



# Tarefas matemáticas inspiradas nos “Elementos” de Euclides

---

*Volume 1*



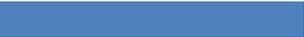


**Thais Maria Barbosa Goulart**

Ana Cristina Ferreira  
Jorge Luís Costa

# **Tarefas matemáticas inspiradas nos “Elementos” de Euclides**

Tarefas matemáticas inspiradas nos “Elementos” de Euclides



Mestrado Profissional  
em Educação Matemática



**EDITORA UFOP**

Ouro Preto | 2020

Tarefas matemáticas inspiradas nos “Elementos” de Euclides

© 2020

Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Educação Matemática  
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

**Reitora da UFOP** | Profa. Dra. Claudia Aparecida Marlière de Lima  
**Vice-Reitor** | Prof. Dr. Hermínio Arias Nalini Júnior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS  
**Diretor** | Prof. Dr André Talvani Pedrosa da Silva  
**Vice-Diretor** | Prof. Dr. Rodrigo Fernando Bianchi

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
**Pró-Reitora** | Prof. Dr. Sergio Francisco de Aquino  
**Pró-Reitora Adjunta** | Profa. Dra. Renata Guerra de Sá Cota



**Coordenação** | Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti

#### MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira, Prof. Dr. André Augusto Deodato, Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes, Prof. Dr. Daniel Clark Orey, Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos, Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti, Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu, Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Prof. Dr. Jorge Luís Costa, Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana, Profa. Dra. Marli Regina dos Santos, Prof. Dr. Milton Rosa, Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira.

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

G694t Goulart, Thais Maria Barbosa.  
Tarefas matemáticas inspiradas nos “Elementos” de Euclides.  
[manuscrito] / Thais Maria Barbosa Goulart. - 2020.  
56 f.: il.: color..

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira.  
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Luís Costa.  
Produção Científica (Mestrado Profissional). Universidade Federal de  
Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-  
Graduação em Educação Matemática.  
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Euclides, Elementos de. 3.  
Matemática - História. 4. Geometria - Estudo e ensino. 5. Ensino  
fundamental. 6. GeoGebra (Software). I. Costa, Jorge Luís. II. Ferreira, Ana  
Cristina. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 514:373.3

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

Catlogação: sisbin@sisbin.ufop.br

Reprodução proibida Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.  
Todos os direitos reservados.

*Em todos os momentos da história e em todas as civilizações,  
as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de  
fazer e de saber.*

D’Ambrosio, 1999

## Expediente Técnico

---

**Organização** | Thais Maria Barbosa Goulart

**Pesquisa e Redação** | Thais Maria Barbosa Goulart | Ana Cristina Ferreira  
| Jorge Luís Costa

**Revisão** | Silvana Costa

**Projeto Gráfico e Capa** | Editora UFOP

**Fotos** | Thais Maria Barbosa Goulart

**Ilustração** | Ralf Soares de Mello (Núcleo de Projetos Gráficos/UFOP)

# Índice

---

Primeiro, uma reflexão.....	10
TAREFA 1 – A BIBLIOTECA DE ALEXANDRIA, EUCLIDES E OS “ELEMENTOS”	12
TAREFA 2 - A CONSTRUÇÃO DE ALTARES INDIANOS E AS PRIMEIRAS DEFINIÇÕES DE EUCLIDES.....	21
Finalizando.....	34
Referências.....	36
Algumas sugestões de leitura e pesquisa .....	37
Texto orientador das tarefas desenvolvidas .....	39
Tarefa 1 .....	39
Tarefa 2.....	42

## Primeiro, uma reflexão...

---

### Querido(a) professor(a),

Minha vida acadêmica e minha experiência profissional, ainda que curta, me levaram a aprofundar meus estudos quanto ao uso do *software* GeoGebra em sala de aula. No meio desse percurso, descobri meu encanto pelas potencialidades da História da Matemática como abordagem de ensino e então, a partir de excelentes orientações, percebi que era possível promover um ambiente de estudo, no qual a História da Matemática e o GeoGebra permitissem atingir objetivos pedagógicos para o ensino de algumas noções de Geometria plana.

Acredito que ensinar Geometria em uma perspectiva histórica pode contribuir para transformar crenças, tais como: que a Geometria (como a Matemática) seja um conhecimento pronto e acabado; um campo do saber difícil cujo conteúdo apenas quem tem talento é capaz de aprender; e que a Geometria (bem como a Matemática) foi desenvolvida apenas por gênios, dentre outras.

Quero compartilhar com você algumas reflexões e tarefas desenvolvidas na pesquisa de campo. Busquei inspiração nos “Elementos”, de Euclides, para que, a partir de um contexto histórico de sua época, e também anteriormente a ela, pudesse promover a valorização da Matemática como uma construção humana, em um ambiente que permite que o aluno se torne mais ativo na construção do conhecimento matemático, o GeoGebra.

Minha pesquisa de campo se desenvolveu em uma classe de outro professor, um colega de profissão, que se tornou um amigo, e teve um papel muito importante para que as tarefas pudessem ser desenvolvidas. Eu não poderia deixar de

mencioná-lo aqui, pois convivemos, por um bom tempo, em um ambiente de pesquisa e prática.

Quero ressaltar que durante o trabalho, ocorreram diversas eventualidades, principalmente no laboratório de informática. Tais eventualidades causam impactos em um trabalho baseado nesta proposta. Entretanto, caro(a) professor(a), apesar dos desafios, as contribuições encontradas e todo o processo vivenciado me proporcionaram grande alegria, e me fizeram refletir sobre a minha prática profissional.

Apresento aqui, o volume 1 da descrição e reflexões sobre as tarefas desenvolvidas em sala de aula<sup>1</sup>, além de um texto “guia”, que me orientou durante o desenvolvimento das tarefas. Destaco que esse texto pode ser uma orientação para você, professor(a), e pode ser adaptado à sua realidade.

Convido você agora a fazer uma “viagem no tempo”, para conhecer um pouco sobre os “Elementos”, Euclides e sua época, além dos resultados e a participação dos alunos durante o trabalho de campo. Espero que essa proposta possa inspirar você, e que possa auxiliá-lo em sua prática docente.

Um grande abraço!

Thais Maria

---

<sup>1</sup> As tarefas desenvolvidas no laboratório de informática estão no Volume 2.

## TAREFA 1 – A BIBLIOTECA DE ALEXANDRIA, EUCLIDES E OS “ELEMENTOS”

---

**Objetivo:** promover uma primeira aproximação com a história de Euclides, e os “Elementos”, e o contexto de sua época.

**Duração estimada:** uma aula de 40 minutos.

**Espaço/ambiente:** Sala de aula.

**Materiais:** Mapa Mundi (planisfério); DataShow; Vídeo/Filme sobre a biblioteca de Alexandria e Euclides; régua e compasso; e caderno de registro.

Nesta primeira tarefa<sup>2</sup>, os alunos foram convidados a imaginar que faríamos uma “viagem no tempo”, para uma época anterior à de Cristo, para saber de onde vêm muitas das ideias que eles estudaram e/ou que ainda estudarão na disciplina de Matemática.

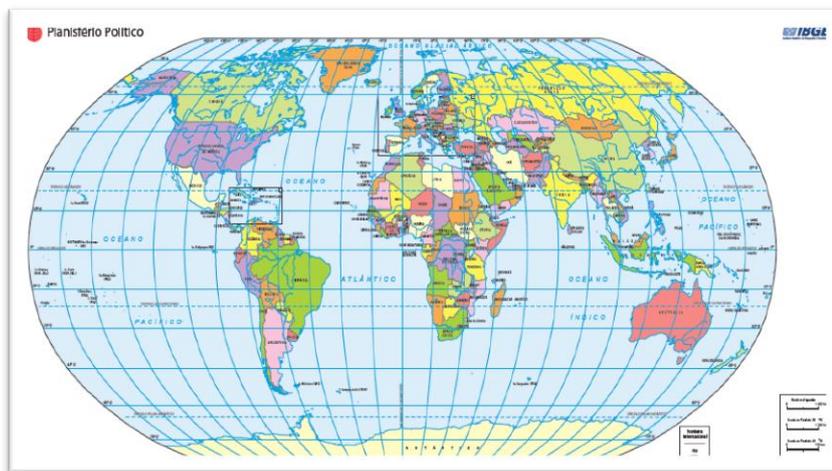
A princípio, ao observar as expressões faciais, parecia que a proposta soava um pouco estranha para eles. Entretanto, após apresentar melhor a proposta, com uma contextualização histórica, promoção de diálogos e com o auxílio de alguns recursos (manuais e tecnológicos), os alunos reagiram bem ao convite e se tornaram bastante participativos. Com isso, concordamos com Miguel e Miorim (2008, p. 162) ao dizer que, com a História da Matemática em sala de aula, devemos “colocar questões e problemas, sim! Constituir uma nova história, sim! Usar a história não, porque ela não é um objeto de uso, e sim um campo de diálogo!”. Sendo assim, foi necessário promover uma contextualização e problematização dos “Elementos”, de Euclides, e de sua época para que nossos objetivos pudessem ser alcançados.

Cada dupla recebeu um planisfério, conforme figura 1, do tamanho de duas folhas de ofício para que, a cada destino visitado, visualizassem a sua localização.

---

<sup>2</sup> Ver texto orientador na página 39.

Figura 1 - Planisfério entregue às duplas



Fonte: <https://mapas.ibge.gov.br>.

Na medida em que entregava o planisfério para as duplas, contava a eles sobre a viagem que faríamos e que no planisfério iríamos localizar onde estávamos e para onde viajaríamos. Nesse momento, percebemos que as duplas começaram a explorar o planisfério, conversavam entre si apontando para os mapas.

Localizamos então o Brasil, Minas Gerais, Belo Horizonte e a cidade de Ibirité. Em seguida, os alunos localizaram o Egito e a cidade de Alexandria. Algumas duplas encontraram o Egito rapidamente, mas outras tiveram dificuldades para fazê-lo. Além disso, ao perguntar sobre qual seria o continente a que o país pertencia, rapidamente responderam “África” e “no continente africano”.

O trabalho em dupla, além de facilitar a locomoção em sala de aula, favorece o diálogo entre os alunos.



A figura 2, a seguir, mostra o exato momento da localização do Egito no planisfério. Para Miguel e Miorim (2008, p. 155), ao assumir um papel interdisciplinar,

é possível “retirar a Matemática do seu sempre questionado isolamento”, fazendo com que ela possa contribuir para o alcance de metas pedagógicas que “visem à formação crítica do cidadão”.

Figura 2 - Momento da localização no mapa



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora.

Nossa intenção era proporcionar conhecimentos de Geografia, além da História, utilizando recursos variados, assim, logo em seguida, utilizamos o Datashow para projetar em uma tela imagens do Google Earth<sup>3</sup>. Além da animação, esse recurso permitiu visualizar algumas capitais e cidades no planisfério.

