UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
Mestrado Profissional em Educação Matemática

THAIS MARIA BARBOSA GOULART

OS “ELEMENTOS” DE EUCLIDES VISITAM O ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DE TAREFAS MATEMÁTICAS PAUTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DESENVOLVIDAS NO SOFTWARE GEOGEBRA

OURO PRETO - MG
2020

THAIS MARIA BARBOSA GOULART

OS “ELEMENTOS” DE EUCLIDES VISITAM O ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DE TAREFAS MATEMÁTICAS PAUTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DESENVOLVIDAS NO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática, sob orientação da Prof.ª Dr. Ana Cristina Ferreira e coorientação da Prof. Dr. Jorge Luís Costa.

OURO PRETO - MG

2020

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

G694" Goulart, Thais Maria Barbosa.
Os "Elementos" de Euclides visitam o ensino fundamental [manuscrito]: análise de tarefas matemáticas pautadas na história da matemática e desenvolvidas no software Geogebra. / Thais Maria Barbosa Goulart. - 2020.
198 f.: il.: color., tab..

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Luís Costa.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Euclides, Elementos de. 3. Matemática - História. 4. Geometria - Estudo e ensino. 5. Ensino fundamental. I. Costa, Jorge Luís. II. Ferreira, Ana Cristina. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 514:373.3

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
DEPARTAMENTO DE EDUCACAO MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Thaís Maria Barbosa Goulart

OS 'ELEMENTOS' DE EUCLIDES VISITAM O ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DE TAREFAS MATEMÁTICAS PAUTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DESENVOLVIDAS NO SOFTWARE GEOGEBRA

Membros da banca

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira - UFOP (orientadora)
Prof. Dr. Jorge Luís Costa - UFOP (coorientador)
Profa. Dra Marger da Conceição Ventura Viana - UFOP
Profa. Dra Cristiane Coppe de Oliveira - UFU

Versão final
Aprovado em 27 de agosto de 2020

De acordo

Professora Orientadora Ana Cristina Ferreira

Documento assinado eletronicamente por **Ana Cristina Ferreira**, **PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 27/08/2020, às 09:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 , informando o código verificador **0077774** e o código CRC **F7802170**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.006053/2020-83 SEI nº 0077774

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas participaram, acompanharam e incentivaram a minha caminhada no mestrado. Confesso que não foi um período fácil, encontrei muitos obstáculos, mas Deus sabe o quão agradecida estou, por ter finalizado essa etapa tão importante da minha vida.

Primeiramente, quero agradecer a Deus, por ter me concedido saúde, por ter me acompanhado na estrada até Ouro Preto, por ter me dado força e coragem nos momentos de angústias.

Aos meus pais, Lúcia e Vicente, pela educação que me proporcionaram, pelo amor, apoio, carinho e incentivo.

Aos meus familiares, amigos e, principalmente, ao meu esposo, Rafael, pela compreensão e pelo apoio incondicional, sem ele, as coisas teriam sido mais difíceis. Agradeço a ele, mais uma vez, por auxiliar na preparação do trabalho de campo com as tarefas manuais.

Um agradecimento especial a minha orientadora e amiga Ana Cristina que, desde o início, se tornou meu exemplo de pessoa e de profissional. A sua paixão pelo que faz, a sua competência e a sua humanidade me fizeram admirá-la. Agradeço por seus ensinamentos, orientações, pela voz amiga, pelos conselhos, pela paciência e por compartilhar seus conhecimentos e me ajudar a enfrentar os desafios.

Também agradeço muito ao meu coorientador, Jorge Luís, por suas orientações, disponibilidade, pela paciência e pelo incentivo, por compartilhar comigo os seus conhecimentos. Ele, sempre muito atencioso, foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Sou grata aos professores que aceitaram participar da minha banca. À Cristiane, por seus apontamentos e contribuições na qualificação e na defesa. À Marger, pelo carinho, apoio, contribuições e incentivo desde o início. Ao André, por ser aquele professor que admiramos, agradeço por seus ensinamentos, suas reflexões e, principalmente, por ter acompanhado o meu trabalho antes mesmo da qualificação.

Aos professores que tive durante a minha formação, Daniel, Edmilson, Frederico, Marli, Milton e Plínio, pelos ensinamentos e pelo apoio durante a participação de eventos. Agradeço a todos os professores que fazem parte do programa.

Ao secretário André, pelo atendimento, pela atenção e empréstimo dos equipamentos utilizados na pesquisa de campo. À Universidade Federal de Ouro Preto, pela oportunidade, confesso que realizei um sonho, que era ter uma formação nesta instituição.

Aos professores e amigos da Universidade Estadual de Minas Gerais, campus Ibirité, em especial aos professores Adil e Nilson, que foram os principais responsáveis pelo conhecimento deste mestrado e pelo incentivo em continuar a formação após a graduação. Também quero agradecer aos meus professores da Especialização na PUC, pois as primeiras ideias deste estudo surgiram durante as disciplinas realizadas no curso.

Aos meus colegas e amigos da turma de 2018 do Mestrado: Alice, Ana Paula, Bruno, Erika, Fernando, Lili, Rodrigo, Simone e Ticiano, bem como à Jéssica e Thais, da turma de 2019, e à Vanessa, da turma de 2016, pelo companheirismo, pelo tempo que compartilhamos juntos, pelos incentivos para o desenvolvimento do meu trabalho, por nossos momentos de descontração. Agradeço em especial à Ana Paula, Lili e Simone pelas contribuições, durante a nossa última disciplina do Mestrado, quando compartilhamos o nosso trabalho de forma mais profunda. Minha gratidão à Ana Paula e Erika, pela companhia, pelas conversas e pela amizade, durante todo o tempo que passamos juntas.

Agradeço à direção e à equipe pedagógica das escolas nas quais realizei o estudo piloto e a pesquisa de campo. Aos professores que me permitiram realizar o estudo em suas turmas, em especial, ao professor Marcelo, que foi um anjo em minha vida.

Aos queridos estudantes que participaram da pesquisa, por tornarem este estudo possível.

Ao Eduardo Araújo, meu eterno diretor e amigo, por acreditar em mim, por pular de alegria comigo, quando ingressei no Mestrado, por me auxiliar nas decisões e por incentivar e apoiar os meus estudos, enfim, por sua amizade.

Ao professor Guilherme, que também foi um grande incentivador do meu ingresso no Mestrado, e a todos os meus colegas de trabalho, que, mesmo indiretamente, contribuíram para que fosse possível a finalização deste trabalho.

Enfim, a todos, muito obrigada!

“Diz o tempo a Euclides:
Nas muitas dobras que tenho
No meu manto de negro tecido,
Escondo para sempre dos pósteros
A tua vida, as tuas dores,
As tuas alegrias fugazes,
O teu dia de cada dia.
Escondo-te o semblante, o sorriso,
A lágrima quente que escava
Profundos sulcos na face.
Escondo também os amores,
As tuas noites de insônia
E a dura luta diária
Rumo à verdade desnuda.
Escondo tudo o que foste
De todos os que virão.
Mas as muitas dobras que tenho
No meu manto de negro tecido,
Por mais que eu faça e refaça,
Não bastam para esconder
A obra que produziste.
Proclamo, pois, em alto som:
Os Elementos de Euclides
Sempiternos brilharão.”
(IRINEU BICUDO, 2009, p. 44-45)

“A Matemática não surgiu completamente formada. Ela cresceu a partir de esforços acumulados de muitas pessoas, de muitas culturas, que falavam muitos idiomas.”
(Trecho do prefácio de Coventry apud Stewart, 2004)

RESUMO

A História da Matemática como abordagem de ensino tem o potencial de levar os estudantes a perceberem a Matemática como produção humana, historicamente situada, pautada nas necessidades e interesses de cada época e sociedade. Neste sentido, escolhemos a obra "Elementos" de Euclides como principal inspiração para o desenvolvimento deste trabalho devido ao seu potencial formativo e sua importância no ensino de Geometria. Essa obra mostra-se particularmente interessante para promover uma articulação entre passado e presente na qual a Matemática pode ser compreendida como construção humana, social e culturalmente desenvolvida. As proposições do livro I oferecem tanto um pretexto para aproximarmos nossos alunos do processo histórico de desenvolvimento da Matemática, quanto um contexto interessante para a aprendizagem de conceitos geométricos. Diante disso, nesta pesquisa, são investigadas possíveis contribuições de tarefas matemáticas historicamente situadas e desenvolvidas no ambiente GeoGebra, para a aprendizagem de noções de Geometria em uma classe do Ensino Fundamental. As tarefas, desenvolvidas no GeoGebra, partem de proposições do Livro I da obra "Elementos" com a intenção de promover o ensino de algumas noções de Geometria plana por meio de uma abordagem histórica no ambiente GeoGebra. A pesquisa, de intervenção com abordagem qualitativa, baseou-se na literatura sobre o potencial da História da Matemática como abordagem para o ensino de Matemática, e sobre os ambientes de Geometria Dinâmica, em especial, o GeoGebra. Participaram do estudo 35 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ibirité (MG). A produção de dados ocorreu entre abril e outubro de 2019, por meio de observações, diário de campo da pesquisadora, gravações em áudio e vídeo de alguns momentos das aulas e registros produzidos pelos alunos ao longo do processo. Os resultados apontam que as tarefas realizadas no GeoGebra favoreceram a construção de conhecimentos geométricos, principalmente, por possibilitar a realização de construções mais rápidas e a manipulação de figuras, favorecendo a formulação de conjecturas. Além disso, observou-se um interesse dos alunos pela História em geral, e pela história de Euclides e dos "Elementos", em particular. A História da Matemática, como abordagem utilizada na elaboração das tarefas, foi fundamental para que os alunos pudessem ter novas percepções e diferentes posturas acerca da Matemática e da obtenção do conhecimento matemático. Dessa forma, favoreceu uma aproximação dos alunos à visão dos processos de construção da matemática a partir de práticas sociais. Contudo, também se evidenciou a importância de uma preparação para a realização das tarefas no GeoGebra devido tanto à falta de conhecimento prévio quanto à falta de habilidade no manuseio de instrumentos de desenho geométrico. A partir dessa pesquisa foi elaborado um Produto Educacional, voltado para professores, futuros professores e formadores de professores, no qual as tarefas realizadas são apresentadas e discutidas.

Palavras-chave: Educação Matemática; "Elementos" de Euclides; História da Matemática; GeoGebra; Ensino de Geometria; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The History of Mathematics as a teaching approach has the potential to lead students to perceive mathematics as human production, historically situated, based on the needs and interests of each age and society. As the main inspiration to develop this work, due to its growth potential and its importance in the teaching of Geometry, we chose the paper 'Elements' by Euclides. This work is particularly interested in promoting an articulation between past and present in which we can understand mathematics as a human, social, and culturally developed construction. Book I offers propositions of both a pretext for bringing our students closer to the historical process of mathematical development and a compelling context for learning geometric concepts. Therefore, in this research, possible contributions of mathematical tasks historically located and developed in the GeoGebra environment are investigated for the learning of notions of Geometry in an elementary school class. The tasks, developed in GeoGebra, start from the propositions of Book I of 'Elements' to promote the teaching of some notions of flat geometry through a historical approach in the GeoGebra environment. We based our research intervention with a qualitative approach on the potential of the History of Mathematics as an approach to the teaching of Mathematics, and on Dynamic Geometry environments, in particular, GeoGebra. The study included 35 students from the 8th grade of elementary school at a public school in Ibirité (MG). Data collection took place between April and October 2019, through observations, the researcher's field diary, audio and video recordings of some moments of the classes, and records produced by the students throughout the process. The results show that the tasks performed in GeoGebra favored the construction of geometric knowledge, mainly because it made it possible to execute faster assemblings and manipulate figures, helping the formulation of conjectures. Also, one could observe the students' interest in history in general and in the history of Euclid and the Elements in particular. The History of Mathematics, as an approach used in the elaboration of tasks, was fundamental so that students could have new perceptions and different attitudes about Mathematics and the acquisition of mathematical knowledge. Thus, it favored the students' approach to the vision of the processes of construction of mathematics based on social practices. However, the importance of preparation for carrying out tasks in GeoGebra was also evident due to the lack of prior knowledge and the lack of skill in handling geometric design instruments. From this research, an Educational Product was developed, aimed at teachers, future teachers, and teacher trainers, in which the tasks performed are presented and discussed.

Keywords: Mathematical Education; Euclid's “Elements”; History of Mathematics; GeoGebra; Geometry teaching; Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAMINHOS QUE LEVARAM AO TEMA DO ESTUDO

Desde a graduação, sempre me interessei[1] em conhecer os assuntos relacionados à Educação Matemática. Durante o curso de Licenciatura em Matemática, um professor se destacou pelo grande entusiasmo por esse campo e pela preocupação com o tipo de professores de Matemática que estava ajudando a formar. Como mestrando do Programa de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), naquela época, mostrou-se bastante envolvido com as tendências em Educação Matemática e, com isso, contribuiu muito para a minha formação e a dos demais colegas. Essa preocupação fez parte do meu curso de licenciatura em Matemática e ainda faz parte da minha prática profissional.

Na graduação (período de 2011 a 2014), enfrentei dificuldades para aprender Geometria Plana Euclidiana, principalmente, quando se tratava de demonstrações. Tal dificuldade pode ter sido consequência de muitos fatores, dentre eles, o fato de não ter estudado o tema de forma adequada na Educação Básica e de não ter desenvolvido um pensamento argumentativo. Ao mesmo tempo em que existia a angústia pelas dificuldades em compreender o conteúdo, havia também um entusiasmo por, finalmente, estudar o que não foi ensinado/aprendido na escola. O interesse maior pela geometria plana surgiu no momento em que as dificuldades foram sendo vencidas e, principalmente, com as aulas de Desenho Geométrico.

Entre 2016 e 2017, lecionei apenas Geometria para os anos finais do Ensino Fundamental[2] em uma escola pública e, ao construir o planejamento da aula, percebia o quanto era importante o conhecimento dos conceitos básicos da Geometria para a compreensão dos mais complexos. Antes de ensinar um determinado conteúdo, pesquisava em vários livros e materiais disponíveis na internet em busca das melhores explicações, buscando proporcionar uma boa aula àqueles estudantes. Mesmo assim, observava que alguns tópicos iniciais da Geometria ainda não tinham sido consolidados pelos alunos. Muitos questionamentos surgiam: "Será que os planejamentos precisavam ser revistos?"; "Será falta de interesse por parte dos alunos?"; "Se for, como despertar esse interesse?".

[1] Na escrita inicial do trabalho, utilizo a primeira pessoa do singular por se tratar de uma experiência pessoal.
[2] Na época, a escola tinha duas frentes para a disciplina de Matemática: "Matemática I" para o ensino de Aritmética e Álgebra e "Matemática II" para o ensino de Geometria.

Esses e outros questionamentos me faziam refletir constantemente sobre meu trabalho em sala de aula, e ainda são motivos de minhas indagações.

Como professora, observava as dificuldades dos alunos para aprender Geometria. Algumas dessas dificuldades estavam relacionadas a construções geométricas. Em 2018, trabalhei em outra escola pública com turmas do 8º ano do Ensino Fundamental. Um dos objetivos de Geometria, contidos no plano de curso da escola, era construir, com régua e compasso, os pontos notáveis de um triângulo. Essa não foi uma tarefa fácil. Além de dificuldades relacionadas à utilização adequada dos instrumentos de desenho (régua e compasso), também observava que noções como perpendicularidade, mediatriz, bissetriz, nomenclatura de ângulos, raio, circunferência, dentre outros, ainda não eram claramente compreendidas por todos os alunos e se mostravam necessárias para as tarefas propostas. Além disso, percebia certo desinteresse em relação à Matemática. Muitos alunos diziam que era uma disciplina difícil, e outros, que apresentavam certa facilidade, às vezes, apenas memorizavam o processo.

As experiências vivenciadas durante a graduação, relacionadas ao uso de tecnologias em sala de aula possibilitaram enxergar as suas potencialidades para o ensino de Matemática e, em especial, para o ensino de Geometria. Por meio de atividades exploratórias e investigativas utilizando *softwares*, por exemplo, aprendi que é possível explorar muitos conceitos matemáticos com mais agilidade e interatividade. Desde a graduação participei de várias discussões a respeito do ensino da Geometria e do uso de tecnologias em sala de aula. Esse fato despertou um interesse maior em buscar estratégias para ensinar Geometria com a utilização do *software* GeoGebra[3].

Vivi outra experiência marcante em um curso de Especialização em Ensino da Matemática, concluído em 2016. Duas disciplinas desse curso foram particularmente interessantes: uma contemplava o conhecimento de fatos históricos da Matemática e, em particular, destaco uma atividade cujo objetivo era comparar os postulados do livro I dos "Elementos" com as definições apresentadas nos livros didáticos atuais; e outra propunha o estudo de tópicos da Geometria plana e Espacial eram estudados por meio do *software* GeoGebra.

Dessa forma, aliar uma abordagem histórica ao GeoGebra como ambiente dinâmico, me pareceu um caminho particularmente fecundo para o ensino e a

[3] *Software* de Matemática Dinâmica.

aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental. Nesse sentido, pode-se valorizar a construção de conceitos matemáticos como produção humana, historicamente situada, pautada nas necessidades e interesses de cada época e sociedade (MIGUEL, 1993).

A História da Matemática no ensino, de acordo com Miguel (1993) e Miguel e Miorim (2008), pode contribuir para que estudantes construam conceitos matemáticos e os percebam como produção humana pautada nas necessidades e interesses de cada época e sociedade. Além disso, ela pode promover uma aprendizagem da Matemática fundamentada na compreensão permitindo ainda que o aluno questione e tenha mais participação nos processos de ensino e aprendizagem (MIGUEL; MIORIM, 2008).

Ao ingressar no Mestrado em Educação Matemática da UFOP, meu primeiro contato com o *software* GeoGebra foi por meio da disciplina de Ambientes Informatizados. Aprendi a utilizar algumas de suas ferramentas e construímos, coletivamente, uma oficina sobre “relações métricas na circunferência”. Observei que o GeoGebra permitia uma melhor visualização de propriedades da circunferência a partir da construção e movimentação das figuras. Além disso, facilitava o processo, já que as construções eram mais ágeis. A partir desse primeiro contato, também verifiquei que vários outros conteúdos de Geometria poderiam ser explorados de forma dinâmica.

Meu interesse em trabalhar com o ensino de Geometria a partir da obra “Elementos” de Euclides utilizando o *software* GeoGebra nasce dessas experiências. Ressalto que, mesmo tendo conhecimento dos argumentos questionadores quanto à utilização da História da Matemática no ensino a partir de Miguel e Miorim (2009) acredito que a inserção do *software* GeoGebra poderá tornar esse recurso favorável, já que permite construções de forma ágil, dinâmica e exploratória (OLIVEIRA, 2014). Outra razão pela qual se justifica esse trabalho diz respeito ao fato de que há poucas pesquisas que recorrem aos “Elementos” como um contexto para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Não defendo aqui o uso da obra de Euclides tal como foi feito durante muito tempo na Europa, ou seja, como o principal livro texto para o ensino de Geometria. Porém, acredito que, em uma perspectiva na qual a História da Matemática se apresente como uma abordagem para o ensino da Matemática, os “Elementos” de Euclides poderiam trazer significativas contribuições para uma aprendizagem mais humanizada. A meu ver, ensinar Geometria em uma perspectiva histórica pode contribuir para transformar crenças tais como a de que a Geometria (como a Matemática) seja um conhecimento pronto e acabado;

de que é um campo do saber difícil e apenas quem tem talento é capaz de aprender seu conteúdo; e que a Geometria (e a Matemática) foi desenvolvida apenas por gênios, dentre outras.

Nesse sentido, construímos[4] a seguinte questão de investigação: *como tarefas matemáticas construídas a partir dos "Elementos" de Euclides e de sua história, e desenvolvidas no ambiente GeoGebra, podem contribuir para a compreensão de noções de Geometria plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental?*

Planejamos e desenvolvemos tarefas matemáticas que utilizaram a história dos "Elementos" de Euclides e de sua época como abordagem de ensino, desenvolvidas, principalmente, no ambiente GeoGebra, e aplicamos em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Ibirité, em Minas Gerais. Nosso objetivo foi investigar possíveis contribuições de tais tarefas para a aprendizagem de tópicos de Geometria plana por parte dos alunos participantes do estudo.

Com isso, esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo um, apresentamos algumas reflexões sobre a História da Matemática como abordagem de ensino. No capítulo dois, iniciamos uma discussão sobre os "Elementos" de Euclides e sua história, bem como procuramos situá-lo como contexto para a aprendizagem de noções de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, apresentamos o GeoGebra como ambiente de aprendizagem para o desenvolvimento dessa abordagem de ensino. No capítulo três, abordamos os percursos metodológicos do estudo de campo e no capítulo quatro, apresentamos a descrição e análise do processo vivenciado. Finalizamos o texto com a apresentação das nossas considerações finais, referências e apêndices.

---

[4] Até este momento do texto, foi utilizada a escrita na 1ª pessoa do singular, por se tratar do relato de uma trajetória pessoal. Entretanto, ao escrever sobre a estruturação e desenvolvimento da pesquisa, o texto foi escrito na 1ª pessoa do plural, uma vez que meus orientadores participaram de forma efetiva na construção da questão e das tarefas desenvolvidas.

CAPÍTULO 1: A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ABORDAGEM DE ENSINO

“Homens produzindo a história e sendo por ela produzidos. Homens produzindo a história que os produz.”
(MIGUEL; MIORIM, p. 179, 2008)

Como Miguel e Miorim (2008), entendemos que a História da Matemática como abordagem de ensino pode promover uma aprendizagem da Matemática fundamentada na compreensão e significação dos conceitos em estudo ao abordar as “razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante” (MIGUEL; MIORIM, p. 46, 2008).

A partir dessa compreensão, a História da Matemática pode assumir uma função pedagógica ao levar em consideração três categorias de “porquês”: cronológicos, lógicos e pedagógicos (JONES[5], 1969 apud MIGUEL, 1993). Dessa forma, pode ser usada como um instrumento na explicação desses porquês como: “Por que em uma hora há 60 minutos?”, “Por que a divisão de dois números negativos é um número positivo?” e “Por que é ensinado o uso do Mínimo Múltiplo Comum na subtração de frações com denominadores diferentes e não frações equivalentes?”. A partir desses exemplos, é possível perceber as vantagens de se trabalhar com a História da Matemática em sala de aula, já que ela tem grande potencialidade de ajudar a dar mais significado aos processos de aprendizagem quando procuramos responder a esses “porquês”.

De acordo com Morris Kline, uma abordagem matemática deveria ser intuitiva uma vez que “a lógica sempre viera muito depois das criações...” (KLINE[6], 1976 apud MIGUEL, 1993, p. 48). Ou seja, se existe uma lógica em um conhecimento, esta não surgiu repentinamente, mas sim, a partir de sua construção (do conhecimento). E essa construção se desenvolve historicamente pautada por necessidades variadas de cada época e sociedade, e se constitui em uma das ideias centrais da presente pesquisa: compreender a Matemática como uma construção humana, que segue evoluindo, sempre passível de questionamentos e construções; e, como produção de muitos, em todas as partes do mundo

[5] JONES, P. S. The History of Mathematics as a teaching tool. In: Historical topics for the Mathematics classroom. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1969.
[6] KLINE, M. O fracasso da Matemática moderna. São Paulo: Ibrasa, 1976.

e não de apenas alguns homens brilhantes e, possivelmente, europeus[7].Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam que o professor pode ter condições favoráveis de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática ao levar o estudante por um caminho onde a Matemática possa ser compreendida como um trabalho de muitas pessoas e de diferentes culturas (BRASIL, 1997). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - embora não dê o mesmo destaque proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais à História da Matemática - aponta que "para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática" (BRASIL, 2017, p. 299).

A História da Matemática pode proporcionar, ainda, a compreensão de que sempre houve persistência para aperfeiçoar a Matemática e, de que ela não é um conhecimento estático, mostrando ao estudante que a sua construção e evolução se devem às necessidades de diferentes épocas e culturas e que é sempre passível de desenvolvimento. Sendo assim e, segundo Kline (1976 apud MIGUEL, 1993), tendo conhecimento disso, o estudante pode desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática. Os próprios PCN destacam isso ao mencionar que com o recurso da História da Matemática "o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático" (BRASIL, 1997, p. 34). Mas, para isso não basta simplesmente "contar" a História da Matemática, é preciso ter uma metodologia, uma estratégia de ensino, que leve o estudante a passar "novamente por onde passaram os seus ascendentes; mais rapidamente, mas sem omitir etapas" (POINCARÉ[8], 1947 apud MIGUEL, 1993, p. 43).

Essa estratégia de ensino pode ser estabelecida no planejamento do professor, quando este assume a História da Matemática como uma "fonte de seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da Matemática escolar" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 61). Em relação a esses tópicos considerados motivadores, ressaltamos que, assim como Miguel e Miorim (2008) não entendemos que a História da Matemática é motivadora – há vários estudos, mencionados pelos autores, que apontam o contrário – se for tratada apenas como conteúdo ou assunto específico de

---

[7] A visão eurocêntrica da Matemática pode levar à ideia de que apenas matemáticos europeus produziam matemática, sem levar em consideração os conhecimentos, por exemplos, dos povos indianos, chineses, dentre outros.

[8] POINCARÉ, H. Science et Méthode. Paris: Flamarion, 1947.

determinada época ou sociedade. A ideia é que, a partir da pesquisa e seleção de fatos realizada pelo professor, ele consiga criar na sala de aula de Matemática um ambiente propício para que, por exemplo, os alunos possam desenvolver um olhar mais crítico sobre o conhecimento matemático.

1.1. Potencialidades do uso da História da Matemática

Como Miguel (1993), entendemos que a utilização da História da Matemática no ensino de Matemática pode favorecer a construção de conceitos por parte dos estudantes. Assim, por exemplo, os conceitos apresentados no livro "Elementos"[9] de Euclides poderiam ser desenvolvidos com os alunos, não como mera transmissão de informações, mas privilegiando todo o processo de construção da obra por Euclides. Esse recurso didático pode contribuir para desmistificar a ideia que se tem da Matemática como uma Ciência cujo conhecimento já está pronto e acabado. Assim, utilizar a História da Matemática como apoio didático pode contribuir para que os estudantes percebam:

> (1) A Matemática como uma criação humana; (2) As razões pelas quais as pessoas *fazem matemática;* (3) As necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) As conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) A curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) As percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Tais percepções podem se constituir em objetivos pedagógicos para o ensino de Matemática. De modo geral parece que, mesmo às vezes de forma implícita, esses objetivos contribuem para responder o porquê e para quê ensinar e aprender Matemática. Sendo assim, o primeiro e o sexto objetivos podem contribuir para desmistificar a Matemática que muitas vezes é vista como algo que surgiu pronto em um determinado momento. Esse objetivo pode ser alcançado pelo professor, ao criar estratégias que revelem aos alunos que a Matemática passou e ainda passa por aprimoramentos. Já o segundo e terceiro objetivos podem favorecer a compreensão de que a Matemática se desenvolve também para atender a necessidades práticas (reais), ou seja, é possível mostrar aos alunos

[9] No próximo capítulo abordamos mais detalhadamente essa obra.

que houve muitas pessoas comuns construindo conhecimento matemático a partir de suas necessidades.

O quarto objetivo remete às diversas relações da Matemática com outras Ciências, ou seja, em sala de aula, é possível mostrar as relações da Matemática com a Geografia, História, Ciências, entre outras. Por exemplo, a Matemática sofreu e ainda sofre influências práticas para se desenvolver, mas também influências sociais e culturais de um determinado período. Isso nos permite reflexões e conexões com a História. Um outro exemplo, nos leva à conexão com a Geografia, ao compreender que a Matemática se desenvolve de maneiras diferentes de acordo com a localização geográfica e o meio político de determinada região.

Por fim, o quinto e sétimo objetivos buscam contribuir para um olhar voltado à abstração, à necessidade de uma formalização da Matemática. Acreditamos ser imprescindível promover um caminho para que os estudantes possam compreender a necessidade dessa formalização. Um exemplo seria levar os estudantes a compreender que precisamos nomear pontos, segmentos, dentre outros objetos matemáticos[10]. De acordo com Miguel (1993) é por meio de Euclides que podemos perceber o surgimento, diretamente relacionado ao ensino da Matemática, do paradigma do formalismo[11], já que sua obra apresenta uma característica mais lógica do que pedagógica.

Em seu estudo sobre as potencialidades pedagógicas da História da Matemática no ensino, a partir de análises de produções brasileiras relacionadas ao uso da história na Educação Matemática, Miguel (1997) aponta treze argumentos que são reforçadores das potencialidades pedagógicas da História da Matemática, mas alguns também são passíveis de questionamentos:

1º) Uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da Matemática;
2º) A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da Matemática;
3º) Uma fonte de métodos adequados de ensino da Matemática;
4º) Uma fonte de seleção para os problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de Matemática;
5º) Um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino;

[10] Os objetos matemáticos seriam as figuras, símbolos, cálculos, etc.
[11] Miguel (1993) aprofunda esse assunto.

6º) Um instrumento de formalização de conceitos Matemáticos;

7º) Um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico;

8º) Um instrumento unificador dos vários campos da Matemática;

9º) Um instrumento promotor de atitudes e valores;

10º) Um instrumento de conscientização epistemológica;

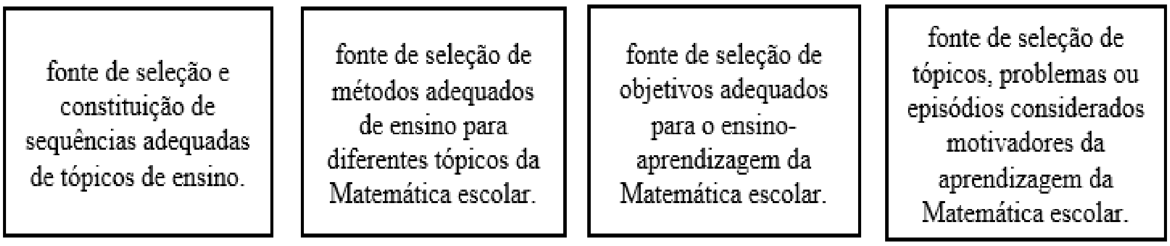
11º) Um instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva;

12º) Um instrumento de resgate da identidade cultural;

13º) Um instrumento revelador da natureza da Matemática.

Miguel (1993, 1997), Miguel e Miorim (2008) apresentaram os argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas da História da Matemática em duas categorias: de natureza epistemológica, que estão relacionadas ao conhecimento Matemático e, de natureza ética. Do primeiro ao quarto, Miguel e Miorim (2008, p. 61) têm argumentos epistemológicos voltados ao planejamento do professor, onde a História da Matemática é:

Figura 1 - Argumentos de natureza epistemológica (1)



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Dessa forma, esses argumentos justificam a utilização da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem. Caberia dizer aqui que, nesse momento, o professor utilizaria a História da Matemática como um instrumento importante na elaboração do seu planejamento.

Finalmente, Miguel e Miorim (2008, p. 61-62) destacam que o sexto e sétimo argumentos de natureza epistemológica se referem à História da Matemática como:

Figura 2 - Argumentos de natureza epistemológica (2)

fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade.	fonte de identificação de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que se manifestam entre os estudantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar.	fonte de identificação de mecanismos operatórios cognitivos de passagem a serem levados em considerações nos processos de investigação em Educação Matemática e no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Em outras palavras, o quinto argumento de natureza epistemológica diz que a História da Matemática é a busca por um fato e/ou conhecimento histórico que está estático para promover um ensino e aprendizagem com mais significado.

Esses argumentos podem ser relacionados com a identificação e compreensão, pelo professor, das dificuldades e do nível em que estão os seus alunos. Considerando isso, é importante que o docente tenha conhecimentos sobre a História da Matemática e sua função pedagógica.

Quanto aos argumentos de natureza ética (MIGUEL; MIORIM (2008, p. 62) a História da Matemática tem potencialidades mais abrangentes:

Figura 3 - Argumentos de natureza ética

fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido de uma tomada de consciência da unidade da Matemática.	fonte para a compreensão da natureza e das características distintivas e específicas do pensamento matemático em relação a outros tipos de conhecimento.	fonte que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação do seu ensino.
fonte que possibilita a construção de atitudes academicamente valorizadas.	fonte que possibilita uma conscientização epistemológica	fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual
fonte que possibilita o desenvolvimento de um pensamento crítico, de uma qualificação como cidadão e de uma tomada de consciência e de avaliação de diferentes usos sociais da Matemática.	fonte que possibilita uma apreciação da beleza da Matemática e da estética inerente a seus métodos de produção e validação do conhecimento.	fonte que possibilita a promoção da inclusão social, via resgate da identidade cultural de grupos sociais discriminados no (ou excluídos do) contexto escolar.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Os argumentos de natureza ética estão relacionados a valores e princípios necessários para o processo de ensino e aprendizagem que podem tornar a sala de aula de Matemática um ambiente propício para a construção de conhecimentos.

O estudo de Miguel (1997) aponta alguns dos poucos argumentos questionadores da utilização da História da Matemática tais como: ausência de literatura adequada e a natureza imprópria da literatura existente para utilização didática; a introdução de elemento histórico que pode dificultar a aprendizagem devido a sua complexidade; e, a ausência do sentido do progresso histórico, nas crianças.

Em relação a um desses argumentos questionadores, Miguel e Miorim (2008) observaram que, para alguns autores (BYERS, 1982; GRATTANN-GUINNESS, 1973)[12], a História da Matemática poderia dificultar a aprendizagem da Matemática. O principal argumento questionador apontado seria que "a introdução do elemento histórico no ensino da matemática, em vez de facilitar a aprendizagem, acabaria por complicá-la ainda mais" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 64). Para os autores, a dificuldade pode surgir porque os problemas originais demandam tempo e esforço e não são familiares para os estudantes. Com isso, acreditamos que é necessário pensar em como esses problemas podem ser abordados em sala de aula, considerando o tempo disponível e o conhecimento prévio dos alunos para que realmente a História da Matemática facilite a aprendizagem.

Diante desses argumentos, Miguel (1993, p. 107) reforça que a História da Matemática pode assumir um papel importante na Educação Matemática "apenas quando devidamente reconstituída com fins pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático". Ao utilizar a História da Matemática como abordagem de ensino

> [...] torna-se necessário, então, que o professor , concebido não apenas como mediador entre o espaço da vida social privada e subjetiva do estudantes e o espaço da vida social pública do mundo contemporâneo, mas também como representante das diferentes comunidades de memória que participaram e/ou participam do processo de constituição da matemática e da educação matemática escolares na história, dialogue de forma problematizadora com a cultura matemática e educativa produzidas por essas comunidades (MIGUEL; MIORIM, p. 180., 2008).

---

[12] BYERS, V. Why study the history of mathematics? International Journal of Math. Educ. Sci. Technol. 13 (1): 59-66. 1982.
GRATTANN-GUINNESS, I. Not from nowhere: history and philosophy behind mathematical education. International Journal of Math. Educ. Technol. 4: 421-453, 1973.

Dessa forma, o papel do professor é crucial, pois é ele que promoverá um ambiente de aprendizagem necessário para os estudantes, a partir da utilização da História da Matemática em sala de aula.

1.2 O uso de fontes primárias

A obra “Elementos” de Euclides pode ser considerada uma fonte primária de conhecimento matemático ao permitir a consulta a ideias expressas há mais de dois mil anos atrás. Apesar de não termos disponível o original, contamos com diversas traduções cuidadosamente realizadas que contemplam tanto o texto original quanto, em vários casos, comentários do tradutor[13].

De acordo com Jahnke et al (2002), de forma geral, o uso de fontes originais (ou textos originais) pode reorientar o ponto de vista acerca da Matemática e tem o propósito de fazer com que seja vista como uma produção intelectual que se desenvolve de acordo com um contexto, época e sociedade. Os autores ainda destacam que, quando o estudante compara as ideias matemáticas que conhece com a fonte original (textos), ele pode ganhar uma nova visão sobre certas propriedades que talvez eram consideradas “automáticas”, ou seja, apenas aceitas por ele sem uma compreensão. Entretanto,

> se o valor da história está na reorientação, na compreensão e não no julgamento, os textos precisam ser contextualizados, localizados no contexto de seu tempo. Precisamos lembrar a nós mesmos que o escritor estava se dirigindo não a nós, mas a um público contemporâneo. (JAHNKE et al, 2002, p. 293, tradução nossa[14]).

Com isso, ao utilizar uma fonte primária no ensino de Matemática, principalmente na Educação Básica, é preciso promover um contexto apropriado para a idade dos estudantes levando também em consideração os seus conhecimentos prévios. Dessa forma, o uso de fontes originais também pode ter importantes contribuições no trabalho do professor, pois, ao reorganizar a Matemática retrospectivamente e promover um contexto adequado, é possível que se reconheça, “nas dificuldades apresentadas hoje pelos alunos no entendimento de um conceito, as mesmas dificuldades que, segundo a história, se

[13] Traremos mais detalhes sobre essa obra de Euclides no capítulo seguinte.

[14] “If the value of history lies in reorientation, in understanding rather than judging, then texts need to be contextualized, that is located in the context of their time. We need to remind ourselves that the writer was addressing not us, but a contemporary audience.”

apresentaram na elaboração de tal conceito ou definição" (MOREY; MENDES, 2002, p. 5). Assim, concordamos com Jahnke et al (2002, p. 313, tradução nossa[15]) ao afirmarem que "em todo ensino em que uma fonte original desempenhará um papel, o professor deve considerar a relação concreta entre o texto, o contexto e os leitores".

Um outro ponto de destaque é que, ao usar uma fonte primária em sala de aula, é possível enriquecer o conhecimento formal e informal dos estudantes a respeito de conceitos matemáticos ao promover discussões (ex.: sobre pessoas comuns fazendo Matemática, as dificuldades dos matemáticos, suas experiências, dentre outros) e descobertas (chegar a um conhecimento matemático). Dessa forma, um caminho seria promover um ambiente, um contexto, que possibilite que faça-os enxergar a própria capacidade de fazer Matemática: perante as dificuldades, na qual o estudante pode pensar que "se matemáticos famosos passaram por isso, por que não eu?" (JAHNKE et al, 2002, p. 293, tradução nossa[16]); e, perante às descobertas, em que ele possa entender que não precisa ser um matemático para construir um conhecimento matemático e/ou que ele foi capaz de chegar a um conhecimento de um matemático.

Jahnke et al (2002) apresentam algumas ideias de uso da fonte primária que podem orientar o professor. Dentre elas, destacamos aquelas que adotamos nesta pesquisa: a apresentação de uma fonte primária de forma direta ou indireta; e, o momento de verbalização.

Uma apresentação direta de uma fonte primária é aquela que acontece sem uma preparação prévia que pode causar o que o autor chamou de "choque cultural". Esse impacto tem suas vantagens e pode promover discussões importante, porém, ao trabalhar com estudantes da Educação Básica, essa apresentação direta pode gerar uma visão negativa da Matemática e até mesmo comprometer todo o trabalho proposto. Por exemplo, para Miguel e Miorim (2008, p. 64) quando um estudante é "confrontado com os problemas originais e com as soluções que historicamente lhes foram dadas, dispenderia um tempo e um esforço sem precedentes, tentando reconstituir um contexto que não lhe é familiar". Essa situação, portanto, pode causar angústias e talvez uma sensação de incapacidade por parte do estudante.

---

[15] "In every teaching where an original source is going to play a role the teacher has to consider the concrete relationship between the text, the context and the readers."
[16] "If famous mathematicians went through it, why not I?."

Quanto a apresentação indireta de uma fonte primária, para os autores, “uma estratégia indireta é uma situação em que a fonte é consultada após algumas atividades anteriores” (JAHNKE et al, 2002, p. 314, tradução nossa[17]), dessa forma, o aluno é inserido previamente em um contexto possibilitando uma melhor compreensão de um texto histórico.

Ainda em relação à necessidade de promover um contexto histórico para trabalhar com uma fonte primária, consideramos importante ressaltar que os conhecimentos matemáticos contidos em uma fonte primária podem ser o resultado do trabalho de matemáticos e não matemáticos de diversos países do mundo. Essa situação pode contribuir para mudar a visão eurocêntrica da Matemática, ou seja, de que ela só foi construída pelos europeus, além de fazer conhecer e dar mérito também aos africanos, indianos, chineses, dentre outros.

Quanto à verbalização, Jahnke et al (2002) sugere que uma excelente estratégia, ao utilizar uma fonte primária, é fazer com que os estudantes verbalizem um raciocínio matemático. Entendemos que esse processo pode ser um caminho para a argumentação matemática e até mesmo fazer com que compreendam a necessidade de formalizar conceitos.

Na presente pesquisa, nos propusemos a considerar a obra “Elementos” de Euclides, bem como sua história, como contexto para o ensino e aprendizagem de noções de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. Nesse sentido, procuramos situar o momento histórico no qual a obra foi produzida, bem como destacar o fato de que ela sistematiza conhecimentos disponíveis em várias culturas distintas, ainda que não formalizados da mesma maneira. Buscamos aproximar os estudantes de algumas proposições do Livro I, mas, nossa ênfase não se colocou na fonte em si, mas nos conhecimentos que ela continha, procurando articulá-los com formas atualizadas de representá-los e compreendê-los por meio do GeoGebra.

Passamos a seguir a apresentar brevemente uma síntese de nossas leituras e reflexões.

[17] “An indirect strategy is a situation where the source is consulted after some previous activities.”

CAPÍTULO 2: REFLEXÕES ACERCA DOS "ELEMENTOS" E SEU POTENCIAL PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

> *"O que somos de razão e vontade, o que somos de pensamento e ação, o que somos de sensibilidade e frieza, de trabalho e lazer, de descrença e esperança, o que somos de bílis e coração é terem existido outros, é terem traçado rumos, e terem aberto estradas, é terem apontado caminhos!"*
>
> (BICUDO, 2009, p. 17)

No Brasil, assim como em boa parte do mundo, a Geometria presente nos currículos escolares de Matemática na Educação Básica e até mesmo no Ensino Superior é fortemente influenciada pelas obras de Euclides (VILELA; DEUS, 2014). Mesmo com os avanços da área e com o surgimento das Geometrias não-euclidianas, a Geometria Euclidiana foi e ainda é o modelo utilizado no ensino de Matemática, principalmente na Geometria. É por essa e outras razões que os conhecimentos compilados por Euclides há mais de dois mil anos constituem uma obra de grande importância para a comunidade matemática.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental deve proporcionar aos alunos o desenvolvimento de habilidades de demonstrações simples. O documento enfatiza que as tarefas sobre transformações e ampliações/reduções, por exemplo, possibilitam a identificação de seus elementos de figuras geométricas planas que, por sua vez, podem fazer com que os estudantes "saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo" (BRASIL, 2017, p. 272). Entretanto, tais habilidades só serão alcançadas se os alunos já possuírem uma outra habilidade: a argumentação e/ou a capacidade de realizar justificativas.

É possível encontrar nos "Elementos" estratégias para o desenvolvimento de tais habilidades, mas, apesar de a Matemática escolar ter um forte embasamento no espaço de Euclides, a sua importância, bem como da sua obra, geralmente não é explícita nos livros didáticos. Dessa forma, ao buscar um ensino mais humanizado, a abordagem dos "Elementos" de Euclides nos anos finais Ensino Fundamental, a partir de uma construção histórica pode trazer grandes contribuições para as aulas de Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um dos princípios do ensino de Matemática é que o contexto histórico contribui para que o estudante compreenda o papel da Matemática. Para isso, "o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução" (BRASIL, 1997, p. 19). Além disso, o documento destaca que a Matemática foi construída a partir de necessidades práticas e problemas oriundos de diversos contextos e origens como, por exemplo, a divisão de terras. Já a BNCC menciona, de forma geral, que é preciso valorizar os conhecimentos historicamente construídos para compreender a realidade, mas não apresenta um tópico específico sobre o recurso História da Matemática assim como é apresentado nos PCN. Na verdade, o documento apresenta, de forma sucinta, alguns indícios de que um contexto histórico deve ser inserido nas aulas de Matemática ao destacar que uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental seria

> reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 267).

Entretanto, ao analisar as habilidades descritas (de Matemática) em cada ano escolar do Ensino Fundamental, encontramos, em duas habilidades do 7º ano, uma menção à inserção de um contexto histórico[18]. A partir do que encontramos nesses documentos norteadores da Educação Básica (PCN e BNCC), além do que foi apresentado no capítulo anterior, pode-se dizer que é fundamental que o professor de Matemática conheça a História da Matemática.

Dentre as várias possibilidades históricas, selecionamos uma obra que influenciou – e, em alguma medida, ainda influencia – o ensino da Geometria em boa parte do mundo: os "Elementos", de Euclides.

---

[18] (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração (Tópico sobre Números). (BRASIL, 2017, p. 307); e, (EF07MA33) Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica (Tópico sobre Grandezas e Medidas). (BRASIL, 2017, p. 309).

2.1 A obra "Elementos" de Euclides

Os "Elementos" de Euclides ainda podem ser considerados como a base da Geometria estudada nas escolas (VILELA; DEUS, 2014; FUJITA, 2001). Essa obra, uma das mais importantes da História da Matemática, por muitos anos foi usada como principal referência para muitas outras produções, e também como livro-texto no ensino de Geometria (FUJITA, 2001).

Euclides trabalhou na Biblioteca de Alexandria, cidade do Egito fundada por Alexandre, o Grande. Nessa época, a cidade de Alexandria passou a ser a capital do Egito, governada por Ptolomeu. Com a abertura da Universidade de Alexandria, que já possuía a sua grande Biblioteca, a cidade passou a receber vários intelectuais e, dentre eles, Euclides, chamado para comandar o departamento de Matemática (EVES, 2011).

Figura 4 – Recorte da pintura "Escola de Atenas" de Rafael Sanzio (1509-1510)

Fonte: https://www.claymath.org/euclids-elements.

A figura 4 é um recorte da pintura[19] de Rafael Sanzio denominada "Escola de Atenas", nesse recorte, temos Euclides realizando uma construção com um compasso. De acordo com Eves (2011, p. 167), "é desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de Matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor". De acordo com Bicudo (2009), uma das principais fontes de informação que se tem sobre a história da geometria grega é o *Comentário* do filósofo Proclus (século V d.C.). Ele

[19] Para visualizar a pintura completa acesse: https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-escola-de-atenas-rafael-sanzio/

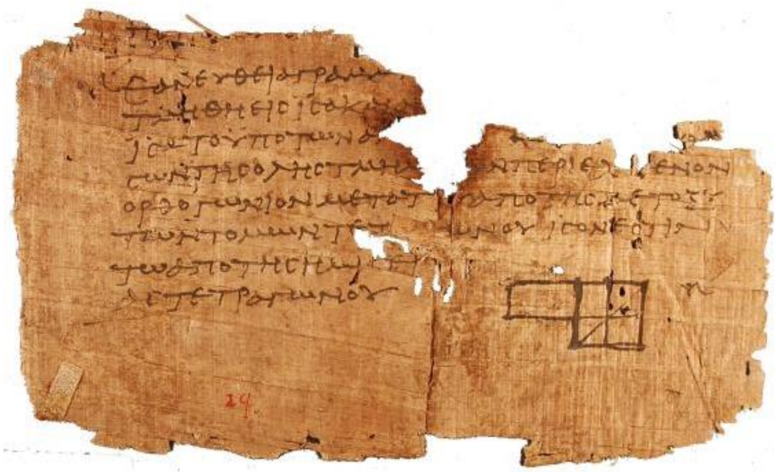
escreveu que Euclides era de acordo com a filosofia platonista[20], pois é possível verificar isso no final da obra "Elementos" que apresenta a construção dos sólidos regulares conhecidos como figuras platônicas (STEWART, 2004).

Euclides, desenvolveu outros trabalhos relacionados a lugares geométricos e cônicas. Alguns sobreviveram até os tempos atuais, devido às traduções, outros se perderam. Contudo, sua obra "Elementos" é considerada uma das mais importantes da História, pois houve um grande esforço de organização e sistematização de conhecimentos matemáticos da época. Além disso, de acordo com Stewart (2004), para os matemáticos modernos, a estrutura lógica contida em "Elementos" é o que se destaca na geometria de Euclides.

Nessa obra, ele organizou muitos conhecimentos matemáticos disponíveis em sua época, mas que estavam dispersos. A organização e a sistematização dos conhecimentos presentes no livro seguiram uma lógica cuidadosa para alcançar as validações. Além disso, o sistema axiomático dedutivo era referência para a Matemática e para outras ciências (VILELA; DEUS, 2014). E, embora Euclides não seja o autor de parte do conhecimento expresso nesses livros, teve o mérito de organizá-los.

Montoito e Garnica (2014) relatam que não existe mais a sua obra original, mas há diversas cópias com comentários e acréscimos em vários países. A figura 5 mostra um dos fragmentos mais antigos que contém um registro que remete à obra "Elementos".

Figura 5 - Fragmento de papiro encontrado em Oxyrhynchus, no Egito



Fonte: http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/papyrus.html.

[20] O filósofo Platão, que viveu antes de Euclides, apoiava a estruturação dedutiva sistemática da Ciência (BICUDO, 2009).

Esse fragmento de papiro foi encontrado em Oxyrhynchus, no Egito, no século I, de nossa era (ROQUE, 2012). Entretanto, no site da *University of British Columbia*[21], encontramos informações de que há conjecturas de que o fragmento tenha sido escrito por alguém para uso privado.

O exemplar mais antigo data do ano de 888 d.C., e se encontra na Capadócia na biblioteca de Aretas de Cesareia. Esse exemplar foi traduzido por um grego do século IV, chamado Théon (Figura 6), e há também uma cópia na *Bodleain Library* da Universidade de Oxford.

Figura 6 - Cópia dos "Elementos" escrita em grego, à mão, datada de 888 d.C

Fonte: https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions[22].

O exemplar mais conhecido está em inglês e é denominado *Euclid – The Thirteen Books of the Elements*[23], uma tradução com introdução e comentários feitos por Sir Thomas L. Heath. No Brasil, o primeiro exemplar traduzido e comentado foi publicado em 2009 por Irineu Bicudo. Essa tradução apresenta uma introdução e comentários valiosos feitos pelo autor sobre o contexto da obra, de Euclides e sua época, fazendo com que o leitor entenda a história em torno dos "Elementos". Além disso, é importante ressaltar que Irineu Bicudo traduziu a obra de Euclides diretamente do grego[24] para a língua Portuguesa.

[21] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/papyrus.html#lookingat
[22] Nesse site é possível visualizar todas as páginas dessa cópia.
[23] EUCLIDES. Euclid – The Thirteen Books of the Elements. Sir Thomas L. Heath (trad.). Second Edicion. New York: Dover, 1956.
[24] Usou o texto grego da edição de Heiberg-Stamatis, da Editora Teubner, de Leipzig, 1969-1977 (BICUDO, 2009, p. 21).

Os “Elementos” são na verdade a junção de 13 pergaminhos denominados livros e numerados de I a XIII.

O Livro I inicia com 23 definições, que, segundo (ROQUE, 2012, p. 166), podem ser entendidas como “um tipo de hipótese da qual o aprendiz não tem uma noção evidente, mas faz uma concessão àquele que as ensina e aceita-a sem demonstração”. Apresentamos a seguir algumas dessas definições, aquelas que tiveram destaque nesta pesquisa.

