais vertical possível), trocar a estaca por um dos alunos. Após a escolha do objeto, um dos componentes da dupla deve medir a altura do colega, que deverá ficar posicionado ao lado do objeto escolhido para a medição da altura (assumindo a importância da vara utilizada por Tales).

- Fazer as medições necessárias: altura de um dos alunos, medida da sombra desse aluno e medida da sombra projetada pelo objeto escolhido.

-Escrever a proporção e efetuar os cálculos correspondentes. Após medir a altura do colega, também deverão ser registradas no caderno as medidas das sombras do colega e do objeto escolhido. A partir daí, cada dupla deve escrever as proporções e calcular a altura do objeto escolhido. Interessante é pedir que mais de uma dupla meça o mesmo objeto para conferir os resultados obtidos.

Diálogos:

Ainda na sala de aula, após a apresentação da pergunta que norteou a atividade, os alunos começaram, ironicamente, a apresentar algumas sugestões. Os diálogos descritos abaixo apresentam esse momento.

Professora: Como vocês fariam para medir a altura de um poste utilizando apenas lápis, papel, calculadora e fita métrica? Não é permitido subir nele.

P20: Ora fessora, basta olhar o registro da CEMIG, eu acho que vem escrito nele.

P25: Sobe! Manda o macaco do P16 subir [risos].

P16: Seu...

Professora: Oh, meninos...

P16: Desculpe-me Nunes! Só não mostro para o P25 quem é macaco porque eu respeito você. Mas...

Professora: Vamos Turma, não iremos desviar do foco. Retornemos à pergunta: como vocês fariam para medir a altura de um poste, sabendo-se... [interrupção pelo participante P05]

P05: Manda uma corda até o alto e depois meça a corda.

P25: É muito idiota mesmo. E a corda vai agarrar aonde?

P05: Na lâmpada né espertinho.

P25: Nossa, Nunes... eu me recuso a ouvir esses meninos!

P19: Derruba! É mais fácil e depois é só medir.

P25: Eu tô falando! Só tem Mané nessa sala. Você vai derrubar um poste, medir e depois levantar?

Observações:

Pelo diálogo nota-se que a pergunta inicial provocou a participação e interação entre os alunos, algo que era raro entre eles. Durante o desenvolvimento da atividade, foi possível observar as seguintes características do processo de ensino-aprendizagem: motivação, interação, cooperação, atividade, consciência e comunicação.

A Figura 6 a seguir ilustra momentos de interação, participação e cooperação entre os participantes durante a atividade 3[6].

Figura 6 – Medições durante a realização da atividade 3

Fonte: Fotografias tomadas pela professora-pesquisadora

[6] As fotografias expostas nesta pesquisa tiveram a autorização dos participantes. O mesmo aconteceu como a gravação dos diálogos realizada pelos celulares dos participantes.

Atividade 4

Título: Praticando o que se aprendeu com Tales

Descrição:

De acordo com a figura abaixo foram registradas algumas medidas como o comprimento da sombra da árvore, 10 metros, a altura do jovem próximo a essa árvore, 1,50m e a projeção da sombra dele, 2,50m. Com essas informações e lembrando-se da ideia do cálculo feito por Tales para calcular a altura da pirâmide é possível determinar a áltura dessa árvore? Investigue essa situação e se possível for, determine sua altura.

Objetivos:

- Desenvolver nos alunos habilidades de leitura, interpretação e organização de informações.
- Determinar a altura da árvore
- Consolidar os conceitos de razão e proporção.

Orientações:

- Estimular a imaginação dos alunos ao receber a atividade (situação hipotética) e comparar com a atividade desenvolvida anteriormente (situação real).

- Recordar com os alunos a estratégia utilizada durante a resolução da atividade anterior.

- Enfatizar a leitura correta das proporções ("a está para b, assim como, c está para d").

- Observar a escrita das proporções feita pelos alunos.

A realização desta atividade pode ser feita em pequenos grupos (duplas ou trios), em vista das características do processo de ensino-aprendizagem.
Diálogos:

Os alunos que participaram dessa pesquisa não sabiam (ou não se lembravam) da leitura correta das proporções, conforme observado nas falas a seguir.
P17: Coloca a altura debaixo de altura, e a sombra debaixo de sombra, ou altura misturada com sombra? Eu nem lembro mais!
P28: Mas quem vem primeiro? Tamanho da árvore e a sombra da árvore ou são as informações do menino? Na verdade eu acho que não faz problema, não é Nunes?

Nessas falas percebemos que esses alunos participantes da pesquisa compreenderam sobre proporcionalidade, mas ainda era necessário propor outras situações a fim de observar as estratégias utilizadas por eles, além de estimular a escrita e a leitura correta de razão e proporção.

Foi possível observar no desenvolvimento dessa atividade todas as características do processo de ensino-aprendizagem e um desenvolvimento satisfatório da intuição para a formalização matemática.

Atividade 5

Título: Medindo alturas utilizando sombras
Descrição

Lílian deseja calcular a medida da altura do prédio que a sua avó mora. Para obter essa altura ela anotou em um papel a medida do comprimento da sombra do prédio que foi igual a 15m. Nesse mesmo instante ela observou uma árvore ao lado do prédio e verificou que a medida do comprimento da sombra dela era de 1,5m e que a altura dessa árvore era de 5 metros. Com esses dados, explique como Lílian conseguiria determinar a altura do prédio.

Calcule você também a altura desse prédio.

Objetivos:

- Determinar a altura do prédio.
- Consolidar os conceitos de razão e proporção.

Orientações:

- Apresentar aos alunos a importância dos conceitos de razão e proporção, tanto para os gregos, quanto para a resolução de atividades como as 3 anteriores.

- Consolidar estratégias para os cálculos envolvendo proporcionalidade.

- Investigar com os alunos outros exemplos que envolvem cálculos com a utilização de sombras.

A realização desta atividade pode ser feita em pequenos grupos para que seja desenvolvida entre os alunos a interação, a cooperação e a comunicação. Foi possível observar no desenvolvimento todas as características processo de ensino-aprendizagem e os resultados foram favoráveis quanto à organização e sistematização das ideias intuitivas.

Atividade 6

Título: Investigando... Medindo alturas sem a utilização de sombras

Descrição:

Levando-se em consideração a ideia de medir a altura de objetos de difícil acesso, Diego perguntou qual seria a altura de uma árvore próxima à sua escola. Porém, no dia em que ele iria fazer a medição utilizando sombras não havia sol. Então ele levou esta dúvida para a sala de aula: Qual será a maneira de realizar a medição da altura desse objeto em um dia nublado?

