Dissertação de Mestrado

Estudo dos efeitos de Cosserat (microestruturais) acoplados à poroelasticidade de Biot na estabilidade de aberturas circulares em rochas.

AUTOR: DIEGO MAX SILVA LOPES

ORIENTADOR: Prof. Dr. RODRIGO PELUCI DE FIGUEIREDO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA DA UFOP

OURO PRETO – OUTUBRO DE 2016

Dissertação de Mestrado

Estudo dos efeitos de Cosserat (microestruturais) acoplados à poroelasticidade de Biot na estabilidade de aberturas circulares em rochas.

AUTOR: DIEGO MAX SILVA LOPES

ORIENTADOR: Prof. Dr. RODRIGO PELUCI DE FIGUEIREDO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA DA UFOP

OURO PRETO – OUTUBRO DE 2016

L864e Lopes, Diego Max Silva.
Estudo dos efeitos de Cosserat (microestruturais) acoplados à poroelasticidade de Biot na estabilidade de aberturas circulares em rochas. [manuscrito] / Diego Max Silva Lopes. - 2016.
119f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Peluci de Figueiredo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Núcleo de Geotecnia. Programa de Pós-Graduação em Geotecnia.
Área de Concentração: Geotecnia de Mineração.

1. Mecânica das rochas. 2. Contínuo generalizado. 3. Poroelasticidade. 4. Poço - Estabilidade. 5. Teoria de Biot. I. Figueiredo, Rodrigo Peluci de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 624.136

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Estudo dos efeitos de Cosserat (microestruturais) acoplados à poroelasticidade de Biot na estabilidade de aberturas circulares em rochas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia do Núcleo de Geotecnia da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para Obtenção do título de **Mestre em Geotecnia**.

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 03 de Outubro de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos membros:

Prof. Dr. Rodrigo Peluci de Figueiredo (Orientador/ UFOP)

Prof. Dr. José Margarida da Silva (UFOP)

Prof. Dr. Anderson Moraes (CENPES/PETROBRAS)

"Everything should be made as simple as possible, but not simpler".

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela proteção e presença constante em minha vida.

À minha mãe Eloisa, ao meu pai Ailton, aos meus irmãos Lucas e Eric, que sempre me demonstraram amor, compreensão e incentivo. Minha família, em especial à Lídia que sempre esteve presente nos momentos mais difíceis desta caminhada.

À Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Escola de Minas e ao Núcleo de Geotecnia pela oportunidade de me desenvolver profissionalmente e pessoalmente.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Peluci de Figueiredo, pela orientação deste trabalho, pelo incentivo, pelas contribuições ao longo da elaboração desta dissertação.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Geotecnia da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, pelo conhecimento adquirido, em especial ao Prof. Dr. Romero César Gomes e à CAPES pelo incentivo financeiro.

Aos meus colegas e amigos de mestrado, pela amizade e agradável convivência.

Ao meu grande amigo Jean Michel, que esteve presente desde o início desta jornada e quem considero como irmão.

Aos meus amigos de república, a minha segunda casa, República Refugiados.

A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente na realização deste trabalho.

"We should remember that intuitive ability closely resembles artistic talent. It may be developed or it may be smothered, depending on the environment and the training".

Maurice Anthony Biot

RESUMO

A mecânica dos meios contínuos generalizada, proposta pelos irmãos Cosserat & Cosserat (1909), considera que os pontos materiais possuem todos os graus de liberdade de um corpo rígido, ou seja, esses pontos além de sofrerem translações também sofrem rotações. Consequentemente aparece, na estática do meio, a relação entre tensões-momento e gradientes das rotações, que introduz implicitamente as dimensões e a forma das partículas nas relações constitutivas, o que permite contemplar efeitos de escala microestruturais no comportamento do meio.

Por outro lado, Biot (1941) desenvolveu a sua conhecida teoria da poroelasticidade, que permite acoplar os efeitos de um fluxo interno de fluidos à resposta mecânica do sólido poroso.

Na análise da estabilidade em poços e demais aberturas subterrâneas o modelo mais utilizado na prática é considerar-se a rocha como um sólido elástico, através da solução proposta por Kirsch em 1898. Alguns autores (p. ex., Alcure, 2013) têm pesquisado a importância de se considerar a poroelasticidade na definição da janela operacional de estabilidade do poço.

Este trabalho propõe investigar a relevância dos efeitos de escala microestruturais em aberturas circulares em rochas, através da mecânica dos meios contínuos generalizada de Cosserat, tendo em vista a já constatada relevância dos efeitos poroelasticos sobre tais problemas. Pretende-se aqui, até onde é do nosso conhecimento, de maneira inédita, formular o acoplamento dos efeitos da poroelasticidade e os efeitos da mecânica dos meio contínuos generalizada de Cosserat na estabilidade mecânica de aberturas circulares em rochas.

Uma solução analítica para o fator de concentração de tensão considerando o acoplamento dos efeitos microestruturais e poroelásticos foi obtida e os resultados demonstraram que ocorrem reduções significativas no fator de concentração de tensão, porém, menores que as reduções encontradas por Mindlin (1963) e Pal'mov (1964), a

depender das propriedades hidromecânicas das rochas (se mais porosa, maior é o efeito em minorar a redução do fator e vice-versa).

Palavras-chave: Cosserat, contínuo generalizado, Biot, poroelasticidade, estabilidade de poços.

ABSTRACT

The generalized mechanics continua proposed by Cosserat Brothers in 1909 considers that the material points have all degrees of freedom of a rigid element, in fact, those points besides evolving translations and rotations as well. Consequently, the static fields appear in the relationship between couple-stress and gradient of rotation, such action introduces implicitly the dimensions and shape of the particles in constitutive relations, which allows considering effects of the microstructure in behavior of field.

On the other hand, Biot in 1941 developed the well-known theory of poroelasticity, which allows coupling the effects of an internal flow of the fluid to the mechanical response of the porous solid.

In the stability analysis in wells and other underground openings, the most used model in practice is consider the rock as an elastic solid, through solution proposed by Kirsch in 1898. Some authors (e.g. Alcure, 2013) have studied the importance to consider the poroelasticity in defining the operations window for well stability.

This study aimed to investigate the relevance of the effects of microstructural scale in circular openings in rocks by Cosserat's generalized continua, in the view of relevance of poroelastic effects have already found on such problems. The intention he is, in an unprecedented manner, make the coupling of the poroelasticity and Cosserat's mechanics of generalized continua effects in stability of circular openings in rocks.

An analytical solution to the stress concentration factor considering the effects of coupling microstructural and poroelastic effects was achieved and the results demonstrated that occur significant reductions in stress concentration factor, however, smaller than reductions found for Mindlin in 1963 and in 1964 by Pal'mov depending on the hydromechanical properties of rocks (if more porous, the greater the effects of alleviating the reduction factor, and vice versa).