> 1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
> 2. E linha é comprimento sem largura.
> 3. E extremidades de uma linha são pontos.
> 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
> 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura. [...]
> 10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou. [...]
> 15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
> 16. E ponto é chamado centro do círculo.
> 17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro. E terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois. [...]
> 23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Fonte: Bicudo (2009, p. 97-98).

Em seguida, o Livro I apresenta os cinco postulados e as nove noções comuns. Seguem alguns exemplos[25]:

> *Postulados*
> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
>
> *Noções comuns*
> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 9. E duas retas não contêm uma área.

Fonte: Bicudo (2009, p. 98-99).

[25] Listamos os postulados que tiveram destaque nesta pesquisa. Quanto às noções comuns selecionamos e explicitamos aqui algumas de forma aleatória, pois não foram utilizadas na pesquisa.

Após esses primeiros princípios, são apresentadas as proposições que Euclides queria demonstrar. Tudo isso faz parte da lógica interna da obra e é uma de suas principais características. Sánchez (2012, p. 78, tradução nossa[26]), ao tratar dos “Elementos”, destaca que “sua importância reside, não apenas na Matemática encontrada lá, mas no estilo de raciocínio, conhecido como raciocínio geométrico”. Outro fato importante, segundo o autor, é que tal organização esteve em busca do que é chamado de conhecimento elementar e serve de base para contínuas pesquisas. É dessa forma que a obra “Elementos” foi reconhecida, pelo seu rigor de demonstração e organização lógica que é muito importante no campo científico.

Os livros se iniciam com definições, com exceção do VIII, IX, XII e XIII.

Escolhemos o Livro I como referência para a elaboração das tarefas na presente pesquisa. Isso se justifica pelo fato de algumas de suas proposições se aproximarem dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental.

O Livro I aborda os “primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema ‘de Pitágoras’ (ROQUE 2012, p. 163). Uma visão geral desse Livro e dos demais da obra “Elementos” estão apresentados a seguir.

Quadro 1 - Organização dos livros da obra "Elementos"

LIVRO	Nº de proposições	Principal assunto
LIVRO I	48	Primeiros princípios e Geometria plana.
LIVRO II	14	Álgebra geométrica
LIVRO III	37	Círculos Inscrição e circunscrição de figuras
LIVRO IV	16	
LIVRO V	25	Teoria das proporções
LIVRO VI	33	Semelhança de figuras planas
LIVRO VII	39	Proporções numéricas Números primos Maior divisor comum Progressões geométricas
LIVRO VIII	27	
LIVRO IX	36	
LIVRO X	115	Incomensurabilidade
LIVRO XI	39	Geometria Espacial
LIVRO XII	18	
LIVRO XIII	18	

Fonte: Quadro elaborado pela autora a partir dos “Elementos” (BICUDO, 2009).

[26] Original: Su importancia radica, no solo en la matemática que allí se encuentra sino en su estilo de razonamiento, el que se conoce como razonamiento al estilo geométrico.

Como mencionado anteriormente, Euclides organizou essa obra graças ao acesso que possuía às produções de diversos matemáticos anteriores (MELOGNO, 2011). Portanto, pode-se dizer que ele foi um "organizador" e sistematizador das teorias matemáticas existentes na época e, por trás do seu trabalho, há toda uma Matemática que já existia, mas que foi logicamente estruturada. Assim,

> Não há dúvida de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais. (EVES, 2011, p. 169).

A organização de os "Elementos" foi tão valorizada, que, por muito tempo, os livros foram utilizados como texto-base para a aprendizagem de Matemática nas escolas. Euclides não criou um livro didático ou qualquer outro tipo de material para ser utilizado como instrumento de ensino, e sim, compilou as ideias que existiam na época de um modo mais científico. Talvez por ser uma obra aclamada e considerada como uma referência para muitos matemáticos, tornou-se referência também para o ensino. Segundo Montoito e Garnica (2014, p. 97), "apesar dos diversos ataques que sofreu ao longo dos séculos, sua importância como verdade prática e como um dos fundamentos teóricos da matemática permanece inalterada".

A partir do final do século XIX e início do século XX, a situação começou a mudar. Segundo Fujita (2001, p. 196, tradução nossa)[27]: "no século XIX na Inglaterra, o ensino da Geometria nas escolas secundárias significava geralmente o ensino direto de 'Elementos' de Euclides. O valor dos 'Elementos' na educação era treinar a capacidade dos alunos no raciocínio lógico". Contudo, no início do século XX, surgiram na Inglaterra várias críticas sobre as dificuldades advindas do ensino e estudo direto da obra de Euclides nas escolas secundárias. Mesmo que na maior parte da obra "Elementos" Euclides tenha buscado a formação do conhecimento elementar, segundo Montoito e Garnica (2014) as dificuldades encontradas pelos estudantes estariam relacionadas, por exemplo, à falta de uma preparação para estudar os "Elementos", ao tratamento das paralelas e dos incomensuráveis, o que acarretou em discussões para melhorar o ensino de Geometria (FUJITA, 2001). Tais discussões geraram mudanças no ensino de Geometria nesse país e

[27] Original: "In the 19th Century in England, the teaching of geometry in secondary schools meant usually the direct teaching of Euclid's Elements. The value of the Elements in education had been considered that it would train students' ability in logical reasoning".

inspiraram processos semelhantes em outros. Fujita (2001) relata que, a partir dessa abertura, que permitiu certa liberdade em relação à ordem de apresentação dos conteúdos dos “Elementos”, em 1903, é publicado o livro “*Elementary Geometry*” (Geometria Elementar) pelos autores Godfrey e Siddons[28]. Esses autores propunham uma estrutura mais didática para o ensino de Geometria e buscavam uma ordem mais histórica e psicológica do que científica para o ensino secundário. Porque, para chegar até uma ordem científica, alguém já refletiu e construiu o conhecimento anteriormente (GODFREY; SIDDONS, 1931 apud FUJITA, 2001).

O livro proposto pelos autores era dividido em duas partes: Geometria Experimental, que tinha o propósito de fazer com que os estudantes se familiarizassem com os instrumentos geométricos, além de descobrirem propriedades através das tarefas experimentais; e Geometria Teórica, que abordava as proposições dos quatro primeiros livros dos “Elementos” de Euclides com as proposições reorganizadas. Fazer com que os estudantes realizassem as tarefas experimentais utilizando e conhecendo os instrumentos geométricos poderia fazer com que apreciassem as construções e os teoremas de Euclides (FUJITA, 2001).

Godfrey e Siddons publicaram mais três livros nos anos seguintes: *Modern Geometry* (Geometria Moderna) em 1908; *A Shorter Geometry* (Uma Geometria Breve), em 1912, e *Practical and Theoretical Geometry* (Geometria Prática e Teórica), em 1920. Com exceção de *Modern Geometry* que apresentava também tópicos especiais para as licenciaturas, todos eram voltados para o ensino secundário.

Ao analisar os livros *Elementary Geometry* e *A Shorter Geometry*, Fujita (2001) concluiu que não houve mudanças radicais quanto à ordem proposta nos “Elementos”. Muitas proposições destes livros foram mantidas como naquela obra. Apesar disso, o autor ressalta que essa mudança foi de grande importância, já que, até então, era aceita apenas a ordem de Euclides. O autor destaca ainda que, com o abandono da exclusividade de os “Elementos”, surgiram muitos livros de Geometria propondo ordens diferentes.

Segundo Montoito e Garnica (2014), Carroll (1879)[29] também defendia a permanência da obra de Euclides como um modelo para o ensino. Para esse último, a obra “Elementos” era a única referência em ensino de Geometria da época, pois, vários outros

[28] Godfrey, C., Siddons, A. W. (1903). *Elementary Geometry practical and theoretical*. Cambridge: Cambridge at the University Press.
[29] CARROLL, Lewis. Euclides e Seus Rivais Modernos. Tradução de Rafael Montoito. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2014.

trabalhos que foram surgindo apresentavam alguns equívocos. Os autores concluem que, no decorrer dos anos muitas mudanças ocorreram em várias outras ciências, porém, no campo da Geometria, a obra de Euclides continuou sendo guia para muitos estudiosos. Esse fato destaca sua grande importância como referência no ensino de Geometria, como é possível observar em um trecho do prefácio de uma edição da obra “Elementos” que diz:

> [...] Em muitos outros ramos da ciência os modernos ultrapassaram em muito seus mestres; mas, depois de um lapso de mais de dois mil anos, esse desempenho ainda mantém sua proeminência original, e até adquiriu celebridade adicional pelas tentativas infrutíferas que foram feitas para estabelecer um sistema diferente (BONNYCASTLE[30], 1798 *apud* HARTSHORNE, 2000, p. 460, tradução nossa)[31]

Assim, Euclides foi essencial para o desenvolvimento de muitas áreas da Matemática, pois “sua importância como verdade prática e como um dos fundamentos teóricos da matemática permanece inalterada” (MONTOITO; GARNICA, 2014, p. 97).

A obra de Euclides pode não ser, em sua integralidade, um instrumento de ensino direto para a Educação Básica, pois, mesmo se tratando de uma Matemática mais elementar, ela não foi criada para esse fim. Embora tenha sido utilizado como texto-base por muito tempo, basta folhear a obra traduzida por Irineu Bicudo (2009) para perceber que é preciso ter certa cautela em sua leitura. Destacamos um trecho do seu prefácio em que Bicudo (2009, p. 13) diz:

> Previno, por fim, a quem possa interessar, que é preciso fôlego para acompanhar muitíssimas das demonstrações que aqui se encontram, e determinação. Garanto, no entanto, que, vencida a inércia, ultrapassado o obstáculo, alcançado o objetivo com a compreensão do resultado, cabe a recompensa de ter mergulhado no próprio processo do que denominamos “pensar” e de haver podido apreendê-lo em toda a sua abrangência. Mais: brotará disso a convicção de que, se com Homero a língua grega alcançou a *perfeição*, atinge com Euclides a *precisão*.

Entretanto, é possível utilizar a obra “Elementos” como um recurso de apoio didático baseada em um direcionamento ou em outros objetos de ensino e aprendizagem, como, por exemplo, a tendência da História da Matemática e as tecnologias. Desde que se

---

[30] J. BONNYCASTLE, *Elements of Geometry, Containing the Principal Propositions in the First Six, and the Eleventh and Twelfth Books of Euclid*, J. Johnson, London, 1798.

[31] Original: “In many other branches of science the moderns have far surpassed their masters; but, after a lapse of more than two thousand years, this performance still retains its original preeminence, and has even acquired additional celebrity for the fruitless attempts which have been made to establish a different system”.

tenha claro os objetivos a serem alcançados, as demonstrações presentes nos “Elementos”, aliadas a outras ferramentas didáticas, podem contribuir para o ensino de Matemática.

2.1.1 O Caráter demonstrativo dos “Elementos” e o Ensino de Geometria

O sistema axiomático ou método dedutivo foi introduzido pelos gregos e também utilizados por Euclides em sua obra. Segundo Brito (1995), o método dedutivo surgiu a partir de uma tendência grega de demonstrar sem a visualização de alguma figura, até então feita a partir de traçados na areia. Os “Elementos”, é “o mais antigo exemplo que possuímos do que hoje chamamos de um sistema axiomático” (TRUDEAU[32], 1987 apud BRITO, 1995, p. 34).

Para Eves (2011), o sistema axiomático foi uma consequência moderna na crença de que o raciocínio matemático é postulacional, ou seja, quando há necessidade de criar afirmações que devem ser aceitas e, portanto, não demonstradas. Todos os postulados, definições e demonstrações presentes no livro “Elementos” caracterizaram a obra como uma importante referência de estruturação formal do conteúdo.

A estrutura e a sistematização dos conhecimentos presentes no livro de Euclides seguiram uma lógica cuidadosa para alcançar as validações, além disso, foram subsídios para a Matemática e para outras ciências.

No que diz respeito ao ensino de Geometria, embora a obra apresente uma organização mais lógica do que científica, pode-se encontrar nos “Elementos” recursos para trabalhar com a Geometria, a álgebra e a teoria dos números (SÁNCHEZ, 2012). Tais recursos estão relacionadas ao caráter demonstrativo, que pode ser desenvolvido nos estudantes com a formação do raciocínio dedutivo, com a argumentação e justificação. Para Veloso (1998), é interessante mostrar aos alunos um pouco sobre como os matemáticos gregos pensavam a Matemática a partir das proposições de Euclides em seu livro I, onde estão logicamente estruturadas e demonstradas para alcançar o ápice, a proposição I.47 do livro I, mais conhecida como o Teorema de Pitágoras.

Entretanto, o rigor demonstrativo no contexto escolar pode ser pedagogicamente trabalhado e estruturado, talvez não diretamente, mas a partir de um caminho que permita ao estudante chegar a essa formalidade em algum momento. Segundo Angulo (2009), para

[32] TRUDEAU, R. The non-euclidean revolution. Birkhauser. Boston, 1987.

um professor ensinar a demonstrar, é necessário que o estudante esteja em um ambiente propício para a descoberta de propriedades. Essas propriedades servirão posteriormente como auxílio para provar seus argumentos. Dessa forma, haverá uma melhor compreensão do conceito e a busca mais convincente de uma demonstração. Mas para quê ensinar a demonstrar em Geometria? O autor defende que a demonstração pode ser vista como um processo social, pois, com ela, os estudantes descobririam se uma propriedade é válida ou não e, com isso, passariam a compreendê-la e a comunicá-la, além de se tornarem capazes de explicar o conceito, que passará a ter um sentindo para eles.

Contudo, o caminho para a demonstração é longo e exige outras habilidades. Para Veloso (1998), a introdução de um conceito deve se dar a partir de uma construção lenta e progressiva permitindo também que os alunos pratiquem a argumentação e se aproximem cada vez mais da demonstração. Para ele, a Geometria é carregada de conceitos e definições que muitas vezes são o foco principal dos professores fazendo parte do primeiro momento da aula. Dessa forma, a consequência poderia ser o contrário do que é defendido neste estudo, a ideia de que a Matemática é um conhecimento pronto e acabado. Mas, é importante evidenciar que conceitos e definições foram e ainda são importantes e necessários para a formalização da Matemática. Os “Elementos” trazem essa e muitas outras características. É uma obra que por muitos anos serviu como base para muitos acadêmicos e que, ainda hoje, tem suas contribuições.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a estruturação do pensamento e a agilização do raciocínio dedutivo do estudante estão entre os papéis a serem desempenhados pela Matemática no Ensino Fundamental (BRASIL, 1997). A Geometria, por sua vez, é essencial para esse desempenho através do desenvolvimento do pensamento geométrico. A própria BNCC destaca que nos anos finais do Ensino Fundamental, “é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada.” (BRASIL, 2017, p. 299). Além disso, o documento estabelece que no 8º e 9º ano os estudantes tenham habilidades de demonstração relacionadas ao tópico de Geometria[33].

[33] (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. (BRASIL, 2017, p. 316). (EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. (BRASIL, 2017, p. 317). (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (BRASIL, 2017, p. 319)

Entendemos que a formalização é uma das fases da construção do conhecimento matemático que, por sua vez, possibilita a capacidade de demonstrar. Entretanto, sabemos também que é necessário que o estudante percorra um caminho no qual ganhará habilidades matemáticas para alcançar o nível de formalizar e demonstrar.

As tarefas propostas nesta pesquisa não se pautam na demonstração, mas em um caminho que possibilite o desenvolvimento da argumentação. Dessa forma, ao promover um trabalho com os “Elementos”, os estudantes podem se beneficiar da lógica da obra por meio do processo de construções geométricas.

Como a habilidade de demonstrar exige um certo rigor e a capacidade de argumentar pode estar atrelada ao desenvolvimento dessa habilidade, a argumentação lógica e dedutiva pode ser apropriada pelos estudantes através da dedução das propriedades de um desenho (GRAVINA, 1996). O desenho geométrico é fundamental na aprendizagem em Geometria. A partir dele, os estudantes podem visualizar e verificar as propriedades que o definem e podem ser grandes aliadas para a argumentação. Com isso, o trabalho com a régua e o compasso, que discutimos a seguir, pode contribuir para o desenvolvimento desse processo.

2.1.2 A régua e o compasso nos “Elementos”: possibilidades para o ensino de Geometria

A utilização da régua e do compasso é central nos livros de Euclides, uma vez que são os instrumentos de desenho privilegiados em todo o trabalho. Talvez existisse uma mensagem subentendida: “eis tudo o que se pode fazer em Geometria com o uso somente da régua e do compasso” (ROQUE, 2012, p. 163).

Schubring e Roque (2014) analisam se o uso da régua e do compasso nos “Elementos” era uma exigência da época ou era de uso exclusivo nas construções com círculos e retas. Para os autores, existem muitas justificativas equivocadas e imprecisões sobre o real motivo do uso desses instrumentos. Mesmo não chegando a uma resposta conclusiva, verificaram que, para alguns matemáticos, o uso da régua e do compasso era uma estratégia pedagógica para tornar as construções mais simples. Além disso, esses instrumentos não exigem conhecimento sobre alguma teoria, como o uso das cônicas por exemplo (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

Segundo Eves (2011), embora a régua e o compasso sejam muito antigos, devido à projeção mundial da obra “Elementos” e ao fato de a mesma utilizar, estritamente, tais instrumentos de desenho na demonstração de suas Proposições, eles ficaram conhecidos como instrumentos euclidianos.

Da época de Euclides para a nossa, novos instrumentos foram desenvolvidos e, com eles, pôde-se inserir novas possibilidades no ensino da geometria escolar, como a manipulação das figuras. A possibilidade de manipular as figuras geométricas pode ser ainda mais favorável para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A movimentação das figuras pode ser uma aliada na argumentação e na demonstração dos estudantes, pois “para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de ‘desenhos em movimento’, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema” (GRAVINA, 1996, p. 6). Essa possibilidade de manipulações de figuras é limitada nas construções geométricas com régua e compasso, mas é permitida através de um ambiente de Geometria dinâmica.

Podemos explorar essa questão didaticamente, criando situações nas quais os estudantes aprendam a utilizar tais instrumentos, bem como outras nas quais explorem os mesmos conceitos em estudo (ou outros), tendo como ambiente de aprendizagem o GeoGebra.

2.2 O GeoGebra como ambiente de aprendizagem

Atualmente, a sociedade tem convivido com várias ferramentas tecnológicas[34] que facilitam diversos tipos de tarefas cotidianas relacionadas ao trabalho, à vida social e pessoal. Cada vez mais o uso dessas ferramentas parece se tornar uma “necessidade humana”, principalmente para aqueles que nasceram no século XXI. *Softwares*, programas e aplicativos têm alterado as práticas e as relações humanas, e, consequentemente, isso altera as formas de agir e pensar até mesmo em sala de aula.

No campo da Educação, as ferramentas tecnológicas visam contribuir para a aprendizagem dos estudantes e são capazes de proporcionar um espaço de conhecimento mais interessante e interativo. Na realidade, a tecnologia, de alguma forma, faz parte da vida dos estudantes e a escola precisa se adaptar a esse novo público. A Base Nacional

[34] Entende-se como “ferramentas tecnológicas” todos os artefatos virtuais e digitais como *softwares*, aplicativos e programas criados para alguma finalidade.

Comum Curricular aponta como uma das competências específicas de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2017, p. 267). Entretanto, muitos são os desafios que tanto o professor quanto o aluno podem enfrentar ao utilizar tecnologias como o laboratório de informática. Borba e Penteado (2010) já refletiam sobre os limites existentes e/ou impostos a esse ambiente. Para eles, embora o apoio a essa tecnologia tenha crescido, as restrições impostas ao laboratório de informática, como normas exageradas quanto ao uso e a responsabilização do professor por qualquer problema que ocorra no local, podem desestimular iniciativas docentes. Além disso, a falta de infraestrutura adequada, com máquinas funcionando corretamente, e a ausência de um técnico de informática podem tornar o laboratório inutilizável.

Além dos diversos desafios encontrados ao utilizar a tecnologia na Educação, existem limites e possibilidades na relação entre o homem e a tecnologia. Com os avanços tecnológicos, surge também a necessidade de adaptação do homem às novas ferramentas, além do desenvolvimento de novas habilidades. Borba e Penteado (2010, p. 48) defendem que "os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas". Dessa forma, a utilização de uma ferramenta tecnológica também exige uma habilidade, uma técnica (ou o desenvolvimento dela) para gerar um conhecimento. Através da História, sabe-se que o homem construiu ferramentas e artefatos a partir das suas ações e necessidades e, a partir das ferramentas, foi se transformando, evoluindo e aprimorando novas ferramentas.

Nesse sentido, segundo Jacinto e Carreira (2017), a tecnologia permite diferentes modos de pensar e agir, e isso pode fazer com que as capacidades humanas sejam modificadas, na medida em que novos conhecimentos são gerados. Na sala de aula de Matemática, produzir um conhecimento a partir de ferramentas tecnológicas pode ser bastante enriquecedor. Entretanto, é necessário que o estudante tenha ou desenvolva uma fluência tecnológica, ou seja, a capacidade de "pensar e exprimir-se por meio de um dialeto digital" (JACINTO; CARREIRA, 2017, p. 272), para o desenvolvimento da tarefa proposta. Se, por um lado, há a necessidade do desenvolvimento da habilidade técnica, por outro, as habilidades Matemáticas são imprescindíveis para que os objetivos da tarefa sejam alcançados. Sendo assim, o modo como o estudante resolve uma atividade de Matemática a partir de uma ferramenta tecnológica dependerá da fluência tecno-matemática que ele possui. Segundo Jacinto e Carreira (2017, p. 272), a fluência tecno-matemática é a capacidade de

> [...] produzir pensamento matemático mediante a utilização de ferramentas para reformular ou criar conhecimento e expressar pensamento. A fluência tecno-matemática enfatiza a necessidade de ser fluente numa língua que engloba conhecimento matemático e tecnológico, bem como a utilização hábil de ferramentas digitais e a interpretação e comunicação eficiente da solução tecno-matemática de um dado problema.

Uma das formas de proporcionar essa fluência aos estudantes é através de atividades no laboratório de informática, a partir do *software* GeoGebra, pois, ele possui a capacidade de desenvolver o pensamento geométrico por meio do dialeto tecno-matemático. Entretanto, como discutido anteriormente, um dos grandes desafios das escolas públicas é manter um laboratório de informática em uso e em bom estado. Além disso, muitas vezes, embora a escola tenha esse espaço em perfeitas condições, existem muitos outros desafios apontados por Borba e Penteado (2010), que podem fazer com que os docentes tenham dificuldades em utilizar esse ambiente.

Em relação aos alunos, é possível encontrar muitos que tiveram pouco ou nenhum contato com a máquina. Isso pode gerar algumas situações: fazer com que a tarefa proposta neste ambiente não chegue ao objetivo desejado pelo professor; ou, fazer com que o estudante seja limitado quanto ao uso das ferramentas disponíveis, ou seja, diminuiria a sua capacidade de perceber as características e objetivos dessas ferramentas, os chamados *affordances* (JACINTO; CARREIRA, 2017). O termo *affordances* está relacionado ao "conjunto de particularidades atribuídas a um objeto que convidam o indivíduo a realizar uma ação com ele" (GIBSON, 1979, apud JACINTO; CARREIRA, 2017, p. 270). Contudo, o *software* GeoGebra se mostra mais uma vez eficiente para a sala de aula. Seu ambiente possui inúmeras *affordances* já que é um *software* que não proporciona apenas construções, mas, sim, a visualização de características ou propriedades necessárias para a aprendizagem. Além disso, com o *software* é possível acrescentar informações à figura a fim de compreender e/ou encontrar relações (JACINTO; CARREIRA, 2017).

A régua e o compasso utilizados por Euclides nos "Elementos", que também estão inseridos no ambiente de GeoGebra, permitem fazer com que percebam a importância e praticidade desses instrumentos para a época e o conhecimento que pode ainda ser gerado a partir da sua utilização. Ao levar a proposição I do livro I dos "Elementos" para a sala de aula, por exemplo, é possível explorar, além da construção de um triângulo equilátero sobre uma reta limitada, seus ângulos internos e externos, a perpendicularidade entre retas, as características de uma circunferência, dentre outros. Saindo do nível mais elementar, pode-se avançar e explorar o modo como Euclides apresentou as demonstrações, e ainda realizar novas demonstrações a partir do ambiente GeoGebra.

O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica[35], gratuito, que pode ser utilizado pelos professores em laboratórios de informática ou em sala de aula. Ele pode ser executado em computadores (tanto com Windows quanto com Linux) e até mesmo em um *Smartphone*. Esse *software* permite um trabalho dinâmico[36] com diversas áreas da Matemática e uma delas é a Geometria, quando o aproxima dos programas de "Geometria Dinâmica". Por ter um ambiente dinâmico, ele pode favorecer a aprendizagem e auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico. Sua interface é simples e pode rapidamente se tornar muito habitual para os estudantes.

Para Lingefjard (2011), *softwares* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra, possibilitam a verificação de conjecturas além de outras explorações, construções e conclusões através da visualização e manipulação das figuras no ensino de Geometria. Assim, utilizar o GeoGebra no ensino de Geometria pode ser um ponto de partida para possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento geométrico dedutivo (GRAVINA, 2015).

Porém, para a inserção de novos recursos no processo de ensino, é necessário alinhar seu uso com a estratégia didático-pedagógica adotada. Borba e Penteado (2010) destacam a importância de o professor ter clareza do objetivo da atividade que pretende realizar, de modo a construir a melhor forma de desenvolvê-la com os estudantes. Isso envolve a escolha da mídia que irá se adequar mais ao objetivo. Dessa forma, nas atividades propostas nesta pesquisa, optamos pelo *software* GeoGebra por acreditar no seu potencial enriquecedor em sala de aula, com o objetivo de apresentar e/ou aprofundar conceitos da Geometria plana.

O GeoGebra pode favorecer uma participação mais ativa por parte dos alunos na elaboração e análise de conjecturas, na medida em que permite a construção e a

---

[35] Site oficial do programa: http://www.geogebra.org
[36] Entende-se por dinâmico aqui, um trabalho que favoreça a interatividade entre aluno e objeto matemático.

visualização de entes geométricos variados, além da relação existente entre eles em uma figura geométrica (GRAVINA, 2001).

Embora a obra de Euclides apresente uma organização mais lógica e científica do que pedagógica, segundo Sánchez (2012, p. 71, tradução nossa[37]), é possível "encontrar ferramentas didáticas para o ensino e aprendizagem de Geometria, álgebra e teoria dos números". O processo de demonstração e argumentação que está presente na obra de Euclides e, no âmbito escolar, pode contribuir para a aprendizagem de conceitos geométricos. O livro 1 (os "Elementos") apresenta várias construções que podem ser exploradas pelos estudantes. Por exemplo, a partir de uma estratégia construída pelo professor, é possível explorar com os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental (8º e 9º) a proposição 19, que diz que "o maior lado de todo triângulo é subtendido pelo maior ângulo"[38].

Contudo, Angulo (2009) ressalta que para ensinar a demonstrar é necessário que o estudante esteja em um ambiente que lhe proporcione a descoberta de propriedades. Com isso, este estudo aponta dois aspectos que podem proporcionar esse ambiente para os estudantes: (1) atividades desenvolvidas em uma perspectiva histórica e (2) em um ambiente de Geometria dinâmica, como, por exemplo, um *software*.

Uma forma de proporcionar um espaço de aprendizagem de Geometria que permita tudo isso é através de um ambiente dinâmico. Angulo (2009) propõe construções geométricas de proposições de Euclides, utilizando o *software* Cabri Géomètre[39] com o propósito de que os estudantes aprendam a demonstrar não apenas em busca de uma validação ou "verdade Matemática", mas que também saibam conjecturar e explicar essa verdade. Para o autor, as construções geométricas têm como um dos propósitos iniciar um tratamento axiomático-dedutivo da Geometria, sendo também um instrumento para a demonstração matemática, pois contribui para a formação do raciocínio dedutivo. Além disso, destaca que Ambientes de Geometria dinâmica como o Cabri Géomètre possuem o propósito de preparar e ensinar os estudantes a demonstrar (LABORDE[40], 2001 apud ANGULO, 2009).

---

[37] Original: Encontrar herramientas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, el álgebra y la teoría de números.
[38] BICUDO, 2009, p. 112.
[39] O Cabri Géomètre é um *software pago* de Construções Geométricas desenvolvido pelo Institut d'Informatiqe et de Mathematiques Appliques em Grenoble (IMAG).
[40] LABORDE, C. (2001). "Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for complex activity of proving". *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161.

Angulo (2009) utiliza algumas proposições de Euclides consideradas mais simples e diretas devido ao nível de escolaridade dos estudantes (secundário). E, como justificativa pela escolha das proposições em os “Elementos”, ele apresenta três formas de apresentação de uma demonstração: em “duas colunas”, presentes em livros americanos, que apresentam, de um lado, afirmações ou deduções em uma estrutura lógica e, do outro, justificações da veracidade da primeira coluna; em “diagrama de fluxo”, que possui um formato muito visual, mas útil em demonstrações pouco complexas; e, a “verbal”, que corresponde à forma apresentada por Euclides, por parágrafos. Dessa forma, a escolha pela forma de demonstrar mais clássica, como a utilizada na obra “Elementos", é devido ao fato de que é a forma que mais se aproxima da utilizada em seu cotidiano.

Lingefjard (2011), de modo próximo a Angulo (2009), busca mostrar que o uso das tecnologias digitais contribui para perceber as propriedades de uma demonstração. Para isso, ele trabalhou com construções geométricas no *software* GeoGebra. Esse autor também acredita nas potencialidades de um *software* geométrico, pois possibilitam movimentações impossíveis de serem realizadas com lápis e papel. Além disso, tais ambientes são propícios para verificação de propriedades e a criação de hipóteses e conjecturas. Em um estudo sobre a apresentação dessa ferramenta a professores de Matemática de vários níveis, verificou-se que eles observaram inúmeras possibilidades para o ensino de Geometria em sala de aula. Entretanto, o autor observou que as demonstrações e construções de Euclides não eram, a princípio, um conteúdo procurado para ensinar, mas afirmou que poderia vir a ser depois que percebessem a facilidade de investigar conceitos geométricos por meio do *software* permite. Os estudantes podem aprender vários conceitos de Geometria ao utilizar ferramentas de *softwares* de ambientes dinâmicos. Como afirma Gravina (2001): “os ambientes de Geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem” (p.82) e, dependendo das tarefas propostas e da dinâmica adotada pelo professor, tal construção e manipulação de objetos pode propiciar a “ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico” (p. 88).

A construção com régua e compasso no papel pode proporcionar a visualização de propriedades. Porém estar em um ambiente que, além de permitir a realização das mesmas construções de forma rápida, possui outras ferramentas e ainda permite a manipulação, pode ser ainda mais favorável para o ensino e aprendizagem em Geometria. Com isso, a movimentação das figuras pode ser uma aliada na demonstração e na argumentação ao possibilitarem a verificação de conjecturas além de outras explorações, construções e conclusões (LINGEFJARD, 2011).

2.3 O que tem sido produzido no Brasil sobre o ensino de Geometria com uma abordagem histórica e desenvolvido em um ambiente dinâmico

Em uma pesquisa no catálogo de teses da CAPES[41] no primeiro semestre do ano de 2018, procuramos trabalhos que abordassem os "Elementos" no ensino de Geometria, na perspectiva da História da Matemática e ainda, que utilizassem o *software* GeoGebra. O quadro 2 apresenta a relação de alguns dos trabalhos encontrados na pesquisa.

Quadro 2 - Trabalhos encontrados no catálogo de teses da CAPES

TÍTULO DO TRABALHO	AUTOR/ANO
REVISITANDO EUCLIDES PARA O ESTUDO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA PARA AS LICENCIATURAS	MOREIRA, 2010
DO LIVRO DIDÁTICO AO SOFTWARE GEOGEBRA: A ENGENHARIA DIDÁTICA NO ESTUDO DE FIGURAS PLANAS NA 6ª SÉRIE/7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	GOBBI, 2012
INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO E A ARGUMENTAÇÃO EM GEOMETRIA	MARTINS, 2012
O USO INTEGRADO DE RECURSOS MANIPULATIVOS DIGITAIS E NÃO-DIGITAIS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA	ROSA, 2013
A GEOMETRIA DINÂMICA COMO FONTE DE MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA	PENAZZO, 2014
A GEOMETRIA DO COMPASSO (1797) DE MASCHERONI (1750-1800) EM ATIVIDADES COM O GEOGEBRA'	OLIVEIRA, 2014
QUADRATURA: DA ANTIGUIDADE À ATUALIDADE	DIAS, 2014
A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	SCHMIDT, 2014
AS CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO UM MEDIADOR DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA (EAD) EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA	PELLI, 2014
CÔNICAS: APRECIANDO UMA OBRA-PRIMA DA MATEMÁTICA'	FILHO, 2015
DESENVOLVENDO O CONCEITO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAR REGIÕES PLANAS IRREGULARES NA EDUCAÇÃO BÁSICA	JESUZ, 2015
FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM ESTUDO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL	BARROS, 2015
GEOMETRIA ANALÍTICA: CAMINHOS PARA APRENDIZAGEM'	SILVA, 2015
O OBJETO MATEMÁTICO TRIÂNGULO EM TEOREMAS DE REGIOMONTANUS: UM ESTUDO DE SUAS DEMONSTRAÇÕES MEDIADO PELO GEOGEBRA'	MOD, 2016
INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA 3D: O MÉTODO AXIOMÁTICO EM ATIVIDADES DE GEOMETRIA ESPACIAL E ESFÉRICA'	BARBOSA, 2017

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora.

[41] Pesquisa realizada no início de 2018 em http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/.

Devido às dificuldades para encontrar trabalhos que se relacionassem a todas as temáticas, procuramos aprofundar a leitura de pesquisas que estivessem mais próximas do nosso estudo. Com isso, escolhemos alguns trabalhos relacionados a pelos menos duas temáticas: ao uso dos "Elementos" no ensino de Geometria; ao uso do *software* GeoGebra no ensino de Geometria; e ao uso da História da Matemática como abordagem de ensino de Geometria.

Em relação ao uso do *software* GeoGebra no ensino de Geometria os estudos de Gobbi (2012), Martins (2012) e Rosa (2013) apontam algumas de nossas hipóteses neste estudo. Com o objetivo de investigar como estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental podem construir o conhecimento sobre perímetros e áreas de figuras planas, Gobbi (2012) aplicou dez atividades retiradas de livros didáticos sobre cálculo de áreas e perímetros de triângulos e quadriláteros que foram desenvolvidas com o auxílio do *software* GeoGebra. A pesquisadora concluiu que "o uso do GeoGebra contribui favoravelmente para a interatividade entre os alunos, no sentido de promover o ensino e aprendizagem de conceitos relacionados com Geometria Plana" (GOBBI, 2012, p. 113).

A pesquisa de Martins (2012) tratou dos 'instrumentos virtuais de desenhos' criados no GeoGebra e disponibilizados para os participantes de sua pesquisa através do GeoGebra Tube[42]. Com o objetivo de apresentar uma proposta para que a argumentação dedutiva de Geometria seja trabalhada na escola com o GeoGebra, Martins (2012) aplicou uma sequência didática em três etapas (explicação, construção e argumentação) em turmas do Ensino Médio de um Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Além de perceber que as atividades da sequência didática, com o auxílio da tecnologia, podem fazer com que o aluno seja sujeito ativo na aprendizagem, o autor também acredita que "[...] o ensino de Geometria deva iniciar com momentos onde o aluno possa explorar, passando por momentos onde vivencia o processo de construção, para aí sim, atingir o patamar da argumentação" (MARTINS, 2012, p. 112).

Em nosso estudo, assim como Gobbi (2012) e Martins (2012), também buscamos promover o ensino de conceitos da Geometria plana tendo como ambiente de aprendizagem o *software* GeoGebra. Pretendemos também proporcionar aos alunos uma participação ativa na aprendizagem e que permita mais interatividade entre eles assim

[42] O GeoGebra Tube é uma ferramenta do *software* que permite manipulação de objetos de aprendizagem já construídos através de um link, possível de ser acessado pela internet.

como mencionam os autores. Além disso, acreditamos que a manipulação de figuras, defendida por Gravina (2011), permite a obtenção de novas descobertas.

O estudo de Rosa (2013) se aprofunda na manipulação de figuras também por meio de ambientes de Geometria dinâmica. A autora trabalhou com o uso de recursos manipulativos digitais e não digitais, para mostrar o quanto essa integração de recursos pode contribuir para a aprendizagem de conceitos da Geometria. Sua pesquisa esteve fundamentada nos ambientes de Geometria dinâmica de Maria Alice Gravina (além de outros teóricos) e foi desenvolvida em duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental. Usando métodos qualitativos, Rosa (2013, p. 100) afirma que "o uso integrado de recursos digitais e não digitais contribui para a aprendizagem de conceitos de Geometria".

Embora esses três estudos estejam relacionados com o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática, de modo diferente, queremos ir além e, tornar o GeoGebra um ambiente para realização de tarefas historicamente situadas de modo que os alunos possam vivenciar o processo de construção de um conhecimento matemático por antigos e importantes matemáticos, e também por pessoas comuns.

Em relação ao uso da História da Matemática como abordagem de ensino de Geometria, escolhemos para leitura os trabalhos de Moreira (2010), Schmidt (2014), Pelli (2014) e Oliveira (2014).

O estudo de Moreira (2010) chamou a atenção porque propõe verificar como a estruturação lógica dos "Elementos" de Euclides pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico (referente ao conceito de área) de futuros professores de matemática. Para isso, o autor propõe a conciliação da história e do ensino da Matemática com a utilização da obra "Os Elementos", e uma intervenção pedagógica para melhorar a formação dos futuros professores a partir de uma experiência didática. Em busca de respostas para seu questionamento, realizou cinco oficinas a partir da abordagem geométrica dos gregos, com estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Como resultado de pesquisa Moreira (2010, p. 136) destaca : "foi alcançado o nosso objetivo de resgatar a historicidade do conceito de área, utilizando para isto uma obra clássica da Matemática: Os Elementos de Euclides", tal objetivo esteve dentro de cada uma das cinco oficinas, com a recorrência a elementos da obra de Euclides a partir da terceira. Conclui que:

> O resultado apresentado aponta na direção de um crescimento do nível de pensamento geométrico dos alunos. [...]. Acreditamos que o uso deste texto histórico, os Elementos de Euclides, contribuiu para o enriquecimento do conceito de área por parte dos alunos, bem como para possibilitar um novo olhar para a concepção da Matemática e seu ensino (MOREIRA, 2010, p. 142).

Nossa pesquisa se aproxima do trabalho de Moreira (2010) quando propõe a retomada da obra de Euclides para o desenvolvimento de determinado conceito. Entretanto, se diferencia em três aspectos: em relação aos sujeitos da pesquisa, ao modo como a História da Matemática é trabalhada nas atividades propostas, e às escolhas teóricas e metodológicas.

A proposta de Schmidt (2014) foi investigar as contribuições da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no conteúdo de Teorema de Tales. Com uma pesquisa qualitativa, aplicou cinco atividades em uma turma da 8ª série de uma escola estadual. Em um dos resultados obtidos, o autor constatou que "o uso da História da Matemática teve alguns pontos negativos em relação à forma com que alguns educandos encararam as atividades. Pode-se atribuir ao fato de ser uma atividade diferente de sua rotina escolar" (SCHMIDT, 2014, p. 82). Mesmo assim, Schmidt (2014) verificou que a História da Matemática contribuiu mais em trabalhos em grupos do que os realizados individualmente a partir das respostas dadas. Afirmou ainda que a integração da História da Matemática e à Resolução de Problemas tornou as aulas mais motivadoras e agradáveis.

O estudo de Pelli (2014) possui alguns aspectos comuns ao nosso estudo, pois sua pesquisa aborda os "Elementos" e teve o intuito de verificar as contribuições do *software* GeoGebra na aprendizagem das construções e demonstrações dada por Euclides em sua obra. A autora realizou um estudo da obra "Elementos" e desenvolveu dez atividades no GeoGebra totalizando quinze aulas. Sobre os resultados a autora apresenta:

> Os resultados obtidos nesse estudo mostram que existem possibilidades de contribuições da utilização do GeoGebra para a aprendizagem de conteúdos da Geometria Plana para alunos matriculados em um curso no ensino na modalidade a distância, pois a utilização desse software estimula o desenvolvimento da autonomia dos alunos, possibilitando a diminuição da distância transacional que pode ocorrer no ambiente virtual de aprendizagem (PELLI, 2014, p. 8).

Nosso estudo se diferencia do trabalho de Pelli (2014), pois propomos um conjunto de tarefas onde a História da Matemática é problematizada de modo que os alunos possam compreendê-la como uma construção humana. Além disso, como queremos levar os

“Elementos” para a sala de aula do Ensino Fundamental o trabalho com a obra necessita ser mais “palatável”.

Por último, em Oliveira (2014) encontramos muitos aspectos semelhantes ao nosso estudo. O autor realizou uma pesquisa que aliou, assim como Pelli (2014) a História da Matemática com o *software* GeoGebra. A autora propôs uma intervenção empírica com base nessa interação e a desenvolveu em duas turmas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), com cerca de 20 alunos, na disciplina de Didática da Matemática I. Um dos pontos da sua conclusão chamou a atenção pela seguinte posição:

> Sabendo da existência de alguns argumentos desfavoráveis quanto a utilização da História da Matemática, como por exemplo, a perda de tempo, constatou-se que este fator pode ser atenuado com o auxílio do recurso computacional, pois, podemos fazer verificações utilizando apenas o dinamismo do *software* e sem repetir a construção. Vale salientar que o tempo minimizado não significa perda de reflexão nem maturação das ideias, quando adotado o processo de Investigação histórica e/ou Matemática (OLIVEIRA, 2014, p. 09).

Sendo assim, o autor apresenta uma solução para o problema do “tempo” durante um curso e ainda salienta que um recurso que proporciona visualizações rápidas não diminui as reflexões e o desenvolvimento das ideias. Esse fato também é um dos aspectos que contribuiu para a escolha do *software* GeoGebra em nosso estudo. Entretanto, diferentemente do autor, optamos por realizar a pesquisa no Ensino Fundamental por acreditar nas possibilidades do trabalho com os “Elementos” não somente no Ensino Superior, desde que as tarefas propostas estejam de acordo com o a idade/série dos estudantes. Além disso, pretendemos desenvolver as tarefas no GeoGebra sem um passo a passo a ser seguido.

Nessas sete dissertações, observamos como foram trabalhadas as temáticas envolvidas no presente estudo mesmo que estivessem relacionadas a apenas algumas delas. Buscamos verificar os resultados obtidos em cada estudo para traçar os nossos.

O uso da obra “Elementos” de Euclides foi encontrado nos estudos de Moreira (2010), Schmidt (2014), Pelli (2014) e Oliveira (2014), alguns com a utilização direta, outros utilizaram como base para outras percepções. Todos esses trabalhos envolviam também o ensino de Geometria.

No Brasil, até esse momento, apenas o trabalho de Oliveira (2014) esteve relacionado a todas as temáticas deste estudo, porém voltado para estudantes do curso de licenciatura em Matemática. Com isso, poucas são as pesquisas que utilizaram os “Elementos” de Euclides como inspiração no ensino de Matemática, o que torna necessário realizar mais pesquisas nesse segmento da Educação Matemática.

Contudo, buscamos, com esta pesquisa, mostrar um caminho diferente para o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental que leve os estudantes a perceberem a Matemática como uma construção humana, social e cultural, que levou milhares de anos para se desenvolver e que ainda segue em construção. Além disso, um outro propósito é que a partir de algumas proposições dos “Elementos” e do auxílio do GeoGebra, os estudantes possam compreender noções de Geometria plana.

CAPÍTULO 3: ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

> *"Consultemos, pois, os velhos registros, leiamos as obras de antanho que chegaram até nós, procuremos em alfarrábios o que pareça haver de nós nos que vieram antes, e, assim, começaremos a compreender o que pensávamos saber: quem somos, o que nos é possível conhecer, que estrelas e que sóis poderemos acrescentar ao universo herdado."*
>
> (BICUDO, 2009, p. 18)

A pesquisa – de natureza qualitativa – tem como propósito investigar possíveis contribuições de tarefas envolvendo proposições de os "Elementos" desenvolvidos no ambiente GeoGebra para a compreensão de noções de Geometria plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental.

Este estudo se caracteriza como pesquisa qualitativa porque, além de apresentar dados descritivos, o trabalho de campo ocorreu em um ambiente natural, exigiu um contato prolongado com os sujeitos de pesquisa e, ainda, consistiu na compreensão do processo e na busca por significados (MINAYO, 2009).

Na pesquisa qualitativa, o trabalho de campo aproxima o pesquisador dos dados obtidos (a realidade) que, por sua vez, serão expostos e apresentados pelo pesquisador (MINAYO, 2009). De acordo com a autora, uma pesquisa qualitativa é dividida em três fases: a *fase exploratória*, que consiste na preparação para entrada no campo (elaboração do projeto, fundamentação teórica e metodológica, escolha dos instrumentos, elaboração do cronograma, dentre outros); o *trabalho de campo*, fase empírica da teoria elaborada anteriormente; e *análise e tratamento do material empírico*, que consiste na ordenação, classificação e análise dos dados.

Sendo assim, a partir do projeto de pesquisa e das leituras e reflexões acerca da História da Matemática como abordagem de ensino; da história dos "Elementos", de Euclides, da sua época e também anteriormente a ela; e do uso do GeoGebra em sala de aula, definimos nossas opções metodológicas e construímos um estudo piloto para que algumas tarefas fossem testadas, verificando algumas das vantagens e desvantagens do caminho escolhido. Após a análise do estudo piloto, da reestruturação e ampliação das tarefas, passamos para o trabalho de campo e, por fim, organizamos e classificamos os dados para posteriormente analisá-los.

Como mencionado anteriormente, com o propósito de observar o potencial das tarefas da pesquisa, assim como o interesse e engajamento dos estudantes na realização das mesmas de modo a permitir seu aprimoramento, realizamos um estudo piloto com algumas tarefas – construídas em uma perspectiva histórica e inspiradas nas proposições do Livro I de os “Elementos” – e as desenvolvemos no GeoGebra[43]. A partir dos resultados obtidos, as tarefas foram reestruturadas, ampliadas e aplicadas novamente.

É importante destacar que o projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Ouro Preto[44].

3.1 Questão de investigação e objetivos

Partindo de um objetivo geral – promover o ensino de algumas noções de Geometria Plana por meio de uma abordagem histórica em um ambiente de aprendizagem específico (GeoGebra) – buscamos responder à seguinte questão de investigação: *como tarefas matemáticas elaboradas a partir dos “Elementos”, de Euclides, e de sua história, e desenvolvidas, principalmente, no ambiente GeoGebra podem contribuir para a compreensão de noções de Geometria plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental?*

Dessa forma, um conjunto de tarefas foi elaborado a partir de algumas proposições do Livro I de os “Elementos”, de Euclides e do contexto histórico de produção dessa obra, e desenvolvido, principalmente[45], no GeoGebra, em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Nossos objetivos eram:

- identificar indícios de envolvimento e interesse por parte dos alunos em relação às tarefas e às questões históricas relacionadas ao desenvolvimento da Matemática ao longo dos tempos;
- analisar possíveis contribuições da realização das tarefas matemáticas para a compreensão de noções de Geometria plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental;
- analisar possíveis contribuições da realização das tarefas matemáticas para o desenvolvimento da percepção acerca da Matemática como produção humana, que vem acontecendo ao longo dos tempos.

[43] O estudo piloto é descrito mais adiante, neste mesmo capítulo.
[44] CAAE: 95816318.8.0000.5150
[45] Parte das tarefas foi desenvolvidas em sala de aula. Os motivos que levaram a isso são explicitados mais adiante neste capítulo.

3.2 Contexto e participantes da pesquisa de campo

O trabalho de campo se desenvolveu em uma escola pública estadual do município de Ibirité, situado na região metropolitana de Belo Horizonte (MG)[46]. Localizada na zona urbana, a escola possui cerca de 2600 alunos matriculados e atende aos três turnos, desde o Ensino Fundamental I até o Ensino Médio, além da Educação para Jovens e Adultos.

A escola possui dois laboratórios de informática com acesso à internet, entretanto, apenas o Laboratório I (maior e mais bem estruturado) possui um técnico responsável. Devido ao grande número de professores que utilizam esse laboratório, a escola disponibilizou o Laboratório II (com 17 computadores para os alunos, um computador central e um equipamento de Datashow) para a realização deste trabalho.

O laboratório II (laboratório que foi liberado para a pesquisa) estava sem um técnico responsável, sem acesso à internet e era pouco usado pelos professores. Como vários computadores estavam com algumas peças danificadas, o laboratório ficou fechado para manutenção no mês de abril. Borba e Penteado (2010) destacam que deveria existir, no quadro de funcionários das escolas, um técnico de informática que se responsabilizasse pelo espaço, pois os problemas técnicos (peças com defeito, ataque de vírus, erros de configuração, dentre outros), inviabilizam o desenvolvimento de atividades com os computadores.

Mesmo com a manutenção ocorrida em abril, durante o desenvolvimento das tarefas, alguns computadores apresentavam defeitos e, como não havia um técnico responsável, foi necessário levar três notebooks reservas para as eventualidades com as máquinas. A partir de agosto, com a chegada da técnica responsável, os imprevistos foram diminuindo, pois ela estava presente durante todo o andamento das aulas. Entretanto, o

[46] No início de 2019, iniciamos a procura por uma escola para o desenvolvimento do trabalho de campo, já que não era viável desenvolver as tarefas na mesma instituição em que ocorreu o estudo piloto. Estávamos em busca de uma escola que, além de aceitar a proposta da pesquisa em uma turma 8º ano do Ensino Fundamental, deveria contar com um laboratório de informática que pudesse ter o *software* GeoGebra instalado e/ou o acesso à internet para acessar o *software* on-line. Em fevereiro entramos em contato com duas escolas, a primeira da rede Estadual localizada no município de Sarzedo e, a segunda, pertence à rede municipal de Ibirité. Entretanto, nessas duas escolas – que, a princípio, receberam a proposta da pesquisa e aceitaram a sua realização – encontramos problemas: em uma, os computadores ainda precisavam ser montados no laboratório de informática, e na outra as máquinas estavam danificadas, sem condições de uso. Em março de 2019, entramos em contato com outra escola e, com a autorização da direção e do professor, iniciamos o estudo em campo no final do mês de abril.

laboratório passou a ser mais disputado entre os professores e isso gerou dificuldades no agendamento para a realização do trabalho de campo.

Figura 7 - Laboratório de Informática II

Fonte: Dados da pesquisa.

Além dos laboratórios, a escola possui vários espaços como laboratório de ciências, biblioteca, sala de robótica, pátios, amplo estacionamento para professores e funcionários, uma quadra coberta, uma quadra descoberta e piscina. Vale ressaltar ainda que, na ocasião, existia o projeto escola de tempo integral para o Ensino Fundamental, além de diversos projetos que também utilizam o espaço escolar.

Participaram deste estudo 35 estudantes de uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental com idades entre 13 e 15 anos, sendo 21 meninas e 14 meninos. Na classe havia estudantes que frequentavam a escola desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, mas grande parte deles veio de escolas municipais que ofertavam apenas até o 5º ano do Ensino Fundamental ou possuíam prioridade de matrícula por morar em bairros próximos à escola.