Com a animação do Google Earth, talvez a percepção de distância e localização tenha ficado mais interessante, pois, ao assistir à gravação do vídeo desse dia, observei o envolvimento e as expressões de surpresa das duplas. Por exemplo, logo após as localizações feitas no planisfério, pedi para que olhassem para a imagem transmitida pelo Datashow. Dessa forma, além da animação, esse recurso permitiu a visualização das capitais e cidades, enquanto os alunos as localizavam no planisfério.

<sup>3</sup> Programa de computador da empresa Google que apresenta um modelo tridimensional do globo terrestre. Disponível em: <https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/>.

Com a animação do Google Earth, talvez a percepção de distância e localização tenha ficado mais interessante, pois, ao assistir à gravação do vídeo desse dia, foi possível verificar as expressões de surpresa e envolvimento das duplas. Por exemplo, logo após as localizações feitas no planisfério, pedi para que olhassem para a imagem transmitida pelo Datashow.

Iniciamos nossa “viagem no tempo” para a cidade de Alexandria, no Egito do século III a.C.. Apresentamos, em seguida, um pequeno vídeo<sup>4</sup> sobre a biblioteca de Alexandria e Euclides.



Infelizmente, como o vídeo é antigo e legendado, a qualidade da imagem não é muito boa. Durante sua apresentação, algumas duplas se dispersaram e podem ter perdido alguma informação. Mesmo assim, ele foi o ponto de partida de todo o trabalho desenvolvido e promoveu algumas discussões com os alunos sobre o conhecimento contido na biblioteca. O final do vídeo (sobre a destruição da biblioteca), por exemplo, causou certa comoção em algumas duplas. Renata (da dupla D7<sup>5</sup>) mencionou sobre seu colega de dupla: “ele ficou emocionado”, e realmente era possível ver algumas expressões tristes. Conversamos com eles sobre qual seria a importância da biblioteca naquela época e alguns responderam: “para ter mais conhecimento” e “para registrar o conhecimento”. Um aluno perguntou sobre o papiro, já que há menção sobre ele no vídeo. Após explicar o que era um papiro, houve um comentário de Davi (dupla D14): “então é por isso que agora se chama papel”.



Como o vídeo é legendado e a qualidade da imagem não é muito boa, solicite a atenção dos alunos quanto à leitura.

<sup>4</sup> Utilizamos alguns trechos dos vídeos disponíveis em [www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4](http://www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4) e [www.youtube.com/watch?v=X033FOYg\\_p8](http://www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8).

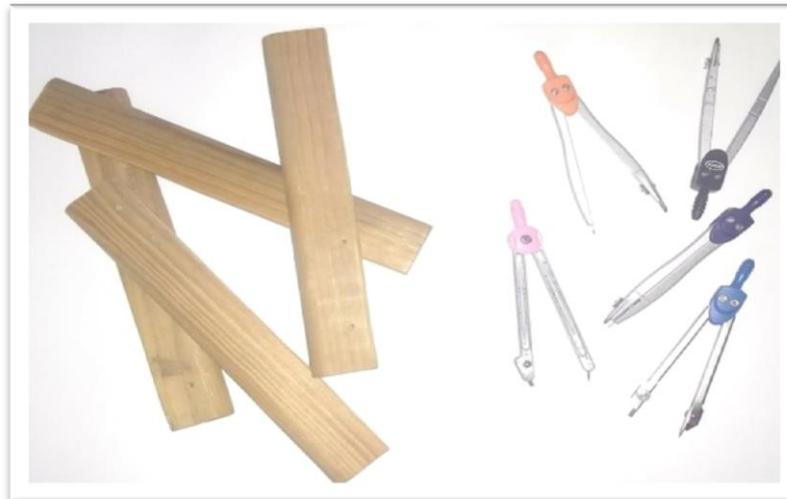
<sup>5</sup> Utilizamos códigos (D1, D2, D3, ...) para nomear as duplas, mas também usamos nomes fictícios para mencionar os integrantes.

Em seguida, comentamos com os alunos sobre um importante matemático que trabalhou na biblioteca de Alexandria (Euclides) e que organizou vários conhecimentos matemáticos em uma obra chamada “Elementos”. Com isso, as duplas foram convidadas a imaginarem que eram estudantes da biblioteca, alunos de Euclides, para estudar algumas ideias matemáticas contidas em “Elementos”. Em seguida, mencionamos que, como alunos de Euclides, eles precisariam aprender a utilizar dois instrumentos básicos: régua e compasso. Nesse instante, ao iniciar a distribuição dos instrumentos novamente, Davi comentou: “Ah! Um pedaço de pau e um compasso” (todos riram.).

Enquanto explicava que os desenhos da obra “Elementos” feitos por Euclides eram construídos com tais instrumentos, o professor Márcio ajudou a distribuir uma régua não graduada (de madeira) e um compasso a cada dupla. A régua foi construída manualmente a partir de ripas de madeira. Já os compassos foram comprados em uma papelaria. A figura 3 mostra alguns desses instrumentos utilizados nessa tarefa

Utilizamos ripas de madeira para confeccionar as régua, porém ficam bastante robustas. Se possível, utilize, por exemplo, o material MDF.

Figura 3 - Instrumentos distribuídos para as duplas: régua não graduada e compasso



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, alguns alunos questionaram o que era o “pedaço de madeira”.

*Prof. Thais: Não parece uma régua?*

*Pedro: Não, porque não tem número.*

*Naty: Uai, como você vai saber os centímetros?*

*Prof. Thais: Euclides utilizou a régua sem graduação, ou seja, sem marcação ou divisão, mas sabiam que nem são necessárias as divisões? Em breve iremos verificar isso.*

(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 30/04/2019).

Essa verificação posterior, mencionada no diálogo, ocorreu durante a tarefa 2, na qual os alunos puderam construir, por exemplo, segmentos iguais utilizando o compasso para transportar medidas.

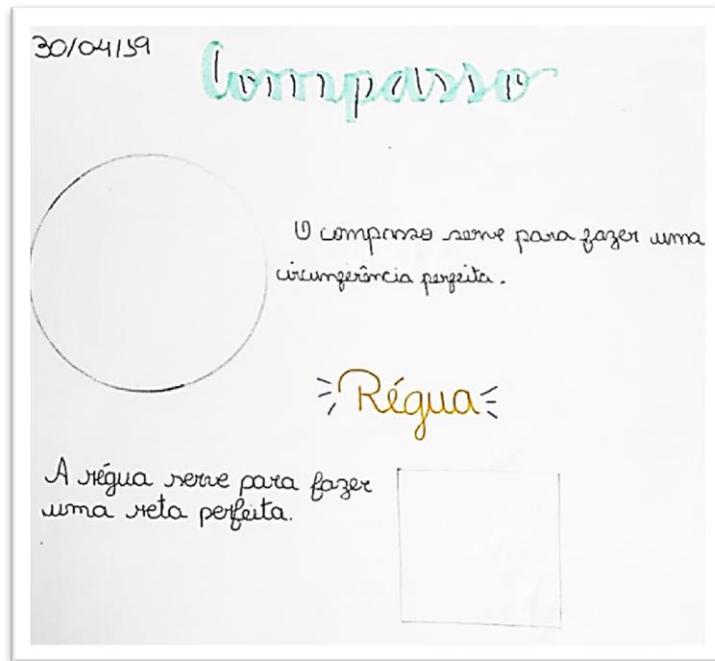
Compreender o compasso como um medidor (ou como um transportador de medidas) é muito importante para um trabalho com os “Elementos”, além disso, pode ser uma preparação para a o uso da ferramenta “Compasso” no *software* GeoGebra.



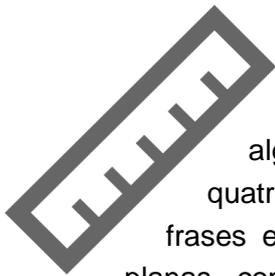
Além dos instrumentos da figura 3, cada dupla recebeu um “caderno de registro” que deveria ser utilizado durante as tarefas. Nesse caderno, as duplas deveriam registrar algumas informações e/ou responder questões quando solicitadas.

Para finalizar a tarefa 1, propusemos às duplas que construíssem alguns desenhos, utilizando a régua não graduada e o compasso, e que registrassem as possibilidades em frases.

Figura 4 - Construções com régua e compasso da dupla D2



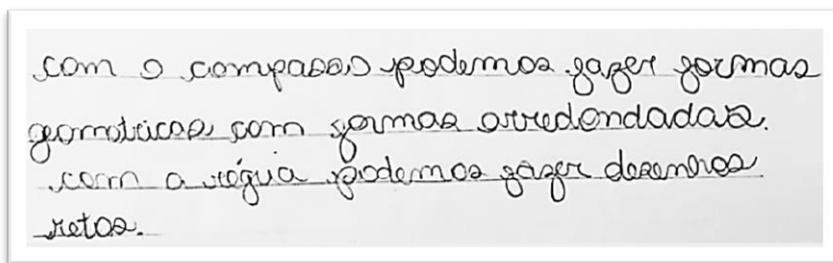
Fonte: Dados da pesquisa.



Nas construções realizadas pela dupla D2 (figura 4), as alunas mencionaram as palavras circunferência e reta. Isso evidencia que já conheciam os nomes e a representação de algumas figuras planas. Ressaltamos que, das 17 duplas, apenas quatro fizeram registros somente com desenhos. Nas explicações em frases e registros, as duplas citaram exemplos de figuras geométricas planas como, círculos, circunferência, quadrados, retângulos, retas e triângulos; e de figuras espaciais e/ou físicas como planetas, rodas, pneu, cone e cubo.

Na figura 5, podemos observar que a dupla D15, ao escrever sobre o que era possível desenhar com o compasso, não menciona círculo ou circunferência, mas sim “formas arredondadas” e, em relação à régua, escreve que ela permite “fazer desenhos retos”. Das 17 duplas, uma delas menciona a palavra circunferência, e oito, a palavra círculo.

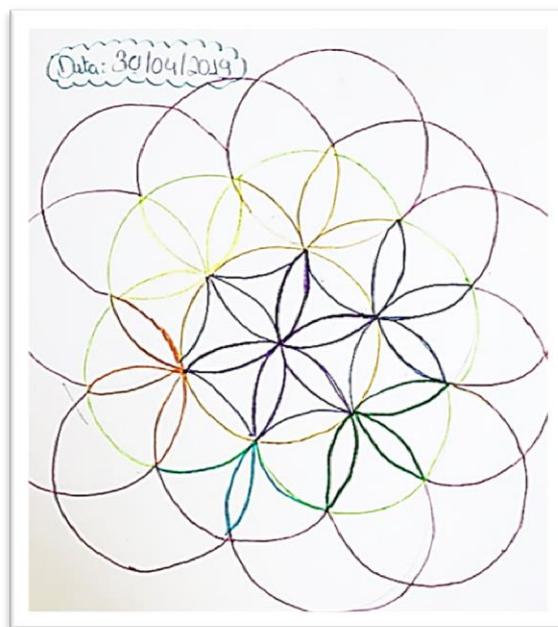
Figura 5 - Registro da dupla D15 sobre construções com régua e compasso



Fonte: Dados da pesquisa.