Keywords: Cosserat, generalized continua, Biot, poroelasticity, well stability.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS ..... **v**
RESUMO ..... **vii**
ABSTRACT ..... **ix**
LISTA DE FIGURAS ..... **xii**
LISTA DE TABELAS ..... **xv**
LISTA DE ABREVIATURAS E NOMENCLATURAS ..... **xvi**
LISTA DE SÍMBOLOS ..... **xvii**

CAPÍTULO 1 ..... **1**
1 INTRODUÇÃO **1**
1.1 CONTEXTO GERAL 1
1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO 3
1.3 ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO 4

CAPÍTULO 2 ..... **5**
2 CONTÍNUO DE COSSERAT **5**
2.1 INTRODUÇÃO 5
2.2 BREVE HISTÓRICO 5
2.3 CONTÍNUO GENERALIZADO DE COSSERAT 9
2.3.1 CINEMÁTICA 10
2.3.2 ESTÁTICA 13
2.4 CONTÍNUO DE COSSERAT ELÁSTICO 17
2.4.1 CINEMÁTICA E CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE 17
2.4.2 ESTÁTICA E CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO 21
2.4.3 CÍRCULO DE MOHR 2D 23
2.4.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS: ELASTICIDADE LINEAR 26
2.4.5 NOVOS PARÂMETROS: $\boldsymbol{Gc}$ E $\boldsymbol{Bc}$ 28

CAPÍTULO 3 ..... **31**
3 TEORIA DA POROELASTICIDADE DE BIOT **31**
3.1 INTRODUÇÃO 31

3.2 POROELASTICIDADE DE BIOT 32
3.2.1 TEORIA GERAL DE BIOT 33
3.2.2 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS CONSTANTES DE BIOT 37

CAPÍTULO 4 41
4 TEORIA DE BIOT ACOPLADA À TEORIA DE COSSERAT 41
4.1 INTRODUÇÃO 41
4.2 TEORIA DE COSSERAT E TEORIA DAS TENSÕES-MOMENTO 42
4.3 BIOT ACOPLADA À COSSERAT 46
4.3.1 PROBLEMA BIDIMENSIONAL 48
4.3.2 CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO MÁXIMA EM UM FURO CIRCULAR (2D) 54

CAPÍTULO 5 59
5 RESULTADOS – CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO 59
5.1 INTRODUÇÃO 59
5.2 TENSÃO TANGENCIAL MÁXIMA – CAMPO DE TENSÃO UNIAXIAL 59
5.3 TENSÃO TANGENCIAL MÁXIMA – CAMPO DE TENSÃO BIAXIAL .. 71
5.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS 80

CAPÍTULO 6 82
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS 82
6.1 CONCLUSÕES 82
6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS 83

BIBLIOGRAFIA 84
APÊNDICE A 90
APÊNDICE B 91
APÊNDICE C 95

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Fator de concentração em uma abertura circular em função da relação entre o diâmetro e o comprimento característico (Mindlin, 1963). 2

Figura 2.1 - Representação esquemática da cinemática de um contínuo generalizado de Cosserat (Figueiredo, 1999)..... 11

Figura 2.2 - Aspecto das componentes do gradiente relativo no plano $x1x2$ para uma micropartícula de dimensões iguais a 2d (Figueiredo, 1999): (a) $\gamma 22 = \partial 2u2 - g22$; (b) $\gamma 21 = \partial 1u2 - g21$; (c) $\gamma 12 = \partial 2u1 - g12$..... 13

Figura 2.3 - (a) Campo de deslocamento (ui) e de rotação no Contínuo de Cosserat $(\omega 3c)$; (b) Curvatura – gradiente de microrrotações $(\Delta\omega 3c = \partial\Delta\omega 3c\partial x1\Delta x1)$ (Figueiredo, 1999). 18

Figura 2.4 - Relações cinemáticas em cisalhamento: (a) $\gamma 21$; (b) $\gamma 12$ (Figueiredo, 1999). 20

Figura 2.5 - Ilustração esquemática da maior "permissividade" de um meio de Cosserat com relação a um meio clássico na vizinhança de um ponto P qualquer: (a) configuração indeformada, (b) incompatibilidade clássica e (c) compatibilidade de Cosserat na mesma situação (Figueiredo, 1999). 21

Figura 2.6 - Equilíbrio em um contínuo de Cosserat 2D: (a) forças; (b) momentos (Figueiredo, 1999). 22

Figura 2.7 - Círculo de Mohr em 2D para um tensor de tensões-força assimétrico (Figueiredo, 1999). 24

Figura 2.8 - Mecanismos pelos quais atuam as componentes simétrica e antissimétrica das tensões cisalhantes num contínuo de Cosserat (Mindlin, 1963)..... 26

Figura 4.1 - Componentes de tensões e tensões-momento. 49

Figura 4.2 - Componentes de tensão e tensão-momento em coordenadas polares (Mindlin, 1963). 55

Figura 4.3 - Equilíbrio das componentes polares e retangulares de tensões e tensões-momento (Mindlin, 1963). 55

Figura 4.4 - Furo circular num campo de tensão uniaxial (a) e biaxial (b) (Modificada de Mindlin, 1963). 57

Figura 5.1 - *Biot acoplada a Cosserat.* Resultados do fator de concentração de tensão tangencial máxima (δ) numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 61

Figura 5.2 - *Teoria de Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 63

Figura 5.3 - *Biot acoplada a Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 67

Figura 5.4 - *Teoria de Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 68

Figura 5.5 - *Biot acoplada a Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 72

Figura 5.6 - *Teoria de Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 73

Figura 5.7 - *Biot acoplada a Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 76

Figura 5.8 - *Teoria de Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material. 77

Figura C.1 - Representação da distribuição de tensões numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial uniforme (adaptada, Timoshenko,1951, p. 78). 97

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Algumas propriedades do arenito Berea (Wang, 2000). 61

Tabela 5.2 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão uniaxial. 65

Tabela 5.3 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão uniaxial..... 66

Tabela 5.4 - Algumas propriedades do granito Charcoal (Wang, 2000). 67

Tabela 5.5 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão uniaxial. 69

Tabela 5.6 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão uniaxial..... 70

Tabela 5.7 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão biaxial. 74

Tabela 5.8 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão biaxial..... 75

Tabela 5.9 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão biaxial. 78

Tabela 5.10 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão biaxial..... 79

Tabela A.1 – Valores típicos de constantes poroelásticas. 90

LISTA DE ABREVIATURAS E NOMENCLATURAS

IUTAM	International Union of Theoretical and Applied Mechanics
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Diâmetro
B	Coeficiente de Skempton
B_c	Módulo de flexão
$C(X)$	Microcontínuo
E	Módulo de Young
F_i	Força de massa
g_{ij}	Gradiente de deslocamento microscópico
$g_{(ij)}$	Tensor de microdeformação
$g_{[ij]}$	Tensor de microrrotação
G	Módulo de cisalhamento
G_c	Módulo de cisalhamento rotacional
λ	Primeiro parâmetro de Lamé
H	Constante de Biot
h	Comprimento característico
I	Momento de inércia
l	Comprimento característico
K	*Bulk modulus* (Módulo Volumétrico)
K_s	Coeficiente de deformação volumétrica da matriz sólida
K_0	Função modificada de Bessel de segunda espécie de ordem zero
K_1	Função modificada de Bessel de segunda espécie de ordem um
m_l	Vetor de tensão-momento
m_{kl}	Tensor de tensões-momento
$M_{[ij]}$	Momento de superfície