A maioria dos estudantes residia na região da escola, mas alguns utilizavam o transporte escolar público ou vans escolares.

O desenvolvimento das tarefas ocorreu nas duas turmas do 8º ano do professor Márcio[47]. Entretanto, devido à duração do trabalho de campo e ao volume de dados

[47] Nome fictício de acordo com o termo assinado pelo professor (Apêndice B)

produzido, optamos por escolher apenas uma das turmas para a pesquisa. Essa escolha se deu considerando a frequência dos alunos[48] durante o desenvolvimento das tarefas.

Para o desenvolvimento das tarefas[49], os estudantes foram organizados em dezesseis duplas e um trio, foram assíduos em quase todas as aulas e o professor titular da classe acompanhou o desenvolvimento das tarefas. Até agosto, o professor Márcio lecionava para as duas turmas do 8º ano. Nessa época, deixou a sala de aula para se tornar coordenador de área. As classes de 8º ano foram então assumidas pelo professor Cláudio[50]. Após informá-lo a respeito da pesquisa e obter com sua autorização, demos continuidade ao trabalho de campo.

3.3 Coleta de informações e produção de dados

A produção de dados deste estudo ocorreu por meio de observações das aulas (registradas no diário de campo da pesquisadora e ampliadas pela transcrição das gravações em áudio e vídeo) e registros produzidos pelos estudantes em folhas de papel, mas, principalmente, no GeoGebra. Aqui, o Gravador de Passos do Windows[51] teve um papel importante, ao permitir capturar imagens da tela do computador, enquanto os alunos trabalhavam no GeoGebra.

A observação das aulas se deu de modo participante[52] e se desenvolveu ao longo dos encontros com os alunos. Com isso, as observações foram um dos principais instrumentos, pois o trabalho de campo se desenvolveu no ambiente natural de sala de aula.

---

[48] Na turma não escolhida, havia muitos alunos infrequentes.

[49] Entendemos uma tarefa matemática em um sentido próximo ao proposto por Stein e Smith (2009). Uma tarefa matemática é uma parte da aula desta disciplina que tem como objetivo desenvolver uma determinada ideia matemática, que pode estar relacionada a um ou mais problemas (complexos ou não). Portanto, desde o estudo piloto, elaboramos tarefas matemáticas que envolveram conhecimentos históricos acerca da Biblioteca de Alexandria, sobre Euclides e a Matemática do seu tempo, bem como sobre algumas proposições do Livro I de os “Elementos”. Procuramos realizar o trabalho propondo, principalmente, construções geométricas realizadas com materiais de desenho geométrico e no ambiente GeoGebra. A partir dos resultados obtidos com o estudo piloto, refletimos sobre a proposta (conforme mencionado no capítulo anterior) e a reformulamos. Buscamos elaborar tarefas matemáticas “que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que os estimulem a fazer conexões que representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem” (STEIN; SMITH, 2009, p. 22).

[50] Nome fictício atribuído ao novo professor da classe.

[51] O Gravador de Passos do Windows é um programa que pode capturar telas do computador a cada clique. Esse programa permite ver os passos seguidos pelos alunos no GeoGebra. O “Protocolo de construção” do GeoGebra também é uma ferramenta que permite verificar os passos, entretanto, quando algum objeto é apagado a ferramenta não o registra. Sendo assim, não há como visualizar as tentativas de construções que podem ser importantes na pesquisa.

[52] Segundo Yin (2001, p. 116) “a observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é apenas um observador passivo”.

Essas observações foram registradas no diário de campo da pesquisadora. De acordo com Minayo (1999, p. 63), é no diário de campo que “podemos colocar nossas percepções, angústias, questionamentos e informações que não são obtidas através da utilização de outras técnicas”. Sendo assim, esse instrumento permitiu o registro de reflexões acerca das tarefas desenvolvidas pelos participantes do estudo e de todas as situações ocorridas durante o trabalho de campo.

As gravações de áudio e vídeo permitiram que as observações registradas fossem confirmadas e/ou expandidas. Além disso, como Powell et al (2004, p. 91), acreditamos que seu uso não apenas “permite múltiplas visões, mas também possibilita visões sob múltiplos pontos de vista”, como favorece o trabalho do pesquisador , pois “assistir repetidamente aos vídeos potencializa o melhoramento da triangulação na análise dos dados”. Com essa possibilidade, é possível aprimorar as interpretações geradas a partir da análise dos demais instrumentos.

Durante todo o desenvolvimento das tarefas, os participantes produziram registros em um caderno[53] que continha folhas anexadas ao longo do trabalho. As folhas eram inseridas a cada tarefa nova e, com isso, as duplas tinham acesso aos seus registros anteriores. O caderno de registro da dupla era disponibilizado para os alunos no início das aulas e sempre recolhido no final.

Também foram utilizados dois instrumentos avaliativos ao longo do estudo (ver Apêndices I e L). Seu propósito foi procurar identificar mobilizações de saberes em relação à compreensão das noções de Geometria em estudo e em relação à própria percepção acerca da Matemática como ciência.

A primeira avaliação ocorreu no dia 11 de julho de 2019, todos os 30 estudantes presentes da turma A responderam a uma avaliação do trabalho desenvolvido até aquele momento[54] (Apêndice I). A identificação da avaliação não era obrigatória, no entanto, quatro alunos optaram por fazê-la. Seu intuito era expor as opiniões dos alunos sobre as tarefas desenvolvidas e identificar conhecimentos aprendidos. Além disso, esperávamos verificar se havia interesse dos alunos para pensar na continuidade dos trabalhos, embora não soubéssemos na época se seria possível.

[53] Cada dupla recebeu um caderno que era “alimentado” com folhas para o registro das tarefas. Dissemos aos alunos que cada dupla teria um caderno a ser utilizado durante todo o trabalho. Buscando promover uma familiarização com o caderno de registro, dissemos aos alunos que eles poderiam enfeitá-lo, dessa forma, algumas duplas fizeram e/ou colaram alguns desenhos na capa dos seus cadernos.

[54] Optamos por realizar a avaliação individualmente para ter uma ideia dos conhecimentos que cada aluno mobilizou.

Na segunda avaliação (chamamos de avaliação final) que aconteceu no dia 03 de outubro de 2019, durante duas aulas não consecutivas, buscamos verificar o que os alunos haviam compreendido sobre Euclides, os “Elementos”, Geometria, História da Matemática e o GeoGebra. Essa avaliação foi dividida em dois momentos (Apêndice L). No primeiro, de forma individual, os alunos comentaram e expressaram suas opiniões acerca da Matemática e sua história, e todos os 29 alunos presentes responderam à avaliação. No segundo momento, em duplas, os alunos fizeram construções no GeoGebra relacionadas a duas proposições do Livro I de “Elementos”. Esse segundo momento ocorreu durante 30 minutos e alguns alunos estiveram ausentes devido à prova de recuperação de Matemática que ocorria ao mesmo tempo.

3.4. O estudo piloto

Em dezembro de 2018 realizamos um estudo piloto no qual elaboramos e desenvolvemos algumas tarefas de Geometria plana com uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de Ibirité (região metropolitana de Belo Horizonte), na qual a pesquisadora lecionava.

O propósito deste estudo foi analisar o potencial de algumas tarefas baseadas nas proposições do livro I de os “Elementos”, de Euclides, e desenvolvidas utilizando a sala de aula e o GeoGebra como ambiente de aprendizagem, de modo a permitir seu aprimoramento, visando a uma nova aplicação.

A classe era formada por 34 estudantes, com idades entre 13 e 16 anos. Entretanto, no mês de dezembro, apenas 20 estudantes (12 meninas e 8 meninos) efetivamente frequentavam as aulas. A maioria deles estava na escola há pouco mais de um ano (transferidos de escolas municipais da região). Para vários professores, era uma classe “difícil” devido à indisciplina.

O estudo piloto foi realizado no período de 10 a 19 de dezembro de 2019 ao longo de 12 aulas de 50 minutos. Os estudantes foram organizados em 10 duplas que se mantiveram em todos os encontros. Devido ao formato das tarefas e aos recursos da escola, o estudo envolveu a utilização de distintos espaços físicos: a sala de aula, a sala de vídeo, e a sala de computadores, com 12 máquinas.

Figura 8 - Sala de Computadores

Fonte: Dados da pesquisa.

A produção de dados se deu a partir da videogravação de algumas aulas, do diário de campo da pesquisadora e de registros produzidos pelas duplas. A seguir, apresentamos brevemente o desenvolvimento das tarefas.

3.4.1 Tarefas propostas

O trabalho com os “Elementos” no ambiente GeoGebra demandou uma boa compreensão das circunferências e suas características, principalmente da utilização do raio para construir figuras. Por essa razão, as tarefas possuem em seu momento inicial a contextualização da circunferência também em uma perspectiva histórica.

Com os estudantes sempre organizados em duplas, a primeira tarefa do estudo piloto foi realizada na sala de vídeo e tinha o intuito de aproximar os alunos da ideia de circunferência e de suas características a partir da *História dos pescadores de Moçambique*[55].

Primeiramente, os estudantes foram convidados a localizar no mapa o país Moçambique. Algumas fotos dos antigos pescadores foram apresentadas, enquanto a história era contada. Após discussões sobre o porquê e o modo como os pescadores secavam os peixes na areia da praia, os estudantes foram levados ao pátio da escola para que simulassem a construção de circunferências dos pescadores com barbante e giz.

[55] Um pequeno trecho sobre os antigos pescadores de Moçambique se encontra em Gerdes (2012, p. 140) disponível em: https://bit.ly/2FxO6JJ.

Durante esse momento, também foi solicitado que escolhessem uma circunferência do colega e construíssem outra do mesmo tamanho. Ao final, houve uma apresentação das características da circunferência: centro, raio, diâmetro. O objetivo dessa tarefa foi que, a partir de uma atividade prática e de perspectiva histórica, os estudantes pudessem compreender, além das características da construção de uma circunferência, o transporte de medida do raio para construir outras.

A segunda tarefa ocorreu na sala de aula e o objetivo foi trabalhar com o compasso para construção de circunferências. Inicialmente, foi retomada a história anterior e solicitada a construção de várias circunferências utilizando o instrumento compasso. Em seguida, uma dupla foi convidada para que, com poucas informações, orientasse seus colegas a construírem circunferências idênticas às dela. O objetivo foi fazer com que percebessem medidas importantes, quando se trata de construir uma circunferência. Posteriormente, uma nova história foi contada para os estudantes, a *História dos Silos (ou Celeiros)*. Novamente aqui, foram utilizados mapas para localizarem a Tunísia, local onde descobriram um silo do ano de 1200 a.C. e, Minas Gerais, que teve seu primeiro Silo construído na cidade de Lavras em 1915. Como os Silos eram cilíndricos, o intuito foi verificar se os estudantes perceberiam que era pelo desenho da base (alicerce), em formato circular, que as paredes eram construídas. Dessa forma, para iniciar a construção da base de um Silo, bastava a informação do raio e/ou do diâmetro.

A terceira tarefa aconteceu na sala de computadores. A intenção foi proporcionar um primeiro contato dos alunos com o GeoGebra, mostrando-lhes algumas ferramentas básicas desse *software* e fazendo algumas construções utilizando raios das circunferências. Paralelamente, as duplas construíram circunferências utilizando um compasso, a partir de segmentos (raios) dados. Assim, procurou-se relacionar as construções realizadas com o compasso físico àquelas construídas com a ferramenta “Compasso” do GeoGebra.

A quarta tarefa foi realizada em dois espaços diferentes: na sala de vídeo e, em seguida, na sala de computadores. Primeiramente, as duplas foram convidadas a fazer uma “viagem no tempo”. Inicialmente, a partir de dois mapas distribuídos nas paredes da sala, as duplas localizaram o Egito e a cidade de Alexandria. Em seguida, foi apresentada a elas uma breve história da biblioteca de Alexandria, utilizando-se trechos de dois vídeos[56]. Depois, na sala de computadores, os alunos construíram triângulos a partir da ferramenta

[56] Utilizamos alguns trechos dos vídeos disponíveis em www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4 e www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8.

“Segmento” com algumas medidas previamente fornecidas. Para isso, as duplas deveriam utilizar outra ferramenta do GeoGebra: “Segmento com comprimento fixo”. A princípio, a construção dos segmentos com um comprimento fixo permitiria a construção de triângulos, mas, posteriormente, o propósito foi fazer com que algumas duplas utilizassem tamanhos de segmentos que não possibilitaria a construção de um triângulo. Finalmente, discutimos sobre a construção de triângulos (se sempre seria possível, em que situações era possível ou não etc.) até chegarem a perceber que existia pelo menos uma condição para isso.

Procuramos proporcionar um momento de descoberta (da condição de existência de um triângulo), utilizando o GeoGebra como ambiente de aprendizagem, para depois situar o conhecimento produzido pelos alunos com a proposição 22[57] de os “Elementos” de Euclides. Nossa intenção era criar uma oportunidade de conectar a prática social de produzir Matemática no presente e no passado, para então desenvolver outras proposições no GeoGebra. Contudo, pelas limitações de tempo, o estudo piloto foi encerrado com essa tarefa.

Após organizar todas as informações coletadas, denominamos cada dupla por um código (D1, D2, ...) e analisamos cada tarefa, verificando tanto o envolvimento e participação das duplas quanto os conhecimentos mobilizados pelas mesmas. Procuramos ainda, identificar obstáculos e aspectos a melhorar.

Para compreender melhor os percursos da pesquisa de campo, apresentamos aqui um recorte da análise e dos resultados do estudo piloto, explorando apenas o desenvolvimento das tarefas 3 e 4 pelas duplas D1, D6 e D10, pois os resultados obtidos foram mais relevantes para a reformulação das tarefas do trabalho de campo. Contudo, é preciso ressaltar que as tarefas 1 e 2 proporcionaram uma primeira aproximação do uso da História da Matemática na sala de aula e favoreceram a realização das tarefas 3 e 4.

A partir da terceira, as tarefas foram desenvolvidas no laboratório de informática. De modo geral, as duplas se mostraram motivadas a realizar as tarefas na sala de computadores, porém, sabemos que além de raramente utilizarem esse espaço, alguns alunos admitiram não saber utilizar um computador. Nesse sentido, não podemos atribuir exclusivamente à tarefa o interesse manifestado pelos alunos.

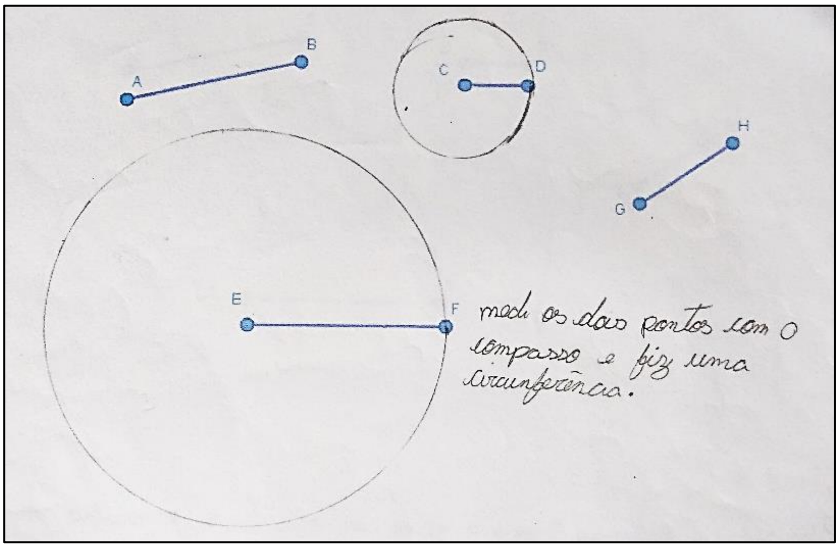
---

[57] “22. De três retas, que são iguais às três [retas] dadas, construir um triângulo; e é preciso as duas, sendo tomadas juntas de toda maneira, ser maiores do que a restante [pelo ser os dois lados de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, maiores do que o restante]” (BICUDO, p. 114, 2009).

Na terceira tarefa, as duplas tiveram alguns minutos livres para explorar o GeoGebra e, posteriormente, construíram circunferências. No GeoGebra há quatro opções de ferramentas para construir circunferências, mas o foco esteve na utilização da ferramenta “Compasso”, que realiza construções de forma similar ao instrumento físico utilizado por Euclides. No entanto, mesmo sendo um processo que simula a abertura de um compasso através de determinada medida, ao solicitar a construção de figuras utilizando raios de circunferências, as duplas D1 e D6 apresentaram dificuldades.

Durante o ano letivo, os alunos foram levados apenas uma vez à sala de computadores para usar o GeoGebra. Mesmo assim, a tarefa teve início com uma apresentação oral do *software.* Após a exploração no GeoGebra, entregamos a cada dupla, uma folha com as tarefas a serem realizadas (item 1 e 2). No item 1, a dupla D1 escolheu dois segmentos (figura 9)[58] para construir circunferências e registrou corretamente como realizou o processo.

Figura 9 - Registro do item 1 (tarefa 3) da dupla D1



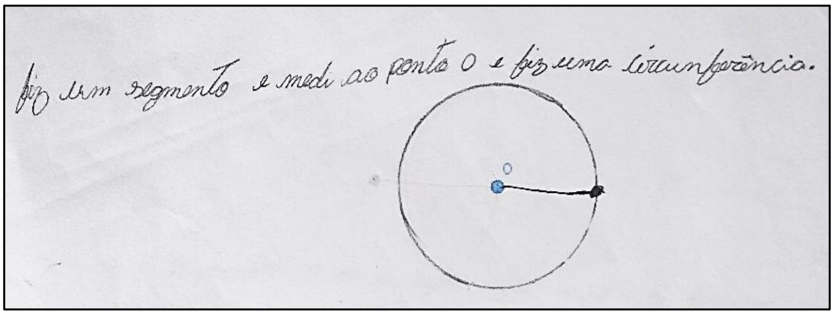
Fonte: Dados da pesquisa.

Entretanto, ao solicitar que escolhessem um dos segmentos anteriores para construir uma circunferência de centro O (item 2), a dupla D1 construiu uma circunferência utilizando um segmento que não constava anteriormente (ver figura 10).

---

[58] Acreditamos que D1 apresentou sua explicação na primeira pessoa do singular por ter sido registrado por apenas um dos integrantes da dupla.

Figura 10 - Registro do item 2 (tarefa 3) da dupla D1



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla D1 não utilizou o transporte de segmento na construção. Além disso, percebemos a necessidade de evidenciar que um segmento pode ser usado para definir o raio na construção de uma circunferência. A dupla D10 (figura 11), por exemplo, escolheu um dos segmentos do item 1 e construiu uma circunferência sem a necessidade de evidenciar o raio. Pelo registro do seu processo, percebemos que a construção foi realizada corretamente e que a abertura do compasso foi associada à medida do segmento (figura 11).

Figura 11 - Registro do item 2 (tarefa 3) da dupla D10.

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa tarefa também foi solicitado que construíssem uma figura utilizando os seguintes passos:

Figura 12 - Transcrição das falas da professora-pesquisadora durante a terceira tarefa

"Construa um segmento AB;
Construa uma circunferência de raio AB e centro C;
Plote um ponto D sobre a circunferência;
Construa uma segunda circunferência de raio AB e centro em D."

Fonte: Dados da pesquisa.

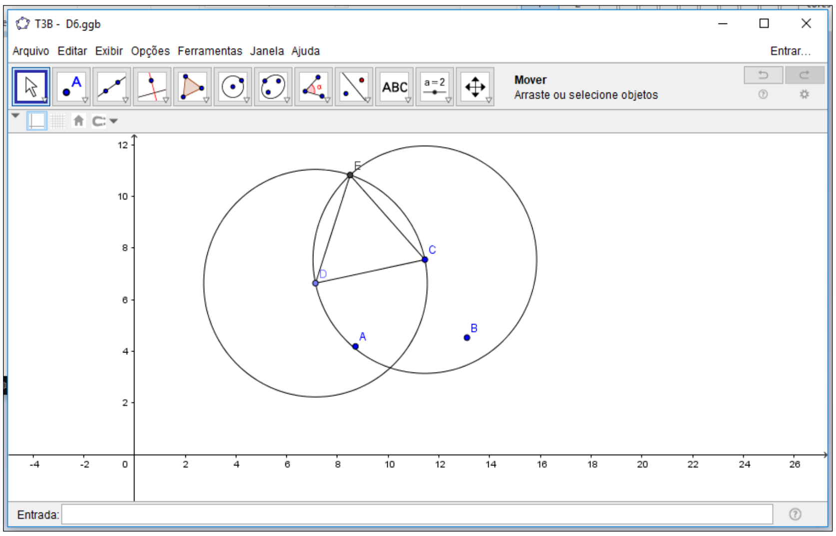
Em seguida, as duplas deveriam tentar construir figuras geométricas, como triângulos equiláteros e losangos, no interior das duas circunferências, utilizando apenas raios. Nesse momento, as duplas construíram esses polígonos na parte interna das circunferências.

Para os alunos, essa foi a parte mais difícil da tarefa, devido à necessidade de transportar segmentos (medidas) com o "Compasso" para construir outras figuras. Compreender as propriedades geométricas inerentes às ferramentas do *software* era fundamental para que alcançassem os objetivos dessa tarefa.

Como Gravina (1996, p. 6), entendemos que, em um ambiente dinâmico como o GeoGebra, "para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de 'desenhos em movimento', e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema". A assimilação da abertura do compasso físico com a utilização da ferramenta "Compasso" do GeoGebra foi um processo lento e dependia da compreensão da propriedade geométrica intrínseca a essa ferramenta.

A dupla D6 construiu um triângulo com estratégias semelhantes àquelas sugeridas por Euclides na proposição 1 no Livro I dos "Elementos" (figura 13). Como a proposta era utilizar apenas os raios, essa dupla percebeu que com um dos pontos de interseção das circunferências era possível utilizar segmentos para construir o triângulo. Contudo, essa percepção foi verificada em apenas outras três duplas em toda a classe.

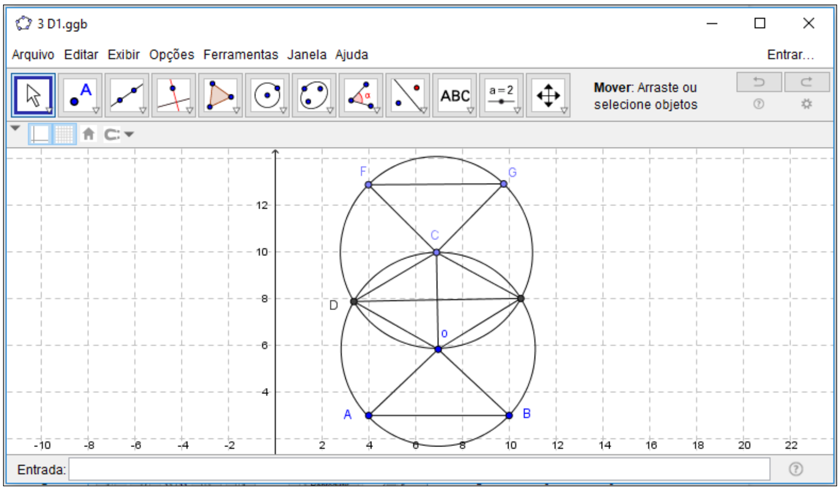
Figura 13 - Captura direta do arquivo GeoGebra da construção da dupla D6



Fonte: Dados da pesquisa.

Embora a dupla D1 (figura 14) tenha construído figuras utilizando os raios das circunferências, foi possível visualizar no “Protocolo de construção”[59] que a primeira delas foi a diagonal maior de um losango. Além disso, os triângulos desenhados pela dupla D1 não foram todos construídos utilizando apenas raio, como proposto inicialmente.

Figura 14 - Captura direta do arquivo GeoGebra da construção da dupla D1



Fonte: Dados da pesquisa.

As construções realizadas no ambiente GeoGebra durante a terceira tarefa permitiram aproximações à proposição 1[60] do Livro I dos “Elementos” (“Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada”, (BICUDO, 2009, p. 99). Esse tipo de construção teve o objetivo de fazer com que as duplas construíssem polígonos utilizando os raios dessas duas circunferências, aproximando-se então das construções de Euclides. Paralelamente, as duplas deveriam construir circunferências com o compasso físico a partir de segmentos (raios) definidos em uma folha preparada. Devido ao tempo, às dificuldades apresentadas pelos alunos e ao foco na proposição 22 nesse estudo piloto, a proposição 1 do Livro I de Euclides não foi matematicamente formalizada. Entretanto, essa tarefa foi essencial para o aprimoramento e elaboração posterior das tarefas para a realização da pesquisa de campo propriamente dita.

Na tarefa 4, inicialmente, as duplas assistiram a um vídeo[61] sobre a biblioteca de Alexandria. A imagem do vídeo não era de boa qualidade e, além disso, era legendado,

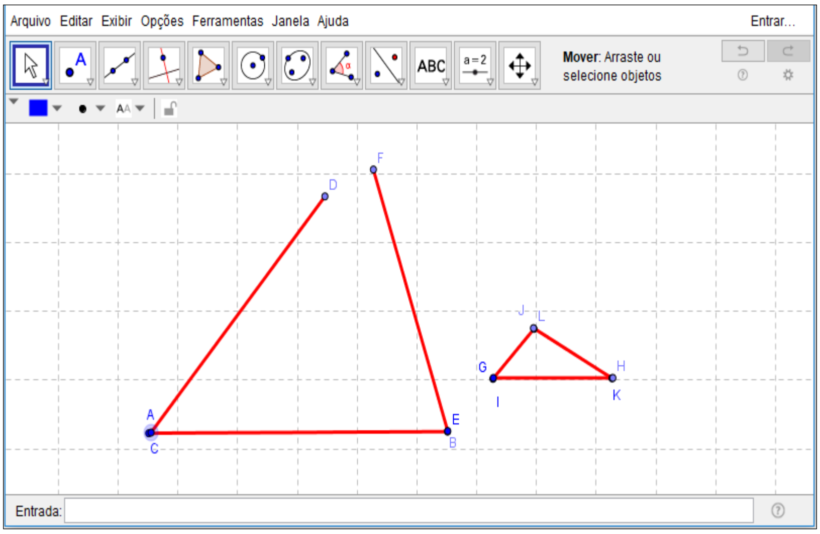
---

[59] Ferramenta do GeoGebra que possibilita visualizar todos os passos da construção.
[60] “1. Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.” (BICUDO, p. 99. 2009)
[61] Vídeo criado a partir de trechos dos vídeos disponíveis em www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4 e www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8.

porém, mesmo assim, o vídeo causou alguma surpresa nos alunos ao saberem da destruição da biblioteca. Após o vídeo, discutimos a importância dessa biblioteca em sua época e das bibliotecas em geral, nos dias atuais. Em seguida, contamos um pouco da história de Euclides e dos "Elementos", e comentamos que estudaríamos na sala de computadores algumas de suas ideias matemáticas. Essa tarefa sofreu alterações pouco antes de ser desenvolvida com as duplas. A ideia inicial era que aprendessem a utilizar o transporte de segmentos para construir triângulos tal como Euclides. Porém, com as dificuldades apresentadas durante a tarefa 3, verificamos que esse trabalho demandava um tempo maior que o disponível. Dessa forma, utilizamos a ferramenta "Segmento com comprimento fixo" para que a tarefa fosse executada no GeoGebra com mais facilidade.

Inicialmente, algumas medidas de segmentos foram informadas para todas as duplas. A figura 15 mostra os triângulos construídos pela dupla D10. Nesse momento, o conceito de "segmento" já parecia ter sido compreendido pelas duplas, pois D1 e D6 também conseguiram construir e manipular os segmentos até formar triângulos.

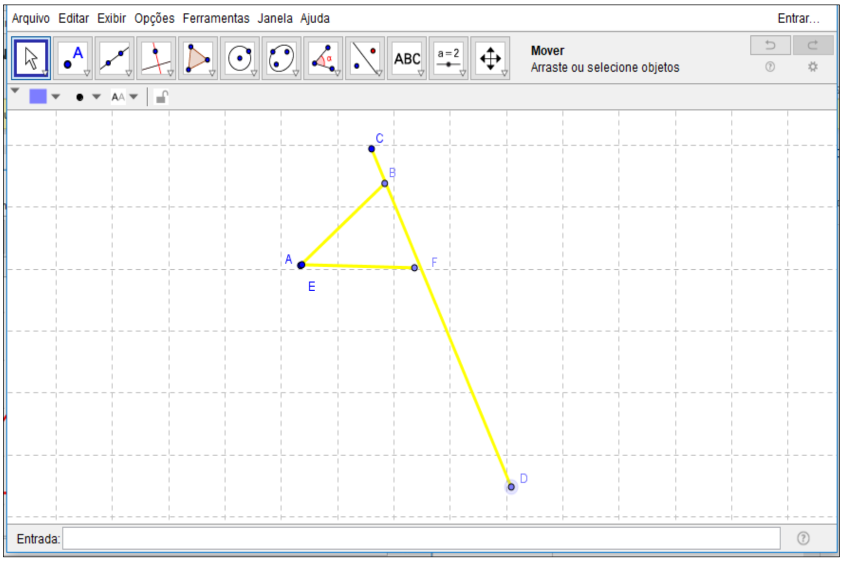
Figura 15 - Registro da construção da dupla D10 no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

Posteriormente, cada dupla recebeu algumas medidas de segmentos que não permitiriam a construção de triângulos. Durante um bom tempo, a dupla D10 fez testes e não houve comentários sobre a impossibilidade de "fechar" o triângulo (figura 16).

Figura 16 - Registro da construção da dupla D10 no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelas expressões faciais das duplas foi possível observar o quanto ficaram intrigadas. Algumas apagavam e refaziam os segmentos construídos por diversas vezes, pois acreditavam que poderiam ter pulado alguma etapa. Após alguns minutos, perguntamos a cada uma das duplas se haviam conseguido construir o triângulo e todas responderam negativamente.

Perguntamos às duplas se com três segmentos de reta é sempre possível construir um triângulo. Com base nas tentativas feitas, algumas responderam apenas que com alguns segmentos era possível e com outros não. Como verificamos as dificuldades dos alunos em encontrar algum tipo de padrão, dissemos a eles que na época de Euclides os matemáticos já sabiam qual seria a condição para a existência de um triângulo, então, mostramos como isso foi apresentado na Proposição 22 de os “Elementos”. Em seguida, solicitamos que formassem trios de medidas que possibilitariam a construção de triângulos. Culminamos o estudo piloto com uma verificação dos conjuntos de medidas apresentados pelas duplas. Surgiram conjuntos que não permitiam a existência de um triângulo devido a erros de cálculos. A dupla D10 informou corretamente o conjunto (7, 10, 9), enquanto D1 apresentou o conjunto (6, 5, 1) com o qual não é possível construir um triângulo.

Algumas duplas chegaram a recorrer ao GeoGebra para confirmar suas respostas. Assim como Gravina (2001), percebemos que a princípio as construções do tipo “à mão livre"[62] (com os segmentos fixos que não formavam triângulos) eram vistas pelas duplas como uma possibilidade de reproduzir uma figura conhecida (o triângulo). Mas, com a manipulação, as duplas puderam verificar que não era possível obter a forma desejada possibilitando, assim, a compreensão de que existem conjuntos de segmentos que não possibilitam a construção de triângulos.

Ao final do estudo piloto, os estudantes responderam, por escrito, a algumas perguntas sobre as tarefas realizadas. As respostas das duplas a uma avaliação das tarefas realizadas evidenciaram que a História da Matemática, junto ao GeoGebra, possibilitou uma visão diferente sobre a aprendizagem em Matemática. Respostas como: "sim, gostei. Porque aprendi mais sobre a matéria e sobre como fazer certinho uma coisa que acho difícil fazer no caderno, no computador foi melhor" (D6[63], ao se referir às tarefas de modo geral); "precisei mexer para aprender", "muito interativo", "quebra a cabeça", "difícil" e "difícil no começo" (duplas D1, D6 e D10 ao se referirem ao GeoGebra), etc. Em relação à História da Matemática não houve comentários negativos. Ao perguntar se eles gostaram de conhecer um pouco da História da Matemática, as duplas justificaram suas respostas, por exemplo, dizendo que a "Matemática envolve a história", que "foi a aula mais legal e interativa" e que era "diferente de tudo que já aprendi".

Observamos que a utilização de diferentes espaços da escola gerou entusiasmo e expectativas dos estudantes, pois alguns deles não eram frequentemente utilizados, principalmente nas aulas de Matemática. Entretanto, utilizar esses espaços exige muita preparação, organização e persistência, pois ocorrem diversas situações imprevisíveis como falhas nos equipamentos eletrônicos, agitação dos estudantes, dentre outras. Além disso, as dificuldades observadas tanto em conceitos geométricos quanto em relação ao uso do computador e do GeoGebra na 3ª tarefa, nos levaram a refletir sobre as etapas necessárias para trabalhar tais construções no *software*.

Percebemos também a necessidade de aprimoramento das tarefas, pois ainda careciam de maior articulação entre as Proposições da obra "Elementos", o contexto histórico no qual foram desenvolvidas e o estudo dos conceitos de Geometria no GeoGebra.

---

[62] Na versão GeoGebra Classic 5 existe uma ferramenta "Função à mão livre", mas não estamos nos referindo a ela nesse trecho.

[63] Acreditamos que D6 apresentou sua explicação na primeira pessoa do singular por ter sido registrado por apenas um dos integrantes da dupla.

Contudo, a realização desse estudo piloto evidenciou que as tarefas são promissoras. O GeoGebra efetivamente favoreceu a compreensão de conceitos de Geometria, pela facilidade e agilidade na visualização e manipulação de figuras. Além disso, os dados coletados sugerem que as tarefas propostas – primeiras tentativas de articulação entre o contexto histórico da época dos “Elementos”, as proposições do Livro I dessa obra, e as noções de Geometria plana – têm um potencial educativo, na medida em que os alunos puderem começar a perceber que a Matemática é uma construção humana, historicamente situada.

Em síntese, a realização do estudo piloto mostrou-se muito produtiva, principalmente em termos de aprendizagem docente, e influenciou positivamente a construção e o desenvolvimento das tarefas da pesquisa de campo apresentada no próximo capítulo.

3.5. A proposta desenvolvida em 2019

A partir da análise do estudo piloto, aprimoramos as tarefas propostas para serem desenvolvidas no primeiro semestre do ano de 2019.

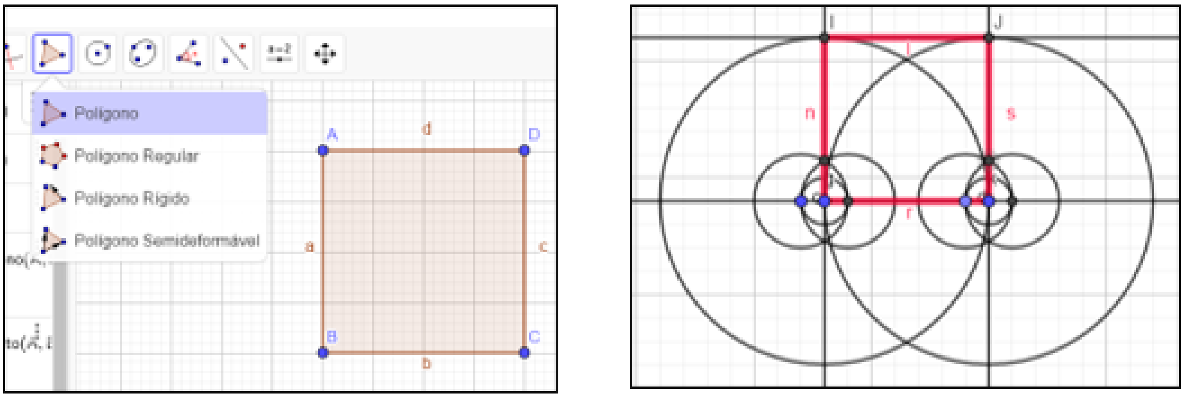
Construímos um total de oito tarefas inspiradas nos “Elementos”, de Euclides, e relacionadas aos seguintes conteúdos matemáticos: noções básicas de Geometria, quadrados, circunferências e algumas de suas propriedades, e triângulos e algumas de suas propriedades. Além delas, duas avaliações foram realizadas pelos alunos em momentos diferentes: a primeira ocorreu após a sexta tarefa, e a segunda, após a oitava tarefa. Ressaltamos que, como o trabalho de campo foi desenvolvido durante os horários normais de aula, diversas situações, como indisponibilidade das aulas, atraso na troca de horários, queda de energia, problemas com equipamentos, dentre outros, fizeram com que as atividades fossem reformuladas e adaptadas.

Iniciamos o trabalho de campo no final de abril de 2019 – com o consentimento da escola, do professor titular da classe, dos alunos e seus responsáveis – nas duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental do professor Márcio (turmas A e B). Desenvolvemos as tarefas com as turmas para não causar transtornos quanto ao planejamento do professor. Entretanto, para este estudo, optamos por analisar os dados da turma A, pois houve uma participação maior dos estudantes, evidenciada pelos registros, frequência, falas e questionamentos.

O estudo totalizou 24 aulas (Quadros 3 e 4). Como o trabalho de campo ocorreu no ambiente natural de sala de aula, o tempo médio disponível para a realização das tarefas por aula foi de 30-35 minutos. As trocas de horários, a organização do material, o deslocamento até o laboratório de informática e os problemas técnicos com os computadores foram alguns dos fatores que diminuíram o tempo de aula previsto para 40-50 minutos. Com isso, quando necessário, as tarefas propostas foram repensadas e reestruturadas na medida em que eram desenvolvidas pelos alunos. Foi necessário adaptá-las à dinâmica escolar que, na maioria das vezes, gerava muitos imprevistos.

Com o estudo piloto, percebemos a falta de conhecimentos prévios de Geometria e a reduzida habilidade com o manuseio de instrumentos de construção geométrica. Sabemos que na BNCC e no antigo Currículo Básico Comum (CBC) de Minas Gerais, a abordagem das noções básicas de Geometria está presente desde o 6° ano do Ensino Fundamental, entretanto, os resultados do estudo piloto apontaram algumas dificuldades. Por exemplo, para construir um quadrado no GeoGebra, podemos utilizar a ferramenta polígono, que fornece uma construção mais direta, ou, realizar construções geométricas com as ferramentas compasso, reta, segmento, além de outras (ver figura 17).

Figura 17 - Construção do quadrado pelas ferramentas "Polígono" e “Compasso”



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Em ambos, o estudante precisa ter um conhecimento básico de Geometria, ou seja, compreender o que é um polígono, um segmento, uma reta, suas nomenclaturas, dentre outros. Com isso, para o trabalho de campo, optamos por iniciar o trabalho em sala de aula, fazendo uma preparação para a realização das tarefas no GeoGebra com o intuito de minimizar as dificuldades observadas no estudo piloto ao utilizar o *software*.

Dessa forma, inicialmente, duas tarefas foram desenvolvidas em sala de aula, visando a um primeiro contato com noções de Geometria (ponto, reta, plano, dentre outros) por meio de construções com régua e compasso. Procuramos criar um contexto para a realização de tais tarefas por meio da História da Matemática, situando Alexandria, sua biblioteca, Euclides e algumas fontes de conhecimento matemático (egípcios, hindus etc.). Essas tarefas aconteceram entre abril e maio de 2019, totalizando oito aulas que denominamos como fase de preparação. O quadro 3 apresenta algumas informações importantes sobre essas tarefas como datas, quantidade de aulas, tema e os tópicos estudados.

Quadro 3 - Tarefas realizadas em sala de aula

Data	**Número de aulas**	**Tarefa**	**Tema**	**Tópicos estudados**
30/04/19	01	Tarefa 1	A biblioteca de Alexandria, Euclides e os “Elementos”	- A importância de uma Biblioteca - Instrumentos de desenho: régua não graduada e compasso - Figuras geométricas planas - Localização no mapa
07/05/19 10/05/19 14/05/19 17/05/19 24/05/19 28/05/19 31/05/19	07	Tarefa 2	A construção de altares indianos e as primeiras definições de Euclides	- Noções primitivas na Geometria (plano, ponto, reta, segmento) - Retas: Perpendicular, mediatriz e paralelas - Ponto médio - ângulo reto - Quadrado - Construções geométricas com régua não graduada, compasso e esquadro - Construção do altar do falcão pelos hindus (Índia) - Surgimento da Geometria e do esquadro (Egito) - Definições dos “Elementos”

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora.

Entre junho e setembro de 2019, foram realizadas seis tarefas no laboratório de informática, utilizando o *software* GeoGebra instalado em todos os computadores, em um total de treze aulas. Além disso, foram realizadas duas avaliações (Apêndices I e L), a primeira em julho, e a segunda, em outubro, totalizando três aulas, conforme mostra o quadro 4 a seguir.

Quadro 4 - Tarefas realizadas no laboratório de informática

Data	**Quant. de aulas**	**Tarefa**	**Tema**	**Tópicos estudados**
04/06/19 07/06/19	02 aulas	Tarefa 3	Primeiros contatos com o *software* GeoGebra: construção do quadrado.	- Noções primitivas na Geometria (plano, ponto, reta, segmento) - Retas: Perpendicular, mediatriz e paralelas - Ponto médio - Ângulo reto - Quadrado - Construções geométricas com o *software* GeoGebra. - Definições dos “Elementos” - Sobre a construção do altar do falcão pelos hindus (Índia) - Sobre a construção do papiro
11/06/19 18/06/19	02 aulas	Tarefa 4	O círculo e a circunferência	- Círculo e circunferência - Elementos de uma circunferência: centro, raio e diâmetro Estudar os tópicos anteriores a partir - Definições e postulados dos “Elementos” - Sobre a Matemática na China
25/06/19 01/07/19 02/07/19	03 aulas	Tarefa 5	Construção do triângulo isósceles e a exploração da proposição 3 do Livro I	- Triângulo Isósceles - Elementos de uma circunferência: centro, raio e diâmetro - Definições e proposições dos “Elementos”
05/07/19 09/07/19	02 aulas	Tarefa 6	A proposição 1 do Livro I: Construção do triângulo equilátero	- Triângulo Equilátero - Elementos de uma circunferência: centro, raio e diâmetro - Definições e proposições dos “Elementos”
11/07/19	01 aula	1ª Avaliação do Trabalho	Primeira Avaliação do Trabalho	-
20/08/19 23/08/19 13/09/19	03 aulas	Tarefa 7	*Feedback* das tarefas anteriores e a construção do triângulo escaleno	- Triângulo Escaleno - Elementos de uma circunferência: centro, raio e diâmetro - Definições e proposições dos “Elementos”
27/09/19	01 aula	Tarefa 8	A condição de existência de um triângulo: proposições 20 e 22 do Livro I	- Condição de existência de um triângulo - Definições e proposições dos “Elementos”
03/10/19	02 aulas	2ª Avaliação do Trabalho	Avaliação Final do Trabalho	-

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora.

Após organizar todas as informações produzidas, inicialmente denominamos cada dupla por um código (D1, D2, ..., D7, D9, D10, ...), e o trio por T8[64], para facilitar a organização dos resultados e preservar a identidade dos estudantes neste estudo, conforme termo assinado por seus responsáveis (Apêndice A)[65]. Entretanto, também optamos por usar nomes fictícios na apresentação dos resultados, pois acreditamos que, além da preservação da identidade, em alguma medida nos aproximamos mais dos participantes do estudo. Dessa forma, identificamos os alunos de acordo com os nomes fictícios inseridos no quadro 5:

Quadro 5 – Nomes fictícios dos participantes

Código da dupla	**Nome fictício**	**Código da dupla**	**Nome fictício**
D1	André e Artur	D10	Mary e Melissa
D2	Bia e Bruna	D11	Paulo e Pedro
D3	Leo e Luiz	D12	Dara e Duda
D4	Camila e Carol	D13	Elias e Ester
D5	Lara e Luna	D14	Davi e Diego
D6	João e Joaquim	D15	Naty e Nicole
D7	Renata e Rose	D16	Alice e Alice
T8	Tadeu, Tales 3 Tiago	D17	Camila e Cassia
D9	Lívia e Lúcia	-	-

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora.

Dispostos de todas as informações coletadas, organizamos todos os dados produzidos: diário de campo, registros dos alunos (caderno e computador) gravações de áudio e vídeo. Consultamos às gravações em vídeo, transcrevemos os áudios de todas as aulas e, paralelamente, consultamos as informações inseridas no diário de campo e registros dos alunos em busca de pistas importantes para este estudo. Posteriormente, essas

[64] O código T8 foi elaborado assim devido ao número do computador utilizado pelo trio.
[65] Os códigos foram criados inicialmente para facilitar a organização dos dados, pois correspondiam ao número do computador que utilizaram durante a pesquisa. Ressaltamos que os alunos utilizaram o mesmo computador durante todo o período de desenvolvimento do trabalho no laboratório de informática.

“pistas” eram investigadas com mais atenção a partir da transcrição do áudio dos estudantes[66] e da consulta à gravação do vídeo. Ressaltamos que a consulta aos vídeos foi importante nesse processo, seja para verificar posturas e/ou expressões em determinadas situações, seja para identificar qual integrante da dupla se expressou verbalmente.

No capítulo a seguir, descrevemos e analisamos o processo vivenciado a partir da interpretação dos dados produzidos e à luz do nosso referencial teórico.

[66] Habilitamos a gravação de áudio na maioria dos computadores, pois as gravações em áudio e em vídeo não capturavam as conversas da maioria dos estudantes. Além disso, em algumas aulas duas situações ocorriam: alguns computadores apresentavam defeitos nos microfones e, por algum motivo, alguns estudantes desligavam o gravador de áudio.

CAPÍTULO 4: DESCREVENDO E ANALISANDO O PROCESSO VIVENCIADO

Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.
D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

Neste capítulo, abordamos as tarefas matemáticas desenvolvidas em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ibirité (MG), procurando tanto descrevê-las quanto analisá-las.

Nosso trabalho foi inspirado nos "Elementos" de Euclides e desenvolvido a partir da perspectiva da História da Matemática como abordagem de ensino, na qual buscamos a valorização da Matemática como uma construção humana, em um ambiente que permite que o aluno se torne mais ativo na construção do conhecimento matemático.

A partir da leitura e organização de todos os dados produzidos, nossa pesquisa foi estruturada – à luz dos nossos referenciais teóricos – a partir da descrição e análise do processo vivenciado durante as oito tarefas desenvolvidas neste estudo.

4.1 Tarefa 1 – A biblioteca de Alexandria, Euclides e os "Elementos"

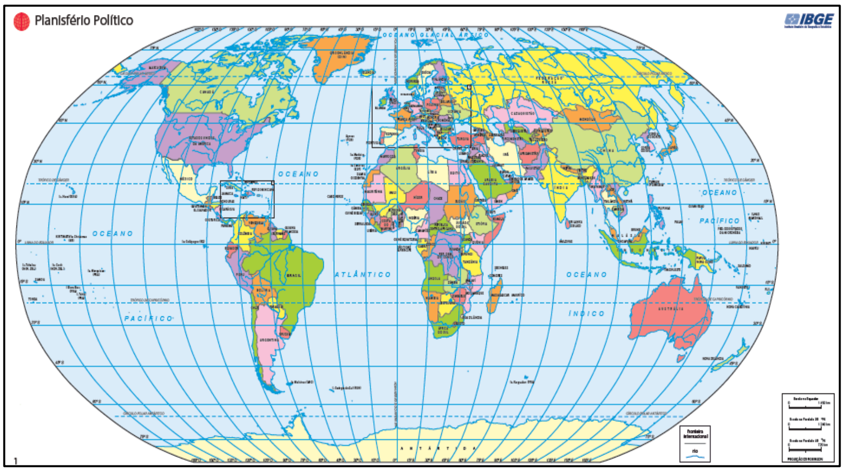
Na primeira tarefa, que durou cerca de 40 minutos, os alunos foram convidados a imaginar que faríamos uma "viagem no tempo", para uma época anterior a Cristo, para saber de onde vêm muitas das ideias que eles estudaram e/ou ainda estudarão na disciplina de Matemática (Apêndice C).

A princípio, ao observar as expressões faciais, parecia que a proposta soava um pouco estranha para eles. Entretanto, após apresentá-la, com uma contextualização histórica, promoção de diálogos e com o auxílio de alguns recursos (manuais e tecnológicos), os alunos reagiram bem ao convite e se tornaram bastante participativos[67]. Com isso, concordamos com Miguel e Miorim (2008, p. 162) ao dizer que, com a História da Matemática em sala de aula devemos "colocar questões e problemas, sim! Constituir uma nova história, sim! Usar a história não, porque ela não é um objeto de uso, e sim um campo de diálogo!". Sendo assim, foi necessário promover uma contextualização e problematização dos "Elementos", de Euclides e de sua época para que nossos objetivos pudessem ser alcançados.

[67] Detalhes dessa participação serão apresentados ao longo do texto.

Contudo, o principal objetivo dessa tarefa foi promover uma primeira aproximação com a história de Euclides e os “Elementos” e o contexto de sua época. Cada dupla recebeu um planisfério, conforme figura 18, do tamanho de duas folhas de ofício para que, a cada destino visitado, visualizassem a sua localização.

Figura 18 - Planisfério entre as duplas



Fonte: https://mapas.ibge.gov.br.

Na medida em que entregava o planisfério para as duplas, contava a eles sobre a viagem que faríamos e que no planisfério iríamos localizar onde estávamos e para onde viajaríamos. Nesse momento, percebemos que as duplas começaram a explorar o planisfério, pois conversavam entre si, apontando para os mapas.

Localizamos então o Brasil, Minas Gerais, Belo Horizonte e a cidade de Ibirité. Em seguida, os alunos localizaram o Egito e a cidade de Alexandria. Algumas duplas encontraram o Egito rapidamente, mas outras tiveram dificuldade para fazê-lo. Além disso, quando perguntamos sobre qual seria o continente a que o país pertencia, rapidamente responderam “África” e “no continente africano”.

A figura 19, a seguir, mostra o exato momento da localização do Egito no planisfério. Para Miguel e Miorim (2008, p. 155) ao assumir um papel interdisciplinar, é possível “retirar a Matemática do seu sempre questionado isolamento” fazendo com que ela possa contribuir para o alcance de metas pedagógicas que “visem à formação crítica do cidadão”.

Figura 19 - Momento da localização no mapa

Fonte: Dados da pesquisa.

Nossa intenção era proporcionar conhecimentos de Geografia, além de trabalhar com a História, utilizando recursos variados, assim, logo em seguida, utilizamos o Datashow para projetar em uma tela imagens do *Google Earth*[68]. Dessa forma, além da animação, esse recurso permitiu a visualização das capitais e cidades, enquanto os alunos as localizavam no planisfério.

Com a animação do Google Earth, talvez a percepção de distância e localização tenha ficado mais interessante, pois, ao assistir à gravação do vídeo desse dia, foi possível verificar as expressões de surpresa e de envolvimento das duplas. Por exemplo, logo após as localizações feitas no planisfério, pedimos para que olhassem para a imagem transmitida pelo Datashow.

Iniciamos[69] nossa "viagem no tempo" para a cidade de Alexandria, no Egito do século III a.C.. Apresentamos, em seguida, um pequeno vídeo[70] sobre a biblioteca de Alexandria e Euclides.