Duas duplas apresentaram construções mais artísticas, utilizando o compasso. Na figura 6, podemos visualizar um desenho com padrões geométricos construídos a partir de circunferências e apenas com o compasso. Ao perguntar se já tinham utilizado o compasso e onde aprenderam, a dupla D10 respondeu que no ano anterior eles aprenderam a fazer esses desenhos na disciplina de Artes.

Figura 6 - Construções com régua e compasso da dupla D10



Fonte: Dados da pesquisa.

Esse momento foi breve – os alunos dispuseram de cerca de dez minutos para realizar a tarefa proposta – pois, conforme nosso planejamento, a tarefa 1 deveria ser desenvolvida em apenas uma aula. Porém, o tempo não foi suficiente para observar quais duplas apresentavam dificuldades com o manuseio do compasso. Dessa forma, posteriormente, na tarefa 2, verificamos que muitos estudantes não estavam habituados com o uso do compasso, mesmo já tendo utilizado esse instrumento na aula de Artes no ano anterior.



Professor(a), essa é uma tarefa que pode gerar expectativas quanto ao que está por vir. Então, não se esqueça de iniciar a tarefa 2 com a mesma proposta da “viagem no tempo”.

## TAREFA 2 - A CONSTRUÇÃO DE ALTARES INDIANOS E AS PRIMEIRAS DEFINIÇÕES DE EUCLIDES

**Objetivos:** Promover uma primeira aproximação com a história de Euclides e os “Elementos”, e o contexto de sua época; Realizar construções geométricas a partir da história dos altares indianos; Desenvolver habilidades técnicas e geométricas para a utilização do *software* GeoGebra na próxima tarefa.

**Duração estimada:** sete aulas de 40 minutos.

**Espaço/ambiente:** Sala de aula.

**Materiais:** Planisfério, DataShow, régua, compasso, tesoura, folhas coloridas e caderno de registro.

Desde o estudo piloto e durante o planejamento das tarefas, percebemos a necessidade de retomar os conhecimentos básicos de Geometria (como pontos, retas, segmentos, polígonos, dentre outros) para que pudéssemos trabalhar com algumas das proposições do Livro I de Euclides. E assim, a segunda tarefa demandou sete aulas para ser desenvolvida. Seu propósito, além de proporcionar informações históricas e geográficas que permitissem uma associação da Matemática com práticas sociais variadas e de evidenciar como pessoas distintas de variadas culturas construíram conhecimentos matemáticos que posteriormente seriam utilizados por Euclides em sua obra, era desenvolver a habilidade de manusear e realizar construções com os instrumentos geométricos (régua não graduada e compasso), bem como rever ou ter contato com algumas noções básicas de Geometria (como segmentos, retas perpendiculares e paralelas, ângulo reto, dentre outros) que seriam necessárias para a realização das tarefas no GeoGebra.





Na tarefa 2<sup>6</sup>, “viajamos” para um período anterior à época de Euclides, buscando compreender como outra cultura utilizava a Matemática em suas práticas sociais. Dessa vez, a Índia foi o destino. Novamente, as duplas foram convidadas a localizar o país, identificar o continente ao qual pertence e observar a distância entre a Índia e o Egito. Essas observações também ocorreram com a animação do Google Earth. Esses recursos se tornaram o ponto de partida para iniciar a tarefa, pois, ao rever as gravações em vídeo desse momento, observamos que o aluno Davi parecia empolgado com a “viagem”, ao solicitar que apagassem a luz da sala (para visualizar melhor a animação no Google Earth) e ao dizer a seguinte frase: “Vamos fazer a viagem, professora!”. Além disso, cada dupla recebeu um planisfério preto e branco para que pintassem cada região visitada no mundo. Nesse momento, algumas duplas, aparentemente, estavam bem concentradas na tarefa solicitada, Camila e Cássia (D17), por exemplo, pareciam bem envolvidas, pois conversavam entre si e apontavam para os mapas, além disso, uma observava o mapa colorido, enquanto a outra pintava os países até então mencionados (Egito e Índia).

Procuramos conhecer os Sulbasutras<sup>7</sup> e a Matemática envolvida na construção de altares na civilização védica (GASPAR, 2003). Nessa civilização, a construção dos altares era algo de extrema importância e deveria ser muito rigorosa para merecer que os deuses atendessem ao desejo de quem os construía. Para que os rituais fossem bem-sucedidos, os altares deveriam ser construídos de forma muito precisa, ou seja, a Matemática era muito importante para eles. Buscamos, com essa tarefa, mostrar aos alunos algumas “necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

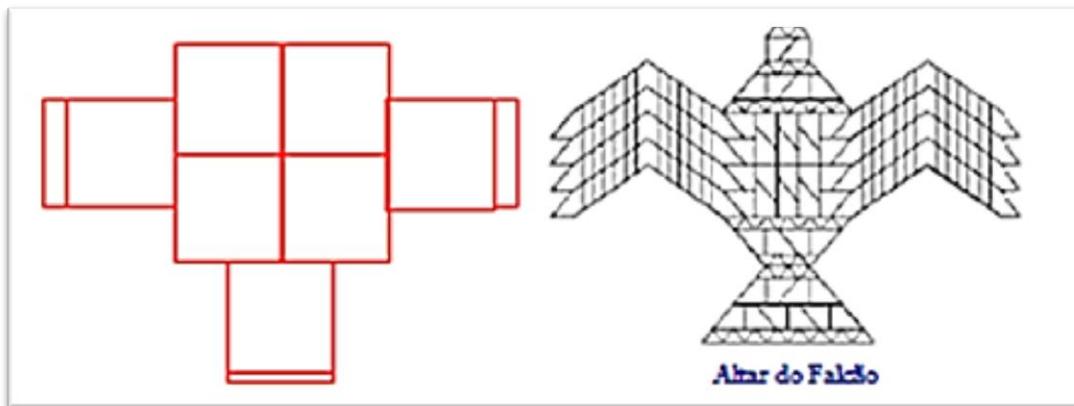
Nesse momento, mostre aos estudantes a imagem da figura 7 (próxima página), evidenciando que existem vários modelos desse tipo de altar indiano.

<sup>6</sup> Ver texto orientador na página 42.

<sup>7</sup> Os Sulbasutras são textos que possuem instruções para a construção de altares sagrados (GASPAR, 2003).

Para essa tarefa, escolhemos o altar do Falcão, um dos mais famosos altares indianos, para uma problematização histórica atrelada. Em seu modelo de construção mais simples, sua base era formada por sete quadrados e meio (ver figura 5): o corpo do altar tinha quatro quadrados; asas e cauda, um quadrado cada. Para que a construção se aproximasse mais de um falcão, nesse modelo, as asas e cauda eram alongadas: asas tinham a mais um quinto de um quadrado, e a cauda mais um décimo de um quadrado.

Figura 7 - Altar do Falcão



Fonte: Extraído de Gaspar (2003, p 105).

A figura acima representa dois modelos de construção de um altar do Falcão: à direita, um modelo mais complexo e mais semelhante ao pássaro, constituído por triângulos e quadriláteros; à esquerda, um modelo mais simples, constituído por quadrados e retângulos.

Propusemos a construção da base do modelo mais simples. Para construí-la, inicialmente realizamos uma pequena discussão sobre as características<sup>8</sup> de um quadrado para posteriormente realizar a sua construção.

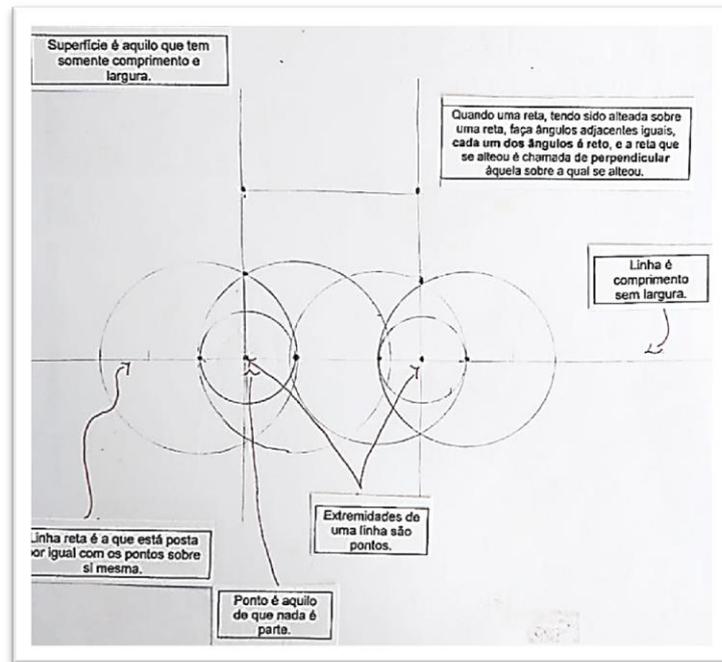
Simultaneamente, iniciamos nossa aproximação ao Livro I dos “Elementos”, pois, a cada etapa da construção do quadrado, procuramos associar os entes

<sup>8</sup> Utilizamos aqui o termo características e não propriedades por considerar que a discussão proposta nesse momento não focou exclusivamente os aspectos formais e nem os esgotou, apenas procurou despertar o olhar dos alunos para determinadas características que diferenciam uma figura geométrica de outra e que seriam necessárias e suficientes para sua existência.

geométricos com as definições de Euclides (ditas aos alunos como ideias de Euclides<sup>9</sup>), evidenciando também a necessidade da padronização de nomenclatura dos pontos, retas e segmentos.

A construção do quadrado foi realizada em conjunto com os alunos, ou seja, enquanto realizava os desenhos no quadro, as duplas construía o quadrado no caderno. Iniciamos com a explicação de que as figuras planas são construídas em uma região que Euclides chamou de “superfície” e definiu como “aquilo que tem somente comprimento e largura” (BICUDO, 2009, p. 97).

Figura 8 - Construção de um quadrado com régua não graduada e compasso (D2)



Fonte: Dados da pesquisa.

A construção da dupla D2, na figura 8, mostra a construção final de um quadrado. As duplas receberam várias “plaquinhas” com algumas definições de Euclides extraídas da obra “Elementos” por Irineu Bicudo. Assim, na medida em que mencionávamos alguma definição de Euclides, as plaquinhas eram coladas

<sup>9</sup> Algumas ideias de Euclides que foram articuladas durante cada etapa da construção: “Ponto é aquilo que nada é parte”; “Extremidades de uma linha são pontos”; dentre outras.

próximas ao desenho. A construção dos quadrados para o altar do Falcão permitiu avançar e estudar também os conceitos de reta perpendicular e paralelas definidos por Euclides em sua obra.