P	Componente de um campo de tensão
p	Poropressão
R	Constante de Biot
S	Componente de um campo de tensão
t_i	Força de superfície
u_i	Vetor deslocamento macroscópico
u_i'	Vetor deslocamento microscópico
ν	Coeficiente de Poisson
ν_u	Coeficiente de Poisson não-drenado
X	Ponto material
x_i	Eixos ortogonais
X_i	Eixos ortogonais
w_i^c	Microrrotações
ω_k^c	Vetor de microrrotação
ε_{ij}	Macrodeformações
e_{ijk}	Tensor de permutação (Levi-Civita)
Ω_{ij}	Tensor antissimétrico de macrorrotações
Ω_{ij}^c	Tensor antissimétrico de microrrotações
γ_{ij}	Gradiente relativo
$\gamma_{(ij)}$	Componente simétrica do gradiente relativo
$\gamma_{[ij]}$	Componente antissimétrica do gradiente relativo
κ_{ijk}	Gradiente de microrrotação
$\mu_{[ij]k}$	Tensor de forças duplas antissimétrico
σ_{ij}	Tensor de tensões

σ_{ij}^{c}	Tensor de tensões de Cosserat
τ_{ij}	Tensor relativo
Θ	Momento de massa
ρ	Densidade do material
π	pi
α	Coeficiente de Biot-Willis
θ_i	Incremento de volume de fluido
θ	Ângulo
δ	Fator de concentração de tensão

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO GERAL

Ao longo dos últimos 60 anos a mecânica das rochas vem se tornando a principal disciplina tecnológica especializada em compreender o comportamento particular das formações rochosas. O referido comportamento, na maioria das vezes, está fundamentado nas teorias clássicas conservadoras. No século XX novas teorias e formulações foram desenvolvidas e passou-se a ter a oportunidade de enxergar novas possibilidades de estudar o comportamento particular dos maciços rochosos.

No ano de 1909 os irmãos Cosserat no livro "*Théorie des Corps Déformables*" propuseram uma mecânica dos meios contínuos generalizada, na qual os pontos materiais possuem todos os graus de liberdade de um corpo rígido, ou seja, estes pontos além de sofrerem translações também sofrem rotações. Em consequência, aparecem na estática do meio as tensões-momento (momentos por unidade de área). A relação entre tensões-momento e os gradientes das rotações, grandezas que são energeticamente conjugadas, introduz, implicitamente, as dimensões e a forma das partículas nas relações constitutivas, o que permite contemplar efeitos de escala microestruturais no comportamento do meio.

De forma simplificada, a teoria de Cosserat leva em consideração o tamanho da partícula onde atuam as tensões. No caso linear-isotrópico 2D, esse tamanho pode ser representado por um único parâmetro L (denominado "*comprimento característico*"), o qual é função do módulo de flexão (B_c) e do módulo cisalhante (G) (Figueiredo, 1999).

Mindlin publicou, em 1963, o artigo "*Influence of couple-stress on stress concentrations*", no qual estabeleceu uma solução analítica para as concentrações de

tensões em torno de uma abertura circular, considerando o efeito das tensões-momento. O referido autor desenvolveu soluções em termos de funções de tensão análogas às de Airy (Timoshenko & Goodier, 1951; Jaeger & Cook, 1979) também para as tensões-momento e encontrou valores de concentrações inferiores àqueles determinados por Kirsch (1898 - *apud* Jaeger & Cook, 1979).

A Figura 1.1 é um exemplo de como as concentrações de tensões são reduzidas em função da relação entre o diâmetro de uma abertura circular (a) e o "*comprimento característico*" (l) para um campo de tensão uniaxial *in situ*.

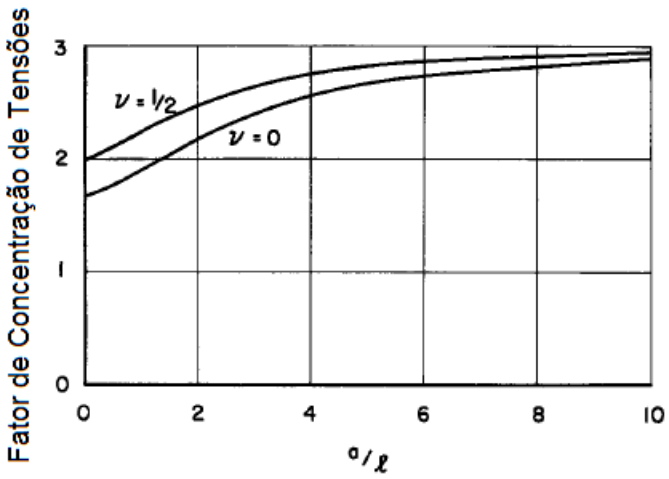

Figura 1.1 - Fator de concentração em uma abertura circular em função da relação entre o diâmetro e o comprimento característico (Mindlin, 1963).

Pal'mov publicou, em 1964, um artigo intitulado de "*The plane problem in the theory of nonsymmetrical elasticity*", no qual também se discute o efeito das tensões-momento numa abertura circular. Contudo, a formulação deste autor difere em dois aspectos da formulação apresentada por Mindlin. O primeiro aspecto é que a parcela antissimétrica do tensor de tensões de Mindlin é indeterminada, ao passo que a de Pal'mov não. O segundo aspecto é que Pal'mov (1964) considera microrrotações independentes dos deslocamentos lineares, diferentemente do que sucede na formulação de Mindlin, na qual a rotação do ponto material está associada ao gradiente do deslocamento linear.

Por outro lado, Maurice A. Biot, no artigo "*General Theory of Three-Dimensional Consolidation*", em 1941, desenvolveu a sua conhecida teoria da poroelasticidade, que permite acoplar os efeitos de um fluxo interno de fluidos à resposta mecânica do sólido poroso. Segundo Fjaer *et al*. (2008), a teoria da poroelasticidade é justamente baseada na ideia de que as rochas consistem de partes sólidas e fluidas, que estão separadas numa escala microscópica, mas que coexistem numa escala macroscópica.

Na análise da estabilidade de poços e demais aberturas subterrâneas, o que mais se utiliza na prática é considerar a rocha como um sólido elástico, por meio da solução proposta por Kirsch (1898). Alguns autores como, por exemplo, Alcure (2013), em sua dissertação "*Determinação do modelo mais representativo para o cálculo do gradiente de fratura e sua influência na janela operacional*", têm pesquisado a importância de se considerar a poroelasticidade na definição da janela operacional de um poço de petróleo. Outros como Bayona Mendoza (2003), em sua tese "*Análise da instabilidade de poços de petróleo associada à produção de areia através de um modelo do Contínuo de Cosserat*", têm pesquisado a relevância dos efeitos microestruturais provenientes da relação entre tensões-momento e rotações na estabilidade de poços.