Infelizmente, como o vídeo é antigo e legendado, a qualidade da imagem não é muito boa. Durante sua apresentação, algumas duplas se dispersaram e podem ter perdido

---

[68] Programa de computador da empresa Google que apresenta um modelo tridimensional do globo terrestre. Disponível em: https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/.

[69] Como relatado anteriormente, além da pesquisadora e dos estudantes, contamos com a presença e a participação do Prof. Márcio em todas as aulas.

[70] Utilizamos alguns trechos dos vídeos disponíveis em www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4 e www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8.

alguma informação. Mesmo assim, ele foi o ponto de partida de todo o trabalho desenvolvido e promoveu algumas discussões com os alunos sobre o conhecimento contido na biblioteca. O final do vídeo (sobre a destruição da biblioteca), por exemplo, causou certa comoção em algumas duplas. Renata (da dupla D7) mencionou sobre seu colega de dupla: “ele ficou emocionado”, e realmente era possível ver algumas expressões tristes. Conversamos com eles sobre qual seria a importância da biblioteca naquela época, e alguns responderam: “para ter mais conhecimento” e “para registrar o conhecimento”. Um aluno perguntou sobre o papiro, já que há menção sobre ele no vídeo. Após explicar-lhe o que era um papiro, houve um comentário de Davi (dupla D14): “então é por isso que agora se chama papel”.

Em seguida, comentamos com os alunos sobre um importante matemático que trabalhou na biblioteca de Alexandria (Euclides) e que organizou vários conhecimentos matemáticos em uma obra chamada “Elementos”. Com isso, as duplas foram convidadas a imaginar que eram estudantes da biblioteca, alunos de Euclides, para estudar algumas ideias matemáticas contidas em “Elementos”. Em um momento de brincadeira, após mencionar que eu seria uma estagiária de Euclides, o aluno Davi[71] comentou que “então o professor é o Euclides”, referindo-se ao professor Márcio, Tiago (Trio T8) complementou dizendo “que já morreu”. Em seguida, mencionamos que, como alunos de Euclides, eles precisariam aprender a utilizar dois instrumentos básicos: régua e compasso. Nesse instante, ao iniciar a distribuição dos instrumentos, novamente Davi comentou: “Ah! Um pedação de pau e um compasso” (todos riram).

Enquanto explicava que os desenhos da obra “Elementos”, feitos por Euclides, foram construídos por tais instrumentos, o professor Márcio ajudou a distribuir uma régua não graduada (de madeira) e um compasso a cada dupla. A régua foi construída manualmente a partir de ripas de madeira. Já os compassos foram comprados em uma papelaria. A figura 20 mostra alguns desses instrumentos utilizados nesta tarefa.

[71] As participações orais das duplas foram registradas em Diário de Campo e confirmadas na visualização das gravações de vídeo.

Figura 20 - Instrumentos distribuídos para as duplas: régua não graduada e compasso

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, alguns alunos questionaram o que era o "pedaço de madeira".

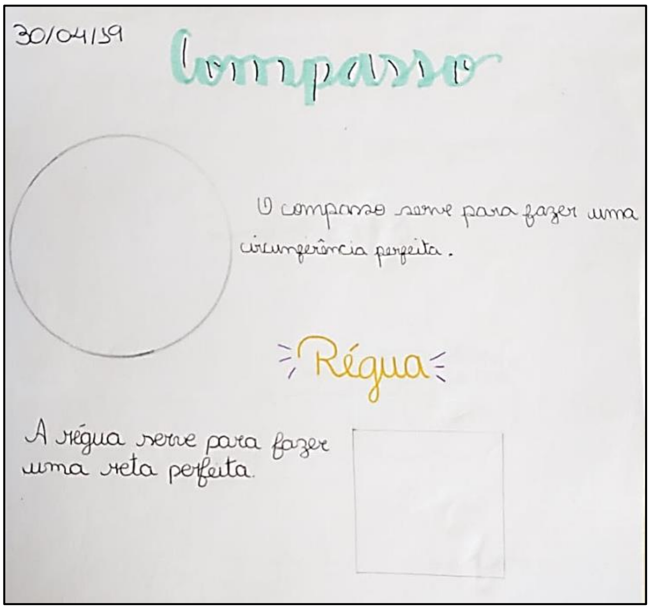
> *Prof. Thais: Não parece uma régua?*
> *Pedro: Não, porque não tem número.*
> *Naty: Uai, como você vai saber os centímetros?*
> *Prof. Thais: Euclides utilizou a régua sem graduação, ou seja, sem marcação ou divisão, mas sabiam que nem são necessárias as divisões? Em breve iremos verificar isso.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 30/04/2019).

Essa verificação posterior, mencionada no diálogo, ocorreu durante a tarefa 2, na qual os alunos puderam construir, por exemplo, segmentos iguais, utilizando o compasso para transportar medidas.

Além dos instrumentos da figura 20, cada dupla recebeu um "caderno de registro" que deveria ser utilizado durante as tarefas. Nesse caderno, as duplas deveriam registrar algumas informações e/ou responder questões quando solicitadas.

Para finalizar a tarefa 1, propusemos às duplas que construíssem alguns desenhos utilizando a régua não graduada e o compasso, e que registrassem as possibilidades em frases.

Figura 21 - Construções com régua e compasso da dupla D2

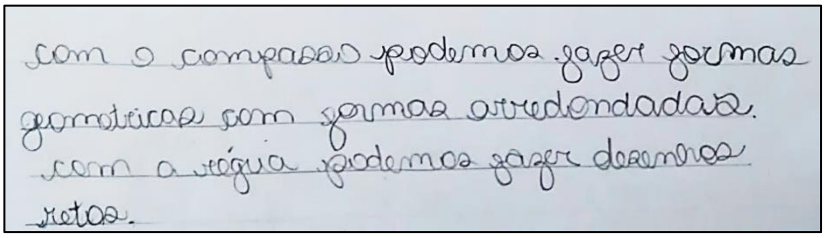


Fonte: Dados da pesquisa.

Nas construções realizadas pela dupla D2 (figura 21), as alunas mencionaram as palavras circunferência e reta. Isso evidencia que já conheciam os nomes e a representação de algumas figuras planas. Ressaltamos que, das 17 duplas, apenas quatro fizeram registros somente com desenhos. Nas explanações em frases e registros, as duplas citaram exemplos de figuras geométricas planas, como círculos, circunferência, quadrados, retângulos, retas e triângulos; e de figuras espaciais e/ou físicas, como planetas, rodas, pneu, cone e cubo.

Na figura 22, podemos observar que a dupla D15, ao escrever sobre o que era possível desenhar com o compasso, não menciona círculo ou circunferência, mas sim “formas arredondadas” e, em relação à régua, escreve que ela permite “fazer desenhos retos”. Das 17 duplas, uma delas menciona a palavra circunferência, e oito, a palavra círculo.

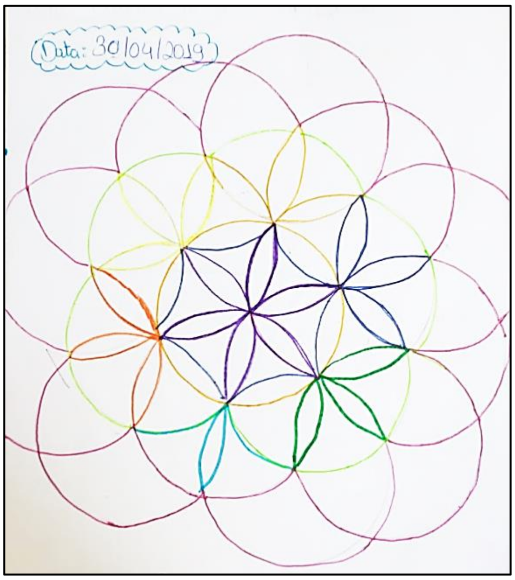
Figura 22 - Registro da dupla D15 sobre construções com régua e compasso



Fonte: Dados da pesquisa.

Duas duplas apresentaram construções mais artísticas utilizando o compasso. Na figura 23, podemos visualizar um desenho com padrões geométricos construídos a partir de circunferências e apenas com o compasso. Ao perguntar-lhes se já haviam utilizado o compasso e onde aprenderam, a dupla D10 respondeu que, no ano anterior, eles aprenderam a fazer esses desenhos na disciplina de Artes.

Figura 23 - Construções com régua e compasso da dupla D10



Fonte: Dados da pesquisa.

Esse momento foi breve – os alunos dispuseram de cerca de dez minutos para realizar a tarefa proposta – pois, conforme nosso planejamento, a tarefa 1 deveria ser desenvolvida em apenas uma aula. Porém, o tempo não foi suficiente para observar quais duplas apresentavam dificuldades com o manuseio do compasso. Dessa forma, posteriormente, na tarefa 2, verificamos que muitos estudantes não estavam habituados com o uso do compasso, mesmo já tendo utilizado esse instrumento na aula de Artes no ano anterior.

4.2 Tarefa 2 - A construção de altares indianos e as primeiras definições de Euclides

Desde o estudo piloto e durante o planejamento das tarefas, percebemos a necessidade de retomar os conhecimentos básicos de Geometria (como pontos, retas, segmentos, polígonos, dentre outros), para que pudéssemos trabalhar com algumas das proposições do Livro I de Euclides. Assim, a segunda tarefa demandou sete aulas para ser desenvolvida. Seu propósito, além de proporcionar informações históricas e geográficas que permitissem uma associação da Matemática com práticas sociais variadas, e de evidenciar como pessoas distintas de variadas culturas construíram conhecimentos matemáticos que posteriormente seriam utilizados por Euclides em sua obra, era desenvolver a habilidade de manusear e realizar construções com os instrumentos geométricos (régua não graduada e compasso), bem como rever ou ter contato com algumas noções básicas de Geometria (como segmentos, retas perpendiculares e paralelas, ângulo reto, dentre outros), que seriam necessárias para a realização das tarefas no GeoGebra.

Na tarefa 2 (Apêndice D), "viajamos" para um período anterior à época de Euclides, buscando compreender como outra cultura utilizava a Matemática em suas práticas sociais. Dessa vez, a Índia foi o destino. Novamente, as duplas foram convidadas a localizar o país, identificar o continente ao qual pertence e observar a distância entre a Índia e o Egito. Essas observações também ocorreram com a animação do *Google Earth*. Esses recursos se tornaram o ponto de partida para iniciar a tarefa, pois, ao rever as gravações em vídeo desse momento, observamos que o aluno Davi parecia empolgado com a "viagem", ao solicitar que apagassem a luz da sala (para visualizar melhor a animação no *Google Earth*) e ao dizer a seguinte frase: "Vamos fazer a viagem, professora!". Além disso, cada dupla recebeu um planisfério preto e branco para que pintassem cada região visitada no mundo. Nesse momento, algumas duplas, aparentemente, estavam bem concentradas na tarefa solicitada, Camila e Cássia (D17), por exemplo, pareciam bem envolvidas, pois conversavam entre si e apontavam para os mapas, além disso, uma observava o mapa colorido, enquanto a outra pintava os países até então mencionados (Egito e Índia).

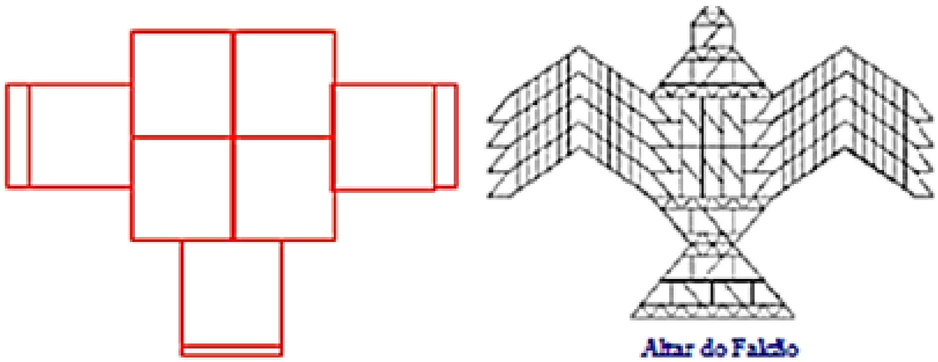
Procuramos conhecer os Sulbasutras[72] e a Matemática envolvida na construção de altares na civilização védica (GASPAR, 2003). Nessa civilização, a construção dos altares era algo de extrema importância e deveria ser muito rigorosa para merecer que os deuses atendessem ao desejo de quem os construía. Para que os rituais fossem bem-sucedidos, os altares deveriam ser construídos de forma muito precisa, ou seja, a Matemática era muito importante para eles. Buscamos, com essa tarefa, mostrar aos alunos algumas

[72] Os Sulbasutras são textos que possuem instruções para a construção de altares sagrados (GASPAR, 2003).

“necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Para essa tarefa, escolhemos o altar do Falcão, um dos mais famosos altares indianos, para uma problematização histórica atrelada. Em seu modelo de construção mais simples, sua base era formada por sete quadrados e meio (ver figura 24): o corpo do altar tinha quatro quadrados; asas e cauda, um quadrado cada. Para que a construção se aproximasse mais de um falcão, nesse modelo, as asas e cauda eram alongadas: asas tinham um quinto de um quadrado a mais, e a cauda, mais um décimo de um quadrado.

Figura 24 - Altar do Falcão



Fonte: Extraído de Gaspar (2003, p 105).

A figura acima representa dois modelos de construção de um altar do Falcão: à direita, um modelo mais complexo e mais semelhante ao pássaro, constituído por triângulos e quadriláteros; à esquerda, um modelo mais simples, constituído por quadrados e retângulos.

Propusemos a construção da base do modelo mais simples. Para construí-la, inicialmente realizamos uma pequena discussão sobre as características[73] de um quadrado, para posteriormente realizar a sua construção.

Simultaneamente, iniciamos nossa aproximação ao Livro I dos “Elementos”, pois, a cada etapa da construção do quadrado, procuramos associar os entes geométricos com as

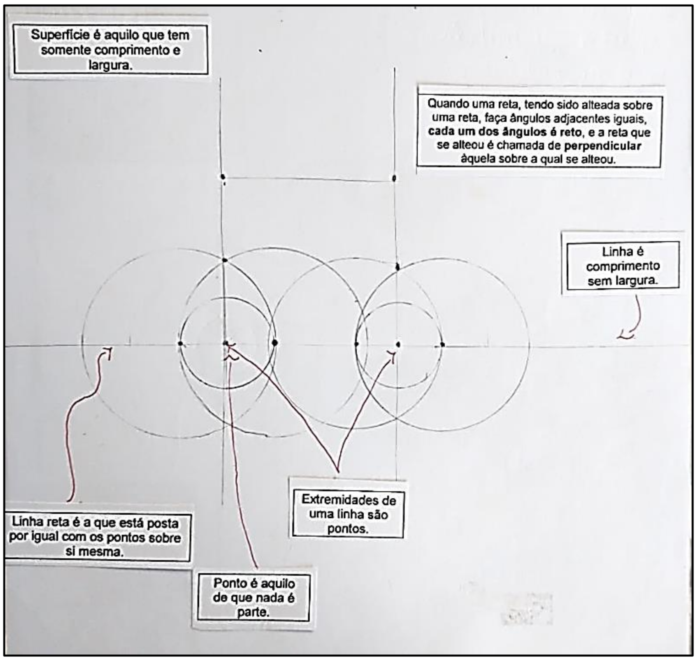
[73] Utilizamos aqui o termo características e não propriedades por considerar que a discussão proposta nesse momento não focou exclusivamente os aspectos formais e nem os esgotou, apenas procurou despertar o olhar dos alunos para determinadas características que diferenciam uma figura geométrica de outra e que seriam necessárias e suficientes para sua existência.

definições de Euclides (ditas aos alunos como ideias de Euclides[74]), evidenciando também a necessidade da padronização de nomenclatura dos pontos, retas e segmentos.

A construção do quadrado foi realizada em conjunto com os alunos, ou seja, enquanto realizava os desenhos no quadro, as duplas construíam o quadrado no caderno. Iniciamos com a explicação de que as figuras planas são construídas em uma região que Euclides chamou de “superfície” e definiu como “aquilo que tem somente comprimento e largura” (BICUDO, 2009, p. 97).

A figura 25, da dupla D2, mostra a construção final de um quadrado. As duplas receberam várias “plaquinhas” com algumas definições de Euclides extraídas da obra “Elementos” por Irineu Bicudo. Assim, na medida em que mencionávamos alguma definição de Euclides, as plaquinhas eram coladas próximas ao desenho. A construção dos quadrados para o altar do Falcão permitiu avançar e estudar também os conceitos de reta perpendicular e paralelas definidos por Euclides em sua obra.

Figura 25 - Construção de um quadrado com régua não graduada e compasso (D2)



Fonte: Dados da pesquisa.

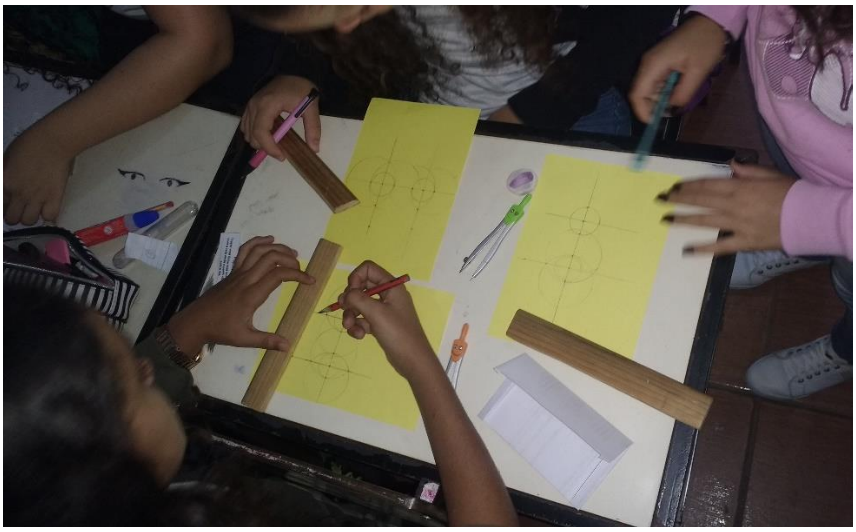
Em seguida, pedimos aos alunos que se organizassem em grupos maiores, de duas ou três duplas, para, coletivamente, construírem juntos um altar do Falcão. Para agilizar a

[74] Algumas ideias de Euclides que foram articuladas durante cada etapa da construção: “Ponto é aquilo que nada é parte”; “Extremidades de uma linha são pontos”; dentre outras.

construção, a turma foi dividida em seis grupos e cada grupo deveria montar um altar do Falcão.

Essa parte da tarefa permitiu explorar o compasso como um instrumento de transporte de segmento – algo muito importante para a realização das tarefas no GeoGebra – pois os quadrados foram construídos separadamente e deveriam ter exatamente a mesma medida. Com isso, o grupo precisou definir o tamanho do quadrado e cada aluno deveria utilizar o compasso como referência (já que a régua não era graduada). A figura 26 mostra um grupo de quatro alunos realizando a construção dos quadrados para montar um altar do Falcão.

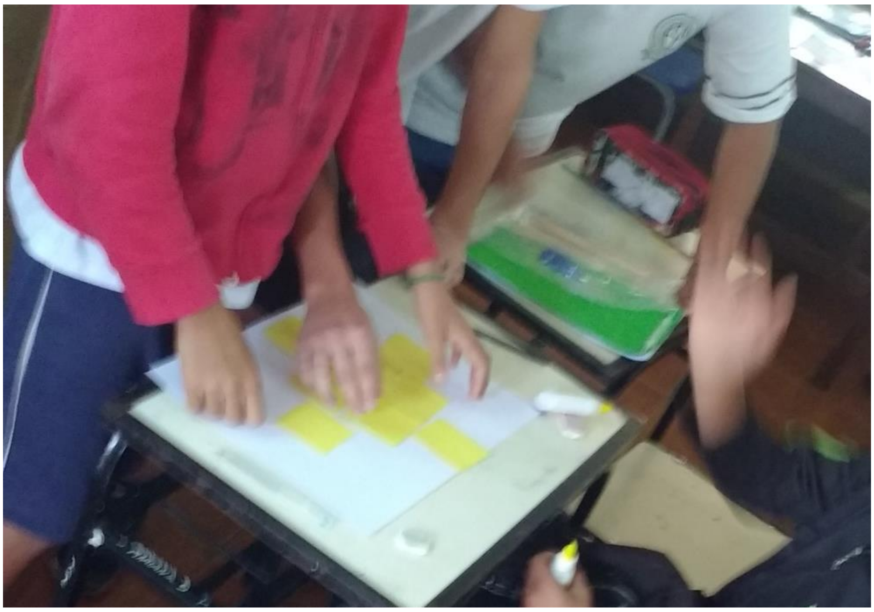
Figura 26 - Construção de quadrados para montagem do altar do Falcão



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa atividade demandou muito tempo, devido às dificuldades de algumas duplas para a construção do quadrado e com o manuseio do compasso. Além disso, é importante ressaltar que os alunos conversavam muito e se levantavam de seus lugares, principalmente quando iniciaram a montagem do altar do Falcão. A figura 27, a seguir, retrata o momento em que um grupo de alunos iniciava a montagem do altar do Falcão com sete dos oito quadrados iguais construídos.

Figura 27 - Início da montagem do altar do Falcão



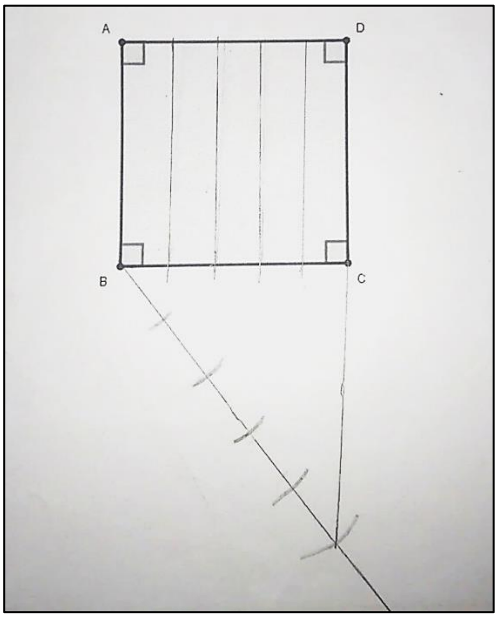
Fonte: Dados da pesquisa.

Entretanto, destacamos que foi durante essa tarefa que os alunos puderam construir quadrados com medidas congruentes, utilizando uma régua sem graduação. Isso possibilitou a verificação de que realmente não era necessário a utilização de uma régua graduada, pois o compasso assumiria essa função. Dessa forma, como cada integrante do grupo precisava construir pelo menos um quadrado e estes deveriam possuir as mesmas medidas, eles deveriam utilizar o compasso para construir quadrados com as mesmas dimensões.

Para finalizar a construção do altar, mais conceitos foram trabalhados, como a ideia de retas paralelas, pois foi necessário utilizar o esquadro nessa etapa da tarefa. O esquadro não foi um instrumento de desenho utilizado por Euclides, mas também é um instrumento muito antigo e que agilizou o processo de divisão do quadrado em cinco partes iguais, para construir os prolongamentos das asas e da cauda do altar do Falcão.

Para construir os retângulos que representam um quinto e um décimo de um quadrado, primeiramente, realizamos as divisões em uma folha, entregue a cada dupla, (conforme final do Apêndice D) que continha o desenho de um quadrado. Essa construção também foi realizada no quadro, enquanto as duplas a desenhavam na folha. A figura 28 apresenta a construção final da dupla D12.

Figura 28 - Divisão do quadrado em cinco partes iguais pela dupla D12



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a construção da figura 28, algumas definições de Euclides foram mencionadas, como a definição de reta, de segmento, de ângulo reto e principalmente de retas paralelas. Por exemplo, após a divisão do quadrado, mencionamos aos alunos que os segmentos (retas) construídos dentro do quadrado possuem uma característica especial e que também foram definidos por Euclides. A figura 29 mostra um momento em que um aluno realizava a divisão do quadrado com um esquadro também sem graduação.

Figura 29 - Aprendendo a dividir um quadrado em cinco partes iguais

Fonte: Dados da pesquisa.

A imagem registra o momento em que o aluno João (D6) estava dividindo um dos quadrados, construídos em conjunto, em cinco partes iguais, para finalizar o altar do seu grupo. Notamos que, enquanto ele se concentrava na construção, alguns de seus colegas aguardavam. Nesse momento, os alunos conversavam muito, já que apenas um integrante de um grupo de seis alunos realizava a construção. Além disso, observamos que as divisões dos quadrados pelas duplas não foram "perfeitas", ou seja, alguns retângulos aparentavam ser maiores que outros. Algumas evidências sugerem que o manuseio da régua de madeira (que é mais grossa) com o esquadro de material plástico (mais fino) pode gerar desenhos com imperfeições.

Como mencionado anteriormente, os grupos deveriam dividir um dos quadrados preparados para a construção do altar em cinco partes iguais. Optamos pela divisão do quadrado com o auxílio do esquadro, por ter sido considerado o caminho mais rápido para o término da tarefa 2. E ainda, como precisávamos de dois retângulos (correspondentes a um quinto de um quadrado) e um retângulo (correspondente a um décimo do quadrado), optamos por dividir o retângulo de um quinto em duas partes iguais por meio de dobradura, para não estender mais ainda o tempo dessa tarefa. Na figura 30, observamos outro grupo finalizando o altar do Falcão com a colagem dos retângulos construídos anteriormente.

Figura 30 - Montagem (finalização) do altar do Falcão

Fonte: Dados da pesquisa.

A princípio, nossa intenção era que essa tarefa ocorresse em um período menor, mas, para cumprir nossos propósitos, a opção pelas construções geométricas com instrumentos físicos de desenho acarretou um tempo maior de desenvolvimento devido a três motivos. O primeiro deles diz respeito ao tempo de aula e a situações comuns de um ambiente escolar. Geralmente, as tarefas eram desenvolvidas em 30-40 minutos[75] por dia de aula, devido ao tempo de troca de horário/professor e/ou organização e preparação do espaço (montagem dos equipamentos, organização em duplas, dentre outros). Além disso, a continuidade da tarefa geralmente acontecia depois de três dias, fazendo com que houvesse a necessidade de retomada de algumas ideias.

O segundo motivo se relaciona às construções com os instrumentos de desenho (régua não graduada, compasso e esquadro). Verificamos dificuldades relacionadas ao manuseio do compasso e,além disso, a cada passo da construção de uma figura, algumas duplas solicitavam um tempo de espera para que pudessem terminar o desenho, antes de prosseguir para o próximo passo. Além disso, durante a tarefa, alguns alunos mencionavam que não gostavam de realizar desenhos com o compasso. Esse fato se confirma na primeira avaliação[76,] quando 53% dos alunos mencionam que “gostaram pouco” das construções com régua e compasso (físicos), e cerca de 90% afirmam ter gostado muito das construções de figuras com o compasso do GeoGebra.

O terceiro motivo está relacionado à própria natureza da tarefa 2, dada a sua demanda. No final, além da construção do quadrado, os alunos precisariam utilizar as construções geométricas para dividir um quadrado em cinco partes iguais (formando a expansão das asas e cauda, como mencionado anteriormente).

4.3 Tarefa 3 - Primeiros contatos com o *software* GeoGebra: construção do quadrado

Na tarefa 3 (Apêndice E), já no laboratório de informática, retomamos a história dos altares indianos e as duplas voltaram a construir quadrados, porém, agora no GeoGebra. Nosso objetivo foi proporcionar um primeiro contato com o GeoGebra e suas ferramentas, com o mesmo contexto trabalhado nas tarefas 1 e 2: construção do quadrado, a partir da história da construção dos altares indianos e das ideias de Euclides, nos “Elementos”. Ao chegarem ao laboratório, cada dupla já tinha seu lugar determinado, os computadores já estavam ligados e com o GeoGebra em tela. Nenhum aluno conhecia o *software*.

Iniciamos a tarefa comentando com as duplas que os altares indianos surgiram muito tempo antes de Euclides e que eles já utilizavam a Matemática, além disso, já

[75] O horário normal é de 50 minutos, como em grande parte das escolas de Educação Básica.
[76] A primeira avaliação do trabalho foi aplicada no dia 11/07. O modelo está disponível no Apêndice J.

existiam vários registros em papiros, barro e couro de animais, mas que eram conteúdos mais voltados para a prática do dia a dia. Explicamos que Euclides foi muito importante porque organizou e estruturou conhecimentos matemáticos de forma lógica, explicando o porquê de se calcular ou fazer as construções de determinada maneira. Nesse momento, alguns alunos estavam um pouco dispersos, olhando para a tela do computador e/ou conversando com os colegas. Outros pareciam atentos às imagens apresentadas à turma, sobre as traduções mais antigas que temos da obra de Euclides. Uma dessas imagens está representada na figura 31[77].

Figura 31 - Cópia dos “Elementos” em latim, com detalhes em ouro, por volta de 1482

Fonte: https://www.wdl.org/pt/item/18198/view/1/6/.

Ao comentar com os alunos que todas as imagens apresentadas, referentes aos “Elementos”, são cópias feitas por outras pessoas, João (D6) perguntou:

João (D6): Mas, da mesma forma né!?
Prof. Thais: Sim! Geralmente, são traduções completas e eles acrescentam comentários.
João (D6): E atualizando...
Prof. Thais: Como falei no início do trabalho, não existe mais a obra original, mas temos uma tradução direto do grego para o português, aqui no Brasil! Essas daqui (apontando para as imagens) são as mais antigas.
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 04/06/2019).

[77] Veja a cópia em grego no site https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions.

Em seguida, assistimos a um vídeo[78] que apresenta cenas reais de momentos da construção de um altar do Falcão mais complexo (à direita da figura 24), na Índia, na década de 1970. Durante o vídeo, enfatizamos o trabalho dos homens e a construção perfeita dos tijolos (em formato de triângulos e quadriláteros). Nossa intenção foi mostrar como a Matemática era utilizada pelas pessoas comuns na arte, religião e em outras práticas sociais.

Figura 32 - Momento em que as duplas assistiram o vídeo da tarefa 3

Fonte: Dados da pesquisa.

O vídeo chamou a atenção das duplas porque, até então, a única imagem visualizada por eles sobre os altares indianos foi um exemplo do altar do Falcão que encontramos em (GASPAR, 2003, p. 105). Apresentamos ainda imagens reais do altar do Falcão, inclusive algumas bem próximas do modelo construído por eles, como, por exemplo, as figuras 33 e 34, a seguir, que se referem a uma fotografia do altar do Falcão mais complexo (à esquerda) e ao altar semelhante àquele que trabalhamos na tarefa 2 (à direita).

[78] Utilizamos alguns trechos do vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=DLKHQ_HI6OI com duração de 4min40s. Nele, é filmado um ritual de 12 dias, realizado por brâmanes Nambudiri, em Kerala (Índia), em abril de 1975. “Este ritual védico de sacrifício tem mais de 5000 anos e, provavelmente, é um dos rituais humanos mais antigos que ainda sobrevivem” (tradução livre de trecho que aparece na página do vídeo).

Figura 33 - Fotografia de um dos modelos mais complexos do altar do Falcão

Fonte: http://www.allempires.com/forum/forum_posts.asp?TID=28550.

Figura 34 - Fotografia de um modelo mais simples do altar do Falcão

Fonte: http://www.allempires.com/forum/forum_posts.asp?TID=28550.

Em seguida, comentamos que utilizaríamos o que haviam aprendido nas tarefas anteriores, porém, agora com o uso de um programa no computador. Nossa intenção era familiarizar os alunos com as ferramentas do GeoGebra, especificamente, com as ferramentas para a construção do quadrado, seguindo, na medida do possível, um caminho semelhante ao proposto na construção com régua e compasso físicos. Com o auxílio de um DataShow, projetamos a tela do GeoGebra na parede e fomos mostrando as ferramentas necessárias para cada etapa da construção do quadrado, passo a passo (figura 35). Além disso, retomamos algumas definições de Euclides – sobre reta perpendicular, ângulo reto, dentre outras – ao longo da explicação.

Figura 35 - Momento inicial da Tarefa 3

Fonte: Acervo da pesquisadora.

A figura 35 mostra o momento da construção do quadrado no GeoGebra:

> *Prof. Thais: Quando começamos a construir o quadrado, foi a primeira figura que fizemos?*
> *Davi (D14): Linha e ponto!*
> *Prof. Thais: Como é o nome dessa linha?*
> *Nicole (D15): Reta.*
> *João (D6): Semirreta.*
> *Prof. Thais: Era reta ou semirreta?*
> *Vários alunos juntos: Reta.*
> *Prof. Thais: Então, a primeira figura que vocês irão construir agora é uma reta. Para isso vocês precisam clicar nesse botão, nessa ferramenta (apontado para a projeção). [...]*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 04/06/2019).

Verificamos que alguns alunos ainda confundiam as noções de reta e semirreta. Contudo, considerando que esse era o primeiro contato com o GeoGebra, observamos que a maioria das duplas localizou as ferramentas rapidamente.

Para construir a reta na janela de visualização, é preciso clicar em duas regiões. Com isso, algumas duplas solicitaram ajuda:

> *Davi (D14): Professora, apareceu outra.*
> *Professora: Ah! Clique na seta (botão) que sairá.*
> *Davi (D14): Ah tá! Pronto.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 04/06/2019).

Com a ferramenta “Reta” selecionada, ao inserir um clique a mais, outra reta surge, e isso gerou insegurança por parte dos alunos. Foi necessário aguardar alguns instantes até prosseguir, já que outras duas duplas solicitaram ajuda para utilizar a ferramenta.

Com a reta construída no GeoGebra, dissemos aos alunos que iríamos colar na parede aquelas definições que havíamos estudado no início das nossas aulas. A primeira era a linha reta que Euclides definiu como aquela “que está posta por igual com os pontos sobre si mesma” (BICUDO, 2009, p. 97). Com isso, a tarefa 3 consistiu em construir o quadrado no GeoGebra, assim como foi construído com os instrumentos físicos, evidenciando cada figura pertencente a essa figura geométrica e associando as propriedades que definem o quadrado com as definições de Euclides. Dessa forma, para cada etapa da construção do quadrado, colávamos as plaquinhas na parede com a definição apresentada por Euclides em “Elementos”.

Para utilizar a ferramenta “Compasso”, fizemos uma associação com o compasso físico disponível na mesa de cada dupla. Mostramos que a ferramenta no GeoGebra teria a mesma função, porém, a abertura do compasso no programa seria a partir do clique nas extremidades de um segmento. Com isso, mesmo que os conceitos de círculo e circunferência ainda não tivessem sido trabalhados, a utilização do instrumento nas tarefas anteriores permitiu que a construção de círculos fosse mais rápida. Assim que o círculo surgiu na tela do computador, alguns alunos se mostraram surpresos.

Essa tarefa teve duração de duas aulas de 30-40 minutos cada. Na primeira, conhecemos as ferramentas como “Ponto”, “Reta” e “Segmento” e, na segunda, utilizamos o “Compasso” para o término da construção do quadrado. Na medida em que utilizavam uma ferramenta, percebemos que as duplas ganhavam habilidade e agilidade. Na segunda aula, observamos uma diminuição nas dúvidas em relação ao uso das ferramentas.

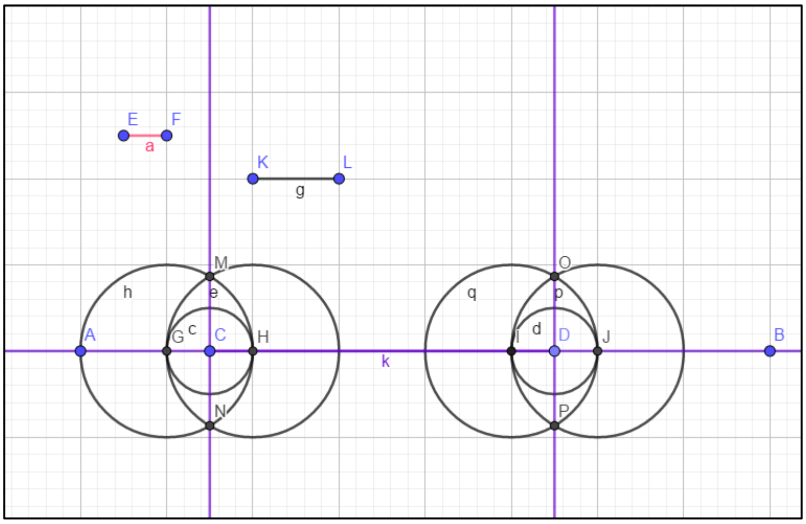
A maioria das duplas conseguiu finalizar a construção do quadrado. Algumas construíram o quadrado de forma bem rápida, e outras necessitaram da ajuda dos colegas. A figura 28, por exemplo, apresenta a construção pela dupla D2, primeira dupla a terminar o quadrado ainda no início da segunda aula.

Por meio da gravação em áudio e do registro no diário de campo, verificamos que as alunas Bia e Bruna (D2) discutiam a construção dos círculos, enquanto ainda mencionávamos sobre como utilizar o “Compasso”:

Bruna (D2): Colocar em K e L.
Bia (D2): Não é na bolinha, é na...
Bruna (D2): Huum

Bia (D2): Uai... tá errado. A gente nunca fez, como que a gente está fazendo?
Bruna (D2): Thais, Thais... Estamos um pouquinho adiantadas.
Professora: Deixa-me ver. Oh! Muito bem, meninas.
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 07/06/2019).

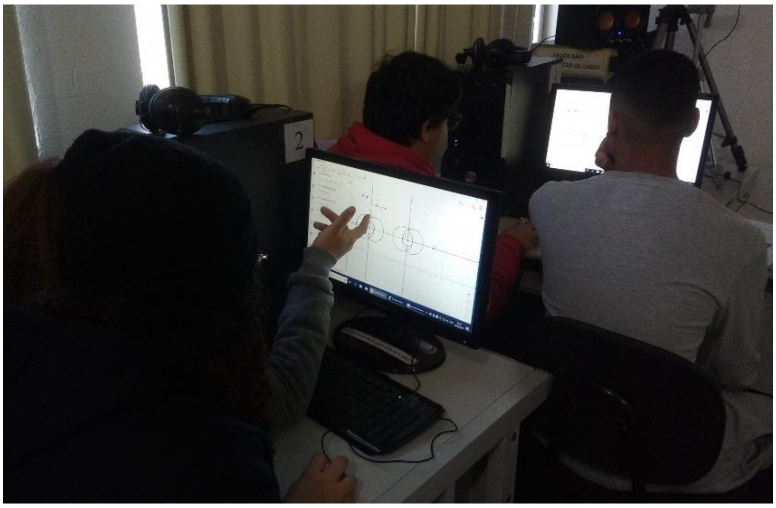
Figura 36 - Etapa final da construção do quadrado no GeoGebra pela dupla D2



Fonte: Dados da pesquisa.

Até esse momento final, a dupla D2 havia chegado à construção expressa na figura 36. Nesse momento, as alunas solicitaram novamente auxílio para confirmar se estava correto. Na figura 37, registramos o exato momento em que elas apontavam para a tela do computador, ao apresentar suas dúvidas.

Figura 37 - Construção do quadrado no GeoGebra pela dupla D2.



Fonte: Dados da pesquisa.

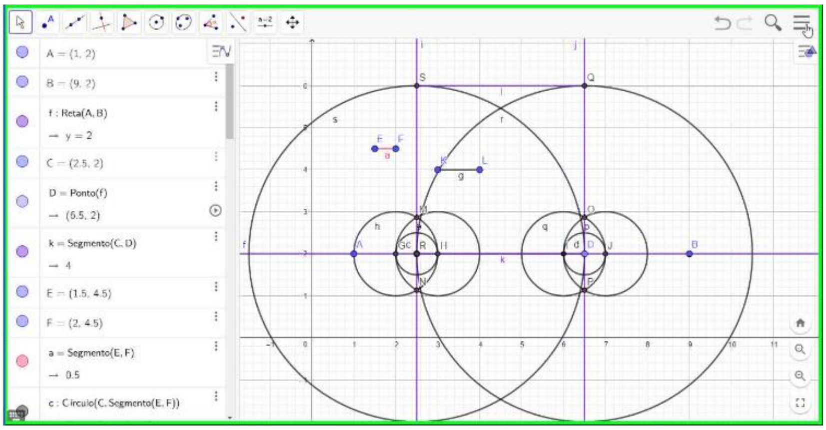
A dúvida das alunas era sobre como continuar a construção, ou seja, como determinar os demais lados do quadrado. Então o professor Márcio auxiliou as duas e captamos o diálogo através do gravador de voz do computador da dupla.

> *Bia: Professor, está certo?*
> *Prof. Márcio: hmm*
> *Bia: Estamos em dúvida aonde...*
> *Prof. Márcio: Como vocês chegaram nisso?*
> *Bruna: Colocamos um ponto aqui e depois um ponto aqui.*
> *Prof. Márcio: Do nada?*
> *Bruna: É...*
> *Bia: Mas eu falei pra ela que era para pegar a mesma coisa disso aqui...*
> *Prof. Márcio: Vocês têm que levar essa medida pra cá.*
> *Bia: Ah sim!*
> *Bruna: Mas é isso tudo?*
> *Bia: Aí vai ter que pegar daqui desse ponto até esse ponto.*
> *Bruna: (voz de surpresa e risos)*
> *Prof. Márcio: Isso! Agora, essa distância aqui é esse tamanho aqui.*
> *Bia: Aaaah!*
> *Professor Márcio: Você irá fazer a mesma coisa do lado de cá.*
> *Bia: Então eu pego o ponto (ferramenta) e coloco o ponto aqui (interseção)*
> *(o professor Márcio se afastou e elas continuaram)*
> *Bruna: Agora sou eu!*
> *Bia: Mas então devemos retirar esse trem daqui.*
> *Bruna: Pra quê?*
> *Bia: Pega o compasso e coloca daqui até aqui... e agora coloca aqui. Agora ligamos um ponto ao outro.*
> *Bruna: Reta? E agora?*
> *Bia: Esse é o quadrado!*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 07/06/2019).

Bia e Bruna sempre demonstravam interesse pelas tarefas desenvolvidas, participativas, assim que surgia alguma dúvida, solicitavam auxílio. Durante toda a tarefa, a dupla demonstrava estar à vontade com o computador e o *software*. Além disso, a construção do quadrado já tinha sido realizada pela dupla, da mesma forma, na tarefa anterior, porém, com os instrumentos de desenho físicos (régua e compasso).

Observamos que o diálogo da dupla, as pistas apresentadas pelo professor e, provavelmente, a construção com régua e compasso na tarefa 2 permitiram que Bia e Bruna conseguissem finalizar a construção do quadrado, conforme registrado na figura 38.

Figura 38 - Construção do quadrado finalizado pela dupla D2



Fonte: Dados da pesquisa (imagem obtida por meio do Gravador de Passos do Windows).

Como mencionado anteriormente, essa foi a primeira dupla que construiu o quadrado no GeoGebra. Observamos que o diálogo entre as alunas (exibido anteriormente) foi essencial e, ainda, verificamos que elas intercalavam o comando do *mouse* do computador. Além disso, elas auxiliaram os colegas próximos. Dessa forma, o fato de a dupla D12 ter conseguido realizar rapidamente a construção apresenta indícios de que a fase de preparação (tarefas 1 e 2) foi muito importante para iniciar o trabalho com o GeoGebra.

Nessa tarefa, os alunos tiveram o primeiro contato com o *software* e se mostraram surpresos com suas possibilidades. Embora algumas duplas tenham demonstrado dificuldades na construção (percebidas tanto nas observações do diário de campo quanto no próprio registro das duplas), quase todos chegaram à construção final do quadrado, sozinhos ou com o auxílio dos professores e dos colegas. O professor Márcio esteve presente durante todas as aulas, auxiliando a turma, mesmo quando muitas duplas solicitavam ajuda ao mesmo tempo.

Paralelamente, observamos três posicionamentos diferentes das duplas em relação ao GeoGebra: (1) aquelas que se arriscavam, faziam testes e/ou dialogavam; (2) aquelas que constantemente solicitavam auxílio da professora; e (3) aquelas que pareciam ter medo ou desinteresse de usar as ferramentas[79]. As duplas que se arriscavam pareciam estar cientes da possibilidade de apagar figuras, refazer ou abrir uma nova janela de visualização

[79] Esses posicionamentos foram percebidos tanto em casos nos quais o aluno parecia ter compreendido as noções básicas de Geometria, quanto na situação inversa (quando parecia não ter compreendido). Ou seja, nos pareceu se tratar mais de uma atitude frente ao *software* e à tarefa proposta que um posicionamento influenciado pela facilidade ou dificuldade em compreender as noções matemáticas envolvidas.

do GeoGebra, faziam revezamento quanto à utilização do *mouse* e pareciam muito à vontade com a máquina. Outra característica percebida foi que essas duplas conversavam sobre a atividade, tanto ao realizar as construções no GeoGebra, quanto ao realizar os registros no caderno. As duplas que se comportavam assim, como Bia e Bruna (D2), pareciam começar a desenvolver uma fluência tecno-matemática com essa tarefa, ou seja, habilidades técnicas com a máquina, e habilidades matemáticas (JACINTO; CARREIRA, 2017) que podem ter sido alcançadas devido ao trabalho desenvolvido nas tarefas 1 e 2. Além disso, as duplas que apresentavam essas características solicitavam a presença do professor para mostrar uma construção e/ou confirmar se estava realmente correta, ou, ainda, para esclarecer dúvidas relacionadas a algum conhecimento matemático que faltava para concluir a construção (como podemos perceber do diálogo de Bia e Bruna).

As duplas que solicitavam frequentemente a presença do professor encontravam alguns empecilhos para realizar a tarefa, como: dificuldades quanto à utilização das ferramentas e quanto à compreensão de termos geométricos. Essas duplas dificilmente realizavam alguma construção totalmente sozinhas e se arriscavam pouco, ou seja, nem sempre tentavam compreender algo a partir de tentativas. Duas duplas pareciam ter receio de utilizar o computador ou algum desinteresse com a tarefa. Essas duplas realizavam as construções apenas quando incentivadas, não solicitavam auxílio e demonstravam dificuldades em localizar ferramentas no GeoGebra.

Esses posicionamentos fazem com que as duplas estejam em momentos diferentes da tarefa e, como os alunos não receberam nenhum tipo de formulário com direcionamentos, algumas duplas, quando finalizavam as tarefas, ficavam dispersas. Nossa proposta é que os alunos sejam conduzidos pelo professor, mas que também tenham liberdade e tempo para exploração. Por um lado, a tarefa exige mais do professor, que, com uma classe de muitos alunos, pode enfrentar inúmeras situações. Por outro lado, os alunos têm mais tempo para dialogar e explorar as figuras.

É importante ressaltar que não foi possível atender todas as solicitações dos alunos durante as tarefas, mesmo com o apoio do professor Márcio, entretanto, muitos alunos se ofereciam para apoiar outros colegas.

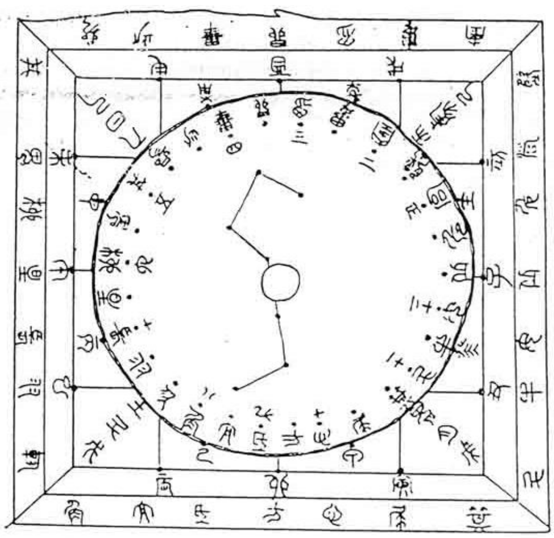
4.4 Tarefa 4 - O círculo e a circunferência

Realizamos mais uma “viagem no tempo”, dessa vez para a China (Apêndice F). Nosso intuito foi abordar o círculo e a circunferência, assim como distingui-los, a partir de uma perspectiva histórica na qual o conhecimento matemático é desenvolvido por um povo, não de modo abstrato ou restrito à própria Matemática, mas como intrinsecamente articulado com práticas sociais fundamentais para tal cultura, no caso, a cosmovisão da mesma. Embora, na tarefa 3, as duplas já tivessem trabalhado com o círculo (e a circunferência) no GeoGebra a partir da ferramenta “Compasso”, ainda não tínhamos apresentado a importância dessa figura para outras civilizações e nos “Elementos”.

Inicialmente, comentamos com os estudantes que o círculo é uma figura muito presente na obra de Euclides e que a estávamos utilizando muito nas nossas construções. Paralelamente, mostramos novamente aos alunos duas traduções antigas de “Elementos” que possuem em suas páginas algumas construções com o compasso, enfatizando os círculos.

Explicamos à turma oralmente e por imagens (uma delas é a figura 39) que, muito antes de Euclides, várias civilizações utilizavam os círculos, dentre eles, a China. Comentamos com os estudantes que as origens do interesse chinês pelo círculo estão relacionadas com a astronomia e, por meio dela, com a natureza divina do céu, das estrelas e o movimento dos objetos celestes. A figura a seguir mostra a representação de um antigo calendário chinês que possui formas quadrangulares e circulares.

Figura 39 - Representação de um antigo calendário chinês.



Fonte: http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado.

Segundo a antiga astronomia chinesa, o quadrado pertence à Terra e o círculo ao Céu[80]. No século III a. C., na dinastia *Zhou*, é produzido um texto chamado *Zhoubi* no qual *Shang Gao*, um sábio, conversa com o duque de *Zhou* e diz que "o quadrado pertence à Terra, e o círculo pertence ao Céu. O Céu é um círculo e a Terra é o quadrado. Os números do quadrado são básicos e o círculo é produzido a partir do quadrado"[81]. Neste ponto, destacamos o fato de o conhecimento matemático circular entre distintas culturas, mesmo naquela época, com todas as dificuldades de deslocamento e comunicação. Reforçamos a ideia de que os "Elementos" foram construídos a partir de conhecimentos oriundos de distintas culturas. Infelizmente, nesse dia, os alunos estavam muito dispersos, muitos estavam realizando construções no GeoGebra. Além disso, na sala ao lado do laboratório de informática, havia um som muito alto devido a um projeto que ocorreu na escola e, por essa razão, muitas vezes era difícil falar e ser ouvida. Essa situação impactou no desenvolvimento da tarefa, mesmo assim, continuamos com o trabalho.

Como já tínhamos estudado sobre os quadrados nas tarefas anteriores, comentamos com os alunos sobre as diferenças entre círculo e circunferência, e alguns de seus elementos, procurando relacioná-los às ideias de Euclides[82], como um caminho para as próximas construções. Essa relação entre os elementos dos círculos e circunferências e as ideias de Euclides ocorreu a partir de plaquinhas com as definições de círculo e diâmetro, e com o postulado 3[83], todas originadas do Livro I de Euclides. Por exemplo, antes de iniciar as construções no GeoGebra, dissemos que Euclides escreveu que "com todo centro e distância, é possível descrever um círculo" (Postulado 3) e que "o ponto é chamado de centro do círculo" (definição 16). Essas ideias de Euclides estão intrínsecas em três ferramentas do GeoGebra: "Círculo dados centro e um dos seus pontos"; "Círculo dados centro e raio"; e "Compasso". Todas essas ferramentas foram utilizadas pelos alunos nesse momento da tarefa, para que as conhecessem e estudassem os elementos de um círculo (o centro, o raio e o diâmetro).