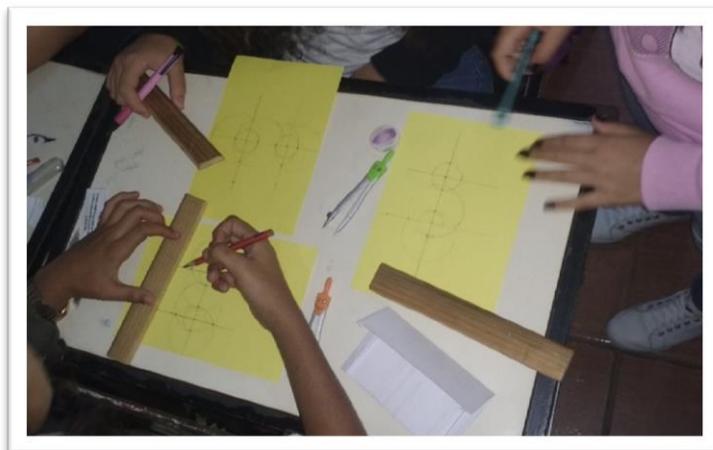
Realizar essa construção pode demandar um tempo maior que o esperado, já que a habilidade com o manuseio do instrumento pode fazer com que cada aluno finalize uma etapa da construção em tempos diferentes.



Em seguida, pedimos às duplas que se organizassem em grupos maiores, de duas ou três duplas, para, coletivamente, construírem juntos um altar do Falcão. Para agilizar a construção, a turma foi dividida em seis grupos e cada grupo deveria montar um altar do Falcão.

Essa parte da tarefa permitiu explorar o compasso como um instrumento de transporte de segmento – algo muito importante para a realização das tarefas no GeoGebra – pois os quadrados foram construídos separadamente e deveriam ter exatamente a mesma medida. Com isso, o grupo precisou definir o tamanho do quadrado e cada aluno deveria utilizar o compasso como referência (já que a régua não era graduada). A figura 9 mostra um grupo de quatro alunos realizando a construção dos quadrados para montar um altar do Falcão.

Figura 9 - Construção de quadrados para montagem do altar do Falcão



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora.

Esse momento demandou muito tempo, devido às dificuldades de algumas duplas para a construção do quadrado e com o manuseio do compasso. Além disso, é importante ressaltar que os alunos conversavam muito e se levantavam dos seus lugares, principalmente quando iniciaram a montagem do altar do Falcão. A figura 10, a seguir, retrata o momento em que um grupo de alunos iniciava a montagem do altar do Falcão com sete dos oito quadrados iguais construídos.

Nesse momento, os alunos ficam mais agitados e dispersos. Organize a sala em grupos e organize os materiais a serem distribuídos em “kits” para cada grupo.

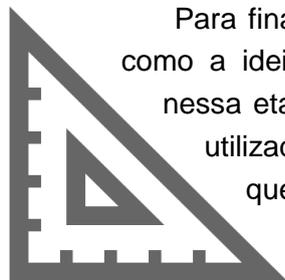
Figura 10 - Início da montagem do altar do Falcão



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora.

Entretanto, destacamos que foi durante essa tarefa que os alunos puderam construir quadrados com medidas congruentes utilizando uma régua sem graduação. Isso possibilitou a verificação de que realmente não era necessário a utilização de uma régua graduada, pois o compasso assumiria essa função. Dessa forma, como

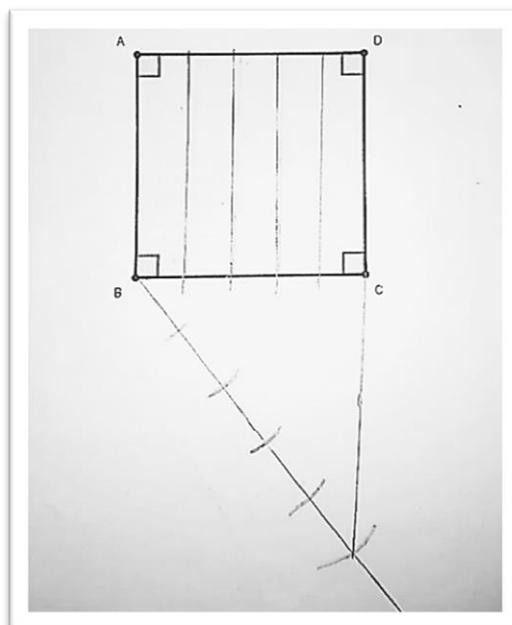
cada integrante do grupo precisava construir pelo menos um quadrado e estes deveriam possuir as mesmas medidas, eles deveriam utilizar o compasso para construir quadrados com as mesmas dimensões.



Para finalizar a construção do altar, mais conceitos foram trabalhados, como a ideia de retas paralelas, pois foi necessário utilizar o esquadro nessa etapa da tarefa. O esquadro não foi um instrumento de desenho utilizado por Euclides, mas também é um instrumento muito antigo e que agilizou o processo de divisão do quadrado em cinco partes iguais, para construir os prolongamentos das asas e da cauda do altar do Falcão.

Para construir os retângulos que representam um quinto e um décimo de um quadrado, primeiramente, realizamos as divisões em uma folha, entregue a cada dupla (conforme final da tarefa na p. 54), que já continha um desenho de um quadrado. Essa construção também foi realizada no quadro, enquanto as duplas desenhavam na folha. A figura 11 apresenta a construção final da dupla D12:

Figura 11 - Divisão do quadrado em cinco partes iguais pela dupla D12



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a construção da figura 11, algumas definições de Euclides foram mencionadas, como a definição de reta, de segmento, de ângulo reto e principalmente de retas paralelas. Por exemplo, após a divisão do quadrado, mencionamos aos alunos que os segmentos (retas) construídos dentro do quadrado possuem uma característica especial e que também foram definidos por Euclides.



Retome as definições de Euclides, presentes no início do Livro I, sempre que construir alguma figura Geométrica (segmentos, retas, paralelas, etc). Mas, lembre-se, para algumas definições, há a necessidade de adequação da linguagem.

A figura 12 mostra um momento em que um aluno realizava a divisão do quadrado com um esquadro também sem graduação:

Figura 12 - Aprendendo a dividir um quadrado em cinco partes iguais



Fonte: Dados da pesquisa.

A imagem registra o momento no qual o aluno João (D6) estava dividindo um dos quadrados, construídos em conjunto, em cinco partes iguais, para finalizar o altar do seu grupo. Note que, enquanto ele se concentrava na construção, alguns de seus colegas aguardavam. Nesse momento, os alunos conversavam muito, já que apenas um integrante de um grupo de seis alunos realizava a construção. Além disso, observamos que as divisões dos quadrados pelas duplas não foram “perfeitas”, ou seja, alguns retângulos aparentavam ser maiores que outros. Algumas evidências sugerem que o manuseio da régua de madeira (que é mais grossa) com o esquadro de material plástico (mais fino) pode gerar desenhos com imperfeições.

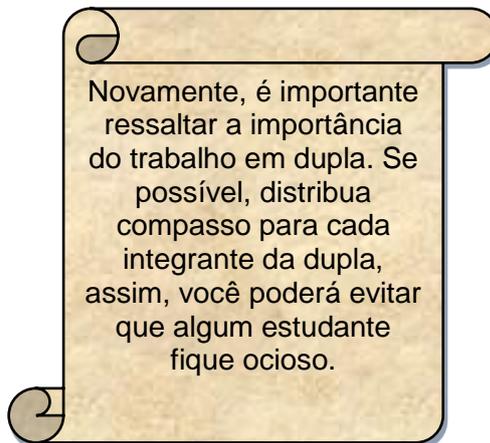
Como mencionado anteriormente, os grupos deveriam dividir um dos quadrados preparados para a construção do altar em cinco partes iguais. Optamos pela divisão do quadrado com o auxílio do esquadro, por ter sido considerado o caminho mais rápido para o término da tarefa 2. E ainda, como precisávamos de dois retângulos (correspondentes a um quinto de um quadrado) e um retângulo (correspondente a um décimo do quadrado), optamos por dividir o retângulo de um quinto em duas partes iguais por meio de dobradura, para não estender mais ainda o tempo dessa tarefa. Na figura 13, observamos um outro grupo finalizando o altar do Falcão com a colagem dos retângulos construídos anteriormente.

Figura 13 - Montagem (finalização) do altar do Falcão



Fonte: Dados da pesquisa.

A princípio, nossa intenção era que essa tarefa ocorresse em um período menor, mas, para cumprir nossos propósitos, a opção pelas construções geométricas com instrumentos físicos de desenho acarretou um tempo maior de desenvolvimento devido a três motivos. O primeiro deles diz respeito ao tempo de aula e a situações comuns de um ambiente escolar. Geralmente, as tarefas eram desenvolvidas em 30-40 minutos<sup>10</sup> por dia de aula, devido ao tempo de troca de horário/professor e/ou organização e preparação do espaço (montagem dos equipamentos, organização em duplas, dentre outros). Além disso, a continuidade da tarefa geralmente acontecia depois de três dias, fazendo com que houvesse a necessidade de retomada de algumas ideias.



O segundo motivo se relaciona às construções com os instrumentos de desenho (régua não graduada, compasso e esquadro). Verificamos dificuldades relacionadas ao manuseio do compasso e, além disso, a cada passo da construção de uma figura, algumas duplas solicitavam um tempo de espera para que pudessem terminar o desenho, antes de prosseguir para o próximo passo. Além disso, durante a tarefa, alguns alunos mencionavam que não gostavam de realizar desenhos com o compasso. Esse fato se confirma na primeira avaliação<sup>11</sup>, quando 53% dos alunos

<sup>10</sup> O horário normal é de 50 minutos, como em grande parte das escolas de Educação Básica.

<sup>11</sup> A primeira avaliação do trabalho foi aplicada no dia 11/07. O modelo está disponível no Apêndice J da dissertação.

mencionam que “gostaram pouco” das construções com régua e compasso (físicos), e cerca de 90% afirmam ter gostado muito das construções de figuras com o compasso do GeoGebra.

O terceiro motivo está relacionado à própria natureza da tarefa 2, dada a sua demanda. No final, além da construção do quadrado, os alunos precisariam utilizar as construções geométricas para dividir um quadrado em cinco partes iguais (formando a expansão das asas e cauda, como mencionado anteriormente).

Professor(a), comente com os alunos que essa tarefa é muito importante para o trabalho no laboratório de informática!