Como não havia sol, Larissa respondeu, na mesma hora, que não seria possível realizar a medição, pois não haveria as sombras necessárias. Porém Gabriel exclamou que tinha uma idéia e fez o seguinte:

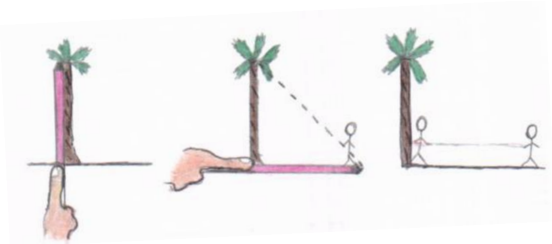
a) Ele, com a licença da professora, saiu da sala para avistar uma árvore.Gabriel tomou uma distância da árvore escolhida, esticou o braço, fechou um olho e mirou a ponta da caneta na ponta superior da árvore e a ponta do polegar na base da árvore.

b) Depois, pediu para que Larissa ficasse perto da árvore e esperasse um pouco.

c) Ainda com um olho fechado e com o braços esticado, Gabriel manteve a ponta do polegar na direção da base da árvore e girou a caneta.

d) Depois ele pediu para Larissa caminhar até o local onde a ponta da caneta apontou, pois esse seria o tamanho aproximado da árvore.
Assim foi fácil! Eles mediram a distância da árvore ao local onde Larissa ficou parada, e então descobriram a altura aproximada da árvore, mesmo não tendo sol. A Figura 7, a seguir, mostra a situação explicada:

Figura 7 - Situação sugerida por Gabriel



Fonte: Desenho feito por Marciliane de Fátima (irmã da pesquisadora)
\
Você compreendeu como foi prática a idéia de Gabriel? Faça o mesmo, medindo a altura de uma árvore qualquer.
Depois das medições responda as seguintes questões:
a) O que você achou do método sugerido por Gabriel?

___

b) Você encontraria outro procedimento para calcular alturas de difícil acesso?

___

c) Compare essa ideia de Gabriel com a de Tales e tire as suas conclusões.

___

Essa foi uma situação hipotética.

Objetivo:

- Estimular a criatividade e a intuição dos alunos para a elaboração de procedimentos para resolução de problemas.

- Calcular a altura de objetos de difícil acesso, desta vez sem o uso de sombras.

Orientações:

- Estimular os alunos a pensar em estratégias para medir a altura de objetos de difícil acesso sem a utilização de sombras, por exemplo, em dia nublado.
- Entregar aos alunos a descrição da atividade e alterar os nomes dos personagens, solicitando que três alunos os interpretem.

- Promover, durante a leitura da descrição da atividade, interação entre os alunos, perguntando se eles estão compreendendo a situação exposta.

- Interpretar a situação em conjunto com os alunos.

- Conduzir os alunos ao ar livre onde exista um objeto cuja altura não possa ser medida com fita métrica ou trena (árvore, poste, torre, ou outro objeto) para determinar a altura.

- Organizar os alunos em trio, de acordo com a preferência deles, para resolver a questão. A realização desta atividade em trio se justifica por meio da análise da Figura 7, na qual um aluno avista o objeto cuja altura vai ser calculada com a caneta, o outro se posiciona próximo ao objeto e o terceiro aluno mede a distância entre o segundo aluno e o objeto. Esse fato favorece e reforça a importância da interação e cooperação entre os alunos.

Foi possível observar no desenvolvimento desta atividade todas as características do processo de ensino-aprendizagem e os resultados foram favoráveis quanto ao desenvolvimento intuitivo e imaginativo dos alunos.
Diálogos:

Quando concluímos o desenvolvimento da 3.ª atividade, perguntamos aos alunos se haveria alguma coisa que impossibilitaria a realização da atividade. Um aluno, em tom de brincadeira e ironia, afirmou que seria impossível se estivesse chovendo, pois não teria sombra. Alguns riram e outros dois alunos perguntaram se não haveria como adaptar a estratégia de Tales. Solicitamos que eles mesmos pensassem em uma alternativa para medir altura de objetos de difícil acesso, desta vez sem utilizar sombras.

Somente P05 apresentou uma sugestão: "Meu pai disse que quando vai derrubar uma árvore, ele se posiciona da seguinte maneira: agacha e olha por entre as pernas e vai se afastando até conseguir ver a ponta da árvore, estando ele de cabeça para baixo. Essa distância tomada por ele, até avistar a ponta da árvore é, mais ou menos, onde a árvore irá cair."

Na sala de aula, solicitamos que os participantes comparassem as duas estratégias utilizadas na medição da altura de objetos de difícil acesso (Atividades 3 e 6) e concluíram que a última era "menos matemática".

Eles afirmaram que ambas eram muito interessantes, mas preferiram a 6, considerando-a mais criativa e incomum, principalmente pelo fato de envolver apenas uma caneta e fita métrica, sem contas. Essas considerações podem ser observadas de acordo com os diálogos entre P29, P17 e a professora.

P29: Ué! Esse jeito foi mais fácil porque não precisou fazer contas, foi só medir direito a distância que foi encontrada. Se tiver ficado no lugar certo, é óbvio. Enquanto que o primeiro a gente precisou medir um monte de coisas, usar a calculadora, a sombra...
P17: E isso já ajudou...

P29: Deixe eu terminar de falar! Então Nunes é claro que sem a sombra foi mais fácil.
Professora: Eu só não entendi muito bem quando você P15 disse que o cálculo com a sombra foi "mais matemático". Explique por que você pensou assim.
P15: Foi pelo mesmo motivo que P29 disse. Na segunda atividade a gente não fez conta, foi por isso. E eu nem pensei nessa ideia, eu também gostei, gostei das duas maneiras mesmo. Mas essa da caneta foi mais criativa e sei lá, deu uma ideia bacana. Inclusive a ideia do pai de P05 de ficar agachando, que legal.
Professora: Você também pensou assim P22? A atividade sem a sombra é "menos matemática" porque não usou contas?
P22: É fessora! E desde quando a gente não faz conta em Matemática? Eu sei que você já disse que o mais difícil é ter ideia e eu concordo, porque às vezes eu nem mexo na atividade, nem sei para que lado eu devo começar, mas quando não tem a contaiada eu fico sem saber se eu acertei ou não. Fica difícil ver Matemática sem conta.