Esse momento da tarefa, de fato, foi necessário para que os alunos pudessem conhecer e/ou relembrar os elementos dos círculos e das circunferências, assim como saber diferenciá-los. Ao comentar com eles sobre a abertura do compasso, dissemos que, a partir

---

[80] Ver mais em http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado.

[81] Mazza, s/d, ver em: https://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado.

[82] Mostramos aos alunos como Euclides determinou o círculo "com todo centro e distância, descrever um círculo" (Postulado 3, BICUDO, 2009, p. 98).

[83] E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

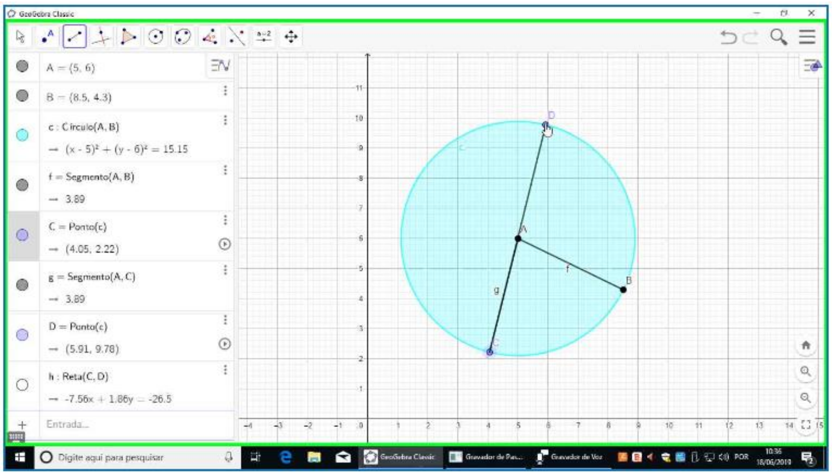
daquele momento, iríamos usar outro termo para nos referir a essa abertura, e uma aluna, que não foi identificada, mencionou a palavra raio.

> *Prof. Thais: Vocês acham que é possível construir outros raios aqui?*
> *Alguns alunos: Sim!*
> *Prof. Thais: Então, façam a construção de mais alguns raio aí!*
> *Alice (D12): É pegar o segmento e colocar do centro até a borda.*
> *Mari (D10): Não dá! Não dá não!*
> *João (D6): Dá! Dá! Professora, olha aqui!*
> *Melissa (D12): Ah! Dá sim!*
> *(houve uma interrupção desse momento, pois a turma recebeu um recado da supervisora através de um colega)*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 18/06/2019).

Ressaltamos que várias duplas solicitavam que suas construções fossem verificadas. O equipamento de Datashow estava ligado e mostrávamos algumas imagens, no entanto, não queríamos influenciá-los a realizar construções idênticas às visualizadas na tela e, portanto, mostrávamos a figura de um círculo com o raio, por exemplo, apenas após esperar que ao menos tentassem construí-los sozinhos. Dessa forma, esse recurso tecnológico foi um suporte para o desenvolvimento das tarefas. É por essa razão que esse tipo de trabalho demanda mais tempo e o professor se movimenta mais pela sala para atender as inúmeras solicitações dos alunos, seja para mostrar e/ou confirmar se a construção estava correta, ou para expressar dificuldades quanto ao uso do computador ou das ferramentas do *software*.

Nesse momento, também mostramos a diferença entre círculo e circunferência. Para isso, usamos as configurações de objeto do *software* para alterar as cores, de modo que percebessem a definição de Euclides sobre o círculo: “uma figura plana contida por uma linha que é chamada de circunferência [...]” (definição 15, BICUDO, 2009, p. 97). A figura 40 é uma captura da primeira construção no GeoGebra nessa tarefa.

Figura 40 - Construção de um círculo pela dupla D15.



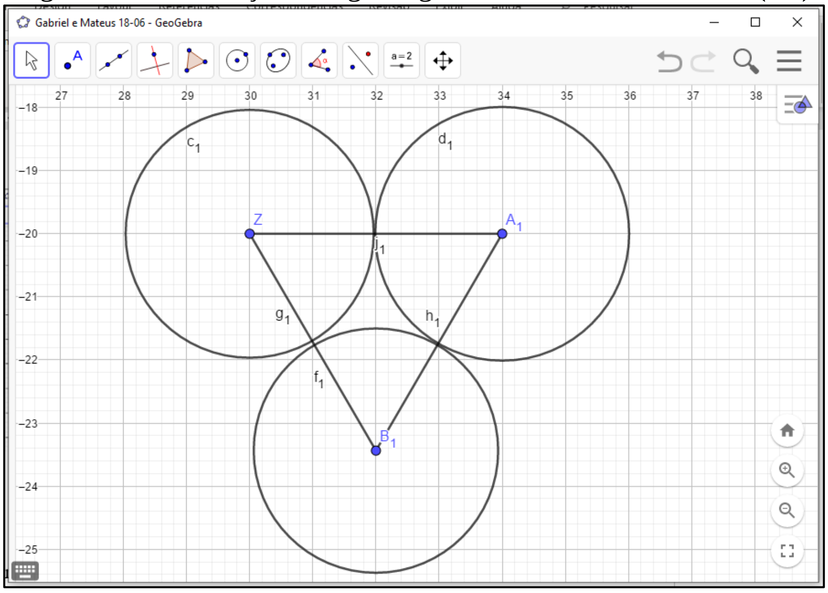
Fonte: Dados da pesquisa (imagem obtida por meio do Gravador de Passos do Windows).

Como mencionado anteriormente, procurávamos associar cada objeto geométrico inserido nessa construção com as definições e postulado de os “Elementos”. Em relação ao diâmetro, também mostramos aos alunos como Euclides o definiu em sua obra: “é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência dos círculos, e que corta o círculo em dois” (BICUDO, 2009, p. 98). Assim como as outras definições, essa também foi colada na parede, para que os alunos a visualizassem ao longo do trabalho. Em seguida, a partir da construção da figura 31, perguntamos aos alunos qual é a relação entre o raio e o diâmetro.

> *Davi (D14): É porque o raio é a medida do ponto, por exemplo, do ponto D ao ponto B, e outro é... passando pelo meio.*
> *Tales (T8): O raio fica só pela metade.*
> *Tadeu (T8): O raio é a metade.*
> *Professora: É a metade de quê?*
> *Duda (D12): Do diâmetro!*
> *Professora: Muito bem! E qual é então a medida do diâmetro?*
> *Lara (D5): Dois raios.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 18/06/2019).

Para finalizar, dissemos aos alunos que Euclides construiu várias figuras a partir dos raios de circunferências, e propusemos a eles que construíssem figuras geométricas com raios. Nosso intuito era aproximá-los das construções de Euclides que seriam trabalhadas nas próximas tarefas. A figura 41 mostra um desenho construído pelas alunas Bia e Bruna (D2).

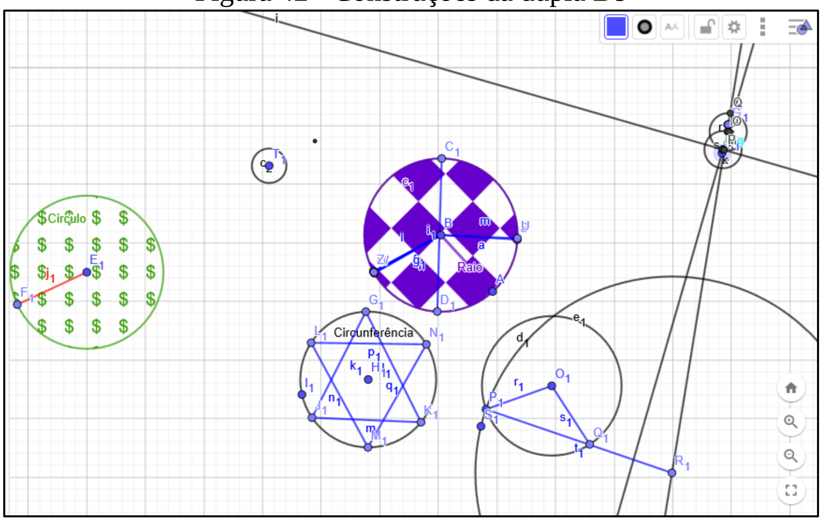
Figura 41 - Construção de figuras geométricas utilizando raios (D2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta figura, as alunas construíram um triângulo a partir de circunferências e tentaram fazer com que seus lados fossem apenas raios. A dupla se aproximou muito da proposta, porém, ao aumentar a figura na janela de visualização, observamos que não houve interseção entre as circunferências e isso foi discutido com elas. Entretanto, foi a única dupla que chegou a utilizar mais de duas circunferências para construir polígonos, pois as demais duplas ou utilizaram apenas uma circunferência, e nela construíram desenhos, ou fizeram desenhos geométricos padronizados com muitas circunferências, esquecendo-se dos raios. Por exemplo, Lívia e Lúcia (D9) construíram vários círculos e traçaram neles alguns segmentos como raios e cordas.

Figura 42 - Construções da dupla D9



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa dupla usou a mesma janela de visualização durante toda a tarefa, as outras duplas geralmente criavam um novo arquivo para cada etapa da tarefa 4. Podemos perceber também que Lívia e Lúcia encontraram outras funções e exploraram (ou brincaram) mais uma parte artística do *software.*

Esperávamos que alguns alunos pudessem se lembrar da construção do quadrado, pois utilizamos o raio da circunferência para finalizar essa construção (ver figura 38). Entretanto, os alunos tiveram poucos minutos para realizar essa parte da tarefa, e as interferências externas, nesse dia, podem ter interferido nos resultados. Além disso, o círculo, a circunferência, raio e diâmetro foram as figuras geométricas mencionadas frequentemente durante essa tarefa, sendo enfatizada sua importância no trabalho de Euclides e para a civilização chinesa. Talvez esses sejam alguns dos motivos de as duplas não mencionarem sobre o lado do quadrado.

A tarefa 4 foi desenvolvida com muitas situações que geralmente são comuns em uma escola. Como nossa pesquisa de campo foi desenvolvida durante o horário normal de aula e com toda a classe presente, tivemos que lidar com inúmeras situações. Entretanto, nosso objetivo principal foi abordar os círculos e as circunferências, além de raio e diâmetro, pois essas figuras estariam nas construções dos triângulos, durante as próximas tarefas.

4.5 Tarefa 5 - Construção do triângulo isósceles e a exploração da proposição 3 do Livro I

Após os alunos conhecerem algumas ferramentas do GeoGebra na tarefa anterior, em especial, o “Compasso”, propusemos a construção de triângulos e a exploração de algumas de suas propriedades. A partir dessa tarefa (Apêndice G), começamos a estimular os alunos a explorarem alternativas de construção. Para isso, fizemos algumas perguntas para que pudessem registrar como haviam realizado uma construção e o porquê. Ao longo do trabalho no laboratório, mantivemos pequenos cartazes com as “ideias de Euclides” (definições do Livro I de os “Elementos”) colados na parede da sala desde a tarefa 3.

Iniciamos com a apresentação de um breve vídeo[84] que aborda o interesse dos povos antigos pelo triângulo. Ao assistir às gravações desse momento, observamos duplas que pareciam atentas ao vídeo, e outras que conversavam entre si, aparentemente, não se interessando pelo mesmo.

Após o término do vídeo, comentamos que uma forma geométrica tão importante para vários povos antigos não poderia faltar na obra de Euclides. Assim, vários tipos de triângulos foram colados na parede (figura 43), para que pudéssemos analisar suas características.

Figura 43 - Triângulos fixados na parede

Fonte: Dados da pesquisa.

Antes de colar os triângulos no quadro, comentamos que gostaríamos que mencionassem o que sabiam sobre algumas figuras. Quando afixamos as primeiras figuras, uma pequena discussão foi iniciada:

> *Dara (D12): Olha um triângulo... outro triângulo.*
> *Davi (D14): Um triângulo isósceles... um triângulo perpendicular.*
> *Leo (D3): Um triângulo retângulo!*
> *Algumas duplas ao mesmo tempo: São triângulos.*
> *Dara (D12): É tudo triângulo, só que as vezes ele é achatado.*
> *Davi (D14): São triângulos diferentes.*
> *Diego (D14): De tamanhos diferentes.*
> *Prof. Thais: Então são todos triângulos?*
> *Davi (D14): É.*

---

84 Utilizamos alguns trechos do vídeo disponível em https://youtu.be/dsjiWChrjE4 . O vídeo teve duração de 4min40s. Em síntese, mostra a confecção dos papiros – algo que chamou a atenção dos alunos, pois na tarefa 1 o papiro havia sido mencionado – e apresenta os primeiros registros com estudos sobre os triângulos, encerrando com uma breve menção a Tales de Mileto sobre a medição da altura das pirâmides, usando relações existentes entre tais figuras.

Prof. Thais: Vocês têm certeza?
Algumas duplas ao mesmo tempo: Sim!
Prof. Thais: Muito bem! É isso mesmo! Vocês sabiam que quando as crianças estão começando a aprender sobre figuras geométricas elas acham que só existe um tipo de triângulo e quando visualizam esses triângulos aqui (apontando para triângulos com um dos ângulos muito pequenos ou muito grandes) não o reconhecem como triângulos? E o que uma figura precisa ter para ser um triângulo?
Davi (D14): Três lados iguais.
Leo (D3): (completando a frase do colega anterior) Iguais.
Prof. Thais: Sempre iguais?
Algumas duplas ao mesmo tempo: Não.
Prof. Thais: E o que mais? (depois de um tempo de respostas) a figura precisa ter três ângulos também.
Leo (D3): Claro!
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 25/06/2019).

Esse momento nos permitiu conhecer um pouco sobre o que as duplas sabiam dos triângulos. Na parede, colamos vários tipos de triângulos (ver figura 43). Observamos menções a dois tipos de classificação dos triângulos: quanto aos lados, quando Davi (D14) menciona que viu um triângulo isósceles; e quanto aos ângulos, quando Leo (D3) disse que um dos triângulos era retângulo. Analisando os vídeos, observamos que quando Davi menciona que também havia um “triângulo perpendicular”, imediatamente Leo menciona o termo “triângulo retângulo”. Talvez a fala anterior do colega tenha feito com que se lembrasse que o triângulo retângulo tem esse nome por possuir um ângulo reto e retas perpendiculares formam ângulos retos, ou, ainda, isso esteja relacionado aos seus conhecimentos adquiridos em anos anteriores. Não houve comentários sobre os triângulos mais “achatados”. Instantes depois, ao apontar para um deles e perguntar se aquela figura era realmente um triângulo, alguns alunos confirmaram e enfatizaram: “todos são triângulos!”.

Em seguida, dissemos aos alunos que nessa tarefa aprenderíamos a construir um triângulo isósceles. Perguntamos às duplas se saberiam dizer o que era um triângulo isósceles. Os alunos não responderam imediatamente, percebemos alguns com receio de falar, outros estavam realizando algumas construções no GeoGebra. Após insistir um pouco, alguns responderam:

Dara (D12): É um triângulo que tem os lados diferentes um do outro
Duda (D12): É aquele que parece um chapeuzinho de festa né não?
Prof. Thais: Qual desses aqui você acha que parece com ele? (apontando para os triângulos na parede)
Duda (D12): É aquele ali.

> *Prof. Thais: Então, quais são as características de um triângulo isósceles? O que vocês observam?*
> *Dara (D12): Três lados iguais, não é não?*
> *Dura (D12): Não é não.*
> *Naty (D15): Tem três pontos.*
> *Tales (T8): Tem dois lados iguais.*
> *Tadeu (T8): Tem dois ângulos iguais.*
> *Davi (D14): Aqui professora nós fizemos um triângulo. (no GeoGebra utilizando apenas segmentos)*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 25/06/2019).

Em seguida, com o auxílio de um DataShow, iniciamos a construção do triângulo isósceles no GeoGebra, destacando alguns momentos. Por exemplo, inicialmente, pedimos que construíssem dois segmentos de tamanhos diferentes e, para isso, exibimos uma tela com exemplos de dois segmentos. Após cada momento da construção, perguntamos aos alunos que definições (o termo usado com os alunos foi "ideias"[85]) de Euclides estavam relacionadas às figuras geométricas. Os alunos apontaram para as definições de ponto, superfície e círculo que estavam coladas na parede.

Ao utilizar uma ferramenta no GeoGebra, é preciso compreender as propriedades do objeto geométrico para construir a figura desejada, apesar de o *software* informar como usar a ferramenta[86]. Observamos que após selecionar a ferramenta necessária, algumas duplas apresentavam dificuldades e solicitavam auxílio para realizar a construção na janela de visualização. Se tivéssemos realizado a construção do triângulo isósceles junto com os alunos (mostrando a imagem pelo DataShow), talvez tivessem realizado a construção de forma mais rápida, pois foi um momento da tarefa que durou cerca de 35 minutos. Porém, perderíamos a oportunidade de as duplas descobrirem sozinhas o funcionamento e as propriedades intrínsecas de cada ferramenta, além de aprender por elas mesmas. Dessa forma, queríamos possibilitar um "trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 62). Sendo assim, os *softwares* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra, são bons aliados nesse processo. Esses *softwares* se diferenciam do lápis e do papel não só pela possibilidade de manipular objetos geométricos, mas pelo potencial de promover um ambiente no qual podem surgir várias formas de pensar (GRAVINA, 2001). O GeoGebra é, então, um caminho para descobertas, mas, para promover um ambiente de descobertas, os estudantes precisam se aproximar do

[85] Discuta brevemente por que usar um termo mais simples.
[86] Explique melhor. Como o GeoGebra informa como usar as ferramentas?

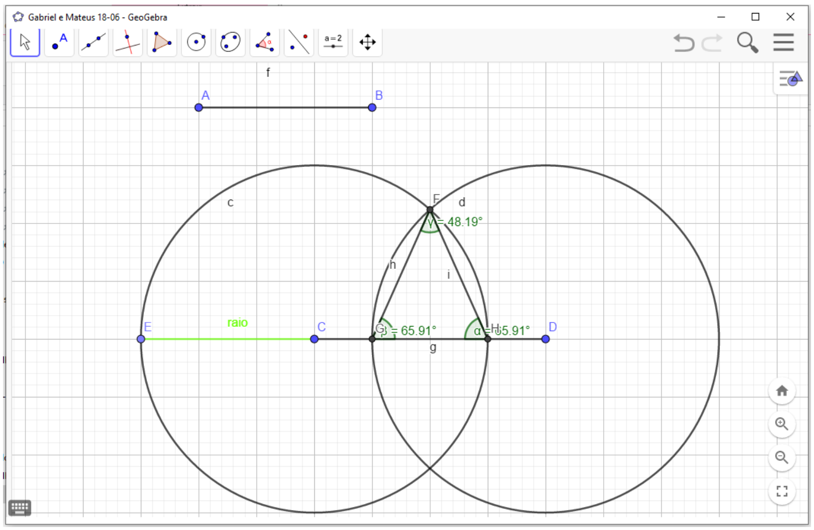
processo de criação da Matemática, ou seja, precisam ter características do “pensar matemático” (GRAVINA, 2001). Lingefjard (2011) considera que esses *softwares* possibilitam, através da visualização e manipulação de figuras, a exploração e a verificação de conjecturas. Portanto, é necessário que os alunos tenham tempo, espaço e, principalmente, autonomia para utilizá-los.

Diante disso, desde o início do estudo, nossa intenção era fugir de um passo a passo de construção a ser seguido, pois queríamos que os alunos pudessem desenvolver uma autonomia quanto às construções e na busca por conhecimento. Mesmo assim, nesse momento, alguns caminhos foram mostrados aos alunos, pois era a primeira construção na qual a ferramenta “Compasso” seria utilizada como um transporte de segmento[87]. Acreditamos que, para que os alunos chegassem a uma construção geométrica de forma autônoma, precisariam de um “ponto de partida”, um apoio, para que não ficassem perdidos, sem saber como começar, pois essa seria a primeira construção de um triângulo no *software*.

Esse processo foi muito importante para que as duplas, nas próximas tarefas, pudessem estar mais familiarizadas com as ferramentas do GeoGebra e suas particularidades geométricas. Por exemplo, a figura 44 apresenta a construção final do triângulo isósceles pelos alunos João e Joaquim (D6). Na figura, os alunos utilizaram as ferramentas “Segmento”, “Compasso” e “Ponto”, para a construção do triângulo isósceles, e a ferramenta “Ângulo”[88], para destacar as medidas dos ângulos.

[87] Na tarefa 2, trabalhamos o transporte de segmento, quando os grupos deveriam construir quadrados congruentes, utilizando uma régua não graduada e um compasso.
[88] A ferramenta “Ângulo” foi descoberta por algumas duplas durante a construção do triângulo, pois em nenhum momento da aula mencionamos sobre ela (fizemos isso na tarefa 6).

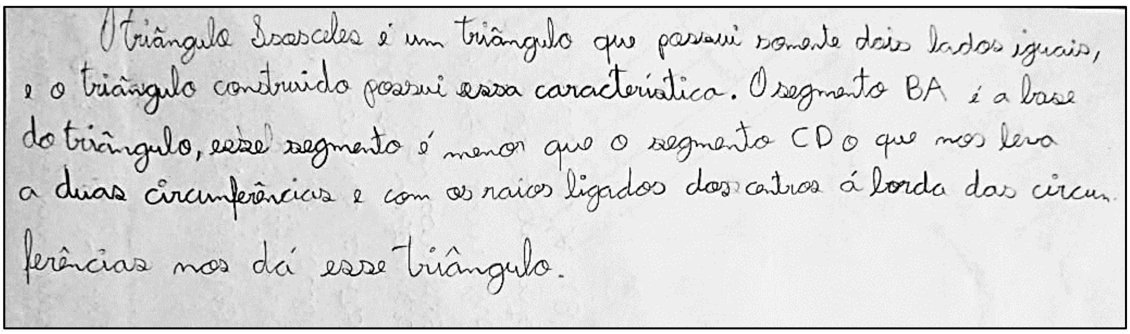
Figura 44 - Construção do triângulo isósceles pela dupla D6



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, por algum motivo, os alunos destacaram o raio da circunferência na figura. Além de construir o triângulo, nossa intenção era levar as duplas a compreenderem que seus lados eram raios e que os lados iguais do triângulo isósceles teriam a mesma medida, já que eram raios de circunferências iguais. Dessa forma, após a construção do triângulo isósceles, solicitamos aos alunos que explicassem por que sua construção final gerou esse tipo de triângulo. As respostas, em sua maioria, foram de justificativas relacionadas às ferramentas e aos passos utilizados, apenas uma dupla mencionou a palavra "raio" como sendo o lado dessa figura (figura 45). Entretanto, essa foi a primeira oportunidade de escreverem uma justificativa sobre a construção, e muitas duplas fizeram justificativas mais longas do que era previsto.

Figura 45 - Justificativa das alunas Lívia e Lúcia (D9)

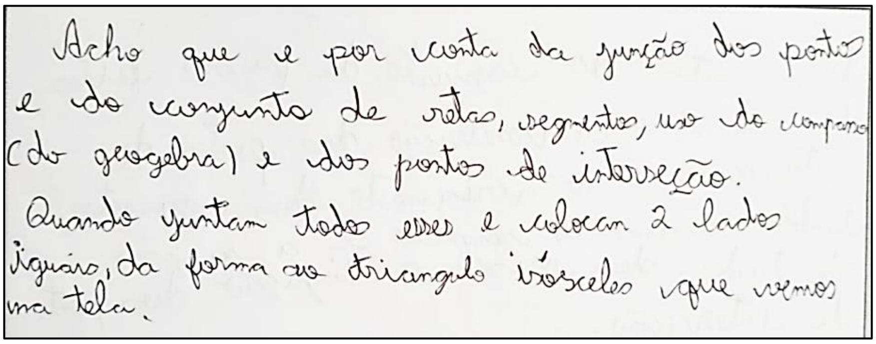

O triângulo Isosceles é um triângulo que possui somente dois lados iguais, e o triângulo construído possui essa característica. O segmento BA é a base do triângulo, esse segmento é menor que o segmento CD o que nos leva a duas circunferências e com os raios ligados dos centros à borda das circunferências nos dá esse triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Lívia e Lúcia utilizaram alguns conceitos matemáticos para justificar a construção do triângulo isósceles. Esperávamos que as duplas utilizassem termos matemáticos até então estudados, principalmente o termo “raio”, que seria o responsável por criar os lados das figuras geométricas. Com isso, podemos perceber que a dupla mencionou termos como “segmento BA”, “base do triângulo” e “raios”, que são indícios de que realizaram conjecturas, baseadas nas construções, para justificar a sua construção.

Por outro lado, conforme mencionado nos parágrafos anteriores, a maioria das duplas justificou a construção a partir das ferramentas utilizadas no GeoGebra. Na figura 46, temos o registro das alunas Lara e Luna (D5), que achavam ter chegado à construção do triângulo isósceles por causa do conjunto de ferramentas que utilizaram.

Figura 46 - Justificativa das alunas Lara e Luna (D5)



Acho que e por conta da junção dos pontos
e do conjunto de retas, segmentos, uso do compasso
(do geogebra) e dos pontos de interseção.
Quando juntam todos esses e colocam 2 lados
iguais, da forma ao triangulo ísosceles que vemos
na tela.

Fonte: Dados da pesquisa.

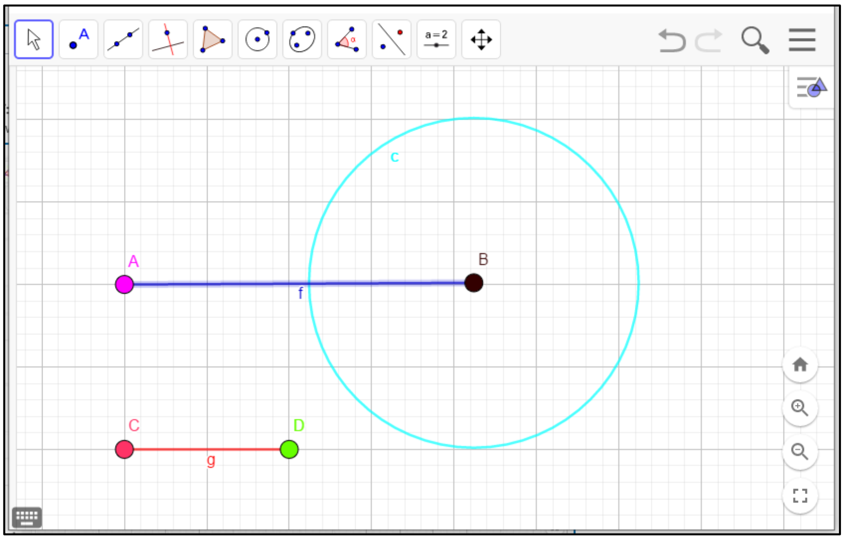
Outras duplas, como Bia e Bruna (D2), utilizaram como justificativa o fato de terem utilizado as ferramentas para gerar figuras que formassem um triângulo, além disso, mencionaram mais elementos de um triângulo ao registrarem, por exemplo: “com dois lados iguais”, “3 vértices” e “ângulos”. Já os alunos Davi e Diego (D14), que utilizaram a ferramenta ângulo para destacar os ângulos (assim como a dupla D6, figura 45), usaram o termo “porque medimos o ângulo e deu dois lados iguais” para justificar a construção do triângulo isósceles. Acreditamos que o uso da ferramenta “Ângulo”, nesse momento, influenciou a resposta dos alunos, porém, foi uma ferramenta “descoberta” por alguns alunos, ao explorar o *software*, numa ação que consideramos importante e positiva, pois queríamos que, cada vez mais, tivessem a autonomia de exploração tanto do aspecto técnico do computador e do GeoGebra, quanto do aspecto conceitual de figuras geométricas.

Nesse momento da tarefa, exploramos apenas algumas definições da obra “Elementos”. Entretanto, essa construção foi o ponto de partida para chegar à primeira proposição do Livro I de os “Elementos”, proposta na tarefa 6, pois queríamos que os alunos desenvolvessem mais algumas habilidades com as ferramentas “Compasso”e “Reta”, e que pudessem compreender como os raios das circunferências seriam utilizados na construção de figuras geométricas, para que, sozinhos, pudessem chegar à construção do triângulo da proposição I (o triângulo equilátero).

Ao longo da tarefa 5, exploramos também a proposição 3 do Livro I: “dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor”. (BICUDO, 2009, p. 100). A proposição 3, apesar de não estar diretamente relacionada aos triângulos, foi utilizada na tarefa para explorar o transporte de segmento.

Com essa proposição, nossa intenção era reforçar o trabalho com o transporte de segmento, utilizando a ferramenta “Compasso”, e promover maior autonomia por parte dos alunos em relação ao *software*. Solicitamos que os alunos, sozinhos, construíssem dois segmentos e que destacassem, do maior deles, um outro segmento igual ao menor. Inicialmente, eles apresentaram dúvidas quanto à tarefa e foi necessário explicar com mais detalhes a nossa proposta de construção. A seguir, apresentamos a construção da dupla D17.

Figura 47 - Construção da proposição 3 pela dupla D17

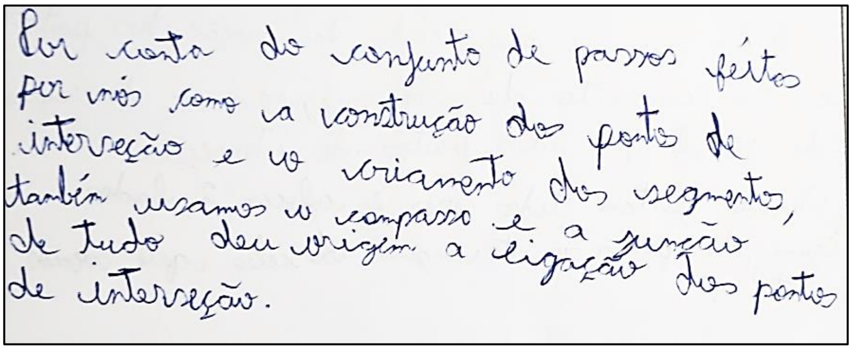


Fonte: Dados da pesquisa.

Quando propusemos aos alunos que, a partir de dois segmentos (um maior que o outro), destacassem no segmento maior um segmento igual ao menor, queríamos que as duplas, sozinhas, realizassem a construção a partir de tentativas e utilizando os segmentos e a ferramenta “Compasso”. Em geral, a maioria das duplas conseguiu concluir essa tarefa, algumas sem auxílio, enquanto outras solicitaram ajuda. Na figura 47, Camila e Cássia (D17) construíram os segmentos AB e CD menor que AB, e realizaram a construção corretamente. Contudo, deixaram de evidenciar com uma outra cor o que correspondia ao segmento CD em AB.

Após a construção, pedimos às duplas que explicassem como fizeram o processo e por que chegaram a essa construção. Além disso, pedimos que colassem as definições de Euclides que, para eles, estavam presentes na construção[89]. As alunas Lara e Luna (D5) ainda explicaram a construção da figura pelo conjunto de ferramentas (ou passos) necessário para a execução da tarefa (figura 48).

Figura 48 - Justificativa das alunas Lara e Luna (D5)

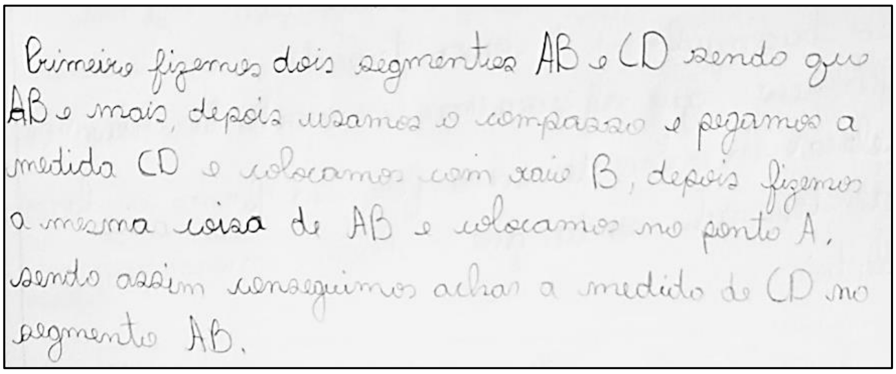

Por conta do conjunto de passos feitos
por nós como a construção dos pontos de
interseção e o criamento dos segmentos,
também usamos o compasso e a junção
de tudo deu origem a ligação dos pontos
de interseção.

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria das duplas conseguiu realizar a construção da proposição 3 no GeoGebra. Entretanto, muitos deixaram de mencionar, ou mencionaram pouco, elementos geométricos como raios, segmentos, dentre outros, nas suas justificativas. Por exemplo, as alunas Dara e Duda (D12) apresentaram mais elementos em suas justificativas (figura 49).

[89] Todas as duplas receberam um conjunto de etiquetas com todas as definições de Euclides visualizadas desde o início das tarefas. Essas etiquetas, quando solicitadas, eram coladas em alguma região abaixo dos seus registros.

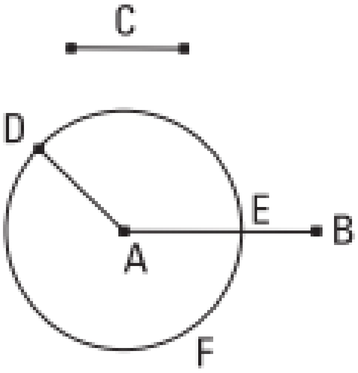
Figura 49 - Justificativa das alunas Dara e Duda (D12)[90]



Fonte: Dados da pesquisa.

Na proposição 3 do livro I de “Elementos”, Euclides escreve como se deve iniciar a construção, apresentando: “sejam as duas retas desiguais dadas AB, C, das quais seja maior a AB; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual à menor C” (BICUDO, 2009, p. 100); e continua a especificar sobre a construção, ao escrever que: “fique posta no ponto A a AD igual à C; e, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AD, fique descrito o círculo DEF” (BICUDO, 2009, p. 100). A figura 50 apresenta o desenho dessa construção.

Figura 50 - Figura da proposição 3 do livro I de "Elementos"



Fonte: Dados da pesquisa.

Ressaltamos que não apresentamos a figura 50 para os alunos, pois poderia confundi-los, já que em suas construções as duas circunferências ficavam evidentes. A construção correta da proposição 3 não resultava em um registro com todos os elementos.

90 “Primeiro fizemos dois segmentos AB e CD sendo que AB maior, depois usamos o compasso e pegamos CD e colocamos com raio B, depois fizemos a mesma coisa de AB e colocamos no ponto A. Sendo assim conseguimos achar a medida de CD no segmento AB”.

Esperávamos, portanto, que os alunos pudessem registrar suas justificativas com elementos semelhantes a esses, mas as alunas Dara e Duda (12), assim como as duplas D2 e D9, escreveram algo próximo disso.

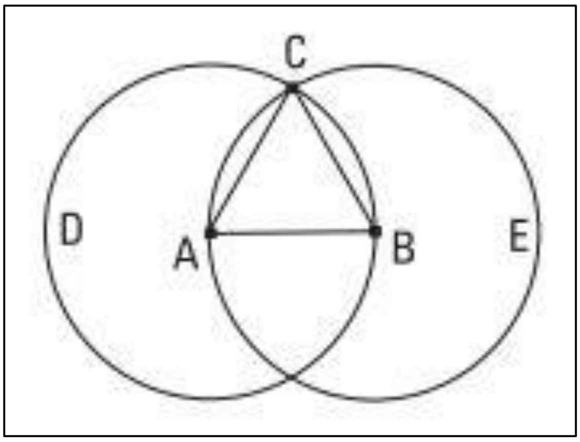
Para finalizar a tarefa 5, mostramos aos alunos como o início da proposição 3 de "Elementos" foi escrita por Euclides: "Sejam duas retas desiguais dadas AB e CD, da qual AB é maior; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual a menor." (BICUDO, 2009, p. 100)[91]. Além disso, dissemos aos alunos que eles tinham se aproximado de um conhecimento que Euclides registrou em sua obra "Elementos" há mais de dois mil anos.

Ressaltamos que, diferentemente das tarefas 3 e 4, os alunos não ficaram muito dispersos, já que, além das construções, eles deveriam realizar as justificativas solicitadas. Esse processo demandou tempo e dedicação e, por essa razão, não houve dupla "ociosa", como aconteceu nas tarefas anteriores.

4.6 Tarefa 6 - A proposição 1 do Livro I: Construção do triângulo equilátero

Na tarefa 6 (apêndice H), propusemos a construção da proposição 1[92] do Livro I de Euclides – "Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (BICUDO, 2009, p. 99)[93] – utilizando a ferramenta "Compasso" do GeoGebra (figura 51):

Figura 51 - Proposição 1. Construir um triângulo equilátero



Fonte: Extraído de Livro 1 de Bicudo (2009, p.99).

[91] Houve uma pequena modificação da frase para ser apresentada aos alunos. Frase original: "Sejam duas retas desiguais dadas AB, C, das quais seja maior a AB; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual à menor [...]".
[92] Proposição 1: Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (BICUDO, 2009, p. 99).
[93] Essa proposição foi apresentada aos alunos exatamente com essa linguagem.

Na figura acima, é possível verificar que os lados do triângulo equilátero são raios das circunferências D ou E, ou ainda, de ambas. Euclides, em seu livro I, utiliza essa construção para demonstrar o triângulo equilátero. Ele apresenta como deve ser realizada a construção e, em seguida, utiliza-se de argumentos extraídos dela para provar a proposição:

> E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas CA foi também provada igual a AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. (BICUDO, 2009, p. 99)

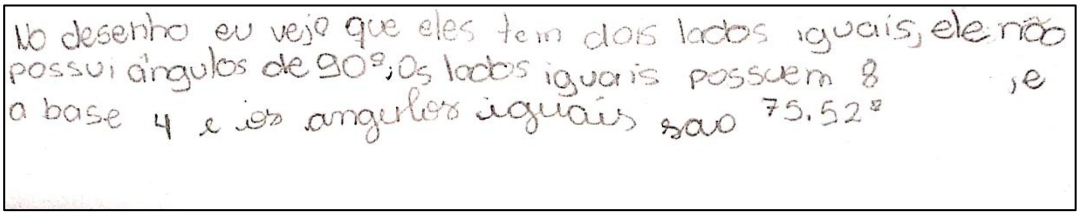
O trecho acima, retirado da obra “Elementos”, mostra uma prova para a congruência dos lados do triângulo equilátero. Nosso propósito era levar os alunos a chegarem próximo, de alguma maneira, dos argumentos que comprovem propriedades do triângulo equilátero, a partir da construção com a ferramenta “Compasso” no GeoGebra. Acreditamos que esse seja um caminho propício para descobertas de propriedades geométricas dos triângulos, e pretendíamos fazer com que as duplas chegassem sozinhas, sem nenhuma intervenção, à construção do triângulo equilátero.

Para isso, inicialmente, retomamos a construção do triângulo isósceles, realizada na tarefa anterior. No triângulo isósceles, dois segmentos foram construídos (cada um com uma medida à escolha da dupla): um representando a sua base (AB) e um segundo (CD) para ser a medida do raio da circunferência que seria construída com o compasso, formando então os outros dois lados do triângulo. Decidimos reformular o início da tarefa 6 para que, além de verificar mais características do triângulo isósceles, pudéssemos fazer com que tivessem mais elementos para chegar à construção do triângulo equilátero.

Com a construção do triângulo isósceles aberta no GeoGebra (realizada na aula anterior), solicitamos que as duplas utilizassem duas ferramentas: a ferramenta “Ângulo”, para medir os três ângulos do triângulo, e a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”, para visualizar as medidas dos lados do triângulo. Esse momento permitiu que as duplas conhecessem mais ferramentas do GeoGebra, enquanto realizavam a atividade, já que nossa proposta, desde o início, era não fornecer um passo a passo de utilização do *software*, e sim, permitir descobertas e também possibilitar a compreensão por tentativas e erros.

Após a identificação das medidas dos ângulos na sua construção, solicitamos que as duplas registrassem o que haviam observado. A figura 52 apresenta um registro da dupla D12.

Figura 52 - Registro 1 da dupla D12


No desenho eu vejo que eles tem dois lados iguais, ele não possui ângulos de 90º; Os lados iguais possuem 8 , e a base 4 e os angulos iguais são 75.52º

Fonte: Dados da pesquisa.

Dara e Duda (D12) registraram os valores encontrados na sua construção, mas ressaltaram uma informação importante: que o triângulo construído não possuía ângulos de 90º. Acreditamos que o momento inicial da tarefa 5, onde apresentamos vários triângulos para eles, inclusive o triângulo retângulo, impactou o registro da dupla.

Na construção do triângulo isósceles, as duplas construíram um segmento CD como medida dos lados iguais do triângulo, e um segmento AB que seria a base desse triângulo. Com isso, o segmento CD é apenas uma referência nessa construção (Ver Apêndice H). Solicitamos às duplas que movimentassem um dos pontos do segmento CD, para que visualizassem diferentes medidas de lados e ângulos do triângulo isósceles.

> *Alice (D16): É quando eu vou aumentando esse U, V, aqui... vão mudando?*
> *Prof. Thais: Sim! Anotem para mim.*
> *Alice (D16): Espera aí, eu tenho que ver se funciona mesmo!*
> *Prof. Thais: Ok!*
> *Alice (D16): Olha! Que tecnologia...*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Nesse trecho, Alice fala sobre os pontos U e V, esses pontos correspondem aos pontos C e D solicitados por nós no início da tarefa. Esse fato fornece indícios de que a dupla estava familiarizada com as nomenclaturas das figuras geométricas, pois não apresentaram dificuldades ao identificar o segmento CD na sua construção.

O trecho anterior representa o momento inicial da tarefa, em que a dupla (D16) parece experimentar, pela primeira vez, a manipulação de um figura construída. Na verdade, essa foi a primeira vez que de fato solicitamos aos alunos que realizassem esse movimento. A manipulação desse triângulo permitiu estudar e explorar suas propriedades. Essa exploração ocorreu a partir da adição de alguns elementos do triângulo (ângulos e medidas dos lados), além de sua movimentação, com o intuito de trabalhar com as proposições 5 (apenas o seu início) e 6 do Livro 1 da obra “Elementos”.

> Proposição 5: Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si [...].
> Proposição 6: Caso dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, os lados que se estendem sob os ângulos iguais também serão iguais entre si. (BICUDO, 2009, p. 102-103)

A partir da movimentação do segmento CD, as duplas destacaram as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo, e registraram algumas observações sobre o triângulo isósceles construído (figura 53).

Figura 53 - Registro 2 da dupla D16

Medida dos ângulos iguais	Medida dos lados iguais	Medida da base
75,35º	6	3.03
76,29º	7,41	3.53
63,43º	3.95	3.53
78.65	8.98	3.53
83.82	16.41	3.53

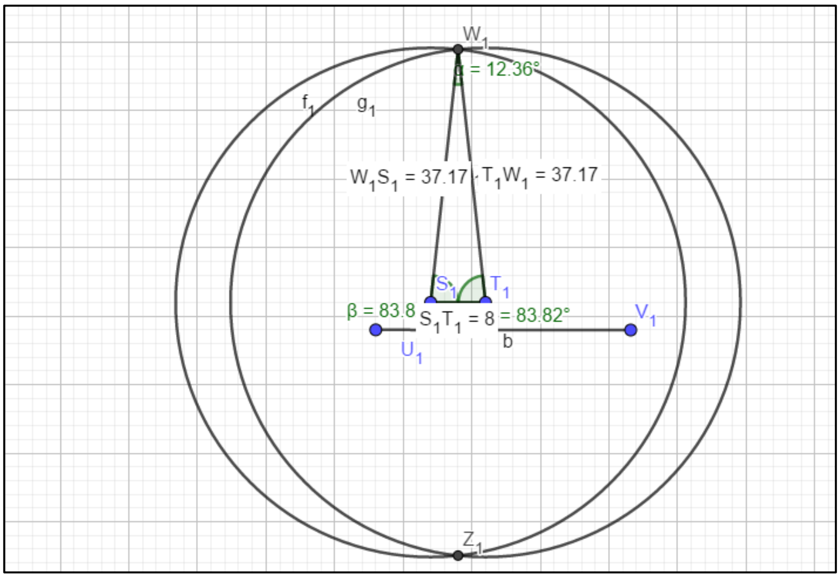
Fonte: Dados da pesquisa.

A cada movimento do segmento CD, as duplas registravam as medidas dos ângulos e dos lados. O breve diálogo abaixo representa o momento do registro da dupla:

> *Alice (D16): Os ângulos iguais, 75,35º.. As medidas do lados iguais, 6, mas esse aqui não mudou, ficou o mesmo, olha aqui...*
> *Aline (D16): Esse?*
> *Alice (D16): É, ficou o mesmo que estava antes.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Com os áudios e registro em diário de campo, verificamos que as duplas perceberam que, ao movimentar o segmento CD, a medida da base não se alterava, entretanto, essas medidas, registradas na figura 54, não correspondem à construção realizada pela dupla (figura 54), cuja base é igual a 8.

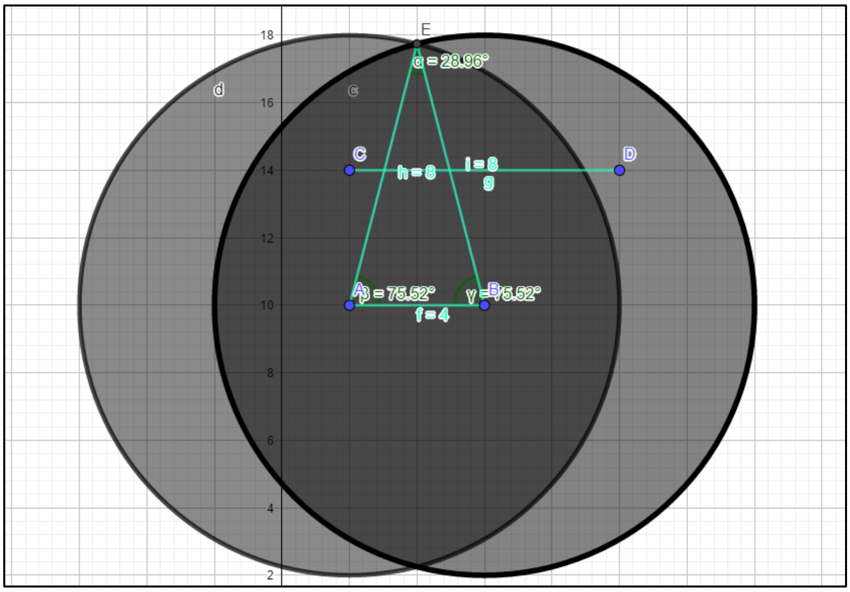
Figura 54 - Construção do triângulo isósceles no GeoGebra da dupla D16



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla D12 realizou a construção abaixo (figura 55), inserindo também as informações de medidas de ângulos e lados, conforme solicitado.

Figura 55 - Construção do triângulo isósceles no GeoGebra da dupla D12



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao movimentar um dos pontos do segmento CD e preencher o quadro com as medidas dos ângulos e lados, a dupla D12 registrou corretamente as informações (figura 56):

Figura 56 - Registro 2 da dupla D12

Medida dos ângulos iguais	Medida dos lados iguais	Medida da base
45°	2.83	4
79.82°	11.37	4
67.91°	5.37	4
75.52°	8	4
70.07°	5.85	4

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, pretendíamos que os alunos registrassem suas observações sobre esses valores, então solicitamos às duplas que respondessem a pergunta: o que acontece em todos os casos quando construo um triângulo sabendo que dois dos seus lados terão a mesma medida?

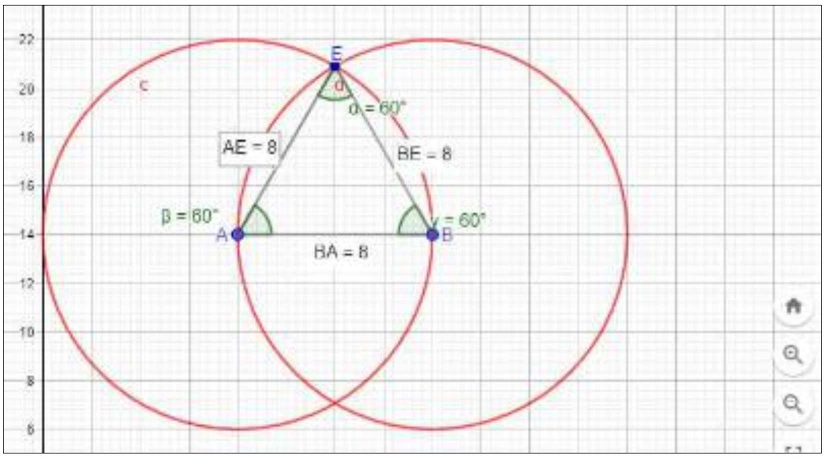
Das duplas, sete apresentaram justificativas coerentes; oito se aproximaram, mas faltaram mais elementos para completar a resposta; uma dupla movimentou o segmento da base, e duas duplas não responderam.

Após esse momento, comentamos que Euclides havia começado sua obra com algumas definições, como aquelas que estavam no quadro e, em seguida, apresentamos a proposição 1, sobre a construção do triângulo equilátero: “Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada” (BICUDO, 2009, p. 99).

Após uma pequena discussão sobre as características desse triângulo, propusemos aos alunos que tentassem construí-lo com a ferramenta “Compasso”. O objetivo final dessa tarefa era fazer com que as duplas percebessem o compasso como um instrumento para transporte de segmento, e constatassem que as medidas dos lados dos triângulos eram raios de uma circunferência. Também pretendíamos que todo o processo – da construção do triângulo equilátero às observações mencionadas – ocorresse da forma mais livre possível, ou seja, que os alunos definissem seus próprios caminhos.

Algumas duplas conseguiram construir o triângulo equilátero de forma mais rápida do que o esperado. Instantes após a proposta da construção, a dupla D11 construiu o triângulo equilátero, conforme a figura 57.

Figura 57 - Construção do triângulo equilátero pela dupla D11



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla D11 realizou essa construção de uma forma diferente das demais duplas, pois usaram o mesmo arquivo do triângulo isósceles. Ao arrastar o segmento AB, o triângulo isósceles foi transformado em um triângulo equilátero, ao fazer com que dois de seus vértices coincidissem com o centro das circunferências. Inicialmente, os alunos acessaram o arquivo do GeoGebra que continha a construção do triângulo isósceles realizada por eles na aula anterior, onde os segmentos AE e EB eram iguais e o segmento AB de tamanho menor (figura 57). Quando solicitamos a construção do triângulo equilátero, em um curto intervalo de tempo, a dupla clicou no ponto B e arrastou-o até a circunferência *c*, e fez o mesmo no ponto A, arrastando-o até a circunferência *d*.