## Mais algumas reflexões...

---

No Volume 2, apresento as tarefas desenvolvidas no laboratório de informática, em um ambiente de Geometria Dinâmica, o GeoGebra. Os ambientes de Geometria Dinâmica “são micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso, a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de suas representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador” (GRAVINA, 2001, p. 82). Com isso, constatamos que a movimentação das figuras foi essencial para que as duplas verificassem a proposição, a partir de testes e observações. Essas tarefas possibilitaram que o “Compasso” (ferramenta do GeoGebra) fosse testado e associado ao instrumento físico, utilizado por eles nas tarefas 1 e 2. A utilização dos instrumentos virtuais do GeoGebra permitiu construções manipuláveis, um conjunto de “desenhos em movimento” (GRAVINA, 2001), o que não era possível com a régua e o compasso.

Procuramos, com as tarefas, promover uma articulação entre a História da Matemática e os ambientes de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, para que a Matemática como construção humana pudesse ser compreendida. Dessa forma, a possibilidade de movimentar figuras nas construções com o *software* GeoGebra contribui para a compreensão de noções geométricas, pois se aproxima do “processo de criação em matemática: fazer explorações, elaborar e refinar conjecturas, testar hipóteses, produzir demonstrações” (GRAVINA 2001 p. 92).

A História da Matemática foi fundamental para que os alunos pudessem ter novas percepções e diferentes posturas acerca da Matemática e da obtenção do conhecimento matemático. Por sua vez, o GeoGebra, com suas ferramentas virtuais, permitiu a criação de uma interface com a História da Matemática, para o ensino de noções de Geometria, de modo que o aluno tivesse a oportunidade de uma participação mais ativa: com levantamento de conjecturas, agilidade de construções e manipulação de figuras para testar suas hipóteses.



O Livro I de “Elementos” possui proposições que, a partir de um planejamento apropriado, puderam “visitar” os anos finais do Ensino Fundamental, permitindo um trabalho com construções de figuras geométricas a partir de propriedades que as definem, assim como se configura o GeoGebra. Nesse processo, percebemos que o aluno pode desenvolver habilidades técnicas e matemáticas que podem contribuir, posteriormente, para o desenvolvimento da capacidade de argumentar e demonstrar.

## Finalizando...

---

Professor(a), com este Produto Educacional, nossa intenção foi mostrar a você as possibilidades e potencialidades da História da Matemática, na sala de aula do Ensino Fundamental, em um ambiente de Geometria Dinâmica.

Sabemos que são muitos os desafios, e o que propomos aqui não resolve todos os problemas no ensino de Matemática. Entretanto, buscamos contribuir para que o aluno tenha uma compreensão acerca da Matemática, entendendo-a como produção humana e como parte importante de práticas sociais. Além disso, também buscamos promover a compreensão de algumas noções de Geometria plana, de modo que o aluno se torne um sujeito ativo na aprendizagem.

Com o desenvolvimento de todas as tarefas, percebemos que os alunos foram capazes de levantar conjecturas a partir do trabalho desenvolvido no GeoGebra. Para Jahnke et al (2002), os alunos devem ter a oportunidade de construir seus próprios textos, familiarizando-se com o raciocínio dos matemáticos, e apontam que a verbalização de um raciocínio é uma ótima estratégia.

Os alunos devem ter a oportunidade de discussões extensas, mas também devem ser convidados a produzir seus próprios textos escritos. A ideia de um "ensaio matemático" é antiga e soa, uma vez que nunca é realizada, um pouco antiquada. Assuntos históricos forneceriam pontos de partida naturais para essas atividades.

(JAHNKE et al 2002, p. 299, tradução nossa<sup>12</sup>)

Acreditamos que, em nosso estudo, construímos uma interface com a História da Matemática e o GeoGebra para o ensino de algumas noções de

---

<sup>12</sup> The students should have the opportunity of extensive discussions, but they should also be asked to produce their own written texts. The idea of a 'mathematical essay' is old and sounds, since it is never realised, a bit antiquated. Historical subjects would provide natural starting points for such activities.



Geometria, pois esse ambiente de Geometria dinâmica forneceu condições para fazer com que os alunos se aproximassem da construção da Matemática (por matemáticos ou pessoas comuns).

Esperamos que as tarefas apresentadas possam contribuir para a sua prática docente, e para o surgimento de mais reflexões e discussões acerca da perspectiva da História da Matemática como abordagem de ensino e o uso de tecnologias, como o GeoGebra.

## Referências

---

- BICUDO, I. **Os Elementos - Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- JAHNKE, H. N. et al. The use of original sources in the mathematics classroom. In: FAUVEL, J; VAN MAANEN, J. (Org.). **History in Mathematics Education: The ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. Vol 6, Cap. 5. p. 291-328.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 1 ed., 2 reim. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

## Algumas sugestões de leitura e pesquisa

---



Professor(a), quero lhe apresentar algumas sugestões de locais, onde você poderá pesquisar mais sobre as temáticas propostas aqui.



### O que?

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.** 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

### Onde?

Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102085>

### Por quê?

Na tese de Maria Teresinha Jesus Gaspar, você encontrará informações sobre conceitos matemáticos presentes em várias civilizações, além de um rico estudo teórico sobre a História da Matemática. Vale muito a pena conferir!

### O que?

Site interativo sobre as proposições do Livro 1, dos “Elementos” de Euclides.

### Onde?

Disponível em: <http://pythagoreanmath.com/euclids-elements-book-1-proposition-1/>

### Por quê?

Nesse site, você poderá ver, passo a passo, as construções e demonstrações de cada proposição do Livro 1 de Euclides. Poderá ajudar você a escolher as proposições para trabalhar em sala de aula com seus alunos. É excelente!

### O que?

Site que apresenta a digitalização do manuscrito grego contendo os treze livros de “Elementos”, de Euclides, datado de 888 da nossa era.

### Onde?

Disponível em: <https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions>

### Por quê?

Nesse site, você poderá ver a digitalização de todo o manuscrito. A obra está em grego, mas o site apresenta a tradução para a língua inglesa. Confira!

### O que?

Vídeos sobre a Biblioteca de Alexandria e Euclides.

### Onde?

Disponível em: <https://youtu.be/5A9B1rwg-D4> e [https://youtu.be/X033FOYg\\_p8](https://youtu.be/X033FOYg_p8)

### Por quê?

Esses vídeos foram utilizados nas tarefas e, apesar de antigos e legendados, foram importantes para iniciar o trabalho com os alunos.

### O que?

Vídeo sobre a construção de altares indianos.

### Onde?

Disponível em: [https://youtu.be/DLKHQ\\_HI6OI](https://youtu.be/DLKHQ_HI6OI)

### Por quê?

Nesse vídeo, de 1976, do centro de estudos da Universidade de Harvard, você poderá conhecer um pouco da cultura indiana em relação a construção de altares. Infelizmente, o vídeo não é legendado, mas, a partir das imagens, é possível ter uma visão sobre essa cultura.

# Texto orientador das tarefas desenvolvidas

## Tarefa 1

### Iniciando a viagem no tempo: a biblioteca de Alexandria, Euclides e os “Elementos”

**Tempo de desenvolvimento:** 50 minutos (5-10 minutos para organização)

**Espaço/ambiente:** Sala de aula

**Materiais:** Mapa Mundi (planisfério); DataShow; Vídeo/Filme sobre a biblioteca de Alexandria e Euclides; régua e compasso; e caderno de registro.

**Professor(a)!**  
Os textos contidos nas regiões retangulares se referem aquilo que poderá ser dito aos alunos.



Vamos fazer hoje uma “viagem no tempo”! Vamos voltar ao passado para saber de onde vêm muitas das ideias que vocês estudaram e/ou que ainda estudarão em Matemática. Primeiro, vamos localizar no planisfério onde estamos e para onde viajaremos.

**Dica: o trabalho em dupla facilita o diálogo entre os alunos e a sua movimentação pela sala, além de facilitar a disponibilização dos materiais.**

**Observações:**

- Os alunos estarão organizados em duplas;
- Cada dupla receberá um mapa Mundi;



Localize as regiões: o Brasil; Minas Gerais; Belo Horizonte e a nossa cidade, Ibirité. Onde será que fica o Egito? E a cidade de Alexandria?

**Observações:**

- Tempo estimado para a localização: 4-5 minutos;
- Pedir a algumas duplas compartilhem a localização dos lugares, posteriormente, abrir o Google Earth (<https://earth.google.com/web/>) para visualização no DataShow (2-3 minutos).



Agora, já sabemos para onde viajaremos. Preparem-se para assistir a um pequeno trecho de um vídeo que nos contará uma história. É um vídeo antigo, assim a imagem não é excelente, mas, se prestarem bastante atenção nas imagens e nas legendas, vão descobrir muita coisa interessante.

**Observações:**

- Vídeo editado: [www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwwg-D4](http://www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwwg-D4) e [www.youtube.com/watch?v=X033FOYg\\_p8](http://www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8)
- Tempo estimado do vídeo: 10 minutos;



Vocês já haviam ouvido falar da Biblioteca de Alexandria?  
Por que será que um grande guerreiro como Alexandre decide construir uma Biblioteca?  
Qual a importância de uma Biblioteca hoje? E naquela época?

**Faça uma pergunta de cada vez. Os alunos podem apresentar respostas interessantes!**

**Observações:**

- Tempo estimado para discussão: 5 minutos.



Bem, nessa biblioteca trabalhou um matemático muito importante chamado Euclides. Ele organizou em vários papiros todo o conhecimento matemático que existia na época. Muito do que estudamos hoje na escola, principalmente de Geometria, vem daqueles papiros que ele produziu. Muitos se perderam, mas alguns pedaços se salvaram e as pessoas foram fazendo cópias, levando para outros países... e assim, uma parte do trabalho dele sobreviveu e é chamado de “Elementos”.

**Observações:**

- Tempo estimado: 5 minutos.
- Paralelamente, mostrar às duplas algumas imagens de papiros e de traduções antigas dos “Elementos”.



A partir de hoje, vamos estudar algumas das ideias que Euclides escreveu. Vamos imaginar que vocês são estudantes da Biblioteca de Alexandria. São alunos de Euclides! Para que possamos estudar os “Elementos”, precisarão aprender a usar dois instrumentos básicos: régua e compasso.

**Observações:**

- Mostrar algumas imagens antigas da régua e do compasso e de figuras contidas nos “Elementos”



Euclides fez as construções geométricas na obra os “Elementos” utilizando apenas régua e compasso.

**A régua não graduada pode gerar uma discussão interessante!**



Vocês conhecem e/ou já utilizaram um compasso? E a régua?  
Sabem o que esses instrumentos podem construir?

**Observações:**

- Ir entregando a cada uma das duplas uma régua não graduada (feita de madeira) e um compasso, além de folhas para anotações (abaixo).
- Espera-se que alguma dupla questione sobre a régua recebida não ter graduação.