Essa afirmação foi feita porque, segundo esses participantes da pesquisa, a Matemática era sinônimo de contas. A dificuldade foi mostrar que Matemática não são somente algoritmos, mas também raciocínio e estratégias. Essa ideia foi sendo desmistificada à medida que a proposta foi sendo desenvolvida e despertou entre eles curiosidade, participação, cooperação e o interesse em aprender Matemática.

As fotografias contidas na Figura 8, a seguir, mostram dois momentos da atividade. A da esquerda, o instante em que eles se posicionaram ao lado do objeto do qual seria estimada a altura (o poste), aguardando o sinal do outro integrante do trio a fim de que eles mudassem de posição. A fotografia da direita mostra o momento em que o terceiro integrante do trio estava medindo a distância.

Figura 8 - Interação dos participantes durante a realização da Atividade 6

Fonte: Fotografia tomada pela professora-pesquisadora

Atividade 7

Título: Construindo um teorema

Descrição

1.ª Etapa: Construção no papel milimetrado:

- Desenhar três retas paralelas entre si e escolher distâncias diferentes entre elas, duas a duas.
- Nomear essas retas por r, s e t.
- Traçar duas retas transversais e nomeá-las por m e n.
- Nomear os pontos de intersecção pertencentes a m por A, B e C e os pontos de intersecção pertencentes a n por D, E e F;
- Medir os segmentos AB, BC, DE e EF;
- Registrar essas medidas em uma tabela semelhante à seguinte:

Segmento	*Medida*

- Calcular as razões AB/BC e DE/EF (Pode utilizar a

calculadora).
- Anotar os valores encontrados.

Responda:
a) Compare os resultados que você obteve. Qual é a relação entre essas medidas?
____

2.ª Etapa
- Alterar as distâncias entre as retas paralelas r, s e t.
- Novamente, medir os segmentos AB, BC, DE e EF e registrar em uma nova tabela semelhante à construída anteriormente.
- Calcular as razões AB/BC e DE/EF, utilizando a calculadora, e anotar os resultados.

Responda:
a) O que se pode afirmar sobre os segmentos de reta paralelas quando são cortados por retas transversais?
____

3.ª Etapa
- Marcar um ponto e nomear por A.
- Traçar duas retas r e s concorrentes em A.
- Marcar um ponto sobre cada reta, diferentes de A.
- Nomear esses pontos por B e C.
- Traçar uma reta que passe pelos pontos B e C.
- Nomear a reta que contém os pontos B e C de t.
- Traçar uma reta paralela ao lado BC do triângulo tal que passe pelo ponto A.
- Nomear essa reta por u.
- Marcar outros dois pontos sobre as retas r e s “acima” do ponto A.
- Nomear esses pontos por D e E.
- Traçar uma reta paralela às retas t e u passando por D e F.
- Nomear essa reta por v.

Responda:

a) Qual é a relação de posição entre as retas t, u e v da maneira que foram traçadas? (Paralelas, concorrentes ou transversais?)

---

b) Utilizando a régua, meça o comprimento dos segmentos AD, AB, AE, AC e anote-os.

---

c) Quais são os segmentos de reta formados pelos pontos A, B, C, D e E que estão sobre a reta r?

---

d) Quais são os segmentos de reta formados pelos pontos A, B, C, D e E que estão sobre a retas?

---

e) Calcule as razões DA/AC e EA/AB (pode utilizar a calculadora) e anote os valores encontrados.

---

f) O que se pode concluir sobre as razões DA/AC e EA/AB?

---

g) O que se pode afirmar quando as retas transversais se interceptam entre o feixe de retas paralelas?

Objetivo:

Construir geometricamente o Teorema de Tales por meio de medições e observações.

Orientações:

Para a realização desta atividade é necessário que seja distribuído aos alunos papel milimetrado e régua.

1) Organizar a sala de aula em forma de círculo (ou semicírculo) a fim de promover a socialização e cooperação entre os alunos, favorecer as debates durante as construções solicitadas e facilitar o acompanhamento pelo professor.

2) 1.ª etapa
- Solicitar que os alunos tracem três retas paralelas e duas transversais interceptando as retas paralelas. Instigá-los para traçar modelos variados.
- Orientar os alunos para marcar os pontos de intersecção, medir corretamente os segmentos e dividir o valor de um pelo outro em cada transversal.
- Desvendar com os alunos que os quocientes das duas retas vão coincidir.

3) 2.ª Etapa
- Solicitar aos alunos que aumentem ou diminuam o espaço entre as paralelas e refaçam os cálculos.
- Debater os resultados encontrados, afirmando que o quociente é a razão da proporcionalidade e que os quocientes das transversais desenhadas terão os mesmos valores.
- Estimular os alunos a perceber o enunciado do Teorema de Tales, ainda sem apresentá-lo.

Durante a realização desta etapa, as respostas mais frequentes foram apresentadas no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2- Respostas dos participantes quanto à observação das medidas dos segmentos.

Respostas mais frequentes	Participantes
A distância entre *r* e *s* aumentou, enquanto a distância entre *s* e *t* diminuiu.	P03, P15, P19, P25, P26
A distância entre *r* e *s* diminuiu, enquanto a distância entre *s* e *t* aumentou.	P05, P06, P24
Aumentou quase que dobrou, ou triplicou.	P08, P14, P20

A quantidade que aumentou ou diminuiu parece que é no mesmo tanto.	P10, P15, P29
Aumentou e diminuiu na mesma quantidade.	P02, P16, P22
Não respondeu ou explicou de maneira a ser desconsiderada.	P04, P07, P09, P13, P21, P23, P27

Fonte: Anotações no Caderno de Campo

4) 3.ª Etapa

- Perguntar se DA e AB pertencem à mesma reta e se EA e AC pertenciam a outra reta.
- Estimular os alunos a aproximar-se do enunciado do Teorema de Tales.

- Apresentar, após algumas tentativas dos alunos, o enunciado do Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos proporcionais (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 98.).

- Observar as condições de aplicação deste Teorema.

- Solicitar que cada aluno construa um feixe de três retas não paralelas entre si, interceptadas por duas retas transversais.

- Pedir aos alunos que meçam os quatro segmentos formados, obtenham o quociente entre os segmentos de uma mesma transversal e anotem o resultado.

- Observar que essas razões foram diferentes, portanto concluir que não formam uma proporção, impossibilitando o uso do teorema nessa situação.

Na realização desta atividade foi possível observar a presença de todas as características processo de ensino-aprendizagem e os resultados foram favoráveis quanto à organização e sistematização das ideias necessárias à construção e do Teorema de Tales.