> *Paulo (D11): Professora! Isso aqui é um triângulo isósceles ou é equilátero?*
> *Pedro (D11): É equilátero!*
> *Prof. Thais: Oi meninos.*
> *Paulo (D11): A gente terminou.*
> *Prof. Thais: Já terminaram?*
> *Paulo (D11): É só você reduzir o triângulo.*
> *Prof. Thais: Vocês tinham feito um isósceles então? Mostre como estava.*
> *Paulo (11): (arrastando o segmento AB) Estava assim.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Apesar de a dupla D11[94] não chegar a construir o triângulo, utilizando a régua e o compasso do GeoGebra como esperado, entendemos, como Gravina (2015), que a manipulação da figura (do triângulo isósceles) também se constitui em uma estratégia para

[94] Os nomes Fernando e Felipe são fictícios, foram usados apenas para escrever o diálogo.

alcançar o objetivo final da tarefa 6: a elaboração de uma justificativa de uma construção. Para Gravina (2015, p. 244):

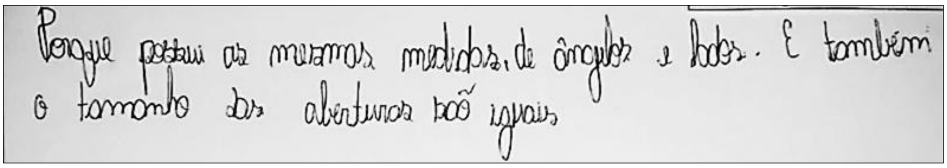
> O procedimento de construção informa os ‘fatos declarados’. As regularidades observadas mediante manipulação da figura dinâmica, informam sobre regularidades que não foram declaradas – os *fatos implícitos* - que se tornam passíveis de explicação via argumentação dedutiva.

Além de construir o triângulo equilátero, as duplas deveriam escrever por que era possível afirmar que o triângulo que construíram era equilátero. Na figura abaixo registramos novamente o diálogo com a dupla D11:

> *Paulo (D11): (lendo a pergunta) Por que podemos afirmar que todos os lados do triângulo equilátero são iguais?*
> *Pedro (D11): Por que todos os lados dele é igual? Por isso ele é equilátero? Você não vai escrever isso não, né?*
> *Paulo (D11): (depois de ler novamente a pergunta) Essa é mais difícil que a outra, né?*
> *Pedro (D11): Porque tem tudo a mesma medida!*
> *Prof. Thais: E aí meninos, conseguiram responder à pergunta?*
> *Pedro (D11): Mais ou menos.*
> *Prof. Thais: Por que esses três segmentos são iguais?*
> *Paulo (D11): (apontando para a tela) Porque nós medimos os segmentos e eles têm a mesma medida.*
> *Prof. Thais: Quando vocês fizeram, vocês ainda não tinham certeza que eles tinham as mesmas medidas. Vocês confirmaram agora e só por isso utilizaram a ferramenta (para medir). Tentem usar mais argumentos para responder essa pergunta.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Após um tempo, a dupla Paulo e Pedro (D11) registrou a seguinte justificativa para a afirmação de que o triângulo que construíram era equilátero:

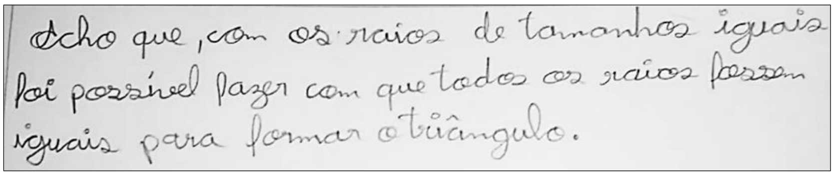
Figura 58 - Resposta da dupla D11


Porque possui as mesmas medidas, de ângulos e lados. E também o tamanho das aberturas saõ iguais

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificamos que a dupla manteve a justificativa pelas medidas, mas a segunda frase parece apresentar indícios de uma aproximação da ideia de que os lados do triângulo equilátero são raios de uma mesma circunferência. Essa constatação foi encontrada nos registros da dupla D9, apresentada na figura 59.

Figura 59 - Resposta da dupla D9


Acho que, com os raios de tamanhos iguais foi possível fazer com que todos os raios fossem iguais para formar o triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Lívia e Lúcia (D9) alcançaram um dos nossos objetivos com essa tarefa: justificar a construção do triângulo equilátero a partir dos raios das circunferências. Como parte final da tarefa 6, solicitamos às duplas que destacassem os três ângulos do triângulo equilátero, observassem o triângulo a partir da sua movimentação, e registrassem algumas observações sobre o que perceberam.

4.7 Tarefa 7 - Construção do triângulo escaleno

A tarefa 7 (Apêndice J) se refere à construção e exploração do triângulo escaleno, com o objetivo de estudar suas características e de preparar as duplas para a realização da tarefa 8 (Apêndice K). Essa tarefa ocorreu cerca de um mês após a primeira avaliação do trabalho e foi desenvolvida durante três aulas.

Iniciamos a tarefa relembrando o trabalho desenvolvido de abril a julho, por meio de imagens visualizadas por eles durante as tarefas anteriores. Mostramos aos alunos as imagens da biblioteca de Alexandria, do mapa do Egito e dos primeiros indícios do surgimento do esquadro, das construções de altares indianos e das figuras chinesas (calendários, etc.). Os alunos não se recordavam das figuras chinesas. Alguns afirmaram que não houve tarefas em que elas foram apresentadas. Acreditamos que o fato de essa tarefa 4 ter sido desenvolvida em um momento de agitação dos alunos, e em um tempo mais curto, fez com que o assunto não fosse assimilado por eles.

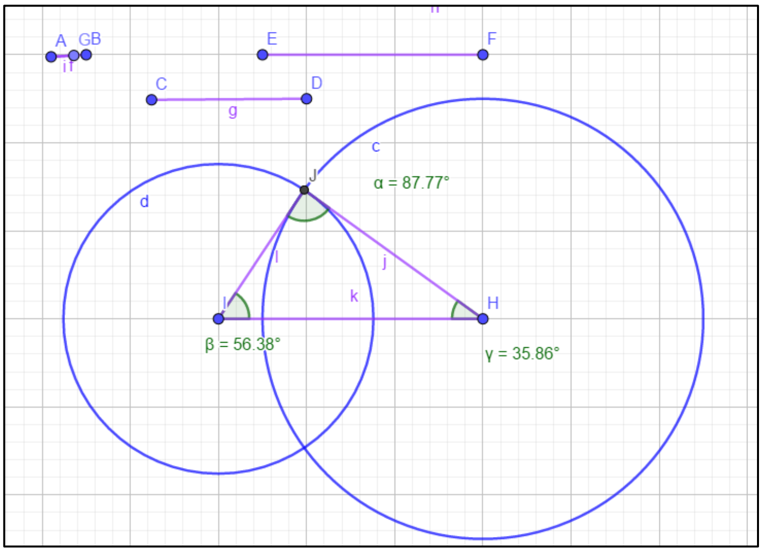
No GeoGebra, também propusemos aos alunos que recordassem como construíamos triângulos isósceles e equiláteros. Essa parte da tarefa foi desenvolvida de forma rápida pelas duplas, evidenciando que as habilidades haviam sido desenvolvidas e as noções ainda estavam presentes para eles.

Em seguida, comentamos sobre o triângulo escaleno e solicitamos às duplas que construíssem, com a ferramenta “Compasso”, um triângulo que possuísse todos os lados com medidas diferentes.

A construção dos triângulos com essa ferramenta do GeoGebra permite que o aluno manipule os segmentos para verificar algumas propriedades. Por exemplo, podemos construir triângulos utilizando a ferramenta “Polígono”, mas teríamos um campo de aprendizagem unicamente relacionado aos triângulos e, com a construção com o compasso, podemos trabalhar com os elementos das circunferências. Euclides realizou as construções com régua e compasso, e utilizou os elementos das circunferências para demonstrar. Dessa forma, é possível explorar mais ideias e conceitos geométricos.

Solicitamos às duplas que construíssem triângulos escalenos com a ferramenta “Compasso”. Esse momento da tarefa demandou um tempo maior que o programado, pois foram necessárias diversas tentativas. Bia e Bruna (D2), por exemplo, chegaram à seguinte construção:

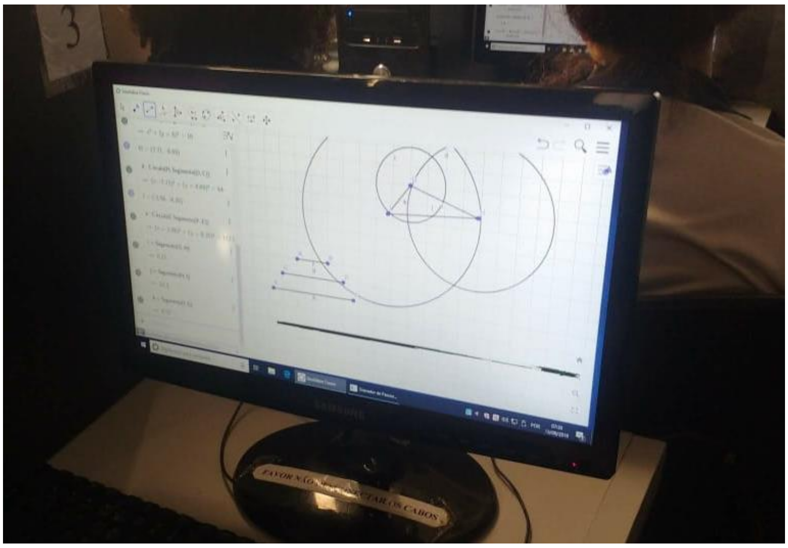
Figura 60 - Tentativa de construção do triângulo escaleno pela dupla D2



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa dupla construiu um triângulo escaleno, entretanto, faltou construir o terceiro lado, também a partir de uma circunferência. Por outro lado, Leo e Luiz (D3) chegaram bem próximo da construção de Euclides em sua proposição 22[95] (a partir de três segmentos):

Figura 61 - Tentativa de construção do triângulo escaleno pela dupla D3



Fonte: Dados da pesquisa.

Entretanto, ao conferir o protocolo de construção do GeoGebra, verificamos que um dos lados do triângulo não é o raio de uma circunferência, ou seja, a dupla D3 inseriu a circunferência após a construção do triângulo. Algumas duplas não conseguiram chegar à construção correta, mas se aproximaram disso.

Finalizamos a tarefa comentando com a classe que eles, sozinhos (ou seja, sozinhos nas duplas, sem ajuda externa), chegaram bem próximos a um conhecimento que Euclides, um grande matemático, formalizou há mais de dois mil anos. Explicamos que Euclides inseriu essa construção na obra "Elementos" e realizamos juntos a construção no GeoGebra.

4.8 Tarefa 8 - A condição de existência de um triângulo: proposições 20 e 22 do Livro I

Nesta tarefa, nosso objetivo era trabalhar com a condição de existência de um triângulo, a partir da construção de um triângulo qualquer com a ferramenta "Compasso" (Apêndice K). O propósito era tentar levar os estudantes a compreenderem, por meio de

[95] Proposição 22. Para construir um triângulo com três segmentos de reta dados é necessário que o comprimento da soma de dois deles seja maior que o remanescente. (BICUDO, 2009, p. 114).

construções geométricas e de reflexões sobre as mesmas, as proposições 20 e 22 do Livro I de Euclides:

> Proposição 20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.
> Proposição 22. Para construir um triângulo com três segmentos de reta dados é necessário que o comprimento da soma de dois deles seja maior que o remanescente. (BICUDO, 2009, p. 112 e 114)

Entretanto, devido a vários problemas[96] e atrasos, essa tarefa não foi totalmente concluída.

Inicialmente, propusemos aos alunos que construíssem novamente um triângulo escaleno, destacando (com cores) os três segmentos utilizados. A partir dessa construção, as duplas deveriam registrar a medida dos três segmentos utilizados para construir o triângulo. Com a manipulação dos segmentos, as duplas deveriam registrar mais dois conjuntos de medidas diferentes.

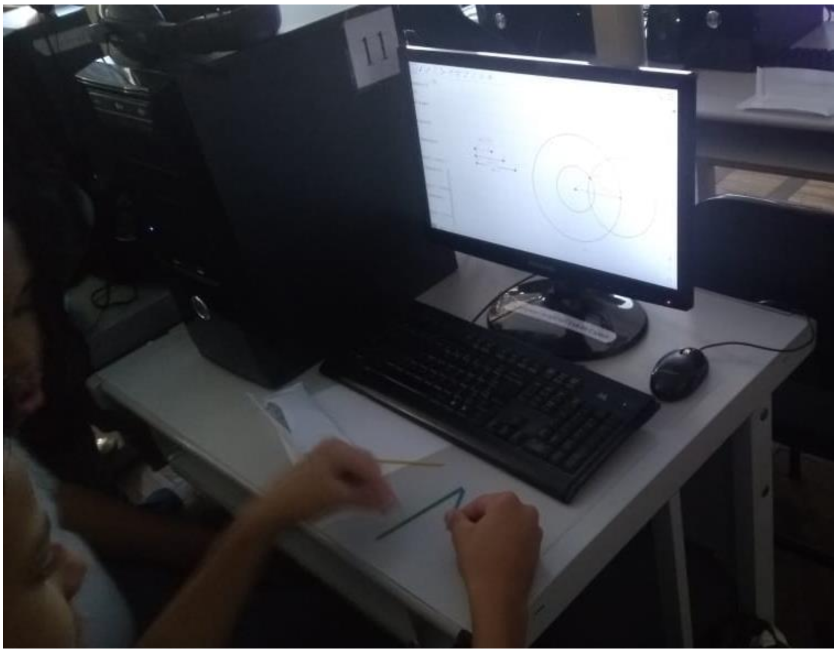
Em seguida, distribuímos às duplas algumas tríades de medidas distintas para que construíssem os triângulos no GeoGebra. Para agilizar esse momento (pois não tínhamos muito tempo para essa tarefa), em vez de construir o triângulo para cada tríade, as duplas deveriam construir o triângulo uma única vez e movimentar os segmentos para que tivessem as medidas solicitadas em cada tríade. Nesse momento, todas as tríades formavam triângulos e, em um outro momento dessa tarefa, pretendíamos entregar tríades que não formassem um triângulo.

Para auxiliar na descoberta, paralelamente à construção no GeoGebra, alguns testes foram realizados com palitos coloridos de comprimentos distintos (figura 62).

---

[96] Alguns dos problemas foram: mudança do professor da classe, preocupação da coordenação com o tempo dedicado à Geometria, em detrimento de outros temas, o que levou à uma redução do tempo disponível para a finalização do trabalho.

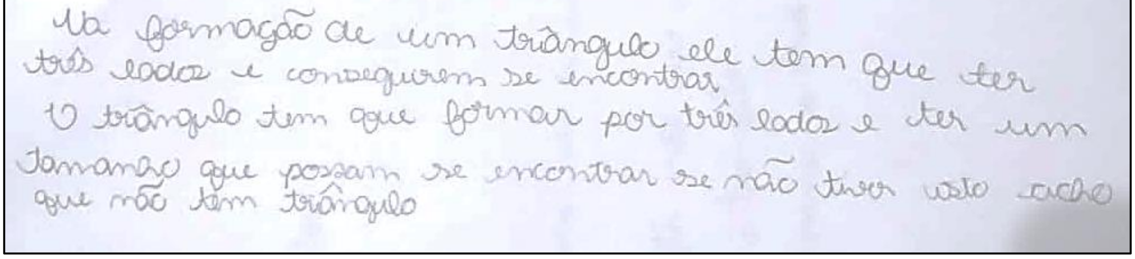
Figura 62 - Dupla D11 testando os palitos para formar um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa.

Entregamos à cada dupla quatro palitos de cores e medidas diferentes. Solicitamos que formassem triângulos escolhendo três deles. As duplas rapidamente escolheram três palitos que permitiam formar um triângulo. Em seguida, sugerimos que testassem outros conjuntos de palitos. O objetivo era levá-los a observar, por meio das tentativas, que nem todo conjunto de três palitos permite formar um triângulo. Com a percepção de que nem todos os conjuntos de três palitos escolhidos formavam um triângulo, solicitamos que as duplas registrassem qual seria, para eles, a condição para a formação de triângulos. Lívia e Lúcia (D9) registraram que:

Figura 63 - Justificativa de Lívia e Lúcia (D9).



Na formação de um triângulo ele tem que ter
três lados e conseguirem se encontrar
O triângulo tem que formar por três lados e ter um
tamanho que possam se encontrar se não tiver isto acho
que não tem triângulo

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que Lívia e Lúcia perceberam que os tamanhos dos palitos influenciavam a formação do triângulo. Talvez, se tivéssemos mais tempo, a dupla (D9) teria chegado próximo à proposição 20 de Euclides sobre a condição de existência de um triângulo.

Davi e Diego (D14) justificaram de forma semelhante, dizendo que:

> Um dos lados não fechou por causa do tamanho do segmento. Quando as medidas dos segmentos não são muito superiores aos outros fechamos o triângulo e com as medidas iguais formamos o triângulo equilátero.

Os alunos Davi e Diego escreveram no registro sobre os tamanhos dos lados do triângulo. Em ambos observamos a possibilidade de chegar até a condição de existência de um triângulo, pois diante de todos os dados analisados até esse momento, os alunos (ou pelo menos a maioria deles) pareciam ter aprendido a levantar conjecturas.

Em relação à tarefa 8, verificamos que uma das dificuldades da utilização pedagógica da História está relacionada ao tempo de execução da tarefa. Para chegar a um conhecimento matemático, é preciso mobilizar a imaginação dos alunos, além de criar oportunidades para que eles levantem hipóteses e conjecturas. Mas, para isso, o professor deve destinar um tempo suficiente para a tarefa.

Percebemos que, mesmo com a não finalização dessa tarefa, as justificativas dos alunos mostraram que, com mais tempo e mais estímulos, eles poderiam chegar próximo às proposições 20 e 22 do livro I de "Elementos". E acreditamos que esse momento pode ter contribuído, de alguma maneira, para que possam fazer conjeturas em atividades matemáticas futuras.

Contudo, as tarefas possibilitaram aos alunos um ambiente para o "pensar matemático", e não apenas uma "aceitação, passiva, de conhecimentos apresentados como sequência bem ordenada de 'fatos' e argumentos 'prontos'" (GRAVINA, 2001, p. 17).

4.9 As potencialidades das tarefas matemáticas desenvolvidas

A partir da interpretação e análise dos dados produzidos, dividimos nossos resultados em duas categorias: a primeira em relação à percepção da Matemática, e a segunda se refere à compreensão de noções de Geometria. Tais categorias surgiram do referencial teórico adotado e emergiram a partir dos dados obtidos à luz da História da Matemática como abordagem de ensino e do uso do *software* de Geometria dinâmica, GeoGebra. Além disso, dentro de cada uma das categorias citadas, construímos subcategorias que emergiram tanto dos dados quanto do aporte teórico que fundamenta esta pesquisa. De acordo com Minayo (1994), podemos estabelecer categorias antes, durante e depois do trabalho de campo. Antes do trabalho de campo as categorias são mais gerais e emergem do referencial teórico. Com a produção e análise dos dados surgem novas categorias (ou subcategorias) que são mais específicas e concretas.

4.9.1 A percepção acerca da Matemática

Na categoria “a percepção acerca da Matemática”, nos norteamos pela visão acerca dessa disciplina de acordo com o referencial teórico adotado (História da Matemática na Educação Matemática) e pelas evidências dessa visão a partir das posturas, falas e registros dos alunos durante o trabalho de campo. Dessa forma, buscamos observar alguns aspectos: os comentários e os registros dos alunos sobre as tarefas e o interesse com relação às “viagens no tempo” e suas histórias também manifestados pelos registros e falas.

Nessa categoria, construímos duas subcategorias, *a priori*, a partir dos estudos de Miguel e Miorim (2008) e Miguel (1993 e 1997): (a) a Matemática como construção humana e (b) a Matemática como parte importante de práticas sociais. Essas subcategorias se destacaram ao longo do trabalho de campo, principalmente na primeira fase das tarefas, na qual destacamos a construção do conhecimento no Egito e na Índia.

(a) A Matemática como construção humana

Durante todo o trabalho de campo, procuramos proporcionar uma visão acerca da Matemática: como uma construção humana, como um trabalho de muitas pessoas e como uma ciência que ainda segue em construção. Buscamos, na História da Matemática, um apoio para que essa percepção fosse proporcionada aos alunos e que os levasse a perceber, também, “as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Na primeira avaliação do trabalho (Apêndice I)[97], ao verificar as respostas dos alunos sobre o que haviam aprendido sobre a Matemática dos povos antigos, a biblioteca

[97] No dia 11 de julho de 2019, todos os 30 estudantes presentes da turma A responderam a uma avaliação do trabalho desenvolvido até aquele momento. A identificação da avaliação não era obrigatória, no entanto, quatro alunos optaram por fazê-lo. Seu intuito era levantar as opiniões dos alunos sobre as tarefas desenvolvidas e identificar conhecimentos aprendidos. Além disso, esperávamos verificar se havia interesse dos alunos para pensar na continuidade dos trabalhos, embora não soubéssemos na época se seria possível.

de Alexandria e os “Elementos” de Euclides, temos indícios de que a Matemática pode ter passado a ser compreendida como uma ciência que levou muito tempo para se desenvolver, se aprimorar e que ainda está em evolução, como mostram alguns registros dos alunos[98]:

> *Aluno(a) C: Eu aprendi que para ter tudo que temos hoje utilizamos Matemática, graças aos povos antigos temos o conhecimento avançado sobre a Matemática, claro, com alguns avanços.*
> *Aluno(a) F: Aprendi que lá as pessoas se baseavam em outras pessoas e que tinham grandes pensadores que serviram de inspiração para a época mas que construíram um legado que marca a matemática até hoje.*
> *Aluno(a) K: Diferente da nossa época. Mas era uma forma bem legal de aprender e uma experiência. Que eles utilizavam as formas em tudo.*
> *Aluno(a) Y: A Matemática que temos hoje em dia é derivada da Matemática primitiva de antigamente.*
> *(Registros dos alunos durante a primeira avaliação do trabalho, 11/07/19[99]).*

As respostas desses alunos evidenciam que houve interesse pelos fatos históricos das tarefas relacionadas à Matemática dos povos antigos. Constatamos que, para levar os “Elementos” para uma “visita” aos alunos do Ensino Fundamental, criar um ambiente onde a Matemática como construção humana possa ser percebida, principalmente nas tarefas 1 e 2, é essencial para proporcionar uma visão também sobre a obra de Euclides, por exemplo, a razão da criação.

Em relação à obra “Elementos”, observamos que alguns alunos se confundiram e compreenderam que o título da obra estaria relacionado aos instrumentos de desenho: régua de madeira e compasso. Entretanto, outros alunos já pareciam associar a obra ao contexto histórico da sua construção e ao conteúdo de Geometria, pois, além de destacarem o que foi a biblioteca de Alexandria, registraram que Euclides “teve a ideia de juntar tudo que outras pessoas tinham descoberto em apenas um livro ‘Elementos’ ” para “passar o conhecimento daquela época para as pessoas de hoje”, e, ainda, que os “Elementos” “ajudaram no aprendizado das formas das construções geométricas”.

Jahnke et al (2002), ao discutirem sobre o uso de fontes primárias na aula de Matemática (como os “Elementos”), mencionam que os alunos podem refletir sobre suas próprias visões do assunto, ao pensar em outras pessoas a partir do contato com fontes originais. Sendo assim, a obra de Euclides, nossa principal inspiração neste estudo, foi um

[98] As respostas foram digitadas na íntegra.
[99] Nessa avaliação os alunos não foram identificados, por essa razão e, por ter sido uma avaliação individual, nomeamos as avaliações com letras maiúsculas do alfabeto.

caminho para proporcionar a percepção da Matemática como construção humana. Temos indícios dessa percepção, a partir de alguns registros dos alunos na primeira avaliação do trabalho, pois, ao solicitar a opinião deles sobre a importância do livro de Euclides, alguns responderam que:

> *Aluno(a) C: Foi a base para o reconhecimento da Matemática.*
> *Aluno(a) E: Minha opinião que o livro de Euclides nos ajudou e nos ensinou várias coisas sobre a matemática e no livro dele tem várias coisas bem legais para nos ajudar na matemática.*
> *Aluno(a) F: Eles foram um grande avanço na matemática e na criação de muitas figuras e materiais geométricos, ele foi um grande matemático e pensador e seus livros foram uma marca do que ele deixou.*
> *Aluno(a) T: Para passar para outras pessoas o mesmo aprendizado que ele teve.*
> *Aluno(a) Y: Para a nossa evolução e aprendizado matemático para as próximas eras.*
> *(Registros dos alunos durante a primeira avaliação do trabalho, 11/07/19).*

No primeiro momento da avaliação final no trabalho (Apêndice L), de forma individual, os alunos comentaram e expressaram suas opiniões acerca da Matemática e sua história[100]. Para todos os itens do primeiro momento da avaliação, os alunos deveriam comentar e explicar suas opiniões. Um dos itens da avaliação afirmava que "criar conhecimentos matemáticos é algo que apenas os gênios conseguem" (item 1b, Ap. L). Apenas três alunos pareciam concordar com essa afirmação, nas respostas dos demais, surgiram muitos termos relacionados à capacidade das pessoas em aprender. Por exemplo, alguns apresentaram as seguintes justificativas:

> *"Não, porque cada um tem seu conhecimento e todos são capazes basta querer". (Melissa - D10)*
> *"Mentira, pois todas as pessoas que tem interesse conseguem". (Camila-D4)*
> *"Não, pois se outras se empenharem podem adquirir os conhecimentos matemáticos". (Bia-D2)*
> *(Registros dos alunos durante a avaliação final do trabalho, 03/10/19).*

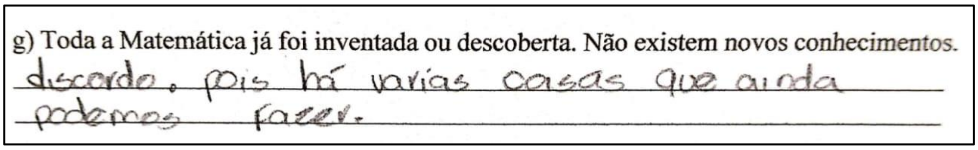
---

[100] No dia 03 de outubro de 2019, durante duas aulas não consecutivas, finalizamos o trabalho de campo, com uma avaliação na qual buscamos verificar o que os alunos haviam compreendido sobre Euclides, os "Elementos", Geometria, história da Matemática e o GeoGebra. Essa avaliação foi dividida em dois momentos (Apêndice M). Todos os 29 alunos presentes responderam a avaliação. No segundo momento, em duplas, os alunos fizeram construções no GeoGebra relacionadas a duas proposições (10 e 19) do Livro I de "Elementos". Essa avaliação foi identificada.

Uma das respostas manteve a crença nos gênios da Matemática, ao dizer que eles possuem “mais facilidade, mas se qualquer um se esforçar, consegue ter conhecimento matemático” (Bruna-D2). Entretanto, observamos que essa aluna também acredita que através da dedicação qualquer pessoa pode ser capaz de adquirir um conhecimento matemático. Uma outra aluna (Luna-D5) já discorda da existência de gênios, ao responder que “em minha opinião não existem gênios e sim pensadores, muito inteligentes”. Observamos que, mesmo não acreditando em gênios, a aluna enquadra uma pessoa que cria conhecimentos matemáticos como “muito inteligente”.

Por outro lado, em um outro item da avaliação final do trabalho, temos indícios de que a Matemática pode ter passado a ser vista por alguns alunos como uma Ciência não estática, passível de descobertas, por matemáticos ou não. Por exemplo, Duda (D12) registrou que, em relação à Matemática, ela acredita “que podem ser descobertas mais coisas”; já Cássia (D17), ao rebater a afirmação “Não existem novos conhecimentos” (Apêndice L, item g), escreveu que, “se fosse verdade, o que é que eu estou aprendendo e tendo novos conhecimentos”; e, na figura 64, apresentamos o registro da aluna Camila (D17).

Figura 64 - Registro da aluna Camila (D17)


g) Toda a Matemática já foi inventada ou descoberta. Não existem novos conhecimentos.
discordo, pois há varias coisas que ainda podemos fazer.

Fonte: Dados da pesquisa.

Camila registrou que discordava da afirmação, e percebemos que ela incluiu a si mesma nas descobertas matemáticas.

Contudo, um dos objetivos pedagógicos possíveis de se alcançar, ao se apoiar na História da Matemática, é fazer com que os alunos percebam a Matemática como uma construção humana (MIGUEL; MIORIM, 2008). Dessa forma, verificamos que as tarefas desenvolvidas contribuíram para que os alunos conhecessem algumas razões pelas quais as pessoas fazem Matemática, que foi e ainda é uma construção humana.

(b) A Matemática como parte importante de práticas sociais

Assim como as tarefas 1 e 2 foram importantes para iniciar o trabalho e para o desenvolvimento de todo o trabalho de campo, as tarefas 3 e 4 também foram essenciais para que as proposições de Euclides, trabalhadas nas tarefas 5, 6, 7 e 8, fossem desenvolvidas.

Para essa tarefa, buscamos enfatizar a Matemática como parte importante de práticas sociais, ao apresentar mais uma civilização: a China. Com isso, pretendíamos também que os alunos percebessem "as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas" (MIGUEL, MIORIM, 2008, p. 53), ao apresentar o círculo e o quadrado como figuras marcantes nessa civilização. Além disso, procuramos evidenciar a produção de conhecimento matemático em mais um país da Ásia. Utilizamos mais uma vez o mapa, contido no caderno de registro da dupla, e solicitamos que colorissem (destacassem) o país (Figura 65).

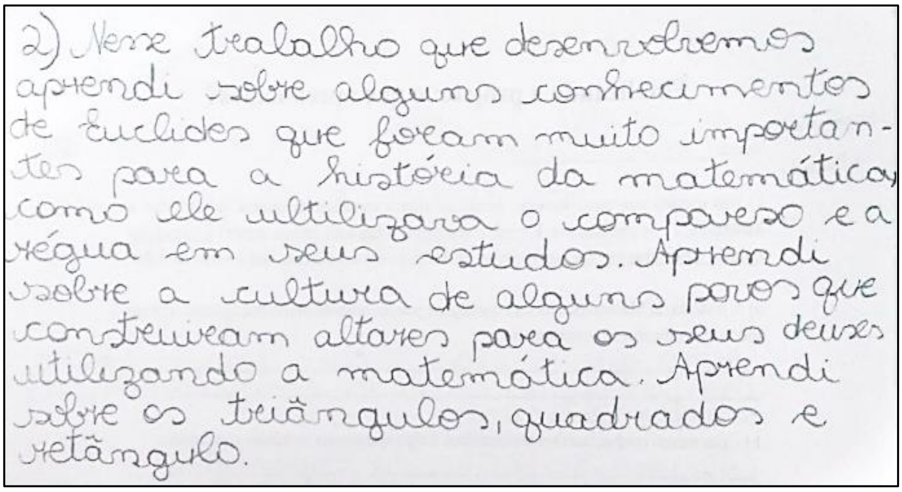
Figura 65 - Mapa dos alunos Elias e Ester (D13)

Fonte: Dados da pesquisa.

A importância dos círculos na civilização chinesa parece não ter sido lembrada pelos alunos, de acordo com a análise da primeira avaliação do trabalho. Acreditamos que muitos fatores influenciaram esse resultado, além dos já mencionados anteriormente, essa foi uma das primeiras tarefas desenvolvidas no laboratório de informática, um ambiente com o qual os alunos ainda não estavam acostumados, pois não o utilizavam frequentemente. No entanto, para trabalhar com as proposições escolhidas[101] no livro I de "Elementos", nas tarefas posteriores, o trabalho desenvolvido até esse momento foi de suma importância, pois possibilitou que os alunos desenvolvessem mais habilidades com o *software* e, possivelmente, com conceitos geométricos.

No item 2 da nossa avaliação do trabalho final, nossa intenção foi que os alunos escrevessem o que aprenderam sobre Euclides e os "Elementos", a história da Matemática e a Geometria. Vários alunos responderam que gostaram das aulas de Geometria e de aprender a história de Euclides. Por exemplo, a aluna Naty (D15) escreveu que "como o 3º bimestre foi sobre essas coisas que você nos ensinou, facilitou bastante na hora de fazer e resolver exercícios dentro da sala de aula [...]". Bia e Bruna (D2) abordam sobre o trabalho de forma mais geral:

Figura 66 - Resposta do item 2 da avaliação final de Bia (D2)

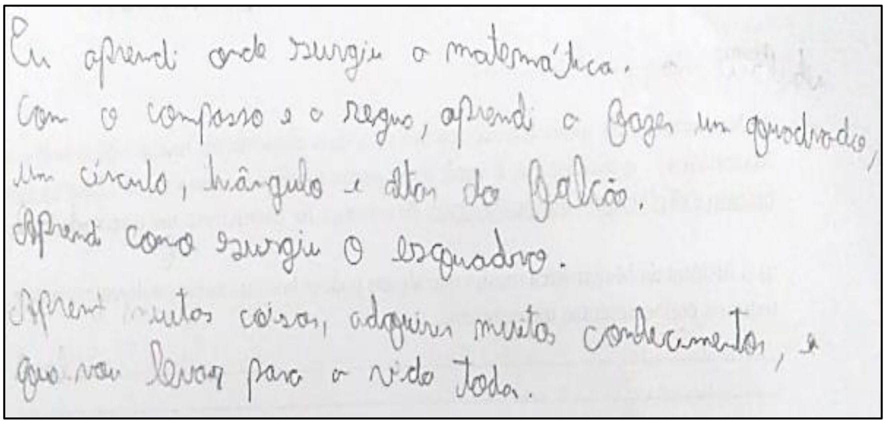

2) Nesse trabalho que desenvolvemos
aprendi sobre alguns conhecimentos
de Euclides que foram muito importan-
tes para a história da matemática,
como ele ultilizava o compasso e a
régua em seus estudos. Aprendi
sobre a cultura de alguns povos que
construiram altares para os seus deuses
utilizando a matemática. Aprendi
sobre os triângulos, quadrados e
retângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos também que em algumas respostas a história da Matemática teve destaque, por exemplo, o aluno do trio T8 registrou que:

[101] Escolhemos as proposições relacionadas ao estudo dos triângulos e suas propriedades.

Figura 67 - Resposta do item 2 da avaliação final de Tadeu (T8)


Eu aprendi onde surgiu a matemática.
Com o compasso e a regua, aprendi a fazer um quadrado,
um círculo, triângulo e altar do Falcão.
Aprendi como surgiu o esquadro.
Aprendi muitos coisas, adquiri muitos conhecimentos, e
que vou levar para a vida toda.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura 67, o aluno menciona que aprendeu como surgiu a Matemática e o esquadro, sendo este último mencionado apenas da tarefa dois, que foi desenvolvida no mês de maio. Além disso, o aluno demonstra que o conhecimento adquirido foi importante para ele, ao mencionar "vou levar para a vida toda". Com isso, percebemos que as tarefas desenvolvidas podem ter contribuído para uma nova visão sobre a Matemática.

Neste trabalho, destacamos o envolvimento de Davi (D14), que foi um aluno muito participativo durante as tarefas. A partir das nossas observações registradas no diário de campo, da consulta às gravações de áudios e vídeos, percebemos que a curiosidade dele foi despertada a partir do conhecimento sobre a Matemática em práticas sociais. Por exemplo, durante os vídeos e da nossa fala sobre as práticas e povos antigos, principalmente nas tarefas de 1 a 4, Davi sempre fazia uma pergunta ou até mesmo associava o momento histórico estudado com o que aprendeu em outras disciplinas (como na disciplina de História).

De modo geral, a Matemática dos povos hindus, na Índia, e todo o contexto apresentado sobre Euclides, sua época e os "Elementos", de certa forma, marcaram os alunos. Observamos também que a construção do altar do Falcão, uma prática social que envolvia muitos conhecimentos matemáticos por pessoas comuns (ou não matemáticos), ganhou destaque quanto à compreensão das necessidades práticas que podem ter inspirado Euclides, e muitos matemáticos, à formalização matemática contida nos "Elementos".

Contudo, ao compreender a Matemática como parte importante de práticas sociais, e ao promover tarefas para alcançar esse objetivo com os alunos do Ensino Fundamental, enfatizamos que "todas as práticas sociais produzem conhecimento e/ou ressignificam saberes e conhecimentos apropriados de outras práticas que lhes são contemporâneas ou não, que participam do mesmo contexto ou não" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 166).

4.9.2 A compreensão de noções de Geometria

Na categoria sobre a compreensão de noções de Geometria, nos guiamos a partir do desenvolvimento de algumas noções geométricas durante as tarefas, observadas tanto em sala de aula quanto no laboratório.

Em sala de aula, com os instrumentos físicos (régua não graduada e compasso), buscamos promover a compreensão dos entes geométricos primitivos, que foram os conhecimentos prévios necessários para os trabalhos no GeoGebra, a partir das definições do Livro I de "Elementos". No laboratório de informática, nosso foco foi saber como o *software* GeoGebra promoveria a compreensão de algumas propriedades dos triângulos, a partir de proposições do Livro I da obra de Euclides.

Nessa categoria, construímos três subcategorias, *a priori* e *a posteriori*: o compasso como um medidor, a construção de figuras, e a manipulação de figuras. Essas subcategorias emergiram tanto a partir dos estudos de Gravina (1996, 2001 e 2015), quanto ao longo do desenvolvimento das tarefas.

(a) O compasso como um medidor

Desde o estudo piloto, realizado no ano de 2018, percebemos que o trabalho de construção geométrica, tanto com instrumentos físicos quanto com ferramentas virtuais, deve ser planejado e desenvolvido com cautela. Além das possíveis dificuldades com o manuseio desses instrumentos, os conhecimentos prévios dos alunos devem ser levados em consideração nesse tipo de trabalho.

Verificamos que, antes de desenvolver as tarefas com o *software* GeoGebra, precisaríamos promover um momento no qual os conceitos primitivos da Geometria (plano, ponto, reta, segmentos, etc.) pudessem ser trabalhados. Por exemplo, para construir um segmento de reta no GeoGebra (versão Clássico 6), utilizamos a ferramenta "Segmento" e, antes de selecionar essa ferramenta, ao posicionar o *mouse* sobre ela, o *software* apresenta a seguinte mensagem: "selecione dois pontos ou posições". Com isso, o aluno pode até realizar a construção do segmento de reta, seja seguindo a instrução ou a partir de tentativas, porém, caso não saiba o significado dessa figura geométrica, sua ação será mecânica, apenas figural, o que pode dificultar a compreensão de outras figuras geométricas.

Os *softwares* de construções geométricas, como o GeoGebra, possuem ferramentas que permitem a construção de figuras a partir de propriedades que as definem (GRAVINA, 2001), mas também as próprias ferramentas carregam definições, como as ferramentas "Ponto", "Reta" e "Segmento", e até mesmo propriedades geométricas, como as ferramentas "Perpendicular" e "Mediatriz". Tais definições e propriedades precisam ser conhecidas pelos alunos para que as demais figuras geométricas, como triângulos e quadrados, possam ser construídas e compreendidas.

Compreender a ferramenta "Compasso" como um medidor é fundamental para um trabalho pautado na obra "Elementos", de Euclides. Entretanto, a ferramenta "Compasso", do GeoGebra, possui alguns aspectos diferentes do compasso físico relacionados à própria natureza dos instrumentos físicos e virtuais. Por exemplo, para desenhar uma circunferência, no compasso físico, fazemos uma abertura (pré-determinada ou não) e a figura é construída "aos poucos". No "Compasso" virtual, essa abertura acontece ao clicar sobre as extremidades de um segmento, e, em seguida, um ponto (local) central deve ser escolhido para "fixar" a circunferência, que surge de forma instantânea.

A partir dos pontos destacados anteriormente e da análise dos resultados no estudo piloto, verificamos que deveríamos possibilitar a compreensão da necessidade de nomear pontos, segmentos de retas, dentre outros, pois, no GeoGebra, essas figuras geométricas são nomeadas automaticamente. É por essa razão que buscamos criar um ambiente onde pudéssemos promover a compreensão de noções primitivas da Geometria. Diante disso, inspirados na obra "Elementos", verificamos que o trabalho com o compasso físico e a régua não graduada foi um caminho promissor para alcançar esse objetivo. A partir dos resultados, constatamos que esse caminho foi essencial para a compreensão desse instrumento no *software*: como um medidor. Além disso, a régua não graduada (de madeira), utilizada nas tarefas iniciais, não estaria presente no GeoGebra, mas sim todas as figuras que eram construídas com o seu apoio: retas e segmentos de retas.

Contudo, as tarefas iniciais, as quais denominamos "fases de preparação", foram fundamentais no processo de assimilação do compasso físico no *software* GeoGebra. Foram um caminho para que pudessem alcançar a fluência tecno-matemática (JACINTO, CARREIRA, 2017) e, assim, realizar as tarefas com as proposições do livro I.

(b) Agilidade na construção de figuras

Na primeira avaliação do trabalho, a pergunta inicial estava relacionada a alguns aspectos do trabalho realizado (ver apêndice I). Dentre esses aspectos, aproximadamente 80% dos estudantes gostaram muito das tarefas realizadas no Laboratório de Informática, e 90% gostaram muito da construção de figuras com o “Compasso” do GeoGebra. Dessa forma, concluímos que as aulas de Geometria no laboratório foram positivas para os alunos. Além disso, como 47% dos alunos responderam que gostaram muito das construções com régua e compasso, e 53% gostaram pouco, há indícios de que as construções no GeoGebra foram mais prazerosas.

O segundo momento da avaliação final do trabalho (Apêndice L) ocorreu durante 30 minutos e alguns alunos não participaram, devido à prova de recuperação de Matemática que ocorria ao mesmo tempo[102]. Com isso, apenas 13 duplas finalizaram as construções. A figura 68 mostra o momento em que as duplas respondiam a avaliação final, e podemos observar que a dupla D10 estava ausente.

Figura 68 - Fotografia do momento da Avaliação final do trabalho.

Fonte: Dados da pesquisa.

O trabalho com os instrumentos físicos, realizado na segunda tarefa, demandou mais tempo que o esperado, principalmente devido às dificuldades de manipulação do compasso. No laboratório de informática, com as ferramentas virtuais, a construção de

[102] O segundo momento da avaliação final foi desenvolvido em duplas e teve o objetivo de verificar o que os alunos aprenderam com o GeoGebra.

figuras se deu de forma mais rápida, na medida em que se familiarizavam com o *software* e desenvolviam habilidades técnicas e matemáticas.

Para Jacinto e Carreira (2017, p. 272), a fluência tecno-matemática é a “ideia de ser capaz de produzir pensamento matemático mediante a utilização de ferramentas para reformular ou criar conhecimento e expressar pensamento”. Diante disso, percebemos que a agilidade na construção das figuras, durante as tarefas de 3 a 8, dependia da fluência tecno-matemática dos alunos.

A partir da análise descritiva dos resultados, apresentada anteriormente, percebemos indícios de (ou um caminho para) fluência tecno-matemática. Alguns alunos, quando atingiam a fluência tecno-matematica, realizavam as construções de forma muito mais rápida. Percebemos isso em duas duplas: Paulo e Pedro (D11) e Bia e Bruna (D2). Na tarefa 6 (ver figura 57), Paulo e Pedro apresentaram um nível mais elementar da fluência tecno-matemática, pois “empregaram conhecimentos matemáticos e tecnológicos de forma concomitante para efetuar construções robustas e encontrar uma abordagem para obter a solução” (JACINTO, CARREIRA, 2017, p. 285). De modo semelhante, Bia e Bruna, na tarefa 3 (ver figura 37), desenvolveram habilidades com o *software* GeoGebra e utilizaram conhecimentos matemáticos para a obtenção de uma solução. Observando o desenvolvimento de Bia e Bruna, verificamos que concluíram as tarefas de forma mais rápida e com as justificativas solicitadas a partir das construções, principalmente na tarefa 7 (figura 60), talvez chegaram a um nível mais intermediário da fluência tecno-matemática, que se “caracteriza pela utilização de conhecimentos matemáticos e tecnológicos, percepcionando formas de os combinar para obter a resposta aos problemas e ainda ensaiar uma justificação matemática” (JACINTO, CARREIRA, 2017, p. 285).

O suporte aos ambientes informatizados, neste caso, ao GeoGebra, favorece “a exploração, a elaboração de conjecturas e o refinamento delas, e a gradativa construção de uma teoria matemática” (GRAVINA, 2001, p. 36).

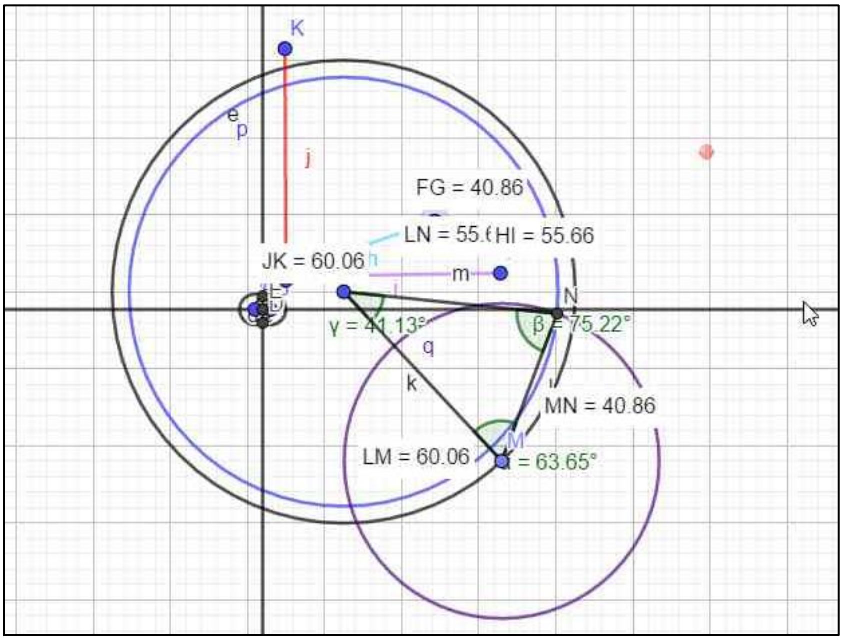
Concluímos que as tarefas permitiram que os alunos pudessem desenvolver habilidades técnicas e matemáticas para construções mais ágeis, se comparadas àquelas realizadas com régua e compasso físicos, e isso gera mais tempo para testes, ensaios, manipulações que, por sua vez, geram a criação de hipóteses e conjecturas.

(c) Manipulação de figuras

Na avaliação final do trabalho, também propusemos, no segundo item (Apêndice L), que os alunos, além de construir um triângulo qualquer, escrevessem sobre a veracidade da proposição 19, que diz: “em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado” (BICUDO, 2009, p. 112).

Dara e Duda (D12) construíram um triângulo qualquer, conforme aprenderam na tarefa 7, e inseriram na figura as medidas dos ângulos e dos lados do triângulo, como podemos observar na figura abaixo:

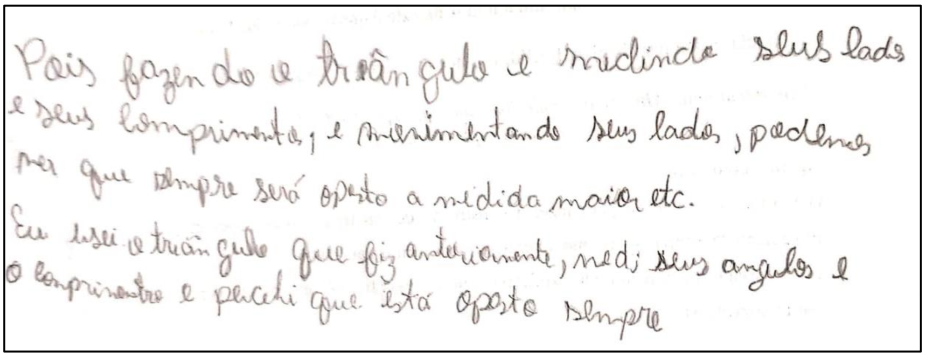
Figura 69 - Construção de um triângulo qualquer por Dara e Duda (D16)



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a construção, solicitamos que os alunos escrevessem um pequeno texto, explicando porque a frase de Euclides (proposição 19) é verdadeira. Dara e Duda apresentaram a seguinte justificativa:

Figura 70 - Justificativa apresentada por Dara e Duda (16)


Pois fazendo o triângulo e medindo seus lados
e seus comprimento, e movimentando seus lados, podemos
ver que sempre será oposto a medida maior etc.
Eu usei o triângulo que fiz anteriormente, medi seus angulos e
o comprimentro e percebi que está oposto sempre

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que Dara e Duda justificaram que a “frase de Euclides” (a proposição 19) é verdadeira porque “medindo seus lados e seus comprimentos, e movimentando seus lados, podemos ver que sempre será oposto à medida maior”. A dupla demonstrou que, com a manipulação do triângulo, foi possível verificar propriedades da figura geométrica construída. De modo semelhante, Elias e Ester (D13) argumentaram que “independente do triângulo que você fizer sempre o maior ângulo será o oposto do maior lado, chegamos a essa conclusão de acordo com os resultados que obtivemos do nosso triângulo escaleno”. Além dessas duplas, durante a tarefa 6 (ver figura 57), Paulo e Pedro (D11) também utilizaram a movimentação de uma figura geométrica, percebemos, então, duas contribuições dessa tarefa para essa dupla: primeiro, para buscar uma solução à situação proposta e, segundo, paralelamente a essa busca, puderam verificar propriedades do triângulo equilátero.

Os ambientes de Geometria Dinâmica “são micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso, a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de suas representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador” (GRAVINA, 2001, p. 82). Com isso, constatamos que a movimentação das figuras foi essencial para que as duplas verificassem a proposição a partir de testes e observações. Essas tarefas possibilitaram que o “Compasso” (ferramenta do GeoGebra) fosse testado e associado ao instrumento físico, utilizado por eles na tarefa 2. A utilização dos instrumentos virtuais do GeoGebra permitiu construções manipuláveis, um conjunto de “desenhos em movimento” (GRAVINA, 2001) que não poderiam fazer com a régua e o compasso.

Procuramos, com as tarefas, promover uma articulação entre a História da Matemática e os ambientes de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, para que a

Matemática como construção humana pudesse ser compreendida. Dessa forma, a possibilidade de movimentar figuras nas construções com o *software* GeoGebra contribui para a compreensão de noções geométricas, pois se aproxima do "processo de criação em matemática: fazer explorações, elaborar e refinar conjeturas, testar hipóteses, produzir demonstrações" (GRAVINA 2001 p. 92).

Ao retomar a nossa questão de investigação, identificamos que algumas das contribuições das tarefas matemáticas desenvolvidas para o ensino de noções de Geometria plana, no 8º ano do Ensino Fundamental, se relacionam com alguns dos objetivos pedagógicos destacados por Miguel e Miorim (2008, p. 53):

> *(1) A Matemática como uma criação humana;*
> *(2) As razões pelas quais as pessoas fazem matemática;*
> *(3) As necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas;*
> *(4) As conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.;*
> *(5) A curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias;*
> *(6) As percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;*

A História da Matemática foi fundamental para que os alunos pudessem ter novas percepções e diferentes posturas acerca da Matemática e da obtenção do conhecimento matemático. Por sua vez, o GeoGebra, com suas ferramentas virtuais, permitiu a criação de uma interface com a História da Matemática, para o ensino de noções de Geometria, de modo que o aluno tivesse a oportunidade de uma participação mais ativa: com levantamento de conjecturas, agilidade de construções e manipulação de figuras para testar suas hipóteses.