Este trabalho se propõe a investigar analiticamente a relevância dos efeitos de escala microestruturais numa abertura circular (seja um poço ou outra escavação subterrânea), através da mecânica dos meios contínuos generalizada de Cosserat, tendo em vista a já constatada relevância dos efeitos poroelásticos sobre o problema. Pretende-se aqui, até onde é do nosso conhecimento, de maneira inédita, formular o acoplamento dos efeitos da poroelasticidade e da mecânica dos meios contínuos generalizados de Cosserat, aplicado à estabilidade mecânica de uma abertura de seção circular.

1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Estudar o comportamento mecânico de aberturas circulares em rochas, particularmente poços, considerando a formulação do acoplamento entre a teoria da poroelasticidade e a teoria do contínuo generalizado de Cosserat, analisando possíveis reduções nos fatores de concentração de tensões no seu entorno.

1.3 ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação compõe-se de seis capítulos para o relato dos assuntos a serem tratados e de três Apêndices contendo informações e detalhamento de propriedades físicas e também de formulações matemáticas.

Em seu capítulo segundo são revistos os conceitos básicos dos meios contínuos generalizados, apresentando uma visão geral, mesmo que resumida, da teoria de Cosserat e da teoria dos "*couple-stresses*" (Mindlin & Tiersten, 1962; Mindlin, 1963), sendo definidas a cinemática do contínuo e suas medidas de deformações.

No terceiro desenvolve-se, de maneira resumida, a teoria da poroelasticidade proposta por Biot (1941), apresentando os conceitos, a formulação matemática e a interpretação física das constantes.

O quarto capítulo apresenta todo o desenvolvimento da proposta desta dissertação, de acoplar a relevância dos efeitos de escala microestruturais através da mecânica dos meios contínuos generalizado de Cosserat com os efeitos poroeláticos em aberturas circulares em rochas.

O quinto capítulo contém os resultados obtidos com a aplicação da formulação proposta no capítulo quatro, numa abertura circular em duas rochas distintas.

O capítulo seis é dedicado a considerações finais, conclusões e sugestões para futuros estudos.

O Apêndice A traz uma tabela com valores de algumas propriedades físicas de diferentes tipos de rochas. Esses valores são encontrados em Wang (2000). No Apêndice B encontra-se a formulação matemática do acoplamento entre a teoria de Cosserat e a teoria da poroelasticidade proposta nesta dissertação. O Apêndice C é dedicado à resolução das equações do problema proposto, considerando a concentração de tensões numa abertura circular em diferentes tipos de rocha.

CAPÍTULO 2

2 CONTÍNUO DE COSSERAT

2.1 INTRODUÇÃO

Os irmãos Cosserat, no livro "*Théorie des Corps Dérformables*", escrito em 1909, propuseram uma mecânica dos meios contínuos generalizados, na qual os pontos materiais possuem todos os graus de liberdade de um corpo rígido, ou seja, estes pontos além de sofrerem translações também sofrem rotações. Em consequência, aparecem na estática do meio as tensões-momento (momentos por unidade de área) e as tensões convencionais constituem um tensor assimétrico. A relação entre tensões-momento e gradientes das rotações, que são grandezas energeticamente conjugadas, introduz, implicitamente, as dimensões e a forma das partículas nas relações constitutivas, o que permite contemplar efeitos de escala microestruturais no comportamento do meio. As relações tensões-deformações permanecem essencialmente as mesmas para as tensões normais, mas, para as tensões cisalhantes, as relações são diferentes das tensões estudadas no contínuo clássico, incluindo as microrrotações, que por sua vez, são diferentes das macrorrotações do contínuo clássico. Nesse capítulo, após um breve histórico, é apresentada, primeiramente, a formulação proposta pelos irmãos Cosserat, suas equações constitutivas e seus respectivos parâmetros. Posteriormente, é apresentada a teoria proposta por Mindlin & Tiersten (1962) que, como será visto, é um caso particular da teoria proposta pelos irmãos Cosserat, na qual as micro e macrorrotações coincidem.

2.2 BREVE HISTÓRICO

Durante o século XVII existia uma compreensão a respeito da estrutura da matéria como sendo essencialmente composta por átomos. O francês Pierre Gassendi

desenvolveu uma explicação mecanicista da natureza, introduzindo o conceito de moléculas em *Syntagma philosophiae Epicuri*, publicada postumamente em 1649. A filosofia atômica de Gassendi (1649) era uma forma de explicar os fenômenos físicos como sendo o resultado do movimento de pequenos átomos no vazio (Kargon, 1964). A formalização efetiva da distinção entre molécula e átomo teve que esperar até o surgimento da Teoria Atômica de Dalton, proposta em 1808.

Por mais de um século, estudiosos discutiram e contribuíram para a formulação do que hoje conhecemos como meio contínuo. Em suma, um meio contínuo é uma distribuição contínua de partículas, na qual cada uma é representada geometricamente por um ponto material X, de coordenadas cartesianas x_i (i = 1,2,3) com referência a um sistema fixo de eixos ortogonais e caracterizado cinematicamente por um vetor de deslocamentos u_i (Figueiredo, 1999). Diversos estudiosos se dedicaram a estudar o meio contínuo, tais como os físicos Lamé e Green, por exemplo, ao campo da elasticidade, Stokes ao campo dos fluidos e Saint-Vennant, que trabalhou tanto com sólidos quanto com fluidos. Outros físicos, como Thomson, Helmholtz, Duhem e Maxwell também fizeram menções esporádicas em relação ao meio contínuo.

A mecânica do contínuo clássica é uma aproximação baseada na suposição de que a matéria é distribuída de forma contínua ao longo do corpo. Essa teoria fornece uma base razoável para a análise do comportamento de materiais em macro escala onde as microestruturas podem ser negligenciadas (Hadjesfandiari & Dargush, 2011).

Nos anos de 1880, Voigt publicou uma série de trabalhos com contribuições fundamentais em cristalografia e teoria da elasticidade. Voigt (1887) sugeriu que a interação entre os pontos materiais poderia se dar por meio de vetores de tensão-momento, além do clássico vetor de tensão (Lages, 1997). Esse fato pode ser considerado como um marco no nascimento da mecânica dos meios generalizados. Faltava, no entanto, alguém organizar essas novas ideias numa linguagem e método próprios.

Foram os irmãos Eugène e François Cosserat que assumiram essa tarefa, lançando as bases da teoria do contínuo generalizado, também conhecida como teoria do "contínuo de Cosserat", em sua obra *Théorie des Corps Déformables*, de 1909. Na teoria dos irmãos Cosserat, considerada pioneira, as quantidades cinemáticas do ponto material eram os deslocamentos e a microrrotação, independentes entre si. Dada à complexidade da apresentação, os conceitos discutidos na teoria não receberam a devida atenção à época.