O compasso é composto por duas “pontas”: uma de ferro, geralmente chamada de “ponta seca”, usada para fixar; e a outra funciona como um lápis.



Que tipo de desenho conseguimos formar com o compasso? E com a régua? Vamos fazer alguns desenhos com esses instrumentos?

**Observações:**

- Pedir para que registrem em desenhos e em frases o que é possível construir com esses instrumentos.
- Pedir que algumas duplas comentem sobre o que registraram.

**Importante!**

**Esse é o momento para verificar a reação dos alunos ao manusear o compasso. Isso permitirá ter uma ideia do tempo necessário para o desenvolvimento da tarefa 2.**

## Tarefa 2

### Contextualizando o conhecimento geométrico antes de Euclides

**Tempo de desenvolvimento:** Sete aulas de 50 minutos (5-10 minutos para organização)

**Espaço/ambiente:** Sala de aula

**Materiais:** Planisfério, DataShow, régua, compasso, tesoura, folhas coloridas e caderno de registro.

Na última aula estudamos um pouquinho sobre a história do Egito e de um grande Matemático chamado Euclides. Foi ele que teve a brilhante ideia de reunir o conhecimento matemático de sua época em uma única obra.



Vocês lembram qual era o nome dessa obra?

Vamos continuar imaginando que vocês são alunos de Euclides e que com isso precisamos saber utilizar a régua e o compasso. Na última aula vocês começaram a registrar o que era possível construir com esses instrumentos. Vamos terminar o registro?

**Observações:**

- Enquanto conversa com eles, distribuir o caderno e os demais materiais. Deixar uns 5 minutos para que terminem as construções. Informar a forma correta de usar o compasso, pois ainda tem duplas que possuem dificuldades ao utilizá-lo.
- Pedir que algumas duplas comentem sobre o que registraram.



As figuras que vocês fizeram no caderno (círculos, quadrados e triângulos) são figuras geométricas conhecidas desde os povos mais antigos. Desde as primeiras civilizações temos alguns registros de que a Geometria já era presente no cotidiano das pessoas.

No Egito, por volta 1900 a.C., cada egípcio teria que pagar anualmente um tributo por suas terras. Para aquelas cuja terras eram próximas ao rio Nilo, quando a água baixava, o sedimento (material sólido) que vinha com as águas do rio Nilo durante a enchente deixava as terras mais férteis.



E o que vocês acham que acontecia?

O rei era consultado sobre a situação e mandava seus homens fazer medições no terreno e assim cobrar o tributo de forma proporcional ao novo valor do terreno. Parece então que foi a partir dessa situação que a Geometria começou a surgir, a partir da medição de terras. Isso foi muito tempo antes de Euclides!

**Observações:**

- Deixar que comentem e/ou pergunte mais sobre essa história (5 minutos).



Precisamos compreender que todo o conhecimento que Euclides reuniu nos “Elementos” são de matemáticos de várias partes do mundo. E hoje vamos conhecer um pouco de um outro país que desenvolveu uma matemática muito interessante. Vamos viajar agora para a Índia!



Vocês sabem onde fica esse país?

**Observações:**

- As duplas já terão o planisfério em mãos. Pedir para que localizem a Índia, que informem o continente a que pertence e que verifiquem a distância entre eles!
- Utilizar o Google Earth para mostrar essa “viagem” no globo terrestre.
- Pedir para que pintem a Índia no mapa que está no caderno, o Egito e o Brasil.



Na Índia, há muito tempo, existiu uma civilização chamada de Védica cuja religião continha vários deuses. Para agradar esses deuses, os seguidores dessa religião construía altares para fazer rituais em busca de alimento em abundância, vida longa e vários outros benefícios.

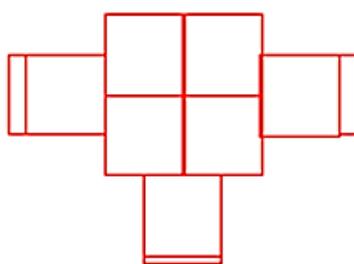
A construção desses altares deveria ser muito rigorosa e de acordo com o desejo de quem os construía. Se quisessem ganhar o mundo do deus Brahman deveriam construir o altar em forma de uma tartaruga, mas se quisessem voar direto para o paraíso quando morressem, o altar deveria ser em forma de um falcão.

Porém, para que os rituais fossem bem sucedidos, os altares deveriam ser construídos de forma muito precisa, ou seja, a Matemática era extremamente importante para eles.



Um dos mais famosos altares indianos era o altar do Falcão. Sua base era formada por 7 quadrados e meio: o corpo do altar tinha quatro quadrados; asas e caudas tinha um quadrado cada. Para se aproximar mais de um falcão as asas e a cauda eram alongadas: asas tinham mais um quinto de um quadrado e a cauda mais um décimo de um quadrado.

Para os védicos, cada quadrado representava um deus e os retângulos representavam humanos. A figura a primeira camada do altar do Falcão.



Altar do Falcão

Fonte: Gaspar (2003)



Os Sulbasutras são textos que possuem instruções para a construção de altares sagrados. Eles continham a representação de altares no papel com desenhos e medidas que precisavam ser rigorosamente seguidas.



Agora, vamos aprender a construir a base desse altar para aprendermos um pouco sobre uma Geometria desenvolvida na Índia e que influenciou o trabalho de Euclides nos “Elementos”. Sabemos que precisamos construir perfeitamente esse altar, então vamos estudar a figura que compõe a base do altar do Falcão.

Euclides aproveitou o processo de construção desse altar, que tinha o quadrado como uma representação dos deuses.

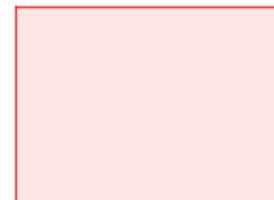
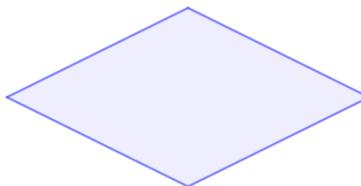
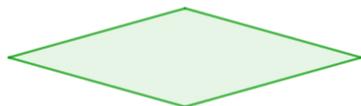


O que vocês podem me dizer sobre o quadrado?



#### Observações:

- Aguardar algumas respostas e, caso afirmem apenas sobre os lados iguais, complementar apresentando figuras com quatro lados iguais que não são quadrados.



- Distribuir os papéis coloridos para as duplas.



Então agora vamos construir um quadrado assim como Euclides construiu, usando o compasso e a régua sem marcação.

**Em outro momento...**

Na última aula estudamos sobre a construção de um quadrado para fazer o altar do Falcão que foi um altar muito famoso na Índia há muito tempo.

Hoje vamos construir esse altar, mas antes vamos lembrar como ele deve ser construído com régua e compasso e quero mostrar a vocês algumas definições que Euclides apresentou no início da sua obra e que fazem parte dessa construção.

Dessa vez todos terão que fazer a construção de um ou mais quadrados, será montado apenas 6 altares do Falcão na turma, 5 por três duplas e 1 por uma dupla e um trio.

Lembrem-se que, o altar do Falcão possui 7 quadrados exatamente iguais e, vamos montar um quadrado extra para construir os retângulos depois.

**Observações:**

- Ir mostrando o desenho do quadrado e do altar do Falcão no DataShow.
- Entregar todos os materiais.



Primeiramente um quadrado é uma figura que possui apenas duas dimensões, ou seja, comprimento e largura. Então existe uma região onde é possível construir esse quadrado. Euclides escreveu que:

*“Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura”.*



Primeiro tracem uma linha no caderno.

Se imaginarmos essa linha crescendo infinitamente para cada um dos lados temos uma figura geométrica que Euclides a chamou de reta (ou reta ilimitada). Euclides escreveu no início da sua obra alguns significados (definições) dentre eles disse que uma “linha é comprimento sem largura”.

Porém, para construir um quadrado, não vamos precisar dessa linha (a reta) inteira, apenas de um pedaço. Então, vamos marcar aqui um pedaço dessa reta que será um lado do nosso quadrado.

Euclides definiu que:

*“Linha é comprimento sem largura”.*

E que,

*“Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma”.*



Vamos usar aqui dois pontos para indicar o começo e o fim do lado do quadrado. Esse pedaço de reta era chamado por Euclides de *reta limitada* ou *segmento de reta* (destacar o segmento). O ponto é uma figura que pertence à reta e está evidente aqui para indicar o início e o fim desse segmento. Euclides escreveu que as “extremidades de uma linha são pontos”.

Mas, se quisermos mencionar um desses pontos será necessário dar nomes a eles, então vamos usar letras maiúsculas do nosso alfabeto, vamos chamá-los de A e B.

Marcamos pontos para determinar um lado do quadrado e sobre o ponto Euclides disse que:

“Ponto é aquilo de que nada é parte.”

E que,

“Extremidade de uma linha são pontos.”



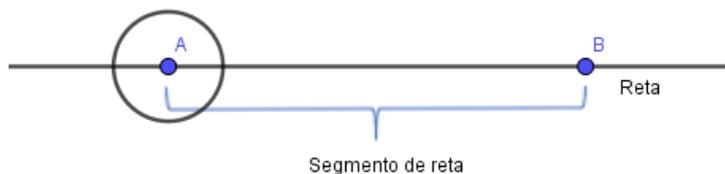
Como será agora que Euclides desenhou os outros lados do triângulo usando apenas esses instrumentos?

Euclides utilizou muito uma construção no trabalho dele que aprendeu com matemáticos de outras partes do mundo e nós vamos construí-la agora!



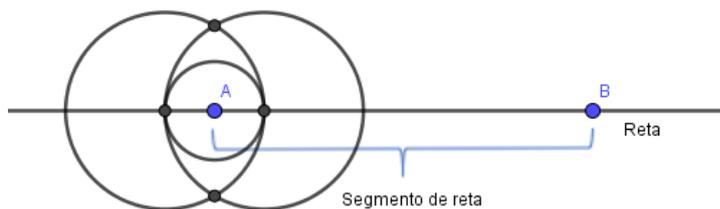
Primeiro façam uma circunferência posicionando a ponta seca do compasso no ponto A (faça uma pequena abertura no compasso).

A circunferência cruzou com a reta em dois locais e em cada um deles vamos marcar pontos. Chamamos de *ponto de interseção entre a circunferência e a reta*.