O Livro I de "Elementos" possui proposições que, a partir de um planejamento apropriado, puderam "visitar" os anos finais do Ensino Fundamental, permitindo um trabalho com construções de figuras geométricas a partir de propriedades que as definem, assim como se configura o GeoGebra. Nesse processo, percebemos que o aluno pode desenvolver habilidades técnicas e matemáticas que contribuam, posteriormente, para o desenvolvimento da capacidade de argumentar e demonstrar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de promover o ensino de algumas noções de Geometria Plana por meio de uma abordagem histórica em um ambiente de aprendizagem específico (GeoGebra), este trabalho teve como objetivo principal compreender como as tarefas desenvolvidas em uma perspectiva histórica a partir dos “Elementos” de Euclides e da história de sua época, e desenvolvidas no ambiente GeoGebra, influenciam na compreensão de algumas noções de Geometria. Com isso, pretendemos responder: *como tarefas matemáticas construídas a partir dos “Elementos” de Euclides e de sua história, e desenvolvidas no ambiente GeoGebra, podem contribuir para a compreensão de noções de Geometria plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental?*

Buscamos mostrar a Matemática enquanto construção humana, evidenciando como as pessoas, ao longo da história, participaram da sua construção. A partir dessa perspectiva, aprender Geometria pode ganhar mais sentido na medida em que os estudantes compreendam o seu desenvolvimento e os diversos propósitos de acordo com cada sociedade e cultura, pois, “pensar-se em outras pessoas motiva os alunos a refletirem sobre suas próprias visões do assunto. Essa reflexão, por sua vez, é objetiva pelo material (o texto) que eles estão estudando” (JAHNKE et al, 2002, p. 293, tradução nossa[103]). Para isso, optamos por desenvolver um trabalho a partir do uso de uma fonte primária e, então, escolhemos a obra “Elementos”, de Euclides, especialmente o seu Livro I, por acreditar no seu potencial pedagógico nos anos finais do Ensino Fundamental. Ressaltamos que, buscamos também enfatizar as produções de outros países e continentes do mundo (África e Ásia), para que a visão da Matemática como produção humana pudesse ter sido percebida.

Um dos nossos objetivos de pesquisa foi identificar indícios de envolvimento e interesse por parte dos alunos em relação às tarefas e às questões históricas relacionadas ao desenvolvimento da Matemática ao longo dos tempos. Esses indícios foram identificados a partir de falas, comportamentos e registros produzidos pelos alunos que, por sua vez, foram organizados, analisados e interpretados. Os demais objetivos de pesquisa foram: analisar possíveis contribuições das tarefas matemáticas tanto para a compreensão de noções de

[103] “Thinking themselves into other persons motivates students to reflect about their own views of the subject matter. This reflection, in turn, is made objective by the material (the text) they are studying.”

Geometria quanto para o desenvolvimento da percepção acerca da Matemática enquanto produção humana.

Inicialmente queremos ressaltar alguns percalços enfrentados com o laboratório de informática. É importante enfatizar que a presença de um técnico responsável pelo ambiente, ressaltado por Borba e Penteado (2010), é de suma importância para o desenvolvimento das atividades propostas pelo professor. Geralmente, o laboratório de informática não é muito utilizado nas escolas estaduais, mas na instituição onde ocorreu a pesquisa de campo a realidade foi diferente. O laboratório I é muito utilizado pelos professores da escola. Acreditamos que um dos motivos é a presença de um técnico que mantém o laboratório organizado, com máquinas funcionando. Entretanto, para o nosso trabalho de campo apenas o laboratório II, que não possuía um técnico responsável, estava disponível. Além disso, também não havia internet e alguns computadores apresentavam defeitos. Porém, acreditamos que o desenvolvimento desse trabalho com os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental contribuiu para que mais professores procurassem utilizar o laboratório de informática, gerando uma situação positiva, pois, após algum tempo, disponibilizaram uma técnica para o laboratório II.

Ao final deste estudo acreditamos que, em algumas tarefas, poderíamos ter trabalhado de forma diferente e, assim, gerado uma maior contribuição para os alunos participantes da pesquisa. Por exemplo, a tarefa 4, que envolveu a Matemática dos povos chineses poderia ter sido mais explorada. É importante destacar que a pesquisa se desenvolveu em um ambiente natural da escola, ou seja, no tempo e espaço de estudo dos alunos. Mas, se por um lado, encontramos muitos desafios como os diversos imprevistos comuns do espaço escolar (projetos, extensão do intervalo por diversos motivos, trocas de professores, dentre outros), por outro lado, ter a presença dos professores responsáveis pela turma durante todo o trabalho de campo foi importante para nós e acreditamos que para os professores também. Sentimos uma verdadeira aproximação entre a pesquisa e a prática.

Um outro aspecto positivo das tarefas desenvolvidas com os alunos foi em relação à assimilação do compasso físico com a ferramenta “Compasso” do GeoGebra. Acreditamos que esse progresso se deu também pelas tarefas intituladas como “fase de preparação”. Com isso não podemos deixar de pontuar que o estudo piloto, desenvolvido em 2018, foi muito importante para testar algumas tarefas, analisar os pontos negativos e positivos, assim como a sua viabilização nos anos finais do Ensino Fundamental e, então, reformulá-las e ampliá-las. Escolhemos a obra “Elementos”, pois, acreditamos que a forma como Euclides apresentou as construções garante que a figura construída no Geogebra, seja definida por suas propriedades, permitindo a sua manipulação, para, então, constatá-las.

Outro ponto que destacamos neste estudo foi que os alunos foram capazes de levantar conjecturas a partir do trabalho desenvolvidos no GeoGebra. Para Jahnke et al (2002), os alunos devem ter a oportunidade de construir seus próprios textos, familiarizando-se com o raciocínio matemático e, apontam que a verbalização de um raciocínio é uma ótima estratégia.

> Os alunos devem ter a oportunidade de discussões extensas, mas também devem ser convidados a produzir seus próprios textos escritos. A ideia de um "ensaio matemático" é antiga e soa, uma vez que nunca é realizada, um pouco antiquada. Assuntos históricos forneceriam pontos de partida naturais para essas atividades.
>
> (JAHNKE et al 2002, p. 299, tradução nossa[104])

Acreditamos que em nosso estudo construímos uma interface com a História da Matemática e o GeoGebra para o ensino de algumas noções de Geometria, pois esse ambiente de Geometria dinâmica forneceu condições para fazer com que os alunos se aproximassem da construção da Matemática.

Ainda em relação ao GeoGebra verificamos que esse ambiente permitiu construções mais rápidas e favoreceu as explorações nas construções dos triângulos através da manipulação. Dessa forma, o *software* pode contribuir no ensino de Geometria, pois os estudantes podem perceber como a tecnologia pode estar em sintonia com a história e com a construção do conhecimento matemático.

O GeoGebra sempre esteve presente em minha formação como professora de Matemática. Já a História da Matemática como apoio didático, da forma que propomos aqui, foi uma grande e prazerosa descoberta que gerou um novo marco em minha carreira profissional. Fazer esta pesquisa, provocou muitas reflexões sobre a minha prática docente e sobre a minha própria visão em relação à Matemática. De fato, a elaboração das tarefas e todo o seu desenvolvimento, permitiu-me um rico aprendizado tanto relacionado à preparação e planejamento, quanto em relação a minha postura, condução da aula e, principalmente, da percepção das diversas manifestações de aprendizagem e/ou interesse

---

[104] The students should have the opportunity of extensive discussions, but they should also be asked to produce their own written texts. The idea of a ‘mathematical essay’ is old and sounds, since it is never realised, a bit antiquated. Historical subjects would provide natural starting points for such activities.

dos alunos durante as minhas aulas que, por sua vez, geraram reflexões acerca dos processos de avaliação dos alunos.

Contudo, respondendo à questão de investigação, as tarefas matemáticas contribuíram para: compreensão dos entes primitivos (ponto, reta, plano) como base para as construções geométricas, construção do quadrado e do triângulo, conforme os “Elementos” com mais agilidade que a ideia de perpendicularidade, paralelismo e ângulos, assim como os entes primitivos fossem reforçados a cada construção, a verificação de propriedades dos triângulos e do quadrado a partir da manipulação dessas figuras. Além disso, a abordagem pautada na História da Matemática favoreceu uma aproximação dos alunos à visão dos processos de construção de conceitos matemáticos como práticas sociais. Dessa forma, A História da Matemática, como abordagem utilizada para a elaboração das tarefas, mostrou-se fundamental para que os alunos começassem a ter novas percepções e diferentes posturas acerca da Matemática e da construção do conhecimento matemático e compreendessem as noções de Geometria estudadas como conhecimentos vinculados às práticas sociais variadas, de distintas culturas.

Confeccionamos, como Produto Educacional, dois pequenos livros, voltados para professores que ensinam Matemática, futuros professores e formadores de professores, nos quais apresentamos algumas das tarefas aplicadas, discutindo-as e fundamentando-as teoricamente. No primeiro, destacamos as tarefas realizadas em sala de aula e, no segundo, as tarefas que buscaram articular a História da Matemática com o *software* GeoGebra.

Recentemente participei do IV Seminário Cearense de História da Matemática e, percebi que estão surgindo trabalhos sobre a aliança entre a História da Matemática e as Tecnologias. A presente pesquisa se soma a essas, ao trazer contribuições para o campo da Educação Matemática, apontando possibilidades e contribuições da História da Matemática e do uso de Tecnologias para a sala de aula da Educação Básica. Entretanto, é necessário ampliar o estudo nessa área, procurando compreender melhor o potencial da tecnologia e da História da Matemática como aliadas dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática em uma perspectiva que favoreça a compreensão dessa disciplina como construção humana, em constante desenvolvimento, sujeita a provas e refutações.

REFERÊNCIAS

ANGULO, F. **De la geometría de Euclides a la geometría “a la Euclides”: procesos demostrativos mediados por Cabri Géomètre**. 10 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colômbia. 2009. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/745/>. Acesso em: 25 de abril de 2018.

BARBOSA, L. S. **Investigando com o GeoGebra 3D: O Método Axiomático em Atividades de Geometria Espacial e Esférica.** 18/03/2017 143 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE, Rio de Janeiro, 2017.

BARROS, K. M. **Formação de conceitos matemáticos: um estudo baseado na teoria do Ensino Desenvolvimental.** 2015 193 f. Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática Instituição de Ensino: INSTIT. FEDERAL DE EDUCACÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS, Jataí, 2015.

BICUDO, I. **Os Elementos - Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 06 de novembro de 2018.

____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico**. 1995 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – FE/ UNICAMP. Campinas, 1995.

CACERES, F. **O ensino de geometria euclidiana: possíveis contribuições da história da Matemática e da resolução de problemas de George Polya.** 2015 137 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino**. 2005 252 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

D’AMBROSIO, U. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 1999; pp. 97-115. Disponível em: <http://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMatematica/Ubiratan_DAmbrosio_doisTextos.pdf>. Acesso em: 21 de janeiro de 2020.

DIAS, V. G. **Quadratura: da antiguidade à atualidade**. 2014 49 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE, 2014.

DUARTE, A. R. S., SILVA, M. C. L. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa**. v. 1, n. 1, p. 87-93. Ponta Grossa, PR, 2006.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FILHO, F. B. **O desenho e o canteiro no Renascimento Medieval(séculos XII e XIII): indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores**. 262 f. Tese (Doutorado em Estruturas Ambientais Urbanas) – USP, São Paulo, 2005,

FILHO, L. E. S. **Cônicas: apreciando uma obra-prima da matemática.** 2015 141 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, 2015.

FUJITA, T. The order of theorems in the teaching of Euclidean geometry: Learning from developments in textbooks in the early 20th Century. **ZDM** Mathematics Education. 2001, v. 33, n. 6, p. 196-203.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GOBBI, J. A. **Do Livro Didático ao Software Geogebra: a engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental.** 2012 135 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, SANTA MARIA, 2012.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria.** Anais. VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, v. 1, p. 1-13, 1996.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. **Revista Eletrônica VIDYA**. v. 35, n. 2, p. 237-253. Santa Maria, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/605>. Acesso em: 27 de maio de 2018.

HARTSHORNE, R. Teaching Geometry According to Euclid. **Notices of the American Mathematical Society**. v. 47, n. 4, p. 460-465, Washington, 2000. Disponível em: <https://www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf>. Acesso em 25 de abril de 2018.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: evidências de fluência tecno-matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 266 - 288, abr. 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2017000100015&script=sci_abstract&tlng=pt> Acesso em: 16 de janeiro de 2020.

JAHNKE, H. N. et al. The use of original sources in the mathematics classroom. In: FAUVEL, J; VAN MAANEN, J. (Org.). **History in Mathematics Education: The ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. Vol 6, Cap. 5. p. 291-328.

JESUZ, D. A. F. **Desenvolvendo o conceito de áreas: uma proposta didática para abordar regiões planas irregulares na Educação Básica**. 2015 122 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Rio de Janeiro, 2015.

LINGEFJARD, T. **Rebirth of Euclidean Geometry?**. In: Bu L., Schoen R. (eds) Model-Centered Learning. v. 6. The Netherlands: Sense Publishers, 2011. pp 205-215. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/302411771>. Acesso em: 25 de abril de 2018.

MARTINS, F. L. F. **Instrumentos virtuais de desenho e a argumentação em geometria**. 2012 123 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MELOGNO, P. Los Elementos de Euclides y el desarrollo de lá matemática griega. In: ______; RODRÍGUEZ, P.; FERNÁNDEZ, S. **Elementos de Historia de la Ciencia**. Uruguay: Universidad de la República, 2011. Cap. 3. p. 61-79. Disponível em: <https://www.cse.udelar.edu.uy/wp-content/uploads/2017/11/06_CSE-EUBCA_Melogno_2011-07-06-lowres-p4.pdf>. Acesso em: 19 de maio de 2018.

MIGUEL, A. **Três Estudos sobre História e Educação Matemática.** Campinas: UNICAMP, 1993.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetike**, v. 5, n. 8, p.73-106. São Paulo, 1997. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646848 /13749>. Acesso em: 20 de agosto de 2019.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 1 ed., 2 reim. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

____. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 21 ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 1994.

MINAYO, M. C. S. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 28 ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2009.

MOD, L. F. A. **O objeto matemático triângulo em Teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra.** 2016 105 f. Mestrado em

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, São Paulo, 2016.

MONTOITO, R.; GARNICA, A. V. M. Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'*Os Elementos* a partir de algumas escolas filosóficas. **Educação, Matemática, Pesquisa**. v. 16, n. 1, p. 95-123, São Paulo, 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php /emp/article/view/16736>. Acesso em: 09 de junho de 2018.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o Estudo de Áreas: uma Proposta para as Licenciaturas.** 01/12/2010 217 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal Do Rio De Janeiro, Rio De Janeiro, 2010.

MOREY, B.; MENDES, M. J. O USO DE FONTES ORIGINAIS DA HISTÓRIA DA CIÊNCIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – vol. 3 - número 1 – 2012.

OLIVEIRA, J. D. S. **A geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750-1800) em atividades com o Geogebra**. 2014 222 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

PELLI, D. **As contribuições do software Geogebra como um mediador do processo de aprendizagem da geometria plana na educação a distância (EAD) em um curso de licenciatura em pedagogia.** 2014 249 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

PENAZZO, M. **A geometria dinâmica como fonte de motivação para o estudo da trigonometria**. 2014 96 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, 2014.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. **Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes.** Tradução de Antonio Olimpio JuniorBolema. v. 17, n. 21, p. 81-14. Rio Claro, 2004. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/ bolema/article/view/10538>. Acesso em 31 de março de 2019.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, A. F. **O uso integrado de recursos manipulativos digitais e não-digitais para o ensino-aprendizagem de Geometria**. 2013 114 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SÁNCHEZ, C. H. S. La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. **Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología.** n. 32, p. 71-92, Bogotá, 2012. Disponível em: http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/1860/1836. Acesso em: 25 de abril de 2018.

SCHMIDT, G. M. **A história da matemática como recurso didático para o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos**. 2014 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Ensino: Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2014.

SCHUBRING, G.; ROQUE, T. O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra. **História Unisinos**. Vol. 18 Nº 1. São Leopoldo, RS, 2014. Disponível em: http://revistas.unisinos.br/index.php/historia/article/view/htu.2014.181.09 /4104. Acesso em: 07 de novembro de 2018.

SILVA, S. F. **Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem,** 2015 81 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO, Rio de Janeiro, 2015.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. In: **Educação e Matemática: Associação de Professores de Matemática**, Portugal, n.105, p.22-28, 2009. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/stein-smith%2098.pdf. Acesso em: 07 de novembro de 2019.

STEWART, Ian. **Em Busca do Infinito: Uma História da Matemática dos Primeiros Números à Teoria do Caos**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2004.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais: materiais para professores**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VILELA, D. S.; DEUS, K. A. Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura. **Revista Horizontes.** v. 32, n. 2, p. 63-76, jul/dez. 2014. Disponível em: <https://revistahorizontes.usf.edu.br/horizontes/article/view/176/59>. Acesso em: Acesso em: 25 de abril de 2018.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** trad. Daniel Grassi - 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICES

Apêndice A – Termo de consentimento livre e esclarecido (pais dos estudantes do Ensino Fundamental menores de idade menores de 18 anos)

Fui informado (a) sobre o convite da professora **Thais Maria Barbosa Goulart**, para que meu/minha filho(a) estudante do 8º ano do Ensino Fundamental da **Escola Estadual __________________________________**, possa participar de uma pesquisa e sei que a mesma conta com o apoio da direção dessa instituição. Fui informado (a) que essa pesquisa será desenvolvida durante as aulas de Matemática e que as intervenções envolverão os temas matemáticos previstos no currículo da disciplina. A pesquisadora ministrará as aulas sempre acompanhada pelo professor responsável da disciplina. A participação neste estudo não envolverá qualquer gasto para mim nem para a universidade, pois, as pesquisadoras providenciarão todos os materiais necessários. Sei que, mesmo que eu concorde que meu/minha filho (a) em participar do estudo, ele (a) pode desistir disso a qualquer momento.

Estou ciente de que por se tratar de uma pesquisa, algumas aulas serão gravadas em áudio e vídeo e que meu nome nem o de nenhum outro estudante, professor ou instituição, será mencionado em qualquer registro produzido. Todo o material coletado estará à minha disposição e à disposição da UFOP ao longo do estudo. As informações serão salvas em um CD e/ou DVD que serão guardados pela Profa. Ana Cristina Ferreira (orientadora dessa pesquisa), em sua sala, durante cinco anos e, depois, será destruído. Ao final da pesquisa, poderei acessá-la na íntegra na página do programa do Mestrado Profissional em Educação Matemática (www.ppgedmat.ufop.br). Soube ainda que as pesquisadoras procurarão estar atentas para eventuais situações nas quais algum participante possa se sentir incomodado com algo. Além disso, poderei me expressar livremente acerca do trabalho realizado durante as aulas por meio de avaliações orais ou escritas que serão realizadas periodicamente.

Caso deseje, por qualquer motivo, esclarecer algum aspecto ético do projeto e/ou das atividades desenvolvidas no mesmo, poderei entrar em contato com as pesquisadoras ou com o CEP através dos contatos mencionados ao final desse termo.

Nome do aluno: ____ Turma: ___________

____

Assinatura do responsável

Profa. Thais Maria Barbosa Goulart
thaismariagoulart@gmail.com – 99283-9937

Profa. Ana Cristina Ferreira (responsável)
anacf@ufop.edu.br – 3559-1241

Comitê de Ética em Pesquisa – Universidade Federal de Ouro Preto (CEP/UFOP)
Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – ICEB II – sala 29 - cep@propp.ufop.br
(31) 3559-1368 / Fax: (31) 3559-1370

Apêndice B – Termo de consentimento livre e esclarecido (professor)

Como professor (a) titular de Matemática da Escola________________________________, fui consultado (a) pela professora Thais Maria Barbosa Goulart sobre a possibilidade de a mesma realizar uma pesquisa na minha turma do 8º ano do Ensino Fundamental. Tal estudo será desenvolvido sob a orientação da professora Ana Cristina Ferreira no âmbito do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP e tem como propósito investigar as possíveis contribuições de uma proposta de ensino que utilize as proposições de Euclides na obra os “Elementos”, desenvolvida no GeoGebra e pautada na História da Matemática para a aprendizagem de Geometria plana no 8º ano do Ensino Fundamental. Fui informada que tais tarefas abordariam conceitos matemáticos presentes no currículo dos anos finais do Ensino Fundamental II e todo o trabalho seria realizado durante as aulas, com o acompanhamento do professor responsável pela disciplina. Tanto os alunos quanto o professor apenas participarão se assim o desejarem e se assinarem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. E, mesmo concordando a princípio, qualquer um deles poderá decidir deixar de participar do estudo a qualquer momento, sem que isso traga nenhuma consequência indesejável para os mesmos. Com a permissão de alunos e professor, serão realizadas observações de aulas, sendo algumas delas gravadas em áudio e vídeo, bem como serão coletados registros produzidos pelos alunos e serão realizadas algumas entrevistas. A identidade dos participantes, bem como do professor e da instituição não serão divulgadas. Estou ciente de que a pesquisa não haverá qualquer gasto para os alunos, para o professor da disciplina ou para a instituição e que as pesquisadoras procurarão evitar qualquer tipo de constrangimentos ou incômodos aos participantes. Ao final da pesquisa, os resultados serão apresentados ao Colegiado do curso e estarão disponíveis na página do Programa do Mestrado Profissional em Educação Matemática (www.ppgedmat.ufop.br). Caso eu deseje esclarecer algum aspecto ético do projeto e/ou das atividades desenvolvidas durante sua execução, sei que poderei entrar em contato com as pesquisadoras ou com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFOP. Afirmo que me sinto esclarecida acerca da proposta da pesquisa e autorizo sua realização na disciplina de Matemática da turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual dos Palmares.

____

Nome do (a) professor (a)

Apêndice C – Tarefa 1

Iniciando a viagem no tempo: a biblioteca de Alexandria, Euclides e os "Elementos"

Tempo de desenvolvimento: 50 minutos (5-10 minutos para organização)
Espaço/ambiente: Sala de aula
Materiais: Mapa Mundi (planisfério); DataShow; Vídeo/Filme sobre a biblioteca de Alexandria e Euclides; régua e compasso; e caderno de registro.

30/04/19

Vamos fazer hoje uma "viagem no tempo"! Vamos voltar ao passado para saber de onde vêm muitas das ideias que vocês estudaram e/ou que ainda estudarão em Matemática. Primeiro, vamos localizar no planisfério onde estamos e para onde viajaremos.

Observações:
- Os alunos estarão organizados em duplas;
- Cada dupla receberá um mapa Mundi;

Localize as regiões: o Brasil; Minas Gerais; Belo Horizonte e a nossa cidade, Ibirité. Onde será que fica o Egito? E a cidade de Alexandria?

Observações:
- Tempo estimado para a localização: 4-5 minutos;
- Pedir a algumas duplas compartilhem a localização dos lugares pedidos, ao mesmo tempo abrir o Google Earth para visualização no DataShow (2-3 minutos).

Agora, já sabemos para onde viajaremos. Preparem-se para assistir a um pequeno trecho de um vídeo que nos contará uma história. É um vídeo antigo, assim a imagem não é excelente, mas, se prestarem bastante atenção nas imagens e nas legendas, vão descobrir muita coisa interessante.

Observações:
- Vídeo editado: www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4 e www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8
- Tempo estimado do vídeo: 10 minutos;

Vocês já haviam ouvido falar da Biblioteca de Alexandria? Por que será que um grande guerreiro como Alexandre decide construir uma Biblioteca? Qual a importância de uma Biblioteca hoje? E naquela época?

Observações:
- Tempo estimado para discussão: 5 minutos.

Bem, nessa biblioteca trabalhou um matemático muito importante chamado Euclides. Ele organizou em vários papiros todo o conhecimento matemático que existia na época. Muito do que estudamos hoje na escola, principalmente de Geometria, vem daqueles papiros que ele produziu. Muitos se perderam, mas alguns pedaços se salvaram e as pessoas foram fazendo cópias, levando para outros países… e assim, uma parte do trabalho dele sobreviveu e é chamado de "Elementos".

Observações:
- Tempo estimado: 5 minutos.
- Paralelamente, mostrar às duplas algumas imagens de papiros e de traduções antigas dos “Elementos”.

A partir de hoje, vamos estudar algumas das ideias que Euclides escreveu. Vamos imaginar que vocês são estudantes da Biblioteca de Alexandria. São alunos de Euclides! Para que possamos estudar os “Elementos”, precisarão aprender a usar dois instrumentos básicos: régua e compasso.

Observações:
- Mostrar algumas imagens antigas da régua e do compasso e de figuras contidas nos “Elementos”

Euclides fez as construções geométricas na obra os “Elementos” utilizando apenas régua e compasso.

Vocês conhecem e/ou já utilizaram um compasso? E a régua? Sabem o que esses instrumentos podem construir?

Observações:
- Ir entregando a cada uma das duplas uma régua não graduada (feita de madeira) e um compasso, além de folhas para anotações (abaixo).
- Espera-se que alguma dupla questione sobre a régua recebida não ter graduação.

O compasso é composto por duas “pontas”: uma de ferro, geralmente chamada de “ponta seca”, usada para fixar; e a outra funciona como um lápis.

Que tipo de desenho conseguimos formar com o compasso? E com a régua? Vamos fazer alguns desenhos com esses instrumentos?

Observações:
- Pedir para que registrem em desenhos e em frases o que é possível construir com esses instrumentos.
- Pedir que algumas duplas comentem sobre o que registraram.

Apêndice D – Tarefa 2

Contextualizando o conhecimento geométrico antes de Euclides

Tempo de desenvolvimento: 50 minutos (5-10 minutos para organização)
Espaço/ambiente: Sala de aula
Materiais: Planisfério, DataShow, régua, compasso, tesoura, folhas coloridas e caderno de registro.

07/05/19

Na última aula estudamos um pouquinho sobre a história do Egito e de um grande Matemático chamado Euclides. Foi ele que teve a brilhante ideia de reunir o conhecimento matemático de sua época em uma única obra.

Vocês lembram qual era o nome dessa obra?

Vamos continuar imaginando que vocês são alunos de Euclides e que com isso precisamos saber utilizar a régua e o compasso. Na última aula vocês começaram a registrar o que era possível construir com esses instrumentos. Vamos terminar o registro?

Observações:
- Enquanto conversa com eles, distribuir o caderno e os demais materiais. Deixar uns 5 minutos para que terminem as construções. Informar a forma correta de usar o compasso, pois ainda tem duplas que possuem dificuldades ao utilizá-lo.
- Pedir que algumas duplas comentem sobre o que registraram.

As figuras que vocês fizeram no caderno (círculos, quadrados e triângulos) são figuras geométricas conhecidas desde os povos mais antigos. Desde as primeiras civilizações temos alguns registros de que a Geometria já era presente no cotidiano das pessoas.

No Egito, por volta 1900 a.C., cada egípcio teria que pagar anualmente um tributo por suas terras. Para aquelas cuja terras eram próximos ao rio Nilo, quando a água baixava, o sedimento (material sólido) que vinha com as águas do rio Nilo durante a enchente deixava as terras mais férteis.

E o que vocês acham que acontecia?

O rei era consultado sobre a situação e mandava seus homens fazer medições no terreno e assim cobrar o tributo de forma proporcional ao novo valor do terreno. Parece então que foi a partir dessa situação que a Geometria começou a surgir, a partir da medição de terras. Isso foi muito tempo antes de Euclides!

Observações:
- Deixar que comentem e/ou pergunte mais sobre essa história (5 minutos).

Precisamos compreender que todo o conhecimento que Euclides reuniu nos "Elementos" são de matemáticos de várias partes do mundo. E hoje vamos conhecer um pouco de um outro país que desenvolveu uma matemática muito interessante. Vamos viajar agora para a Índia! Vocês sabem onde fica esse país?

Observações:
- As duplas já terão o planisfério em mãos. Pedir para que localizem a Índia, que informem o continente a que pertence e que verifiquem a distância entre eles!
- Utilizar o GooGle Earth para mostrar essa "viagem" no globo terrestre.
- Pedir para que pintem a Índia no mapa que está no caderno, o Egito e o Brasil.

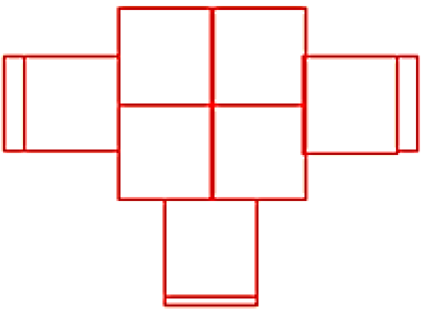
Na Índia, há muito tempo, existiu uma civilização chamada de Védica cuja religião continha vários deuses. Para agradar esses deuses, os seguidores dessa religião construíam altares para fazer rituais em busca de alimento em abundância, vida longa e vários outros benefícios.

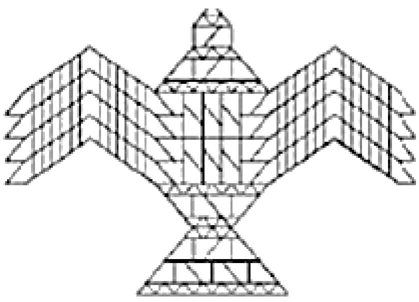
A construção desses altares deveria ser muito rigorosa e de acordo com o desejo de quem os construíam. Se quisessem ganhar o mundo do deus Brahman deveriam construir o altar em forma de uma tartaruga, mas se quisessem voar direto para o paraíso quando morressem, o altar deveria ser em forma de um falcão.

Porém, para que os rituais fossem bem sucedidos, os altares deveriam ser construídos de forma muito precisa, ou seja, a Matemática era extremamente importante para eles.

Um dos mais famosos altares indianos era o altar do Falcão. Sua base era formada por 7 quadrados e meio: o corpo do altar tinha quatro quadrados; asas e caudas tinha um quadrado cada. Para se aproximar mais de um falcão as asas e a cauda eram alongadas: asas tinham mais um quinto de um quadrado e a cauda mais um décimo de um quadrado.

Para os védicos, cada quadrado representava um deus e os retângulos representavam humanos. A figura a primeira camada do altar do Falcão.



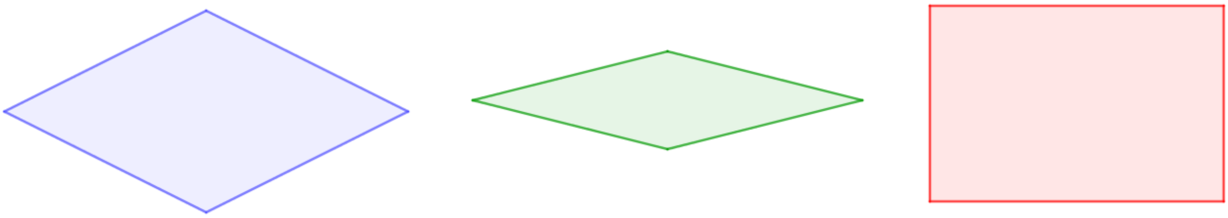


Fonte: Gaspar (2003)

Os Sulbasutras são textos que possuem instruções para a construção de altares sagrados. Eles continham a representação de altares no papel com desenhos e medidas que precisavam ser rigorosamente seguidas.
Agora, vamos aprender a construir a base desse altar para aprendermos um pouco sobre uma Geometria desenvolvida na Índia e que influenciou o trabalho de Euclides nos "Elementos". Sabemos que precisamos construir perfeitamente esse altar, então vamos estudar a figura que compõe a base do altar do Falcão.

Euclides aproveitou o processo de construção desse altar, que tinha o quadrado como uma representação dos deuses.
O que vocês podem me dizer sobre o quadrado?

Observações:
- Aguardar algumas respostas e, caso afirmem apenas sobre os lados iguais, complementar apresentando figuras com quatro lados iguais que não são quadrados.



- Distribuir os papéis coloridos para as duplas.

Então agora vamos construir um quadrado assim como Euclides construiu, usando o compasso e a régua sem marcação.

10, 14, 17 e 24/05/19

Na última aula estudamos sobre a construção de um quadrado para fazer o altar do Falcão que foi um altar muito famoso na Índia há muito tempo.

Hoje vamos construir esse altar, mas antes vamos lembrar como ele deve ser construído com régua e compasso e quero mostrar a vocês algumas definições que Euclides apresentou no início da sua obra e que fazem parte dessa construção.
Dessa vez todos terão que fazer a construção de um ou mais quadrados, será montado apenas 6 altares do Falcão na turma, 5 por três duplas e 1 por uma dupla e um trio.

Lembrem-se que, o altar do Falcão possui 7 quadrados exatamente iguais e, vamos montar um quadrado extra para construir os retângulos depois.

Observações:
- Ir mostrando o desenho do quadrado e do altar do Falcão no DataShow.
- Entregar todos os materiais.

Primeiramente um quadrado é uma figura que possui apenas duas dimensões, ou seja, comprimento e largura. Então existe uma região onde é possível construir esse quadrado.

Euclides definiu que:

"Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura".

Primeiro tracem uma linha no caderno.
Se imaginarmos essa linha crescendo infinitamente para cada um dos lados temos uma figura geométrica que Euclides a chamou de reta (ou reta ilimitada). Euclides escreveu no início da sua obra alguns significados (definições) dentre eles disse que uma "linha é comprimento sem largura".

Porém, para construir um quadrado, não vamos precisar dessa linha (a reta) inteira, apenas de um pedaço. Então, vamos marcar aqui um pedaço dessa reta que será um lado do nosso quadrado.

Euclides definiu que:

"Linha é comprimento sem largura".

E que,

"Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma".

Reta

Vamos usar aqui dois pontos para indicar o começo e o fim do lado do quadrado.
Esse pedaço de reta era chamado por Euclides de reta limitada ou segmento de reta (destacar o segmento). O ponto é uma figura que pertence à reta e está evidente aqui para indicar o início e o fim desse segmento. Euclides escreveu que as "extremidades de uma linha são pontos".
Mas, se quisermos mencionar um desses pontos será necessário dar nomes a eles, então vamos usar letras maiúsculas do nosso alfabeto, vamos chamá-los de A e B.

Marcamos pontos para determinar um lado do quadrado e sobre o ponto Euclides disse que:

"Ponto é aquilo de que nada é parte".

E que,

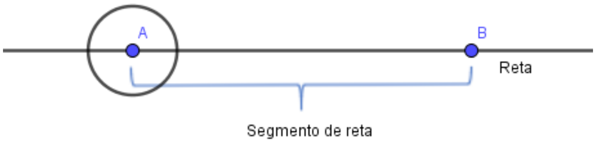
“Extremidade de uma linha são pontos.”

Como será agora que Euclides desenhou os outros lados do triângulo usando apenas esses instrumentos?

Euclides utilizou muito uma construção no trabalho dele que aprendeu com matemáticos de outras partes do mundo e nós vamos construi-la agora!

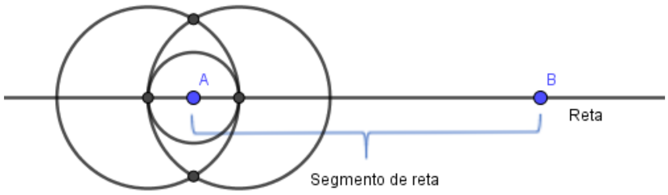
Primeiro façam uma circunferência posicionando a ponta seca do compasso no ponto A (faça uma pequena abertura no compasso).

A circunferência cruzou com a reta em dois locais e em cada um deles vamos marcar pontos. Chamamos de ponto de interseção entre a circunferência *e a reta.*



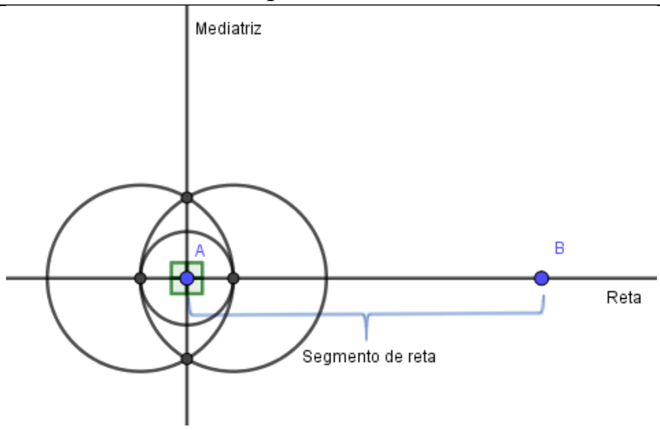
Agora, abram o compasso do tamanho da distância entre as interseções. Com a ponta seca do compasso em um das interseções, faça uma circunferência. Posicione a ponta seca na outra interseção e faça outra circunferência.

O cruzamento entre as circunferências também possuem pontos de interseção. Essas interseções também aparecem muito no trabalho de Euclides. Observem que o ponto A está exatamente no meio dos pontos de interseção. Ele pode ser chamado de ponto médio.



Sobre essa reta, Euclides definiu o nome dela e dos ângulos que ela formou com a outra reta. A linguagem que ele utilizava é bem diferente da nossa usual em sala de aula, além disso sabemos que o que temos de sua obra hoje é uma tradução de outras cópias. Euclides definiu que:

"Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos adjacentes iguais, **cada um dos ângulos é reto**, e a reta que se alteou é chamada de reta perpencidular."



A reta que acabamos de construir e que Euclides usou muito em seu trabalho é também chamada de Mediatriz.

A mediatriz que construímos cruzou com a nossa reta e formou quatro "cantos" iguais. Cada um desses cantos chamamos de ângulo reto. Toda reta que corta uma outra reta e forma ângulos retos é chamada de reta perpendicular.

A mediatriz é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.Acabamos de construir um dos conhecimentos que Euclides escreveu em sua obra: a construção da Mediatriz!

Como podemos construir os outros lados do quadrado?

Observações:

- Aguardar algumas respostas e continuar fazendo a construção da mediatriz a partir do ponto B.

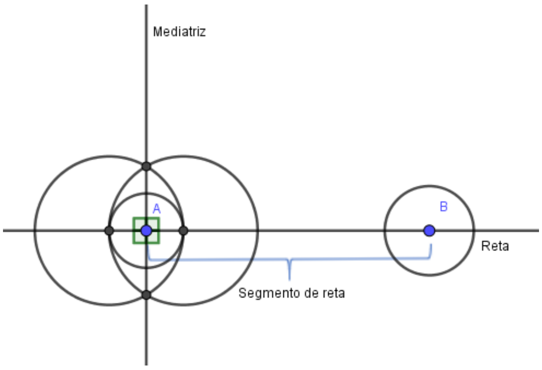
Para garantirmos que todos os ângulos do nosso quadrado sejam retos, precisamos construir outra mediatriz que passe pelo ponto B. Na última aula fizemos diferente, mas como alunos de Euclides e o altar precisa ser muito preciso na construção, precisamos ter certeza de que os demais ângulos serão ângulos retos.

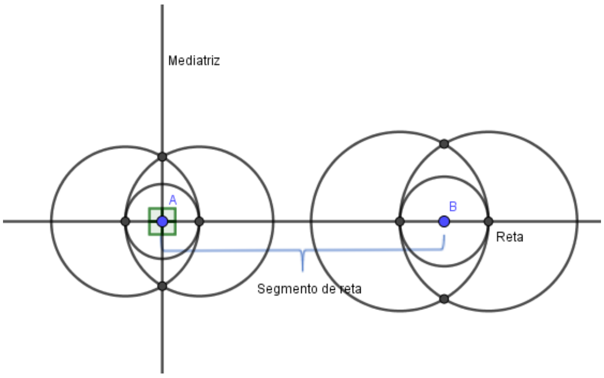
As duas mediatrizes que fizemos agora segue exatamente o que Euclides escreveu:

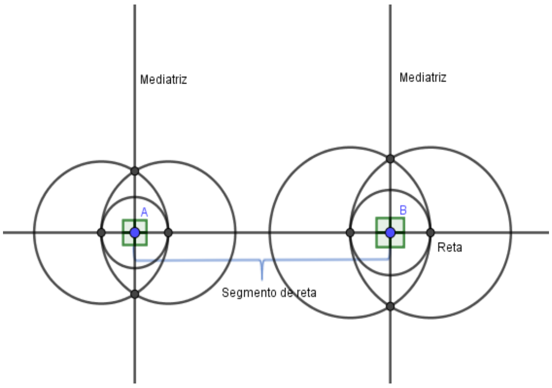
"Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto dado sobre ela."

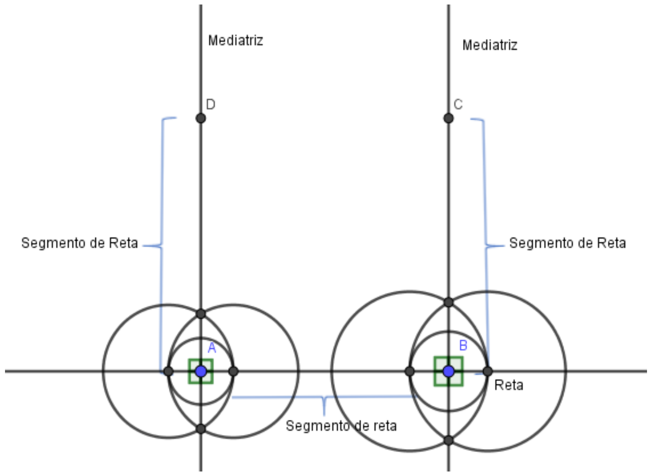
Observações:

- Construir a outra mediatriz e finalizar o quadrado.





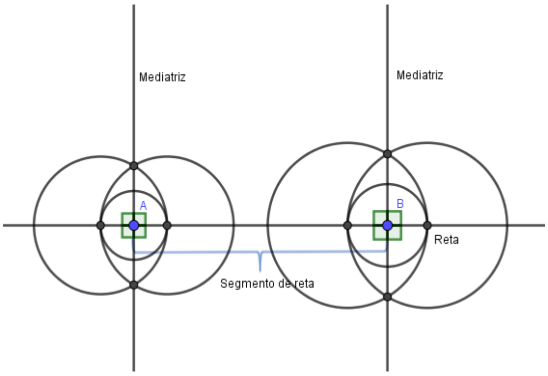


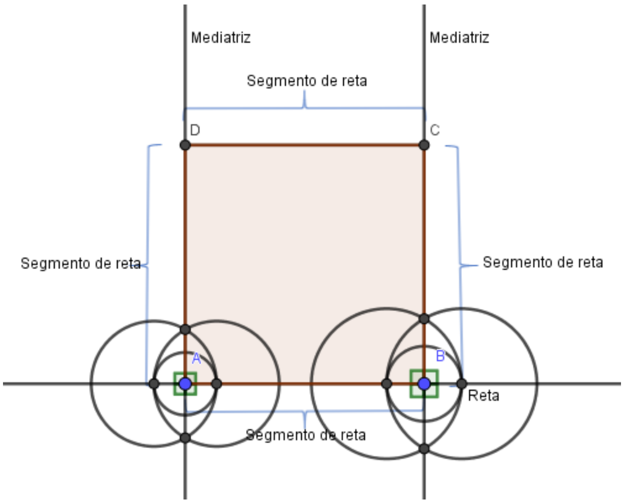


Agora temos duas mediatrizes! Como determinar os lados do quadrado agora?

Observações:

- Aguardar algumas respostas e terminar a construção.





Observações:

- Explicar as características do quadrado (ângulo reto, lados iguais) a partir da construção e que dessa forma temos a garantia de ter desenhado um quadrado.

Muito bom alunos de Euclides! Vimos como Euclides fazia a construção de um quadrado. Agora vamos construir os demais quadrados para montar o altar do Falcão. Vocês devem construir os quadrados, recortá-los e montá-los. Não se esqueçam que tudo precisa ser rigorosamente construído, pois só assim será possível ir direto para o paraíso.

Lembrem-se que precisamos de 7 quadrados exatamente iguais. Como podemos construir quadrados idênticos?

Observações:
- Deixar que eles façam a construção e auxiliar no que for preciso.

---

28 e 31/05/19

Observações:
- Aulas destinadas ao término da construção dos quadrados (se necessário), além da construção dos retângulos do altar do Falcão.

- Estamos construindo o altar do Falcão e hoje vamos aprender a construir os retângulos que compõem o altar cuja medidas são de um quinto e um décimo de um quadrado.

- Para aprender a dividir o quadrado em cinco partes iguais, ainda no Egito, vamos em uma época anterior a Euclides quando ainda nem existia a cidade de Alexandria. Pois, vamos aprender mais um pouco mais de uma Matemática que já existia na época de Euclides.

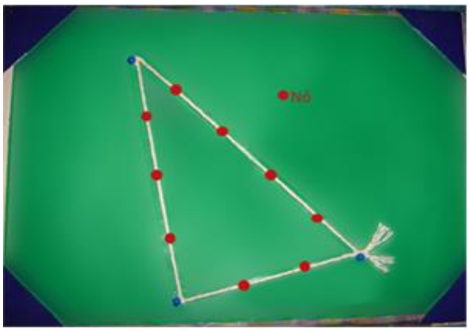
Observações:
- Abrir o GooGle Earth e mostrar novamente o Egito e o rio Nilo, pedir para que destaquem o rio Nilo no mapa.

Fonte: Google Earth

Há mais de mil anos antes de Euclides, os egípcios utilizavam um instrumento chamado “esquadro”. Esse instrumento era muito útil para a construção de casas e até mesmo de pirâmides (mostrar fotos).

Os primeiros indícios de versões desse instrumento foram através de nós em cordas.

Fonte: http://www.mom.arq.ufmg.br/mom/09_ida/idabanco4/cadastro/p_cadastro/equipamento/Corpo_centro_equipamento_tudo.php?idEquipamento=36



Fonte: http://www.cdme.im-uff.mat.br/tangrans_pitagoricos/saber_mais.html

Observações:
- Levar uma representação desse esquadro de corda através de barbante.

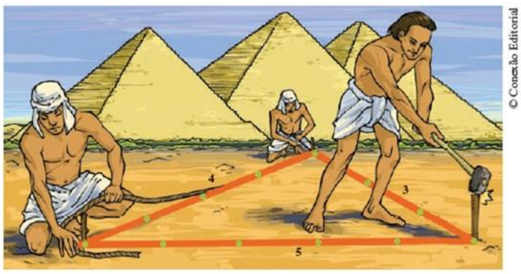
Eles usavam os nós (com distâncias iguais) para utilizar como medidas e formava um triângulo retângulo.

O vocês podem me dizer sobre o triângulo retângulo?

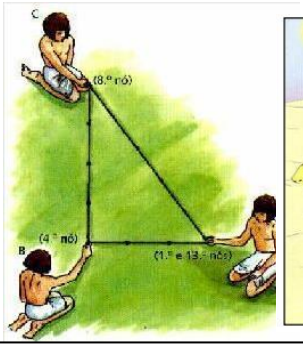
Além do esquadro de cordas, outras versões desse instrumento foram surgindo, tanto com marcações quanto sem marcações (medidas).

Para dividir o quadrado em cinco partes iguais, vamos utilizar esse instrumento porque nos auxiliará na divisão. Euclides não utilizou esse instrumento em sua obra, apenas a régua e o compasso, mas como vocês são um grupo de estudantes da Biblioteca de Alexandria e que em algum rolo de papiro contém a utilização do esquadro, vocês irão hoje utilizá-lo apenas para agilizar um pouco o trabalho.
Então vamos lá!

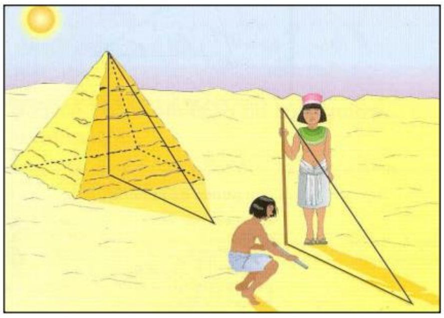
Observações:
- Ir mostrando algumas imagens sobre o uso do esquadro no Egito.



Fonte: http://professorlendoeaprendendo.blogspot.com/2013/06/plano-de-aula.html



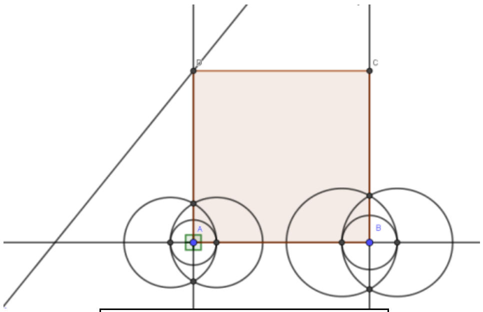
Fonte: http://www.mom.arq.ufmg.br/mom/09_ida/idabanco4/cadastro/p_cadastro/equipamento/Corpo_centro_equipamento_tudo.php?idEquipamento=36



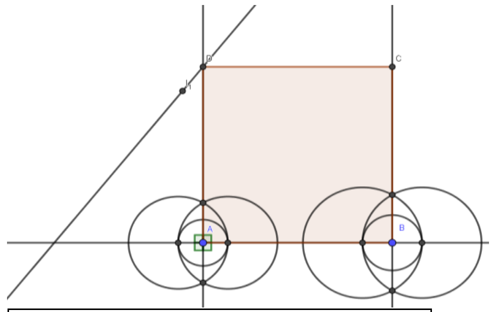
Fonte: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_pdp_silvani_margarete_budske.pdf

Primeiro tenham em mãos o 8º quadrado que vocês construíram na aula passada.

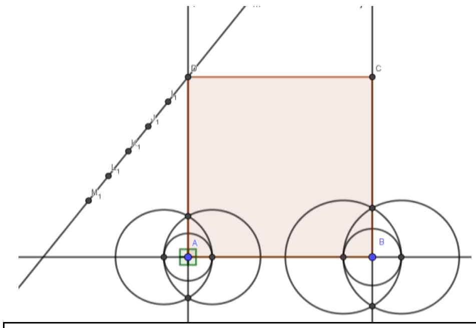
Observações:
- pretendo pedir para colar o 8º quadrado (feito na aula anterior) em uma folha para não perdê-lo e para ficar mais fácil a construção.

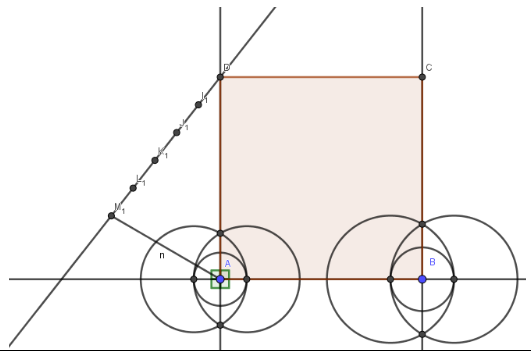


Traçar uma semirreta.

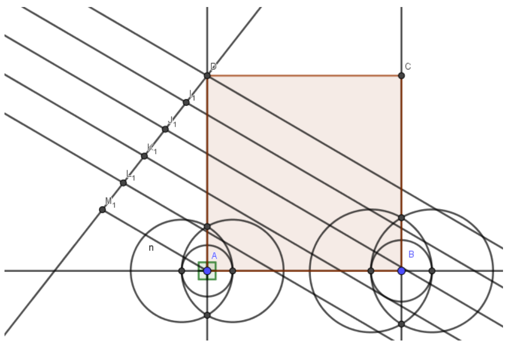


Fazer uma abertura no compasso

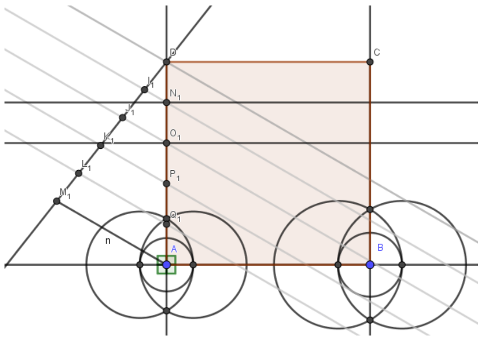




Marcar cinco comprimentos iguais.