Aproximadamente meio século depois, na década de 60, os conceitos do contínuo generalizado ou "contínuo de Cosserat" foram retomados e surgiram novas interpretações para os efeitos da microestrutura nos trabalhos de Toupin (1962), Mindlin & Tiersten (1962), Mindlin (1964), Eringen & Suhubi (1964), Pal'mov (1964), Eringen (1965, 1992), Ariman (1967), Ariman & Kaloni (1967), Itou (1972), Lazar & Maugin (2004), Alshibli *et al*. (2006) e Park & Lakes (1986), este último relacionando a micromecânica de Cosserat com a deformação do osso humano.

A teoria proposta por Mindlin & Tiersten (1962), que pareceu bastante promissora em algumas aplicações práticas, ficou conhecida como "*Couple-Stress Theory*" (teoria das tensões-momento). Nessa teoria as microrrotações são iguais às macrorrotações. Eringen (1965) reapresentou a teoria de Cosserat, caracterizada por considerar as microrrotações independentes das macrorrotações, atribuindo-lhe uma nova denominação, alterada para "*Linear Theory of Micropolar Elasticity*" (teoria micropolar linear). Por sua vez, Mindlin (1964) estendeu a teoria de Cosserat, atribuindo ao ponto material a possibilidade de sofrer deformações homogêneas, no que ficou conhecido por teoria do contínuo generalizado com microestrutura ou Teoria de Mindlin. Eringen (1968) reapresentou a extensão de Mindlin (1964), denominando-a de teoria do contínuo micromórfico. Estas e outras discussões sobre o assunto tiveram seu ápice no ano de 1967 em um simpósio promovido pela IUTAM - *International Union of Theoretical and Applied Mechanics* (Kröner, 1968).

Neste simpósio diversas teorias envolvendo o conceito de "contínuo generalizado" foram discutidas. Podem-se citar como exemplos:

- Teoria Micropolar Linear: como já dito anteriormente, essa teoria corresponde à própria teoria original dos irmãos Cosserat, na qual a microrrotação independente da macrorrotação (Eringen (1965, 1966), Alshibli et al., (2006), Kaloni & Ariman (1967), Ariman (1967), Park & Lakes (1986));

- Contínuo das tensões-momento (*Couple-Stress Theory*): é uma particularização do contínuo de Cosserat, na qual se admite a coincidência entre a micro e a macrorrotação (Mindlin & Tiersten (1962), Hadjesfandiari & Dargush (2011)).

- Contínuo com microexpansão (*Microstretch Continuum*): refere-se a uma expansão do contínuo micropolar, na qual se admite a existência de microexpansões ou contrações e microrrotações independentes dos graus de liberdade macroscópicos (Lages (1997), Fuina (2009)).

Nos anos de 2009 e 2010 ocorreram dois encontros que também trouxeram discussões positivas sobre o "contínuo generalizado", sendo o EUROMECH Colloquium 510 em 2009 na França e o Seminário trilateral França-Alemanha-Rússia em 2010 na Alemanha (Altenbach *et al*., 2011).

A diferença básica entre a mecânica do contínuo clássico e a mecânica do contínuo generalizado de Cosserat é a introdução de um vetor de microrrotações. Na mecânica clássica, todas as respostas podem ser obtidas através do conhecimento de três componentes do vetor de deslocamentos, enquanto no meio contínuo generalizado é necessário conhecer-se, adicionalmente, as três componentes do referido vetor microrrotacional (Ariman, 1967). Já para o contínuo com microestrutura, ou micromórfico de 1º grau, de acordo com Eringen (1968), o micromovimento poderia ser descrito por três vetores de base deformáveis, que adicionariam às translações nove graus de liberdade: três microrrotações e seis microdeformações.

No presente capítulo apresentar-se-á uma visão geral, mesmo que resumida, da teoria de Cosserat (Cosserat & Cosserat, 1909) e da teoria das tensões-momento (Mindlin & Tiersten, 1962), sendo definidas as suas cinemáticas e suas medidas de deformações.

2.3 CONTÍNUO GENERALIZADO DE COSSERAT

A distribuição de partículas em um contínuo clássico é representada geometricamente por um ponto material X, de coordenadas cartesianas, com referência a um sistema fixo de eixos ortogonais, X_i $(i = 1,2,3)$. Tais pontos materiais são caracterizados cinematicamente por um vetor deslocamento u_i. No contínuo generalizado de Cosserat cada ponto é tido como uma partícula de dimensão reduzida, a qual constitui por si própria um pequeno contínuo $C(X)$ em torno do ponto X. Por consequência, a caracterização cinemática dessa partícula requer um refinamento com relação àquela do contínuo clássico.

Sendo cada ponto considerado um pequeno contínuo $C(X)$, devido à descrição constitutiva do material, é imediato o aparecimento de uma variável com dimensão de comprimento. Tal variável é conhecida como "*comprimento característico*". Quando for desprezível, o contínuo generalizado degenerar-se-á para um contínuo clássico. No caso contrário, caso seja significativo, não será possível descrever a cinemática das partículas dentro de um contínuo convencional.

A teoria de Cosserat considera que a partícula material tem a cinemática de um corpo rígido, sendo as microrrotações, w_i^c, graus de liberdade adicionais a u_i. Os gradientes de microrrotações, por sua vez, representam as curvaturas. A seguir serão definidas a cinemática e a estática do contínuo generalizado de Cosserat. Toda fundamentação teórica e desenvolvimento das equações da cinemática e da estática do continuo generalizado de Cosserat pode ver visto no trabalho de Figueiredo (1999).

2.3.1 CINEMÁTICA

Nos contínuos generalizados são permitidas à partícula $C(X)$ "progressivas" possibilidades de se deformar. Considere-se um ponto qualquer X', de coordenadas x_i' em $C(X)$ (referidas a um sistema local de eixos cartesianos ortogonais com origem em X – locada no centro de massa de $C(X)$ – inicialmente paralelo ao sistema global e que se desloca u_i com relação a este), cujos microdeslocamentos são u_i'. Pode-se, considerando que a partícula tem dimensão reduzida, expandir tais microdeslocamentos, por meio de séries de Taylor em x_i', com termos até o de primeiro grau, a saber:

$$u_i' = u_i + g_{ij}x_j' \tag{2.1}$$

onde, g_{ij} é o gradiente de deslocamentos microscópicos $(\partial_j' u_i')$[1].

Dessa maneira, fica definida com a equação (2.1) a descrição cinemática microscópica básica dos contínuos generalizados se forem conhecidos os campos de deslocamentos macroscópicos (u_i) e do gradiente de deslocamentos microscópicos (g_{ij}).