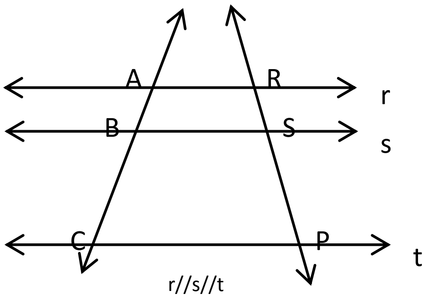
Atividade 8

Título: Afirmações sobre o Teorema de Tales

Descrição

Observando o seguinte feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais é possível escrevermos algumas proporções. Dentre as que foram registradas abaixo, assinale com C aquelas que estiverem corretas e com E aquelas que estiverem erradas.

Fique atento a cada caso e tente justificar as proporções que estiverem incorretas:



a ( ) $\frac{AB}{BC} = \frac{RS}{SP}$

b ( ) $\frac{BC}{SP} = \frac{AB}{RS}$

c ( ) $\frac{AB}{SP} = \frac{AB}{RS}$

d ( ) $\frac{AB}{RS} = \frac{SP}{BC}$

e ( ) $\frac{RP}{RS} = \frac{AC}{AB}$

f ( ) $\frac{AC}{BC} = \frac{RP}{SP}$

Objetivo:

- Identificar proporções em situações em que o Teorema de Tales pode ser usado.
- Justificar afirmações .

Orientações:

- Esclarecer os alunos sobre a importância da ordem nas proporções.

- Comentar que há outros modelos de retas paralelas cortadas por transversais e que esta atividade aborda somente a situação em que as retas transversais não interceptam as retas paralelas dadas.

- Questionar cada proporção descrita.

- Investigar com os alunos a existência, ou não, de outras proporções corretas que podem ser feitas para essa situação exposta.

Durante o desenvolvimento desta atividade observamos as seguintes características do processo de ensino-aprendizagem: interação, cooperação e comunicação. E os alunos tiveram mais dificuldades para justificar as proporções incorretas, pois era uma prática pouco comum para eles.

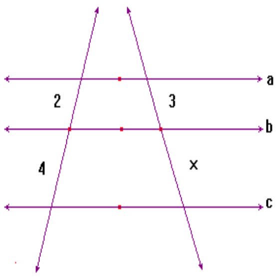
Atividade 9

Título: Investigando o Teorema de Tales em feixe de retas

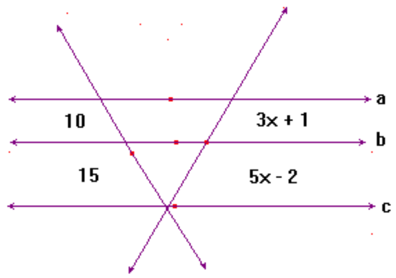
Descrição

Observando cada situação de feixe de retas paralelas (a//b//c) cortadas por transversais, determine o valor da incógnita x, sabendo-se que as medidas estão na mesma unidade.

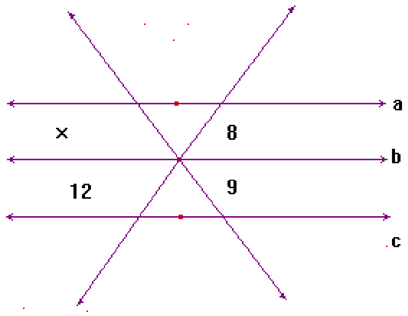
a)



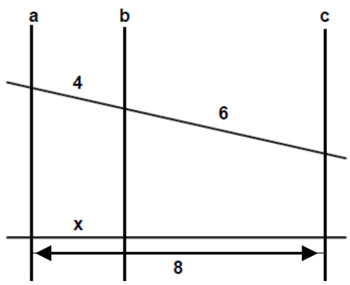
b)



c)



d)



Objetivos:

-Identificar situações em que o Teorema de Tales pode ser usado.
-Desenvolver a autonomia para a construção do conhecimento matemático.
Orientações:
- Organizar os alunos em pequenos grupos.

- Solicitar que cada grupo exponha a estratégia utilizada para solucionar a questão exposta.

- Utilizar recursos, como retroprojetor, quadro de giz ou outros recursos disponibilizados pela escola e/ou pelo professor para que os alunos apresentem as soluções obtidas.

- Pedir que cada grupo avalie a explicação do grupo que estiver apresentando.

- Investigar com os alunos outras representações de retas paralelas e transversais em que o Teorema de Tales pode ser utilizado.

- Evitar que os alunos reduzam todos os casos à estratégia utilizada no item a.

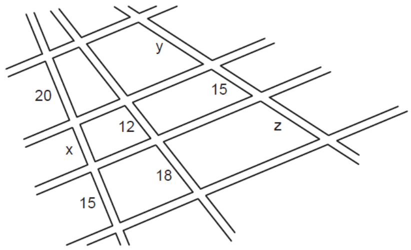
Durante o desenvolvimento desta atividade observamos todas as características do processo de ensino-aprendizagem e, como esperávamos, alguns alunos insistiram em reduzir todas as quatro situações ao item a.

Atividade 10

Título: Retas Paralelas e transversais no mapa

Descrição

A figura a seguir mostra um mapa com quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias estão indicadas no mapa, em quilômetros, mas existem algumas que precisam ser calculadas. Portanto, calcule as distâncias que foram indicadas por x, y e z:



Objetivos:

- Utilizar o conhecimento matemático em situações hipotéticas do mundo real.
-Consolidar o conhecimento do Teorema de Tales por meio de uma situação contextualizada.

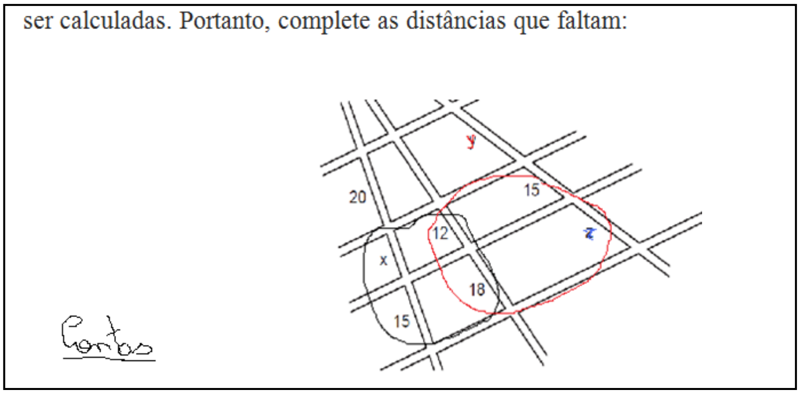
Orientações
- Analisar com os alunos a figura apresentada.