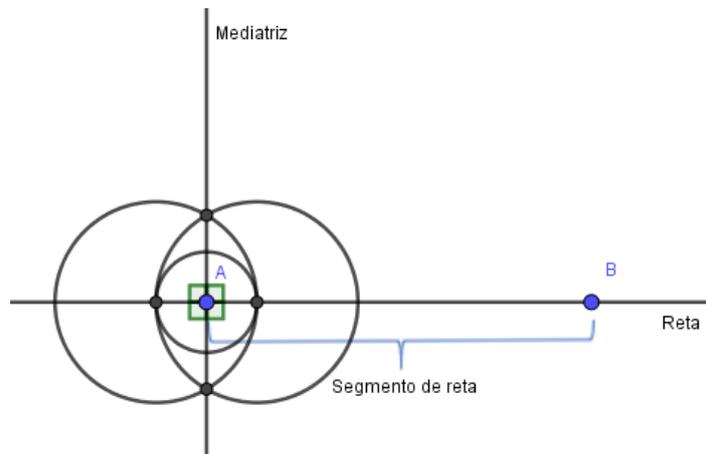


Agora, abram o compasso do tamanho da distância entre as interseções. Com a ponta seca do compasso em um das interseções, faça uma circunferência. Posicione a ponta seca na outra interseção e faça outra circunferência. O cruzamento entre as circunferências também possuem pontos de interseção. Essas interseções também aparecem muito no trabalho de Euclides. Observem que o ponto A está exatamente no meio dos pontos de interseção. Ele pode ser chamado de ponto médio.



Sobre essa reta, Euclides definiu o nome dela e dos ângulos que ela formou com a outra reta. A linguagem que ele utilizava é bem diferente da nossa usual em sala de aula, além disso sabemos que o que temos de sua obra hoje é uma tradução de outras cópias. Euclides definiu que:

*“Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada de reta perpendicular.”*





A reta que acabamos de construir e que Euclides usou muito em seu trabalho é também chamada de Mediatriz.

*A mediatriz que construímos cruzou com a nossa reta e formou quatro “cantos” iguais. Cada um desses cantos chamamos de ângulo reto. Toda reta que corta uma outra reta e forma ângulos retos é chamada de reta perpendicular.*

*A mediatriz é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento. Acabamos de construir um dos conhecimentos que Euclides escreveu em sua obra: a construção da Mediatriz!*



Como podemos construir os outros lados do quadrado?

**Observações:**

- Aguardar algumas respostas e continuar fazendo a construção da mediatriz a partir do ponto B.



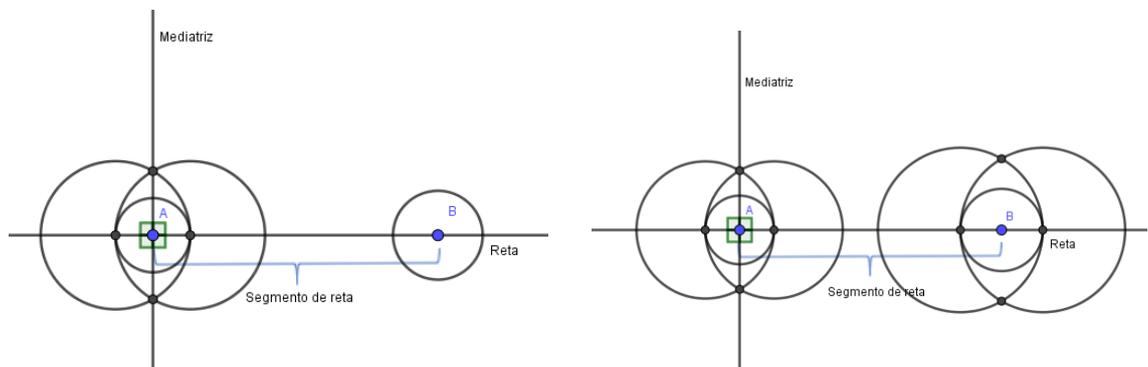
Para garantirmos que todos os ângulos do nosso quadrado sejam retos, precisamos construir outra mediatriz que passe pelo ponto B. Na última aula fizemos diferente, mas como alunos de Euclides e o altar precisa ser muito preciso na construção, precisamos ter certeza de que os demais ângulos serão ângulos retos.

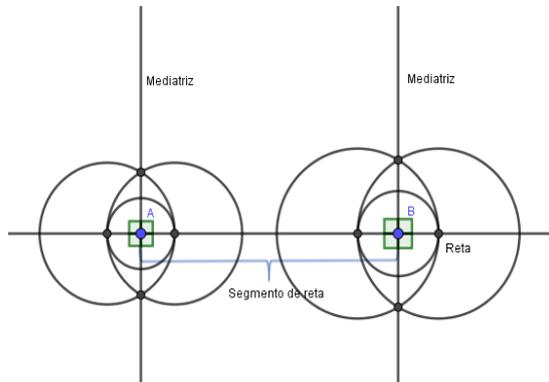
As duas mediatrizes que fizemos agora segue exatamente o que Euclides escreveu:

*“Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto dado sobre ela.”*

**Observações:**

- Construir a outra mediatriz e finalizar o quadrado.

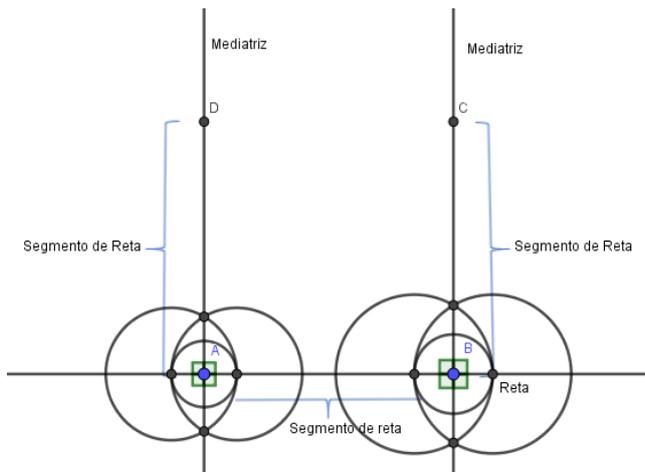




Agora temos duas mediatrizes! Como determinar os lados do quadrado?

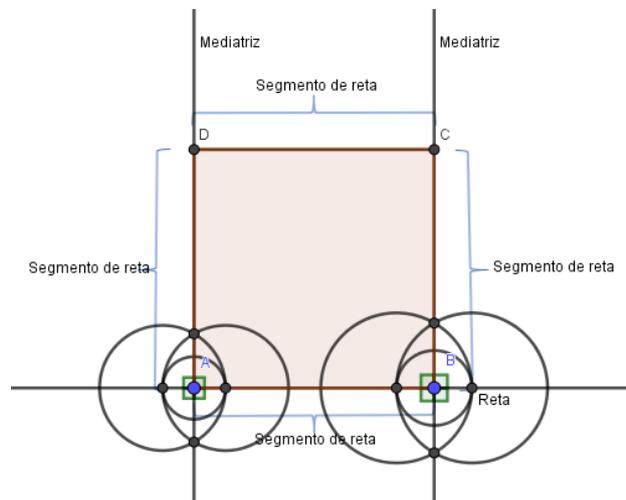
**Observações:**

- Aguardar algumas respostas e terminar a construção.



**Observações:**

- Explicar as características do quadrado (ângulo reto, lados iguais) a partir da construção e que dessa forma temos a garantia de ter desenhado um quadrado.





Muito bom alunos de Euclides! Vimos como Euclides fazia a construção de um quadrado. Agora vamos construir os demais quadrados para montar o altar do Falcão. Vocês devem construir os quadrados, recortá-los e montá-los. Não se esqueçam que tudo precisa ser rigorosamente construído, pois só assim será possível ir direto para o paraíso.



Lembrem-se que precisamos de 7 quadrados exatamente iguais. Como podemos construir quadrados idênticos?

**Observações:**

- Deixar que eles façam a construção e auxiliar no que for preciso.

**Em outro momento...**

**Observações:**

- Aulas destinadas ao término da construção dos quadrados (se necessário), além da construção dos retângulos do altar do Falcão.



Estamos construindo o altar do Falcão e hoje vamos aprender a construir os retângulos que compõem o altar cujas medidas são de um quinto e um décimo de um quadrado.



Para aprender a dividir o quadrado em cinco partes iguais, ainda no Egito, vamos em uma época anterior a Euclides quando ainda nem existia a cidade de Alexandria. Pois, vamos aprender mais um pouco mais de uma Matemática que já existia na época de Euclides.

**Observações:**

- Abrir o GooGle Earth e mostrar novamente o Egito e o rio Nilo, pedir para que destaquem o rio Nilo no mapa.



Fonte: Google Earth



Há mais de mil anos antes de Euclides, os egípcios utilizavam um instrumento chamado “esquadro”. Esse instrumento era muito útil para a construção de casas e até mesmo de pirâmides (mostrar fotos). Os primeiros indícios de versões desse instrumento foram através de nós em cordas.



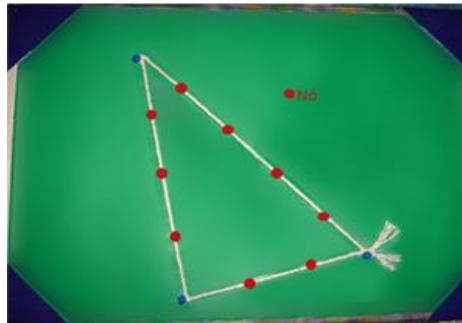
#### Observações:

- Levar uma representação desse esquadro de corda através de barbante.



Fonte:

[http://www.mom.arq.ufmg.br/mom/09\\_ida/idabanco4/cadastro/p\\_cadastro/equipamento/Corpo\\_centro equipamento\\_tudo.php?idEquipamento=36](http://www.mom.arq.ufmg.br/mom/09_ida/idabanco4/cadastro/p_cadastro/equipamento/Corpo_centro equipamento_tudo.php?idEquipamento=36)



Fonte:

[http://www.cdme.im-uff.mat.br/tangrants\\_pitagoricos/saber\\_mais.html](http://www.cdme.im-uff.mat.br/tangrants_pitagoricos/saber_mais.html)

Eles usavam os nós (com distâncias iguais) para utilizar como medidas e formava um triângulo retângulo.



O vocês podem me dizer sobre o triângulo retângulo?

Além do esquadro de cordas, outras versões desse instrumento foram surgindo, tanto com marcações quanto sem marcações (medidas).

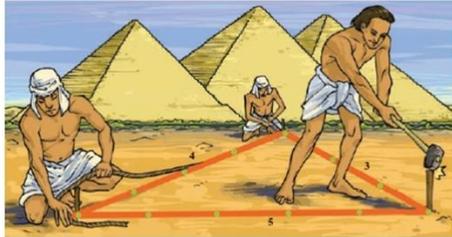


Para dividir o quadrado em cinco partes iguais, vamos utilizar esse instrumento porque nos auxiliará na divisão. Euclides não utilizou esse instrumento em sua obra, apenas a régua e o compasso, mas como vocês são um grupo de estudantes da Biblioteca de Alexandria e que em algum rolo de papiro contém a utilização do esquadro, vocês irão hoje utilizá-lo apenas para agilizar um pouco o trabalho.

Então vamos lá!