Sendo (g_{ij}) um tensor de segunda ordem, pode ser dividido em suas partes simétrica $(g_{(ij)})$ e antissimétrica $(g_{[ij]})$,

$$g_{ij} = g_{(ij)} + g_{[ij]}$$

as quais representam, respectivamente, os tensores de microdeformação e microrrotações, quais sejam:

$$g_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_j' u_i' + \partial_i' u_j') \tag{2.2)a}$$

[1] O índice i representa a direção que dá origem à componente e o índice j representa a direção normal ao plano de atuação da componente.

$$g_{[ij]} = \frac{1}{2}(\partial_j' u_i' - \partial_i' u_j') \tag{2.2)b}$$

A partícula, na teoria de Cosserat, é considerada rígida. Assim, a microdeformação passa a ser nula ($g_{(ij)} = 0$) e o gradiente de deslocamentos microscópicos é puramente antissimétrico, coincidindo com o tensor de microrrotações de Cosserat ($g_{[ij]} = \Omega_{ij}^c$). A descrição cinemática na equação (2.1) fica, dessa forma, particularizada para:

$$u_i' = u_i + \Omega_{ij}^c x_j' \tag{2.3}$$

Abaixo, na Figura 2.1, tem-se uma representação esquemática da cinemática para os meios de Cosserat.

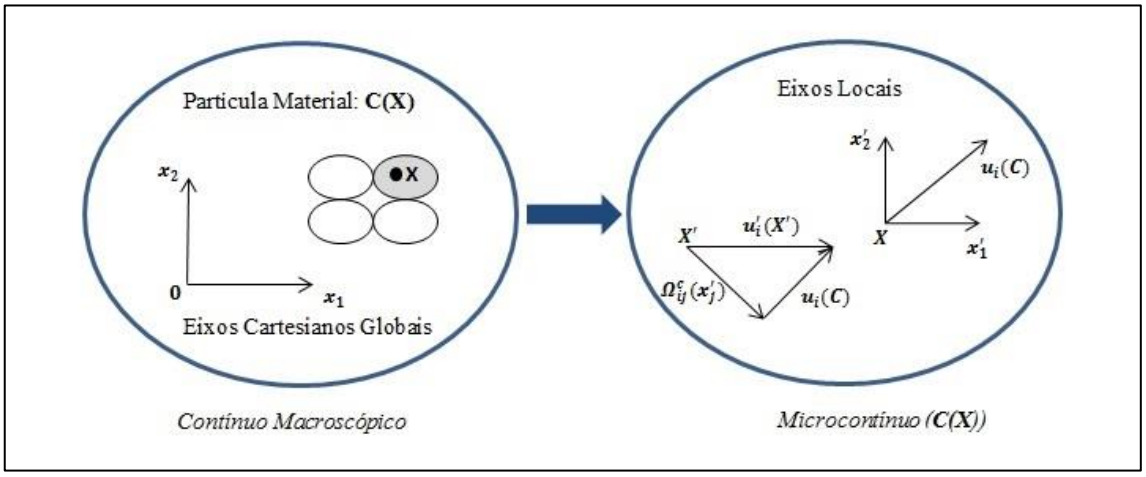

Figura 2.1 - Representação esquemática da cinemática de um contínuo generalizado de Cosserat (Figueiredo, 1999).

No campo de deslocamentos macroscópicos, o gradiente $(\partial_i u_j)$ comporta também as parcelas simétricas e antissimétricas que representam as macrodeformações (ε_{ij}) e as macrorrotações (Ω_{ij}), respectivamente:

$$\varepsilon_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \tag{2.4)a}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j) \qquad (2.4)b$$

Como é de conhecimento, somente as parcelas simétricas dos gradientes de macro- e microdeslocamentos são grandezas objetivas., isto é, apresentam invariância com respeito a movimentos de corpo rígido. Sabe-se também que a objetividade é uma necessidade para a formulação de leis constitutivas (Figueiredo, 1999). Assim, convém definir um gradiente relativo (γ_{ij}), que é uma grandeza objetiva (ver demonstração em Figueiredo, 1999):

$$\gamma_{ij} = \partial_j u_i - g_{ij} \qquad (2.5)a$$

Portanto, o gradiente relativo corresponde à diferença entre os tensores dos gradientes de macro e microdeslocamentos. No contínuo de Cosserat γ_{ij} $(= \gamma_{(ij)} + \gamma_{[ij]})$ é um tensor assimétrico e sua parcela simétrica $(\gamma_{(ij)})$ é puramente macroscópica, portanto, coincidente com ε_{ij}, devido ao fato de que $g_{(ij)} = 0$. Pode-se, assim, reescrever (2.5)a para um contínuo de Cosserat como:

$$\gamma_{ij} = \partial_j u_i - g_{[ij]} \qquad (2.5)b$$

Alguns exemplos de componentes planas de γ_{ij} podem ser visualizados na Figura 2.2.

Adicionalmente, faz-se necessário introduzir uma medida objetiva, (κ_{ijk}), que represente a variação do gradiente microscópico com as coordenadas macroscópicas. No contínuo de Cosserat, g_{ij} será antissimétrico (pois $g_{(ij)} = 0$), ou seja:

$$\kappa_{ijk} = \partial_k g_{ij} = \partial_k g_{[ij]} = \kappa_{[ij]k} \qquad (2.6)$$

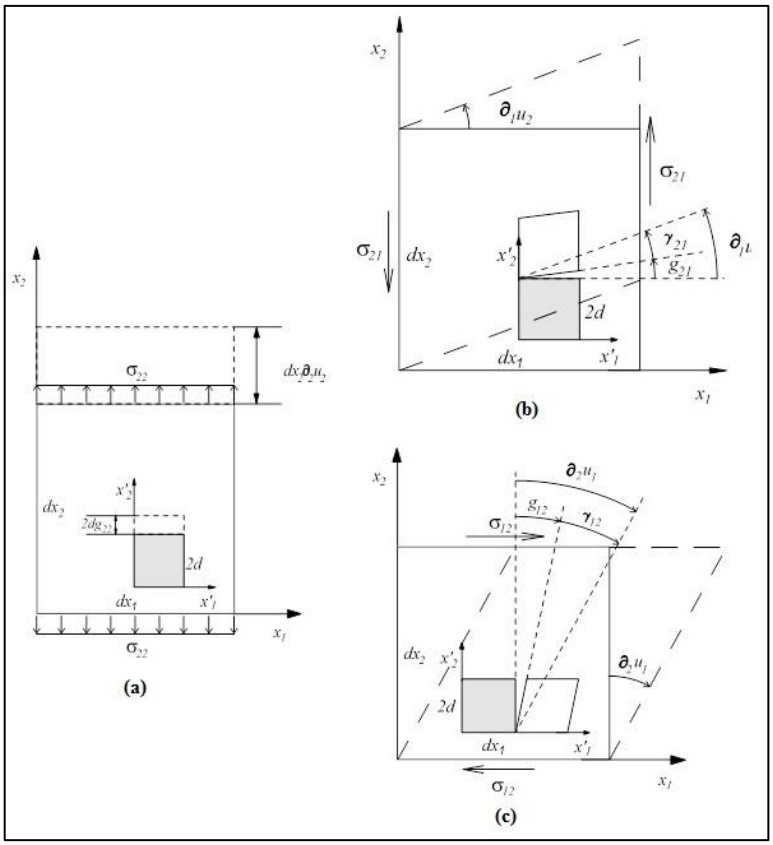

Figura 2.2 - Aspecto das componentes do gradiente relativo no plano x_1x_2 para uma micropartícula de dimensões iguais a 2d (Figueiredo, 1999): (a) $\gamma_{22} = \partial_2 u_2 - g_{22}$; (b) $\gamma_{21} = \partial_1 u_2 - g_{21}$; (c) $\gamma_{12} = \partial_2 u_1 - g_{12}$.