- Destacar com cores diferentes as três incógnitas apresentadas.

- Estimular os alunos a identificar as incógnitas que apresentam resoluções mais simples.

- Levar os alunos a circular com cores diferentes as proximidades de cada incógnita, conforme fez P13, pela Figura 9 a seguir.

Figura 9 – Estratégia utilizada pelo participante P13 para solucionar a Atividade 10.



Fonte: Protocolo de P13

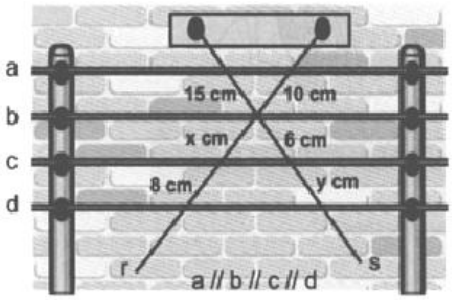
A principal dúvida esperada nesta atividade era a obtenção de y. E para isso foi indispensável a orientação do professor, sem ditar respostas.

Atividade 11

Título: Retas paralelas e retas transversais na instalação elétrica

Descrição

Ao realizar uma instalação elétrica, o eletricista Daniel fez um esquema indicando dois fios transversais, r e s, aos fios paralelos da rede central a, b, c e d. Com base nessa informação e observando o esquema abaixo, quais são os valores dos comprimentos indicados por x e y?



Objetivos:

-Utilizar o Teorema de Tales para solucionar uma situação hipotética

-Consolidar o conhecimento do Teorema de Tales.

Orientações:

- Orientar os alunos quanto à presença das duas incógnitas na figura, sendo que há uma intercepção das retas transversais entre o feixe de retas paralelas a//b//c.

- Levar os alunos a saber qual incógnita deveria ser obtida primeiramente ou se a ordem de resolução (primeiro x, depois y, ou vice-versa) não importava.

Diálogos:

Ao receberem essa atividade, conseguimos registrar alguns comentários dos alunos participantes da pesquisa, por exemplo:

P02: Esse é fácil, está igual ao que a gente tinha feito.

P29: É mesmo! É daqueles que fazem um “X” no meio.

Professora: Sim, mas vocês não perceberam nenhuma diferença com relação à incógnita?

P09: É o desenho de uma porteira?

Professora: Acho que não se trata de uma porteira P09, leia novamente o enunciado. Observem a quantidade de incógnitas e como elas estão localizadas no feixe de retas paralelas.

P20: Verdade. Agora tem letra em cima e embaixo. E qual a gente deve fazer primeiro?

P13: A que for mais fácil né? E ta na cara que é y. A não, não vai ser y não, porque tem x no meio e a gente ainda nem sabe quanto vale esse x. Ah! Mas x não parece está difícil de calcular. O pior é que tem esse X no meio das três retas, e parece ficar mais difícil.

P09: É isso mesmo que essa metida falou Nunes?

Os diálogos que antes da realização desta pesquisa eram raros tornaram-se constantes. Passou a existir entre esses alunos a cooperação, interação, participação e vontade de fazer o que era proposto nas atividades, embora não conseguissem acertar sempre.

Ao final da pesquisa solicitamos aos participantes que escrevessem o que acharam de mais interessante durante o assunto Teorema de Tales, ou aquilo de não gostaram, enfim que registrassem suas impressões. Proporcionamos uma conversa informal, que foi mais produtiva que os registros entregues. Alguns afirmaram que aprenderam sem a necessidade de decorar (P02, P04, P11, P17, P22, P29), que foi uma experiência interessante e diferente (P09, P12, P29) e todos questionaram se seria sempre assim nas aulas de Matemática.

Quanto aos relatos escritos apresentados, percebemos ainda a dificuldade que eles têm em registrar, pois as anotações foram mal escritas, o que implica na necessidade de continuar a alfabetização. Para exemplificar, segue a anotação de P15 registrada na Figura 10 a seguir:

Figura 10 – Relato escrito por P15

Se a história da Matemática fosse a mate
mática eu ia aprender mais matemática.
Eu nem sei se ia aprender o teorema do Tales
se eu não tivesse conhecido o Tales antes
e a sua ideia de medir a ~~altu~~ pirâmide
Tales mexeu com alturas triângulos
semelhantes, retas paralelas e trans
versais, razão, proporcão, e assim
conseguia calcular as medidas
que faltava só sabendo razão-
proporcão. Foi melhor do que história
e melhor do que matemática e
aprendi muito tudo juntos as 2 coisas
juntas faria seguinte conta: história +
matemática = história da matemática
e a nunes ~~a~~ falou isso que a
gente ia aprender e tem até livro que
conta isso. Mas ainda é difícil se
não tiver conta se for para pensar
e fazer sem copiar o que já está
pronto é difícil ter ideia.
Antes tava tudo pronto para copiar
e agora a ~~g~~ gente tem que pensar.
Gostei desse tales também.
Bjos

Fonte: Protocolo de P15

Considerações

Esta pesquisa foi para nós um desafio, pois antes não havíamos realizado atividades investigatórias nem utilizado a História da Matemática como motivadora do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A História da Matemática foi apresentada aos alunos por meio de leituras e atividades investigatórias, nas quais conheceram problemas históricos pedagogicamente adaptados em textos paradidáticos e tiveram a oportunidade de experimentar um pouco do que Tales de Mileto, provavelmente, vivenciou.

À medida que os participantes se envolviam com as atividades, foram se tornando questionadores, adquirindo, gradativamente certa autonomia nas aulas de Matemática. Essas atitudes confirmaram ser a escolha da investigação, no ensino de Matemática, uma estratégia de ação para a construção de conceitos matemáticos e para o início da autonomia (e confiança em si mesmo) nas aulas de Matemática.

De acordo com o objetivo exposto, podemos afirmar que o desenvolvimento de atividades investigatórias que utilizaram a História da Matemática processo de ensino-aprendizagem da Geometria proporcionou a aprendizagem do Teorema de Tales, favorecendo uma relação de cooperação e interação entre professor e aluno e aluno-aluno.

Com isso o uso explícito da História da Matemática foi favorável à realização de atividades investigatórias que possibilitaram a construção do conhecimento matemático pelos alunos, tendo evidenciado as características do processo de ensino-aprendizagem: caráter social, ativo, consciente, comunicativo, motivante, significativo, individual e cooperativo.