Usar a ideia de reta paralela para marcar segmentos iguais no lado do quadrado (utilizar o esquadro).



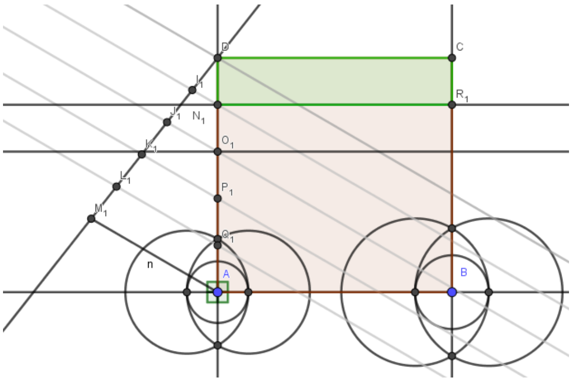
Utilizar o esquadro para construir retas paralelas ao lado do quadrado.

Perguntar a eles, o que vocês sabem dizer sobre as retas paralelas?

Observações:
- Pedir para que registrem.

Mostrar o que Euclides disse sobre retas paralelas e pedir para colar a etiqueta com a frase abaixo:

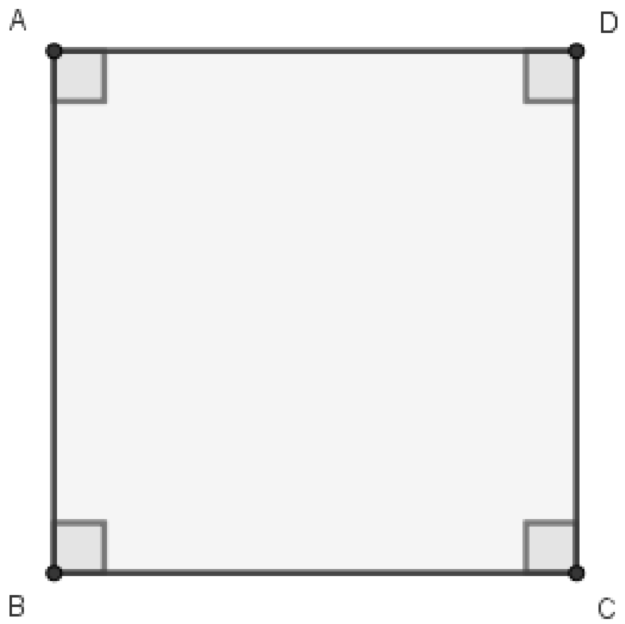
Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.



Cada grupo irá utilizar 3 retângulos de 1/5: dois para as asas e um que será dividido pela metade representando a expansão da calda que deve ser 1/10 de um quadrado.

Observações:
- Encerrar a tarefa com o término da construção do altar do Falcão.

Divisão do quadrado em cinco partes iguais



Apêndice E – Tarefa 3

Primeiros contatos com o *software* GeoGebra: construção do quadrado.

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro, GeoGebra.

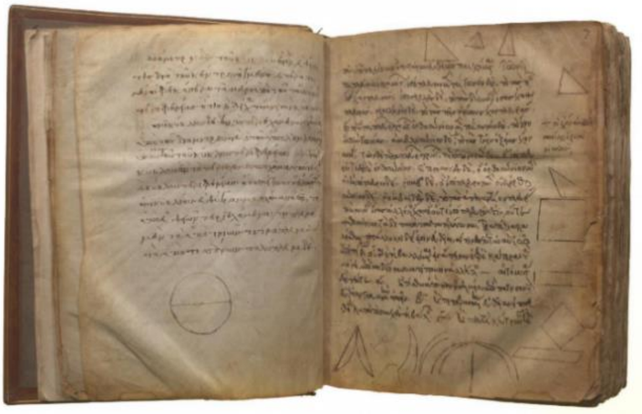
04/06/19

Na última aula, concluímos alguns altares. Como alunos de Euclides e estudantes da Biblioteca de Alexandria vocês utilizaram régua e compasso para construir os quadrados e o esquadro auxiliou na construção dos retângulos.

Sabemos que os altares indianos surgiram muito tempo antes de Euclides e eles já utilizavam a Matemática. Existiam registros em papiros, barros e couro de animais sobre a Matemática, mas eram conteúdos mais voltados para a prática do dia a dia. É por isso que Euclides foi muito importante, porque foi ele organizou e estruturou conhecimentos matemáticos de forma lógica, explicando o porquê se calculava ou fazia as construções de determinada maneira.

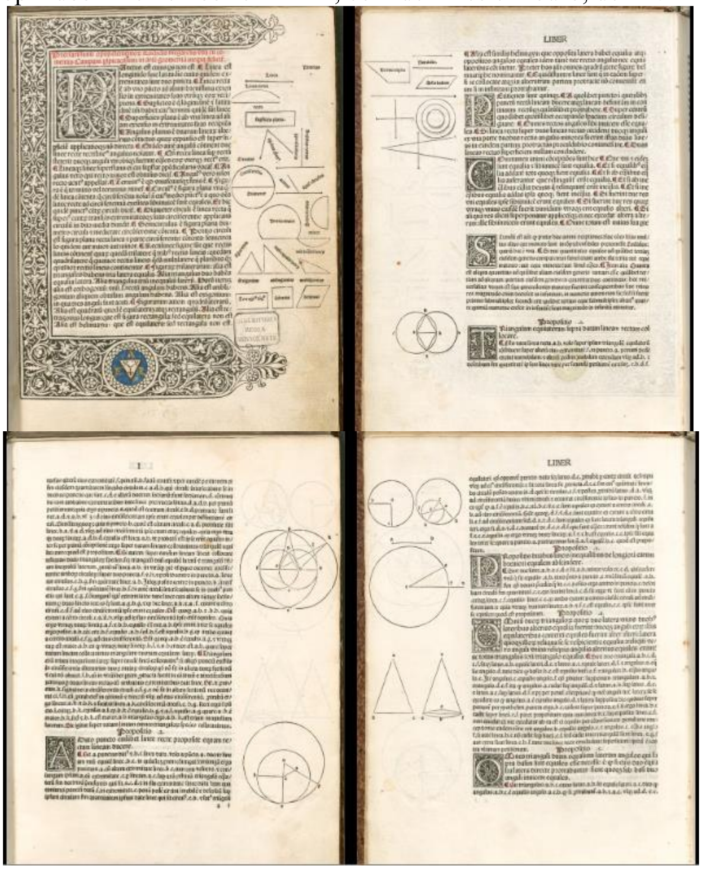
Na nossa primeira aula, mencionei que não temos mais a obra original de Euclides, mas várias cópias foram realizadas ao longo do tempo.

Cópia dos "Elementos" escrita em grego, à mão, datada de 888 d.C.



Fonte: https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions

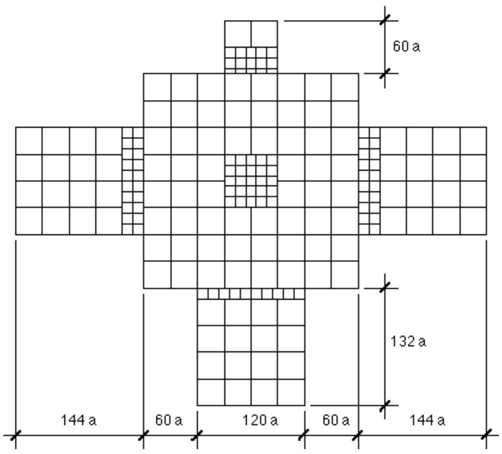
Cópia dos "Elementos" em latim, com detalhes em ouro, de 1482 + -

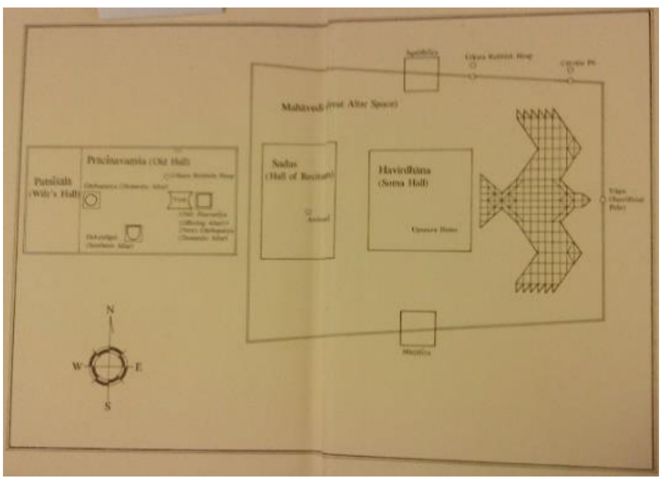


Fonte: https://www.wdl.org/pt/item/18198/view/1/6/

Os indianos usavam conhecimentos matemáticos para construir os quadrados que formam o altar do Falcão, mas como alunos de Euclides, aprenderam a construir esses quadrados utilizando a régua e o compasso.

O altar do Falcão que construíram era o mais básico deles, existem outros mais complexos:





Fonte: https://www.pinterest.co.uk/pin/571112796474610426/
http://athirathram.tripod.com/Bricks_In_to_Cows.JPG
http://athirathram.tripod.com/Altar_Of_Fire.JPG
http://www.allempires.com/forum/forum_posts.asp?TID=28550&PID=635783

Agora, vamos assistir a um pequeno trecho de um vídeo que mostra alguns indianos na construção desse altar. Não está em nossa língua, mas o importante é vocês observarem as imagens. Ele foi filmado em 1976 e representa os processos de construção de altares seguindo a tradição de mais de 4000 anos.

Vídeo editado do vídeo original disponível em:
https://www.youtube.com/watch?v=DLKHQ_HI6OI

Observações:
- Durante o vídeo, dar ênfase nas medições, na construção de uma representação que permitisse saber como posicionar os tijolos. Também destacar a construção dos tijolos e os homens trabalhando.
- Fazer um vínculo com Euclides. Nos Elementos, ele aproveita o conhecimento que esse povo tinha e registra de uma forma organizada a construção das figuras.

Como estamos no século XXI, onde já existe grandes invenções tecnológicas, a partir de agora vocês utilizarão o que aprenderam para continuar estudando Matemática.

Através de um programa (um *software*) vamos construir um quadrado utilizando o mesmo conhecimento de Euclides de mais de dois mil anos atrás, porém em um computador!

O GeoGebra é o programa matemático que será um ambiente de aprendizagem para vocês. Ele possui ferramentas para construir figuras (na parte superior esquerda) um menu (na parte superior direita) e dois campos de visualização: a janela de visualização (onde realizamos as construções) e a janela de álgebra (onde aparece o nome e a representação algébrica de cada figura construída).

Observações:
- Utilizar o Datashow para auxiliar nessa breve apresentação do GeoGebra.

Agora vamos construir o quadrado que compõe o altar? Enquanto isso iremos aprender a utilizar as ferramentas e verificar o que Euclides escreveu sobre elas.

Observações:
- Ir fazendo perguntas sobre as figuras para verificar se os alunos lembrarão da construção do quadrado.

A janela de visualização é a nossa região de construção. Será o que Euclides chamou de "superfície plana".

A primeira construção que vamos fazer é de uma linha, uma linha reta que é chamada apenas de reta. No GeoGebra, a construção da reta é dada por dois pontos que são nomeados automaticamente por duas letras maiúsculas do alfabeto. Para distinguir de outras retas, o GeoGebra também dá nomes a elas como letras minúsculas do alfabeto.
(ir explicando algumas funções como: exibir objeto, apagar, voltar, dentre outros)

Euclides escreveu que uma "linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma", ou seja, esses dois pontos que apareceram estão em destaque apenas para determinar a construção da reta, mas nela há infinitos pontos.

(Pedir para inserir pontos na reta, dar zoom na tela para verificar que é possível inserir mais pontos. Mostrar a eles que podem apagar a figura e pedir para que construam novamente uma reta.)

Como não precisamos da reta toda para construir o quadrado, vamos construir um segmento de reta que será um lado do quadrado. Procure pela ferramenta “segmento”.
(ensiná-los a configurar figuras par alterar suas cores) Botão direito -> Configurações -> Cor

Agora vamos utilizar a ferramenta compasso para prosseguir. Essa é a ferramenta que simula o compasso físico. No compasso físico como fazemos a construção de um círculo?
(nesse momento os alunos terão com eles uma folha, régua e compasso para desenhar e relembrar)

A abertura do compasso representa um tamanho (uma medida) e fazemos essa abertura manualmente. No GeoGebra, o Compasso precisará também de uma medida, para isso você deverá criar um segmento que represente a medida desejada. Clique na ferramenta Compasso, em cada uma das extremidades do segmento e no ponto em que deseja fixar o centro do círculo. *(mencionar que o GeoGebra também nomeia os segmentos com letras minúsculas)*

Para marcar os pontos de interseção você pode utilizar a ferramenta Ponto ou a ferramenta Interseção de Dois objetos.

Agora construímos duas circunferências em que precisamos das interseções delas para fazer a mediatriz (ou a perpendicular). Qual a medida vamos utilizar?
(construir as duas circunferências e traçar uma reta nas suas interseções)

Sobre a reta perpendicular Euclides escreveu: “Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada de perpendicular àquela sobre a qual se alteou”.
(lembra-los da linguagem e das palavras que possam ser desconhecidas)

Vamos levantar outra perpendicular sobre a outra extremidade do nosso segmento. (*deixar que façam sozinhos)*

07/06/19

Hoje, alunos de Euclides, vamos terminar a construção do quadrado e para isso preciso que auxiliem uns aos outros para terminarmos o mais rápido possível.

Na última aula já tínhamos construído algumas figuras geométricas na janela de visualização (superfície) do GeoGebra: a linha que Euclides a chamou de reta, o segmento de reta em que Euclides disse ter pontos em suas extremidades, os pontos de interseção e os círculos.

Observações: Ir mostrando e colando as plaquinhas com as definições.

A interseção dos círculos nos permitirá a construção de uma nova figura geométrica: a perpendicular. Sobre a reta perpendicular Euclides escreveu:

"Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada de perpendicular àquela sobre a qual se alteou".

Observações: lembrá-los da linguagem e das palavras que possam ser desconhecidas. As duplas que terminaram a construção do quadrado solicitar que construam mais quadrados para o altar e/ou auxiliem os colegas.

Vamos levantar outra perpendicular sobre a outra extremidade do nosso segmento. Essa reta Perpendicular também é chamada de reta Mediatriz que significa ser uma reta Perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.

Observações: deixar que façam sozinhos.

Precisamos agora determinar mais dois lados do nosso quadrado, para isso vamos continuar usando a nossa ferramenta compasso. Anteriormente, fazíamos apenas uma "marcação" nas perpendiculares, mas vocês perceberam que o compasso do GeoGebra nos fornece diretamente o círculo? Então precisaremos construir dois círculos com a medida no lado do quadrado (o primeiro segmento que construímos) e o seu centro nas extremidades desse lado (segmento).

Para terminar o nosso quadrado vamos utilizar uma ferramenta chamada "Reta paralela". Euclides também definiu o que seriam as Paralelas:

"Paralelas sã retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Observações: pedir para que construam segmentos nos lados do triângulo e que alterem suas cores.

Sobre o ângulo reto do quadrado:

Usar o GeoGebra do computador principal para mostrar a necessidade de construir perpendiculares.

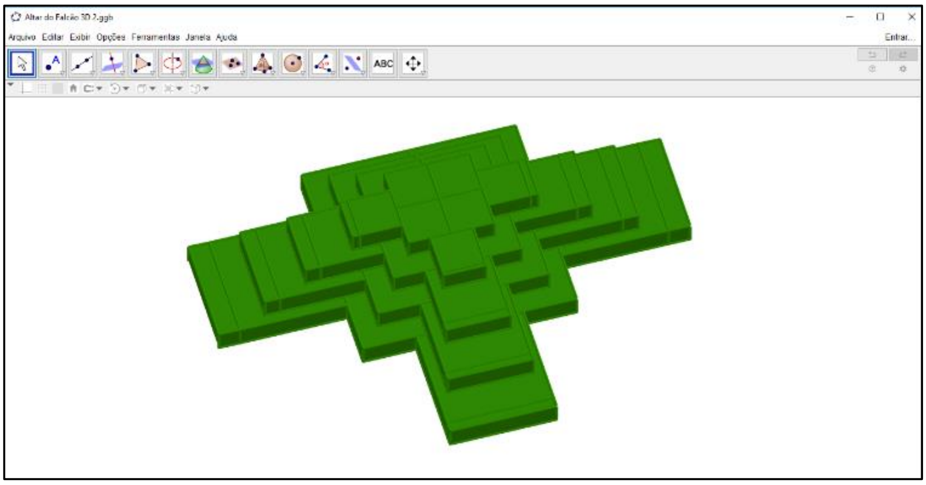
Usar um quadrado com todas as figuras utilizadas para a sua construção e destacar os seus ângulos retos.

Construir um quadrilátero (tentar aproximá-lo do quadrado) com segmentos de retas sem a malha quadriculada e, usar a ferramenta ângulo para destacar os ângulos dos quatro vértices.

O altar do falcão no GeoGebra 3D

Vocês observaram no vídeo alguns indianos fazendo a representação do altar com peças menores? Aquela representação era para visualizar como montariam o altar do Falcão com os tijolos maiores. Já pensou se eles tivessem o GeoGebra naquela época?

Observações: Mostrar a imagem do altar do falcão do GeoGebra.



Exemplo de um modelo 3D do altar do Falcão com várias camadas.

Apêndice F – Tarefa 4

O círculo e a circunferência

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro, GeoGebra.

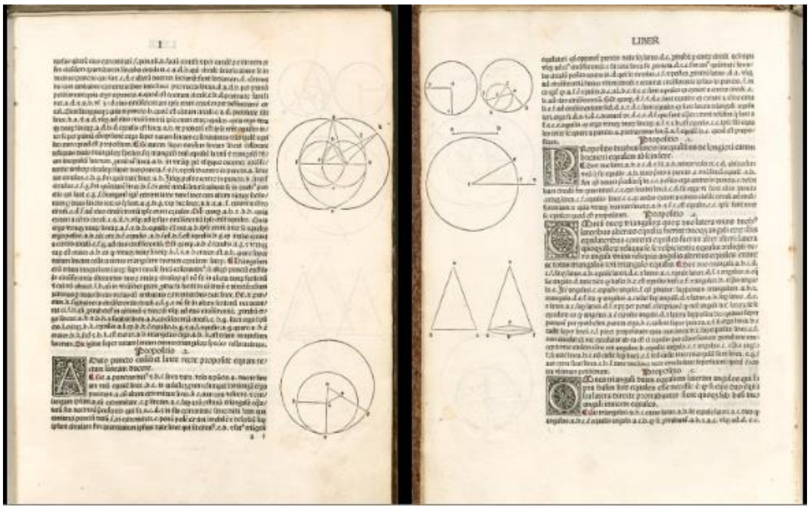
11 e 18/06/19

O círculo e a circunferência

Agora que vocês já sabem fazer construções no GeoGebra, vamos prosseguir e aprender a fazer novas construções. Antes, precisamos aprender sobre uma figura que está muito presente na obra de Euclides: o círculo.

Observações: Mostrar novamente as versões antigas dos "Elementos" para visualizarmos os círculos.

Cópia dos "Elementos" escrita em grego, à mão, datada de 888 d.C.
Fonte: https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions



Cópia dos "Elementos" em latim, com detalhes em ouro, de 1482 + -
Fonte: https://www.wdl.org/pt/item/18198/view/1/6/

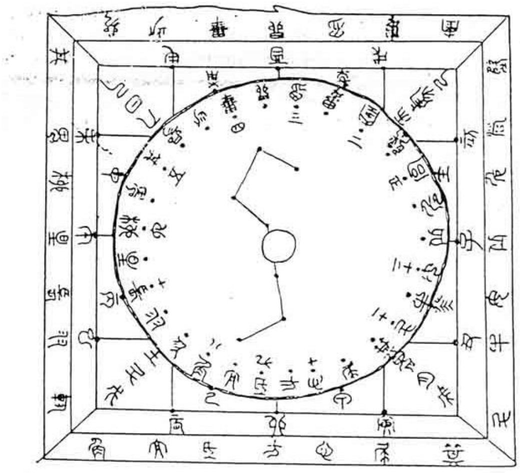
Usamos os círculos para construir as perpendiculares do quadrado conforme os "Elementos" de Euclides.

Muito antes de Euclides, várias civilizações utilizavam os círculos, dentre eles a China. Vocês sabem onde fica a China?

Observações: Pedir para que localizem no mapa colorido e, logo em seguida, pedir para que pintem o país no mapa preto e branco do caderno.

As origens do interesse chinês pelo círculo estão relacionadas com a astronomia e, por meio dela, com a natureza divina do céu, das estrelas e o movimento dos objetos celestes.

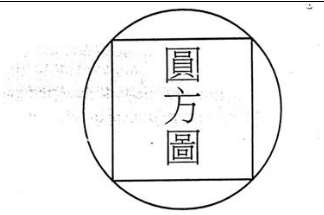
Calendário chinês



No século III a. C., na dinastia Zhou, é produzido um texto chamado Zhoubi no qual Shang Gao, um sábio, conversa com o duque de Zhou.

"O quadrado pertence à Terra, e o círculo pertence ao Céu. O Céu é um círculo e a Terra é o quadrado. Os números do quadrado são básicos e o círculo é produzido a partir do quadrado".

Fonte: http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado



As imagens a seguir aparecem nas primeiras edições do Zhoubi.

quadrado dentro do círculo (yuang fang)

círculo dentro do quadrado (fang yuan)

Fonte: http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado

A relação entre Céu e Terra, de acordo com a religiosidade chinesa, acontece em ambos sentidos, ou seja, não apenas os deuses influenciavam os homens, mas a atitude moral e as ações dos homens também afetavam o Céu e os deuses. O círculo era muito utilizado pelos povos antigos e Euclides também destacou essa figura em seus livros, sempre usando régua e compasso.

Como alunos de Euclides, vocês já construíram círculos para formar novas figuras. Agora, me respondam:
Como um círculo é construído usando um compasso? Se quisermos fazer círculos maiores ou menores, como faríamos? E se quisermos construir círculos do mesmo tamanho?

No GeoGebra, existem várias ferramentas para construir círculos:
(mostrar as definições de Euclides a partir das construções dos círculos no GeoGebra)

- Círculos dados centro e um dos seus pontos (construir)

Euclides escreveu que seria possível “com todo centro e distância, descrever um círculo” (Postulado 3)

E ainda, disse que “o ponto é chamado centro do círculo”.

Ele disse então que “círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

Observações: Mostrar a diferença de círculo e circunferência e a distância do centro até a circunferência é chamada de raio.

O ponto B pode ser movimentado, pois é o ponto que definiu o tamanho do seu círculo. Veja o que acontece!

Construa uma reta que passa pelo centro do círculo. Faça um segmento que passa pelo centro e tem extremidades na circunferência. Temos então o diâmetro!

Euclides também escreveu o que era diâmetro. Ele disse que "diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois".

Um dos seus pontos pode ser movimentado. Qual é a relação entre o raio e o diâmetro?
- Círculos dados centro e raio (construir)
- Compasso (construir)

Euclides construiu várias figuras geométricas a partir dos raios de circunferências. Então agora, com uma ou mais circunferências, vocês usarão a criatividade para construir figuras geométricas utilizando apenas raios.

Observações: Finalizar a tarefa com a construção de figuras geométricas utilizando apenas raios da circunferência.

Apêndice G – Tarefa 5

Construção do triângulo isósceles e a exploração da proposição 3 do Livro I

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e GeoGebra.

25/06 e 01/07/19

Construção e breve exploração do triângulo isósceles.

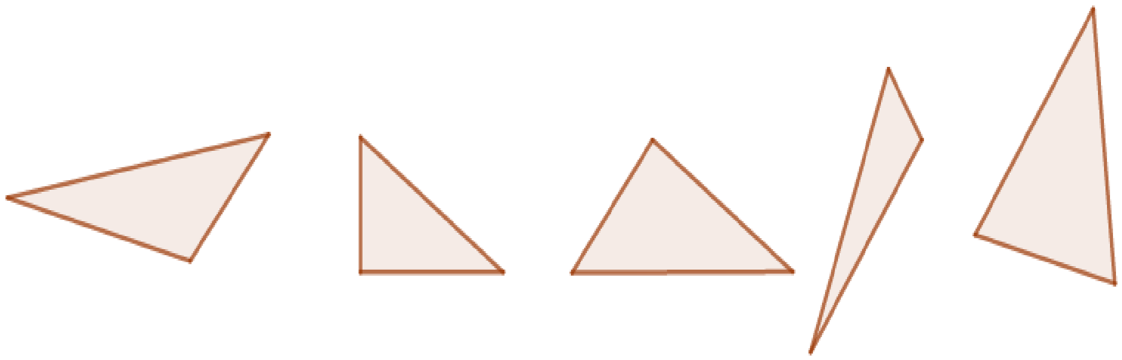
Agora que já sabemos o que é raio e diâmetro de uma circunferência e sabemos como construir figuras utilizando esses raios, vamos aprender com Euclides sobre uma outra figura: o triângulo.

Antes disso, vamos assistir a um pequeno vídeo que contará um pouquinho da utilização dos triângulos por povos antigos.

Vídeo: https://youtu.be/dsjiWChrjE4
(O legado de Pitágoras, Ep.1 – Documentário 2010) ⇒ Trechos de 22:33 a 26:00 e de 29:09 a 30:15.

Figuras tão importantes para várias civilizações não poderiam ficar fora do trabalho de Euclides. E, como aprendizes de Euclides, também vamos aprender bastante!

Observações: Afixar no quadro vários tipos de triângulos, por exemplo:



O que vocês saberiam me dizer sobre esta figura?

Observações:
- Dependendo de como for as respostas, comentar que quando as crianças estão começando a aprender sobre figuras geométricas elas acham que só existe um tipo de triângulo e que as demais figuras são diferentes de triângulos.
- Apresentar as informações sobre os triângulos (vértices, segmentos/lados, …) logo após a colagem das figuras.

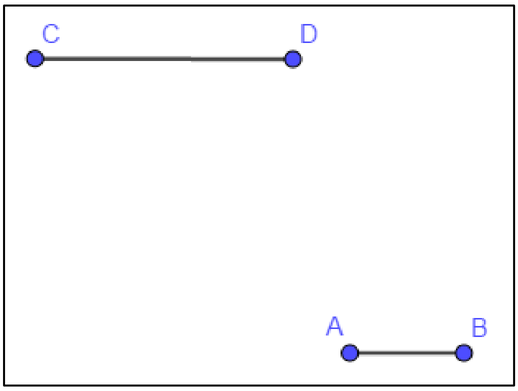
CONSTRUÇÃO 1: Euclides construiu os triângulos e várias outras figuras utilizando o compasso, ou seja, as circunferências. Agora vamos aprender a construir um triângulo utilizando também a ferramenta “Compasso” do GeoGebra: vamos construir um triângulo isósceles!

O que é um triângulo isósceles?

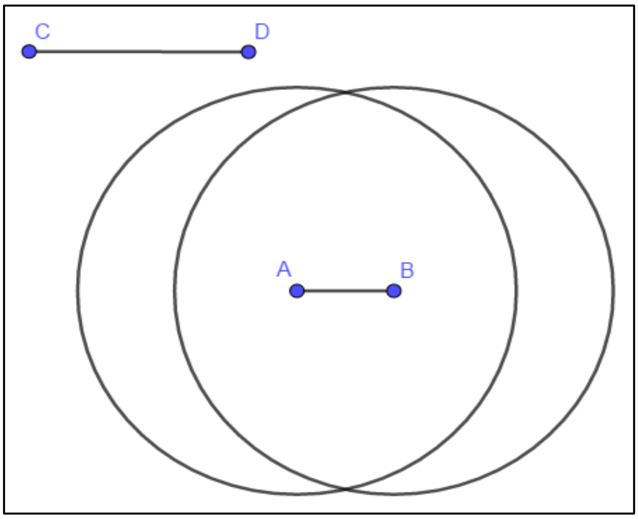
Quem pode me mostrar qual ou quais das figuras coladas no quadro representa um triângulo isósceles?

Quais são suas características?

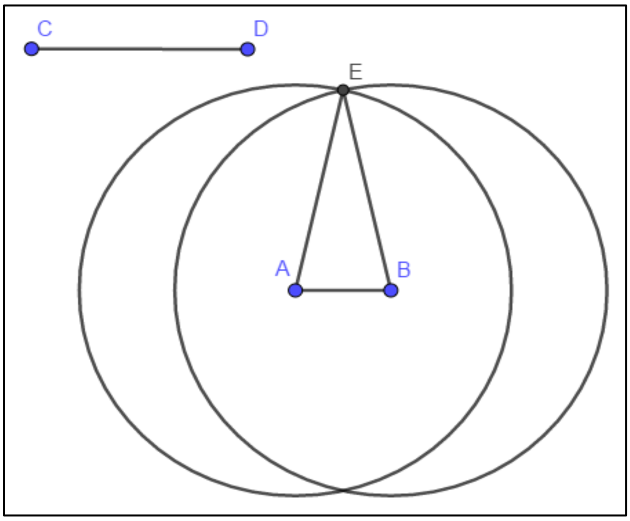
Construam dois segmentos (AB e CD) sendo CD maior que AB.



Utilizem a ferramenta “Compasso” para construir duas circunferências com centros em A e B e raio CD.



Com um dos pontos de interseção das circunferências, construam um triângulo.



Ideias de Euclides a serem utilizadas na construção (já estarão coladas no quadro):

Definição 1 – Ponto é aquilo de que nada é parte.
Definição 2 – E linha é comprimento sem largura.
Definição 3 – Extremidades de uma linha são pontos.
Definição 15 – Círculo é uma figura plana contida...
Definição 16 – E o ponto é chamado centro do círculo.
Postulado 3 – Com todo centro e distância, descrever um círculo.

Registro 1: *Tentem agora explicar (registrando no caderno) o porquê a sua construção final gerou um triângulo isósceles.*

Observações:
- Aguardar o registro dos alunos e compartilhar algumas respostas.
- Clique e arraste um dos pontos do segmento CD. O que vocês observam?

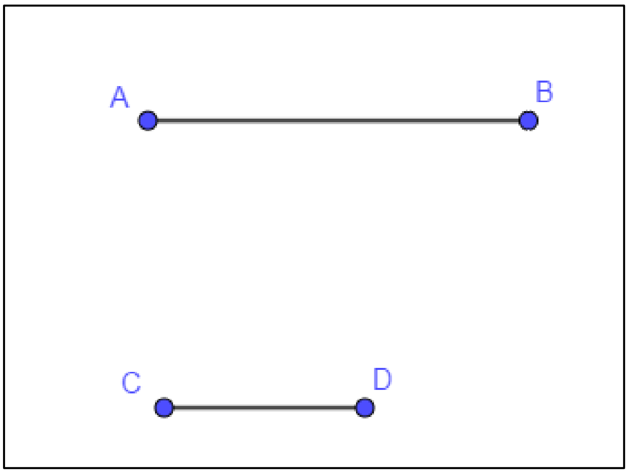
Na época de Euclides, para visualizar triângulos de tamanhos diferentes era necessário fazer várias construções, já no GeoGebra...

02/07/19

Exploração da proposição 3

CONSTRUÇÃO 2: Agora, construam dois segmentos de reta (AB e CD), sendo que AB deve ser maior que CD.

Agora, é com vocês! Destaquem do segmento maior (AB), um outro segmento igual ao segmento menor (CD).



Registro 2: *Expliquem no caderno como fizeram esse processo e tentem explicar por que fizeram assim. Também preciso que colem as ideias de Euclides que vocês observam nessa construção.*

Vocês chegaram a um conhecimento que Euclides registrou em sua obra há mais de dois mil anos! Ele começou a apresentar esse conhecimento assim:

3. Dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor.

"Sejam duas retas desiguais dadas AB e CD, da qual AB é maior; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual a menor."

Observações: Mostrar a continuação da proposição caso os alunos demonstrem interesse.

Apêndice H – Tarefa 6

A proposição 1 do Livro I: Construção do triângulo equilátero

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e GeoGebra.

05/07/19

Retomando a construção do triângulo isósceles para exploração das proposições 5 e 6.

CONSTRUÇÃO 1: Hoje vamos continuar estudando o triângulo isósceles.

Faça a construção de um triângulo isósceles assim como aprendemos na última aula: construam o segmento AB que será a base do triângulo e o segmento CD que será a medida dos lados iguais.

Utilizem a ferramenta "Ângulo" para visualizar as medidas dos ângulos do triângulo.

Registro 1: O que vocês observam? (Registrem).

Utilizem a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" para visualizar as medidas dos lados do triângulo.
Clique e arraste um dos pontos do segmento CD.

Registro 2: registrem as medidas na tabela do seu caderno.

Medida dos ângulos iguais	Medida dos lados iguais	Medida da base

Registro 3: Agora pensem e registrem no caderno: o que acontece em todos os casos quando construo um triângulo sabendo que dois dos seus lados terão a mesma medida?

Euclides já sabia disso quando disse:

5. Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si [...].

E se construíssemos um triângulo sabendo que dois ângulos terão a mesma medida, também dois de seus lados terão a mesma medida.

Euclides também já sabia disso. No ítem 6 do Livro 1 dos "Elementos" ele apresenta essa descoberta! Vejam:

6. Caso dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, os lados que se estendem sob os ângulos iguais também serão iguais entre si.

Explicando a frase para os alunos: Euclides quis dizer que, se no triângulo houver dois ângulos de mesma medida, então dois lados desse triângulo (um de cada ângulo) também terão as mesmas medidas, ou seja, o triângulo será isósceles!

09/07/19

Exploração da proposição 1

CONSTRUÇÃO 2: E se um triângulo tiver todos os lados com a mesma medida da sua base? Como faremos?

Observações: Ouvir algumas respostas.

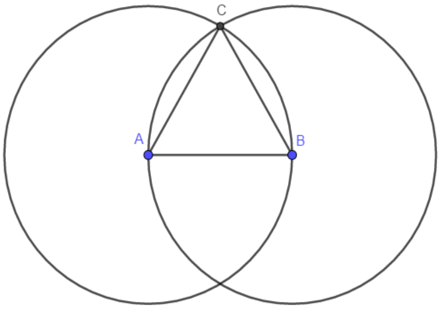
No livro 1 de os "Elementos", Euclides começou apresentando algumas definições (apontar para o quadro). Em seguida, escolheu como primeira proposição a seguinte:

1. Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.

O que é um triângulo equilátero?
Quem pode me mostrar qual ou quais das figuras coladas no quadro representa um triângulo equilátero?
Quais são suas características?
Como podemos construir um triângulo equilátero?

Agora é com vocês!

Observações: Durante a construção, pedir para os alunos colarem as ideias de Euclides (definições) possíveis de serem utilizadas na construção:
Definição 1 – Ponto é aquilo de que nada é parte.
Definição 2 – E linha é comprimento sem largura.
Definição 3 – Extremidades de uma linha são pontos.
Definição 15 – Círculo é uma figura plana contida...
Definição 16 – E o ponto é chamado centro do círculo.
Postulado 3 – Com todo centro e distância, descrever um círculo.



Registro 4: Registrem como estão pensando.

Observações: Esperar que pensem um pouco, observar as construções das duplas.

Em todas as construções há um conhecimento Matemático. Euclides sempre apresentava justificativas para o conhecimento abordado, explicando o porquê e provando matematicamente que aquele conhecimento era verdadeiro.

Um triângulo equilátero é aquele que possui todos os lados com a mesma medida, a partir da construção que fizeram, gostaria que pensassem e respondessem no caderno de vocês:

Registro 5: Por que podemos afirmar que o triângulo que construímos é equilátero? Respondam no caderno e colem as ideias de Euclides que estão presentes nessa construção.

Observações: Esperar que registrem as respostas e compartilhar algumas.

Registro 6: Agora, observem os três ângulos desse triângulo, o que vocês podem dizer sobre eles?

Observações: Esperar que registrem as respostas e compartilhar algumas.

Utilizem a ferramenta “Ângulo” para verificar as medidas dos ângulos.

Apêndice I – Primeira Avaliação do Trabalho

Avaliando o trabalho

1) O que você achou das aulas ministradas por Thaís?

a) tarefas com o mapa mundi
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

b) construção com régua, compasso
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

c) vídeos (Biblioteca da Alexandria, altar do Falcão)
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

d) construção do altar do Falcão
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

e) tarefas no Laboratório de Informática
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

f) construção de figuras com o "Compasso" do GeoGebra
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

g) ideias da obra "Elementos" de Euclides
( ) gostei muito ( ) gostei um pouco ( ) não gostei

2) Conte o que você aprendeu sobre:

a) a Matemática dos povos antigos?

b) a Biblioteca de Alexandria?

c) Os "Elementos" de Euclides?

3) Procure se lembrar de cada aula e expresse sua opinião sobre as tarefas realizadas em sala de aula e no laboratório. Como você avaliaria o trabalho realizado?

4) Em sua opinião, como surgem os conhecimentos matemáticos? Por que nós utilizamos muitos conhecimentos que já eram conhecidos por povos bem antigos?

5) Em sua opinião, qual a importância dos livros de Euclides?

6) Pensei em realizar o mesmo trabalho em outra escola. Como você acha que eu poderia melhorar as tarefas propostas?

7) Você gostaria de realizar mais algumas tarefas no laboratório, em agosto, quando as aulas voltarem? Por quê?

Apêndice J – Tarefa 7

Feedback das tarefas anteriores e a construção do triângulo escaleno

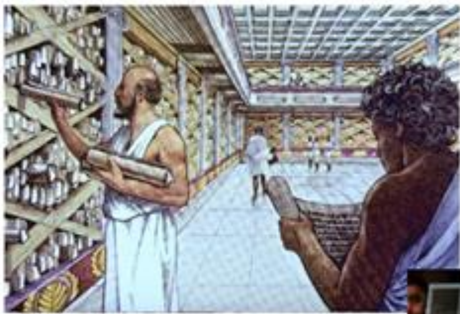
Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, GeoGebra e caderno de registro

20/08/19

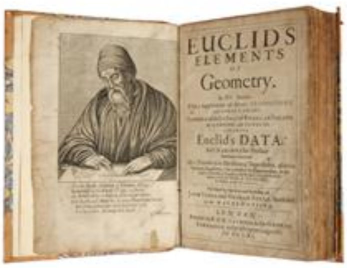
Relembrando o trabalho

Durante as nossas aulas fizemos uma viagem no tempo para saber de onde vêm muitas das ideias que vocês estudaram e/ou ainda estudarão em Matemática.

Gostaria de saber o que vocês se lembram do trabalho que fizeram?
Vocês se lembram dessas imagens?

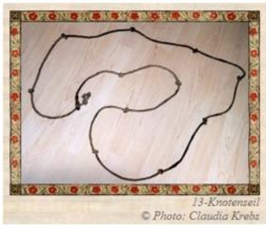


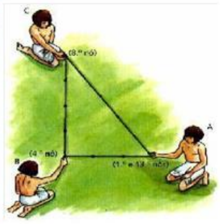

Sobre o que era os “Elementos” de Euclides?

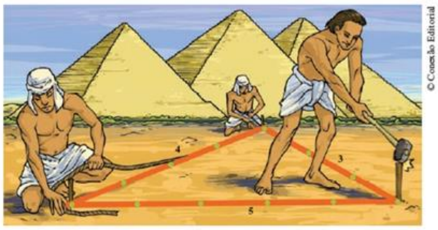



Estudamos algumas das ideias que Euclides (um importante matemático que viveu no século III a.C.) escreveu na sua obra chamada “Elementos”. Ele escreveu essa obra quando trabalhava na biblioteca de Alexandria, é nesse lugar que conhecimentos sobre várias coisas e de várias partes do mundo eram reunidos. Euclides estruturou os conhecimentos matemáticos daquela época em uma única obra.

Mas, para estudarmos essas ideias de Euclides fizemos algumas viagens a períodos anteriores a ele, para conhecer um pouco sobre a Matemática produzida antes de Euclides (que provavelmente influenciou o seu trabalho) e aprender um pouco sobre Geometria.
Primeiramente, ainda no Egito (bem antes de Euclides) vimos que a Geometria parece ter surgido a partir das medições de terra.







Observações: usar o GooGle Earth para sair de Minas Gerais (Ibirité) para o Egito. Mostrar o Rio Nilo.

Onde era esse lugar?

Viajamos para a Índia onde estudamos sobre a civilização Védica que construíam altares para alcançar bençãos.

Que Matemática estava envolvida nessas construções?

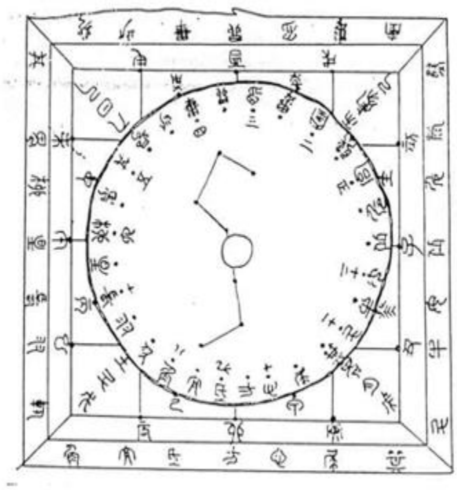
A partir da construção do altar do Falcão estudamos o que Euclides chamou de ponto, reta, segmento de reta, perpendicular e paralelas. Além disso, estudamos também sobre o quadrado e suas características.

Fizemos essas construções com a régua não graduada e compasso físicos e posteriormente com o GeoGebra. Foi um longo trabalho, mas vocês foram muito bem!

E dessas imagens, se lembram? De onde eram?

quadrado dentro do círculo (yuang fang)

círculo dentro do quadrado (fang yuan)

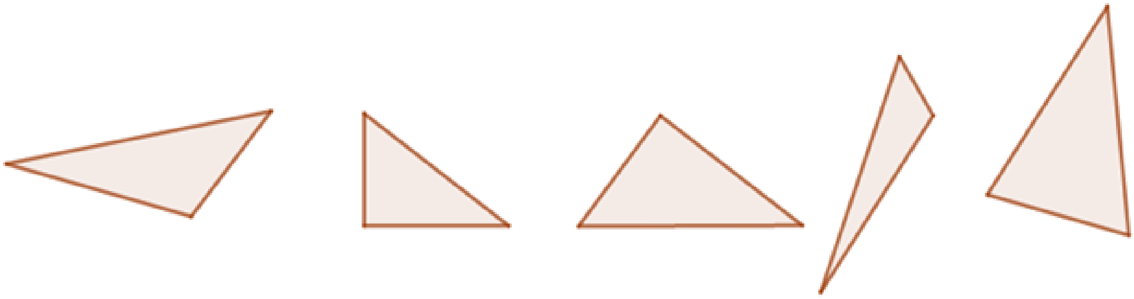


Viajamos para a China e vimos o quanto círculos e quadrados eram importantes para eles.

Alguém se lembra o que os círculos e os quadrados representavam para os chineses?

Os círculos para os chineses estavam relacionados com a Astronomia e com a natureza divina do céu. Essas figuras geométricas representavam o Céu e a Terra (círculo e quadrado, respectivamente).

Estudamos então sobre os círculos, estudamos sobre a circunferências e seus elementos (centro, raio e diâmetro) para então construir figuras que também estão muito presentes na obra de Euclides: os Triângulos.



23/08 e 13/09/19

Construção do triângulo escaleno

Vamos continuar imaginando que vocês são alunos de Euclides, alunos que continuam utilizando a régua não graduada e o compasso, porém no GeoGebra. Quem se lembra de como fizemos para construir um triângulo?

Observações: usar o GeoGebra para fazer a construção do triângulo a partir das respostas das duplas. Relacionar as ideias de Euclides com as ferramentas do *software*. Ao mesmo tempo as duplas também farão a construção no GeoGebra.

O que é mesmo um triângulo equilátero? E um triângulo isósceles? Como construir um triângulo isósceles no GeoGebra? ***Observações:*** usar o GeoGebra para fazer a construção do triângulo a partir das respostas das duplas. Relacionar as ideias de Euclides com as ferramentas do *software*. Ao mesmo tempo as duplas também farão a construção no GeoGebra. Existe algum outro tipo de triângulo? Qual? Quais são suas características?

Observações: Mencionar sobre o triângulo equilátero, pois muitos conseguiram construí-lo sem ajuda. Mostrar o triângulo construído no GeoGebra. Discutir sobre o porquê poderíamos afirmar que aquele tipo de construção gerava um triângulo equilátero.

- Sobre o triângulo escaleno (após discutir suas características): Tentem construir agora um triângulo escaleno. Euclides também escreveu sobre como construir esse tipo de triângulo!

Apêndice K – Tarefa 8

A condição de existência de um triângulo: proposições 20 e 22 do Livro I

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, GeoGebra e caderno de registro

27/09/19

Caminhando para a descoberta da proposição 20

Irei distribuir a cada dupla, algumas tríades de medidas e quero que vocês construam triângulos com essas medidas. Depois, registrem sobre as características dos triângulos construídos.

Exemplo de medidas:

4, 7, 9 e 3, 3, 5

6, 4, 3 e 1, 2, 2

5, 6, 8 e 5, 5, 5

8, 4, 6 e 4, 2, 4

O que vocês observaram?

Agora, vamos montar triângulos com alguns palitinhos. Entregarei quatro palitos de tamanhos diferentes para cada dupla e vocês devem escolher três deles para formar um triângulo.

Escolham um novo conjunto de palitos para testar. O que aconteceu?

Vocês receberão um novo conjunto de medidas para construir mais uma vez esses triângulos.

Exemplo de medidas:

3, 2, 1
4, 5, 1
8, 4, 3
7, 5, 2
6, 3, 2
5, 7, 2

Provavelmente, quando esse problema surgiu antigamente, os matemáticos e até mesmo Euclides, ficaram assim como vocês, se perguntando por que com algumas medidas é possível construir um triângulo e outras não.

Imaginem que Euclides propôs essa tarefa para vocês, de descobrirem um jeito de identificar quais eram as medidas corretas. Olhem bem para os números, tentem descobrir algum padrão... Façam testes no papel, no GeoGebra.

Registrem o que estão pensando.

Observações: Deixar que os alunos pensem e pedir para que registrem tudo na folha específica. Pode ser que ninguém chegue a resposta, mas observar bem as estratégias que estão utilizando.

Para a finalização desse momento haverá duas opções:

1) Se descobrirem os padrões nos números

Vocês foram muito bem nessa tarefa, fizeram uma descoberta incrível.
É um descoberta importante porque é sobre a condição de existência de um triângulo, assim não é possível construir um triângulo com quaisquer medidas!

Para essa descoberta, Euclides escreveu a seguinte frase:

20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.

2) Se não conseguirem fazer a descoberta

Imaginem que Euclides deu uma dica para vocês, para tentarem descobrir quando é possível construir um triângulo e quando não será. A dica é a seguinte: ao fazer operações de soma com esses números, dois a dois, podemos descobrir algo.

(Caso ainda não descubram)

O que tentamos descobrir foi sobre a condição de existência de um triângulo em que não é possível construir um triângulo com quaisquer medidas, existe um condição!

Sobre essa condição Euclides escreveu:

20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.

O que vocês entendem sobre essa frase?

Vamos verificar?

Observem as medidas em que conseguiram construir um triângulo e aquelas que não foi possível construí-lo. Registrem!

Agora pensem e construam um triângulo escaleno com medidas diferentes daquelas já utilizadas. Registrem!

Muito bem alunos de Euclides! Vocês descobriram e aprenderam sobre conhecimentos que grandes matemáticos descobriram.

Estudamos nesse período, algumas ideias que Euclides escreveu sobre a Geometria, conhecimentos que estão presentes na formação de vocês.

Nesse tempo viajamos para alguns países e descobrimos a Matemática utilizada pelos povos antigos, uma Matemática que foi explicada na obra de Euclides chamada de "Elementos".

Apêndice L – Avaliação Final do Trabalho

Finalizando o projeto: o que aprendemos?

Nome: ________________________

1) Nas escolas nas quais leciono, escuto os alunos comentarem muitas coisas sobre a Matemática e sua história. E você, o que pensa sobre cada ideia a seguir? <u>Escreva sua opinião e explique por que pensa assim</u>. Se o espaço for insuficiente, use o verso da folha.

a) A história da Matemática mostra que alguns poucos homens muito inteligentes criaram todos os conhecimentos matemáticos.

____

____

____

b) Criar novos conhecimentos matemáticos é algo que apenas os gênios conseguem.

____

____

____

c) A história da Matemática mostra que muitas pessoas, homens e mulheres, de várias partes do mundo, desenvolveram conhecimentos matemáticos.

____

____

____

d) Todas as pessoas são capazes de aprender Matemática.

____

____

____

e) A Matemática é uma matéria que ainda está em desenvolvimento e novos conhecimentos ainda estão sendo produzidos no mundo.

____

____

____

f) Muitos povos antigos usavam conhecimentos matemáticos para resolver suas questões cotidianas.

____

____

____

g) Toda a Matemática já foi inventada ou descoberta. Não existem novos conhecimentos.

____

____

____

2) Pense em todo o trabalho que desenvolvemos sobre Euclides e os Elementos, sobre a História da Matemática e sobre Geometria. O que você aprendeu? (escreva no verso)

Finalizando o projeto: o que aprendemos no GeoGebra?

Nomes: ______________________________ e ________________________________

1) No Livro 1 da obra "Elementos", Euclides apresentou várias frases chamadas de proposições. Estudamos algumas delas durante nossas aulas. Leia cada texto a seguir e construa a figura no GeoGebra. Em seguida, escreva um pequeno texto no qual explique por que a construção é válida.

a) Na proposição 10, Euclides apresentou a seguinte ideia:

Determinar o ponto médio de um segmento de reta dado.

Para iniciar a sua justificativa, Euclides começou a escrever a seguinte frase:

Seja o segmento de reta AB, é preciso cortá-lo em duas partes iguais.

Agora é com você!

I) Utilize o GeoGebra para fazer a construção do ponto médio de um segmento de reta utilizando a ferramenta "Compasso".

II) Escreva um pequeno texto explicando como você determinou o ponto médio do segmento de reta e como pode ter certeza de que o segmento foi dividido em duas partes iguais.

b) Na proposição 19, Euclides apresentou a seguinte ideia:

Em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Para iniciar a sua justificativa, Euclides começou a escrever a seguinte frase:

Seja o triângulo ABC, se o ângulo B é maior que o ângulo C, dizemos que o lado AC é maior que o lado AB.

Agora é com você!

I) Utilize o GeoGebra para fazer a construção de um triângulo qualquer utilizando a ferramenta "Compasso" (como aprendemos nas últimas aulas).

II) Escreva um pequeno texto explicando por que essa frase é verdadeira e como você fez para verificar isto.

Muito obrigada!!