2.3.2 ESTÁTICA

Utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) como método (Figueiredo, 1999), serão introduzidas as grandezas estáticas, bem como, as condições de equilíbrio para o contínuo de Cosserat.

Como o trabalho virtual das forças internas deve ser uma grandeza invariante com respeito a movimentos de corpo rígido (Figueiredo, 1999), empregar-se-á em sua expressão os tensores objetivos definidos pelas equações (2.4)a, (2.5) e (2.6). Assim:

$$\delta W^1 = \int \left\{ \left(\sigma_{ij} + \tau_{ij} \right) \partial_j \delta u_i - \tau_{[ij]} \delta g_{[ij]} + \mu_{[ij]k} \delta \kappa_{[ij]k} \right\} dV \qquad (2.7)\text{a}$$

que pode também ser reescrita como (Figueiredo, 1999):

$$\delta W^1 = \int_V \int \{(\sigma_{ij} + \tau_{ij})\partial_j \delta u_i - \tau_{[ij]}\delta g_{[ij]} + \mu_{[ij]k}\delta\kappa_{[ij]k}\} dV \qquad (2.7)\text{b}$$

(δ) é o símbolo de variação que indica quais grandezas são virtuais (definidas como sendo aquelas que não afetam o equilíbrio, desde que sejam cinematicamente admissíveis). Essas grandezas são inteiramente arbitrárias e, portanto, independentes. O tensor de 3ª ordem μ_{ijk} é o tensor de tensão dupla, definido por Mindlin (1964), e $\mu_{[ij]k}$, representa sua parcela antissimétrica, a única não nula no contínuo de Cosserat. As suas 27 (=3^3) componentes são interpretadas como sendo dipolos de forças por unidade de área (dimensões de momento por área ou força por comprimento). O índice *i* representa a direção do dipolo de forças, *j* a direção do "braço de alavanca" e *k* a direção normal à área de atuação. No caso antissimétrico, como $i \neq j$, os dipolos representam binários (momentos) e, portanto, $\mu_{[ij]k}$ reduz-se a um tensor de tensões-momento (binários por área).

Conforme proposto pelos irmãos Cosserat, introduziremos a definição do tensor de tensões de Cosserat:

$$\sigma_{ij}^c = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \qquad (2.8)$$

o qual, representa um tensor macroscópico assimétrico tal que:

$$\sigma_{(ij)}^c = \sigma_{ij} + \tau_{(ij)} \qquad (2.9)\text{a}$$

$$\sigma_{[ij]}^c = \tau_{[ij]} \qquad (2.9)\text{b}$$

Substituindo-se, então, (2.8) e (2.9)b em (2.7)b e aplicando o teorema de divergência de Gauss-Ostrogradski (Figueiredo, *op.cit.*), temos:

$$\delta W^1 = -\int_V \partial_j \sigma_{ij}^c \delta\, u_i dV - \int_V (\partial_{[ij]} + \partial_k\, u_{[ij]k}) \delta g_{[ij]} dV + \int_\Gamma \sigma_{ij}^c \delta\, u_i n_j d\Gamma + \int_\Gamma \mu_{[ij]k} \delta\, g_{[ij]} n_k d\Gamma \qquad (2.10)$$

onde n_i é a normal unitária apontando para fora da superfície limitante do meio, Γ.

Segundo Figueiredo (1999) as expressões para o trabalho virtual produzido pelas forças externas (δW^E), de massa (δW_V^E) e de superfície (δW_Γ^E) são motivadas por uma extensão das expressões para o trabalho das forças externas num contínuo clássico, a saber:

$$\delta W_V^E = \int_V F_i \delta\, u_i dV + \int_V \Theta_{[ij]} \delta g_{[ij]} dV \qquad (2.11)a$$

$$\delta W_\Gamma^E = \int_\Gamma t_i \delta\, u_i d\Gamma + \int_\Gamma M_{[ij]} \delta g_{[ij]} d\Gamma \qquad (2.11)b$$

$$\delta W^E = \delta W_V^E + \delta W_\Gamma^E \qquad (2.11)c$$

onde: F_i é uma força de massa; t_i uma força de superfície, $\Theta_{[ij]}$ o momento de massa e $M_{[ij]}$ o momento de superfície.

Figueiredo (1999) aplicou o princípio dos trabalhos virtuais. Este princípio estabelece que para os campos de tensão estaticamente admissíveis o trabalho virtual das forças externas sobre os campos cinemáticos assumidos, igualmente admissíveis se iguala àquele das forças internas, ou seja, $\delta W^1 = \delta W^E$.

Após uma sequência de transformações algébricas, igualando as equações (2.10) e (2.11), e assumindo que as variações de $\delta g_{[ij]}$ e δu_i são independentes, resultam as seguintes equações de equilíbrio e condições de contorno (ver Figueiredo, 1999):

$$\partial_i \sigma_{ij}^c + F_i = 0 \qquad (2.12)a$$

$$\partial_k \mu_{[ij]k} + \sigma^c_{[ij]} + \Theta_{[ij]} = 0 \qquad (2.12)b$$

$$t_i = \sigma^c_{ij} n_j \qquad (2.13)a$$

$$M_{[ij]} = \mu_{[ij]k} n_k \qquad (2.13)b$$

Pode-se escrever o tensor antissimétrico de tensão dupla (tensor de tensões-momento) em (2.12)b e (2.13)b, o momento de massa em (2.12)b e o momento de superfície em (2.13)b, através dos seus tensores ou vetores duais, obtidos com o auxílio do tensor de permutação, e_{ijk} (Figueiredo, 1999), como:

$$\mu_{[ij]k} = -\frac{1}{2} e_{ijk} m_{lk} \qquad (2.14)a$$

$$M_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijk} m_k \qquad (2.14)b$$

$$\Theta_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijk} \Theta_k \qquad (2.14)c$$

Daí tem-se que (2.12)b torna-se:

$$\partial_l m_{kl} - e_{ijk} \sigma^c_{ij} + \Theta_k = 0 \qquad (2.12)c$$

onde m_{kl} é o tensor de tensões-momento e Θ_k é o vetor momento de massa.