Finalizando, quanto aos resultados obtidos por Tales de Mileto, Iezzi, Dolce e Machado (2009) explicam que “o valor encontrado por Tales corresponde , em nosso sistema de numeração, a, aproximadamente, 140 metros – 6 metros a menos que o valor real na ocasião, que era de 146 metros. Hoje, devido a desgaste, a altura da pirâmide é 137 metros” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p.65).

Referências

ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. *Praticando matemática, 9º ano*. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

BOYER, C. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

CAJORI, F. *Uma história da matemática*. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

CYRINO, H. F. F. *Matemática e gregos.* Campinas, SP. Editora Átomo, 2006.

DANTE, L. R. *Tudo é matemática* – 9º ano. 3 ed. São Paulo: Àtica, 2009.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

FREIRE, P. *Extensão ou Comunicação?* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977 (12ª. Edição: 2002).

GALVÃO, M. E. E. L. *História da Matemática: dos números à geometria*. Osasco: Edifieo, 2008.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 3ed ver. e ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GUELLI, O. *Contando a Historia da Matemática: a invenção dos números*. 9 ed, 7 impressão. São Paulo: Editora Ática, 2004.

_______. *Contando a Historia da Matemática: história de potências e raízes*. São Paulo: Editora Ática, 2004.

_______. *Contando a Historia da Matemática: a invenção dos números*. 9 ed, 7ª impressão. São Paulo: Editora Ática, 2004.

HARUNA, N. C. A. *Teorema de Thales: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem.* 2000. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: PUC/SP, 2000.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, *A. Matemática e Realidade: 9º Ano*. São Paulo. 6 ed. Atual. Coleção Matemática e Realidade, 2009.

IMENES, L. M. P.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C. *Para que serve a matemática? Números negativos*. 17ª ed. São Paulo: Atual, 1992a.

_______. *Para que serve a matemática? Ângulos*. 8 ed. São Paulo: Atual, 1992b.

_______*. Para que serve a matemática? Álgebra.* 11 ed. São Paulo: Atual, 1992c.

_______*. Para que serve a matemática? Proporção*. 9 ed. São Paulo: Atual, 1992d.

_______*. Para que serve a matemática? Semelhança*. 9 ed. São Paulo: Atual, 1992e.

_______*. Para que serve a matemática? Frações e decimais*. 10 ed. São Paulo: Atual, 1993.

JUNIOR, J. R. G; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática, 9º ano.* Editora renovada. São Paulo: FTD, 2009.

MENDES, I. A. *O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências.* Belém – EDUEPA, 2001.

_______. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A história como um agente de cognição na Educação Matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006.

_______. A história como um agente de cognição na Educação Matemática. In: *Matemática e Ciência – conhecimento, construção e criatividade: revista eletrônica do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da PUC Minas*. Ano 1, n. 2, p. 7-18 (julho, 2008). Belo Horizonte. 2008.

_______. *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009(a).

_______. *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.* Ed. ver. e aum. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009(b).

PEREIRA, A. C. C. *Teorema de Thales: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de Matemática*. 2005. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Unesp - Rio Claro/SP, 2005.

SANTOS, R. P. *As dificuldades e possibilidades de professores de matemática ao utilizarem o Software Geogebra em atividades que envolvem o Teorema de Tales.* 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC/SP,2010.

SERRES, M. *As origens da Geometria.* Trad. Ana Simoes e Maria da Graça Pinhão. Lisboa: Terramar, 1997.

VASCONCELLOS, F. A. *História das Matemáticas na Antiguidade.* Livrarias Aillaud e Berthand. Paris-Lisboa. 1919.

VIANA, M. C. V. *Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matemática en la UFOP*. La Habana, Cuba: ICCP. 2002. 165f. Tese (Doctorado en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. 2002.

Apêndice:
Atividades investigatórias propostas

ATIVIDADE 1:

INVESTIGANDO... O DETETIVE SOU EU

Você deverá criar uma situação que precisa ser investigada urgentemente. O assunto é do seu interesse, por exemplo, moda, cultura e costumes de algum lugar, violência etc. Ao decidir sobre o que você deseja investigar, justifique o motivo desse assunto ser investigado, elabore estratégias ou sugira possibilidades para solucionar o que você criou como suspeito ou que necessitava de investigação.

ATIVIDADE 2:

INVESTIGANDO... O MATEMÁTICO SOU EU

O que você gostaria de aprender com a História da Matemática?" Você irá escolher um assunto matemático, conhecer a sua história e preparar uma investigação, com base na História da Matemática, e apresentar aos seus colegas em sala de aula. Nessa investigação você deverá explicitar as necessidades e o contexto sócio-cultural que influenciou a criação do assunto escolhido. Seja curioso e investigue o máximo o que puder!

ATIVIDADE 3:

MEDINDO O QUE NÃO SE ALCANÇA

Como poderia ser medida a altura de uma árvore, ou de um poste, ou qualquer objeto de difícil acesso, utilizando apenas lápis, papel, calculadora e fita métrica como recursos disponíveis? Não é permitido escalar o objeto.

O texto a seguir foi impresso e entregue aos alunos:

Contexto Histórico: Tales de Mileto

Foram as contribuições matemáticas do grego Tales de Mileto e a viagem realizada por ele ao Egito, no século VI a.C., que marcaram o início do desenvolvimento rigoroso e axiomático da Geometria.

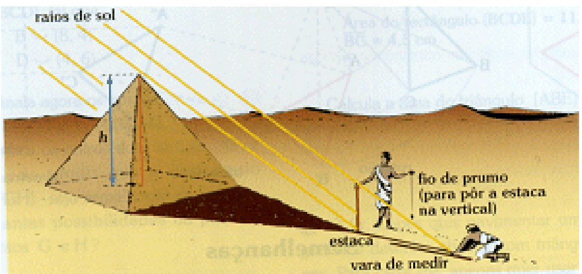
A História da Matemática conta que Tales era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante, e acredita-se que tenha nascido no ano 625 a.C, mas não se sabe ao certo em que ano morreu.

Durante essa viagem de Tales ao Egito, ele foi abordado pelos escribas egípcios (estudiosos da época) para que, em nome do Faraó, calculasse a altura da pirâmide de Quéops, que havia sido construída por volta de 2.650 a.C. Tales não recusou o desafio e utilizou seus conhecimentos geométricos para determinar a altura dessa pirâmide, que hoje sabemos ser de aproximadamente 146 metros.