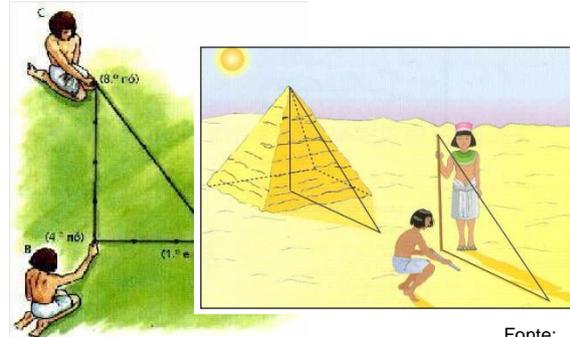
#### Observações:

- Ir mostrando algumas imagens sobre o uso do esquadro no Egito.



Fonte:

[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernos/pdebusca/producoes\\_pde/2013/2013\\_unicentro\\_mat\\_pdp\\_silvani\\_margarete\\_budske.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernos/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_pdp_silvani_margarete_budske.pdf)



Fonte:

<http://professorlendoeaprendendo.blogspot.com/2013/06/plano-de-aula.html>

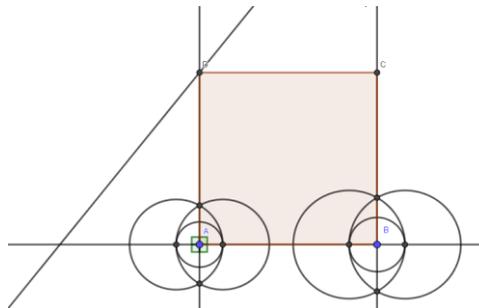
Fonte:

[http://www.mom.urg.ufmg.br/mom/09\\_ida/idabanco4/cadastro/p\\_cadastro/equipamento/Corpo\\_centro\\_equipamento\\_tudo.php?idEquipamento=36](http://www.mom.urg.ufmg.br/mom/09_ida/idabanco4/cadastro/p_cadastro/equipamento/Corpo_centro_equipamento_tudo.php?idEquipamento=36)

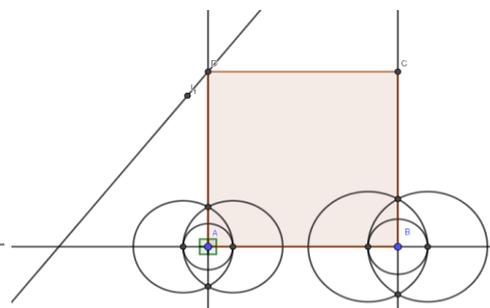
Primeiro tenham em mãos o 8º quadrado que vocês construíram na aula passada.

**Observações:**

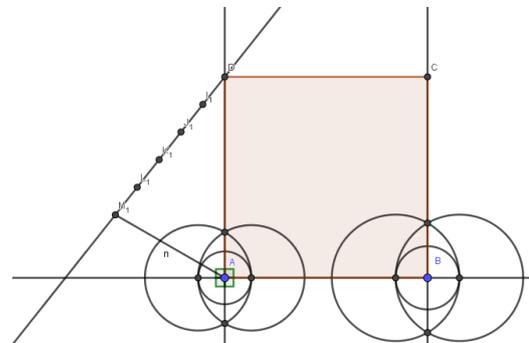
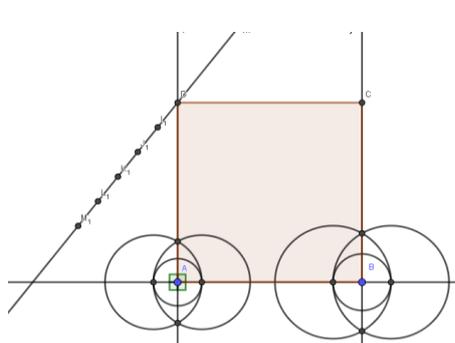
- pretendo pedir para colar o 8º quadrado (feito na aula anterior) em uma folha para não perdê-lo e para ficar mais fácil a construção.



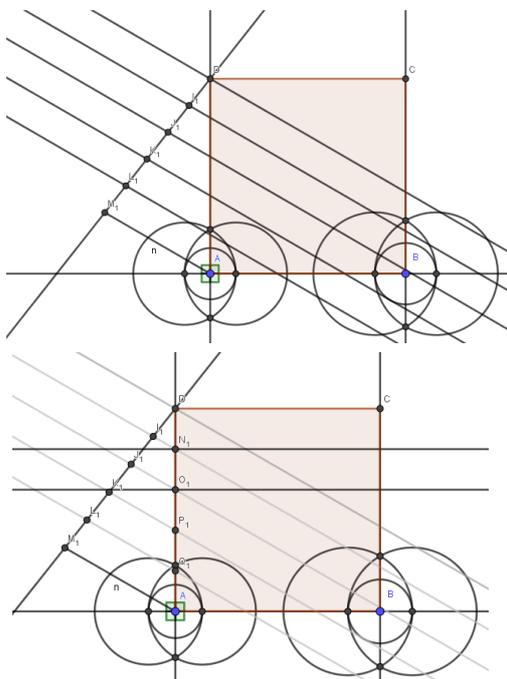
Traçar uma semirreta.



Fazer uma abertura no compasso



Marcar cinco comprimentos iguais.



Usar a ideia de reta paralela para marcar segmentos iguais no lado do quadrado (utilizar o esquadro).

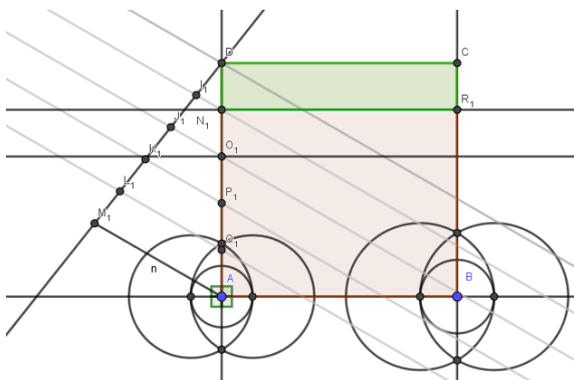
Utilizar o esquadro para construir retas paralelas ao lado do quadrado.

 Perguntar a eles, o que vocês sabem dizer sobre as retas paralelas?

**Observações:**

- Pedir para que registrem.
- Mostrar o que Euclides disse sobre retas paralelas e pedir para colar a etiqueta com a frase:

**Paralelas** são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente nos dois sentidos, não se cruzam.

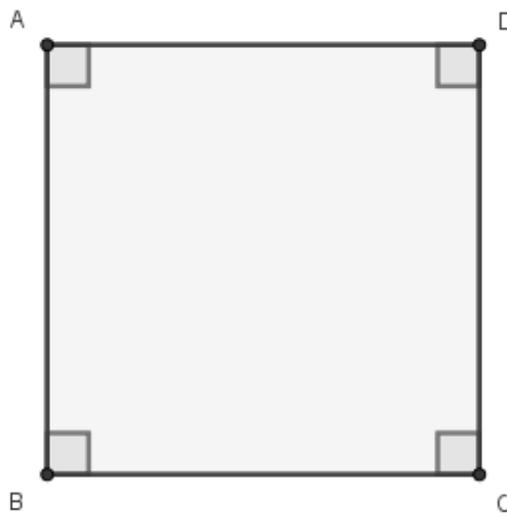


Cada grupo irá utilizar 3 retângulos de 1/5: dois para as asas e um que será dividido pela metade representando a expansão da calda que deve ser 1/10 de um quadrado.

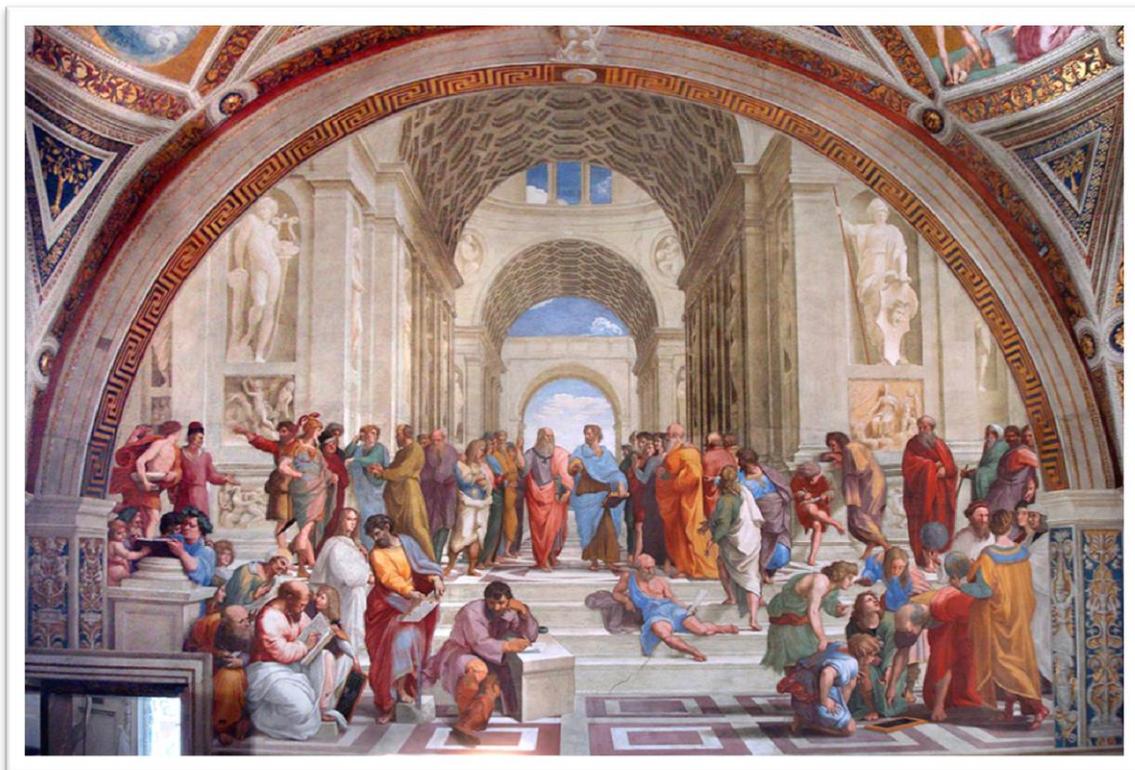
**Observações:**

- Encerrar a tarefa com o término da construção do altar do Falcão.

**Divisão do quadrado em cinco partes iguais**



## Escola de Atenas – Rafael Sanzio



Fonte: Rafael, Public domain, via Wikimedia Commons

Tarefas matemáticas inspiradas nos "Elementos" de Euclides

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.  
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED  
da Universidade Federal de Ouro Preto,  
em agosto de 2020  
sobre papel 100% reciclado (miolo) 90g/m<sup>2</sup> e (capa) 300 g/m<sup>2</sup>