Para a medição da altura dessa pirâmide Tales fincou sobre a areia, verticalmente, uma estaca, cujo comprimento ele conhecia, e mediu a sombra projetada. Após mediu a sombra da pirâmide, e em seguida concluiu que as sombras (da estaca e da pirâmide) e as alturas (da estaca e da pirâmide), quaisquer que sejam seus tamanhos, são proporcionais.

O que Tales provavelmente tenha feito está apresentado na Figura 11 a seguir, que pressupõe o desenvolvimento prático dessa ideia.

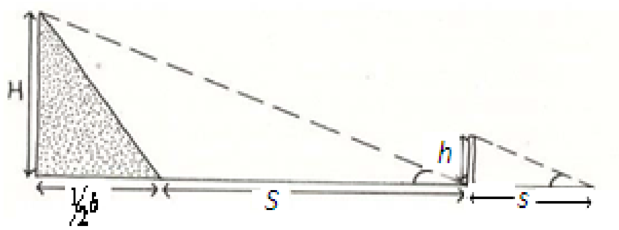
Figura 11: Ideia prática de medição da altura da pirâmide apresentada por Tales de Mileto



Fonte: Mendes (2009a, p.26)

Um detalhe observado por Tales foi a necessidade de acrescentar à medida da sombra projetada pela pirâmide a metade da medida do comprimento da base, porque a pirâmide era muito extensa e escondia uma parte da sombra da pirâmide.
De acordo com a Figura 11 é possível interpretarmos essa ideia por meio de um esquema semelhante ao apresentado na Figura 12 a seguir:

Figura 12: Esquema apresentado para a prática de medição da altura da pirâmide apresentada por Tales de Mileto



Fonte: Mendes (2009a, p.26)

Neste momento, fazendo uso do conhecimento geométrico sobre semelhança dos triângulos, razão e proporção, Tales mostrou que a altura da pirâmide (H) está para a metade da base da pirâmide (1/2b), mais a medida da sombra da pirâmide (S); assim como, a altura da vara (h) está para a medida da sombra da vara (s).
Dessa maneira, Tales conseguiu responder ao desafio que lhe havia sido proposto pelo Faraó, ou seja, determinou a altura da pirâmide de Quéops.

ATIVIDADE 4: (Adaptado: ANDRINI, VASCONCELLOS; 2002)

PRATICANDO O QUE APRENDEU COM TALES

De acordo com a figura ao lado foram registradas algumas medidas como o comprimento da sombra da árvore, 10 metros, a altura do jovem próximo a essa árvore, 1,50m e a projeção da sombra dele, 2,50m. Com essas informações e lembrando-se da ideia do cálculo feito por Tales para medição da altura da pirâmide de Quéops é possível determinar a áltura dessa árvore? Investigue essa situação e se possível for, determine a altura dessa árvore.

ATIVIDADE 5: (Adaptado: ANDRINI, VASCONCELLOS; 2002)

MEDINDO ALTURAS UTILIZANDO SOMBRAS

Lílian deseja calcular a medida da altura do prédio que a sua avó mora. Para obter essa altura ela anotou em um papel a medida do comprimento da sombra do prédio que foi igual a 15m. Nesse mesmo instante ela observou uma árvore ao lado do prédio e verificou que a medida do comprimento da sombra dela era de 1,5m e que a altura dessa árvore era de 5m.Com esses dados, explique como Lílian conseguiria determinar a altura do prédio.

Calcule você também a altura desse prédio...

ATIVIDADE 6:

INVESTIGANDO... MEDINDO ALTURAS SEM A UTILIZAÇÃO DE SOMBRAS

Levando-se em consideração a ideia de medir a altura de objetos de difícil acesso, Diego perguntou qual seria a altura de uma árvore próxima à sua escola. Porém, no dia em que ele iria fazer a medição utilizando sombras não havia sol. Então ele levou esta dúvida para a sala de aula: Qual será a maneira de realizar a medição da altura desse objeto em um dia nublado?

Como não havia sol, Larissa respondeu, na mesma hora, que não seria possível realizar a medição, pois não haveria as sombras necessárias. Porém Gabriel exclamou que tinha uma idéia e fez o seguinte:

a) Ele, com a licença da professora, saiu da sala para avistar uma árvore.

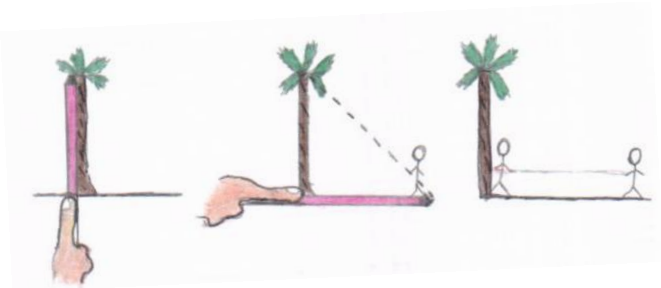
b) Gabriel tomou uma distância da árvore escolhida, esticou o braço, fechou um olho e mirou a ponta da caneta na ponta superior da árvore e a ponta do polegar na base da árvore.

c) Depois, pediu para que Larissa ficasse perto da árvore e esperasse um pouco.

d) Ainda com um olho fechado e com o braços esticado, Gabriel manteve a ponta do polegar na direção da base da árvore e girou a caneta.

e) Depois ele pediu para Larissa caminhar até o local onde a ponta da caneta apontou, pois esse seria o tamanho aproximado da árvore.

Assim foi fácil! Eles mediram a distância da árvore ao local onde Larissa ficou parada, e então descobriram a altura aproximada da árvore, mesmo não tendo sol. A figura a seguir mostra a situação explicada:



Você compreendeu como foi prática a idéia de Gabriel? Faça o mesmo, medindo a altura de uma árvore qualquer.

Depois das medições responda as seguintes questões:

a) O que você achou do método sugerido por Gabriel? ________________________

b) Você encontraria outro procedimento para calcular alturas de difícil acesso?

____

c) Compare essa ideia de Gabriel com a de Tales e tire as suas conclusões.

____

ATIVIDADE 7:

CONSTRUINDO UM TEOREMA

1ª Etapa: Construção no papel milimetrado:

- Desenhar três retas paralelas entre si e escolher distâncias diferentes entre elas, duas a duas.
- Nomear essas retas por r, s e t.
- Traçar duas retas transversais e nomeá-las por m e n.
- Nomear os pontos de intersecção pertencentes a m por A, B e C e os pontos de intersecção pertencentes a n por D, E e F;
- Medir os segmentos AB, BC, DE e EF;
- Registrar essas medidas em uma tabela semelhante à seguinte:

Segmento	Medida

- Calcular as razões AB/BC e DE/EF (Pode utilizar a calculadora).
- Anotar os valores encontrados.

Responda:

a) Compare os resultados que você obteve. Qual é a relação entre essas medidas?

____

2ª Etapa

- Alterar as distâncias entre as retas paralelas r, s e t.
- Novamente, medir os segmentos AB, BC, DE e EF e registrar em uma nova tabela semelhante à construída anteriormente.

- Calcular as razões AB/BC e DE/EF, utilizando a calculadora, e anotar os resultados.

Responda:

a) O que se pode afirmar sobre os segmentos de reta paralelas quando são cortados por retas transversais?

____

3ª Etapa

- Marcar um ponto e nomear por A.
- Traçar duas retas r e s concorrentes em A.
- Marcar um ponto sobre cada reta, diferentes de A.
- Nomear esses pontos por B e C.
- Traçar uma reta que passe pelos pontos B e C.
- Nomear a reta que contém os pontos B e C de t.
- Traçar uma reta paralela ao lado BC do triângulo tal que passe pelo ponto A.
- Nomear essa reta por u.
- Marcar outros dois pontos sobre as retas r e s “acima” do ponto A.
- Nomear esses pontos por D e E.
- Traçar uma reta paralela às retas t e u passando por D e F.
- Nomear essa reta por v.

Responda:

a) Qual é a relação de posição entre as retas t, u e v da maneira que foram traçadas? (Paralelas, concorrentes ou transversais?) _________________________

b) Utilizando a régua, meça o comprimento dos segmentos AD, AB, AE, AC e anote-os.____

c) Quais são os segmentos de reta formados pelos pontos A, B, C, D e E que estão sobre a reta r? ____

d) Quais são os segmentos de reta formados pelos pontos A, B, C, D e E que estão sobre a retas? ____

e) Calcule as razões DA/AC e EA/AB (pode utilizar a calculadora) e anote os valores encontrados. ____

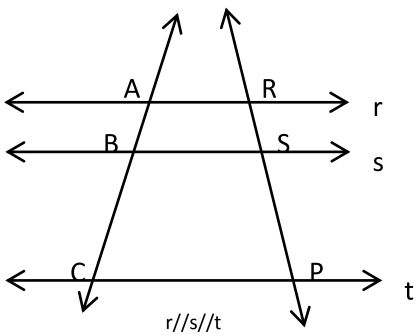
f) O que se pode concluir sobre as razões DA/AC e EA/AB? ___________________

g) O que se pode afirmar quando as retas transversais se interceptam entre o feixe de retas paralelas? ____

ATIVIDADE 8:

AFIRMAÇÕES SOBRE O TEOREMA DE TALES

Observando o seguinte feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais é possível escrevermos algumas proporções. Dentre as que foram registradas abaixo, assinale com C aquelas que estiverem corretas e com E aquelas que estiverem erradas. Fique atento a cada caso e tente justificar as proporções que estiverem incorretas:



a ( ) $\frac{AB}{BC} = \frac{RS}{SP}$ b ( ) $\frac{BC}{SP} = \frac{AB}{RS}$ c ( ) $\frac{AB}{SP} = \frac{AB}{RS}$

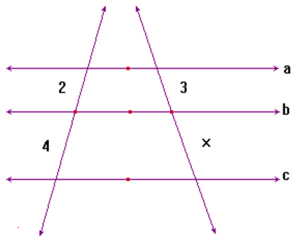
d ( ) $\frac{AB}{RS} = \frac{SP}{BC}$ e ( ) $\frac{RP}{RS} = \frac{AC}{AB}$ f ( ) $\frac{AC}{BC} = \frac{RP}{SP}$

ATIVIDADE 9: (Adaptado: DANTE; 2009)

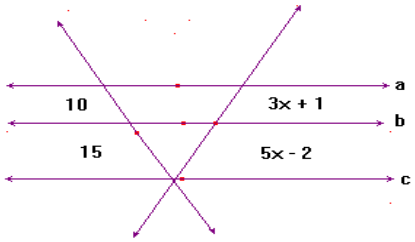
INVESTIGANDO O TEOREMA DE TALES EM FEIXE DE RETAS

Observando cada situação de feixe de retas paralelas (a//b//c) cortadas por transversais,determine o valor da incógnita x, sabendo-se que as medidas estão na mesma unidade.

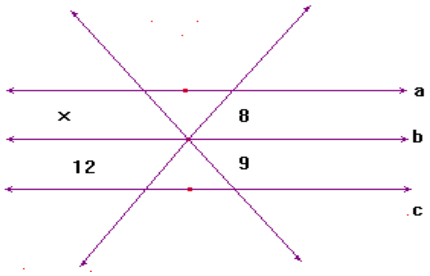
a)



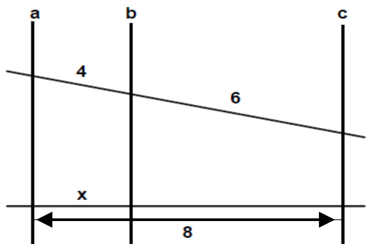
b)



c)



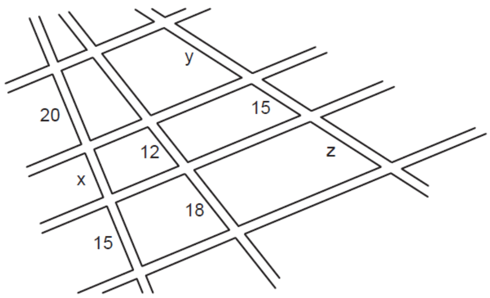
d)



ATIVIDADE 10: (Adaptado: ANDRINI, VASCONCELLOS; 2002)

RETAS PARALELAS E TRANSVERSAIS NO MAPA

A figura a seguir mostra um mapa com quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias estão indicadas no mapa, em quilômetros, mas existem algumas que precisam ser calculadas. Portanto, calcule as distâncias que foram indicadas por x, y e z:



ATIVIDADE 11: (Adaptado: ANDRINI, VASCONCELLOS; 2002)

RETAS PARALELAS E TRANSVERSAIS NA INSTALAÇÃO ELÉTRICA

Ao realizar uma instalação elétrica, o eletricista Daniel fez um esquema indicando dois fios transversais, r e s, aos fios paralelos da rede central a, b, c e d. Com base nessa informação e observando o esquema abaixo, quais são os valores dos comprimentos indicados por x e y?