A expressão (2.13)b fica:

$$m_l = m_{lk} n_k \qquad (2.13)c$$

onde m_l é o vetor de tensão-momento.

Assim, nota-se que as equações de equilíbrio da teoria de Cosserat são três em (2.12)a, que correspondem aos graus de liberdade de translação, e mais três em (2.12)b, que

dizem respeito aos graus de liberdade rotacionais. Adicionalmente, nota-se que elas são correspondentes às condições de equilíbrio para um corpo rígido situadas no ponto material.

Com relação às condições de contorno essenciais, devem ser estabelecidos independentemente u_i e/ou $g_{[ij]} = \Omega_{ij}^c$. De maneira semelhante à realizada anteriormente para os tensores estáticos, pode-se introduzir um vetor dual ao tensor de microrrotações e escrevê-lo como:

$$\omega_k^c = -\frac{1}{2} e_{ijk} \Omega_{ij}^c \tag{2.15}$$

onde ω_k^c é o vetor de microrrotações de Cosserat; o subíndice livre representa o eixo em torno do qual se dá a rotação (perpendicular ao plano dos outros dois mudos) (Figueiredo, 1999).

2.4 CONTÍNUO DE COSSERAT ELÁSTICO

Apresentar-se-ão os conceitos básicos do contínuo de Cosserat elástico com deformações infinitesimais e em duas dimensões (2*D*). Neste tópico concentraremos esforços nos aspectos físicos da teoria de Cosserat.

2.4.1 CINEMÁTICA E CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Seja o plano de deformações paralelo aos eixos ortogonais globais (x_1, x_2), onde x_i $(i = 1,2)$ são coordenadas de um ponto material qualquer em um contínuo de Cosserat 2*D* (Figura 2.3). Considerando que a cada ponto esteja associado a um novo sistema cartesiano rígido, o qual durante o processo de deformação u_i se desloca e que pode sofrer uma rotação ω_3^c (o subscrito indica que a rotação se desenvolve em torno do eixo x_3 normal ao plano de deformações e o sobrescrito indica contínuo de Cosserat).

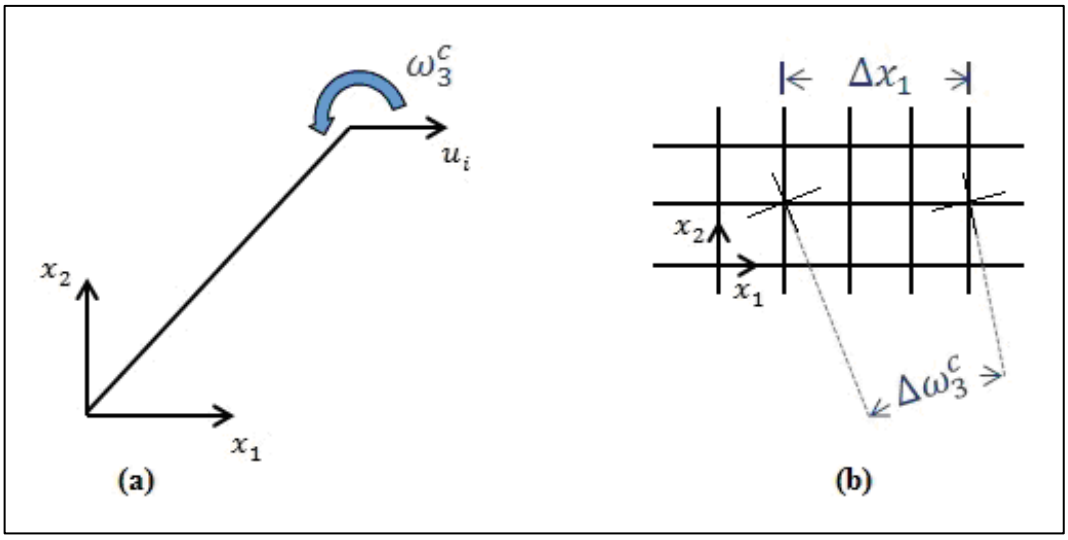

Figura 2.3 - (a) Campo de deslocamento (u_i) e de rotação no Contínuo de Cosserat (ω_3^c); (b) Curvatura – gradiente de microrrotações ($\Delta\omega_3^c = \frac{\partial\Delta\omega_3^c}{\partial x_1}\Delta x_1$) (Figueiredo, 1999).

Os campos cinemáticos objetivos para um meio de Cosserat podem ser definidos como:

- o gradiente de deslocamentos macroscópicos do contínuo convencional que corresponde a um tensor simétrico de macrodeformações (2.4)a e a um tensor antissimétrico de macrorrotações (2.4)b

$$\varepsilon_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \tag{2.4)a}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j) \tag{2.4)b}$$

- o tensor antissimétrico de microrrotações (única parcela não nula do gradiente de microdeslcamentos, como mencionado em 2.3.1) introduzido aqui como uma contração, sobre o terceiro subíndice, do produto do tensor de permutação pelo vetor de microrrotações,

$$\Omega_{ij}^c = -e_{ij3}\omega_3^c \tag{2.16}$$

- o gradiente de microrrotação que representa as curvaturas da deformação (κ_i),

$$\kappa_i = \partial_j \omega_3^c \tag{2.17}$$

Como supramencionado no subitem 2.3.1 (equação (2.4)), utiliza-se uma medida objetiva de deformação relativa (γ_{ij}) dada por:

$$\gamma_{ij} = \partial_j u_i - g_{ij} = \partial_j u_i - \Omega_{ij}^c = \partial_j u_i + e_{ij3}\omega_3^c \tag{2.18}$$

A parte simétrica do tensor de deformações relativas $\gamma_{(ij)}$ por consequência se torna igual às macrodeformações, já que g_{ij}é inteiramente antissimétrico:

$$\gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \tag{2.19}$$

A parte antissimétrica ($\gamma_{[ij]}$) representa a diferença entre a rotação da micropartícula, ou partícula de Cosserat, e a rotação macroscópica:

$$\gamma_{[ij]} = \Omega_{ij} - \Omega_{ij}^c \tag{2.20}$$

Assim, κ_{ij} e γ_{ij} são as medidas de deformação em um contínuo de Cosserat, representadas explicitamente em 2*D* por:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \partial_1 u_1 & \gamma_{12} &= \partial_2 u_1 + \omega_3^c \\ \gamma_{22} &= \partial_2 u_2 & \gamma_{21} &= \partial_1 u_2 - \omega_3^c \\ \kappa_1 &= \partial_1 \omega_3^c & \kappa_2 &= \partial_2 \omega_3^c \end{aligned} \tag{2.21}$$

Diferentemente do contínuo clássico, no contínuo de Cosserat temos $\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$. Nota-se, portanto, que γ_{ij} é assimétrico no caso não trivial, em que $\omega_3^c \neq 0$.

As relações cinemáticas envolvidas em γ_{12} e γ_{21} podem ser observadas na Figura 2.4.

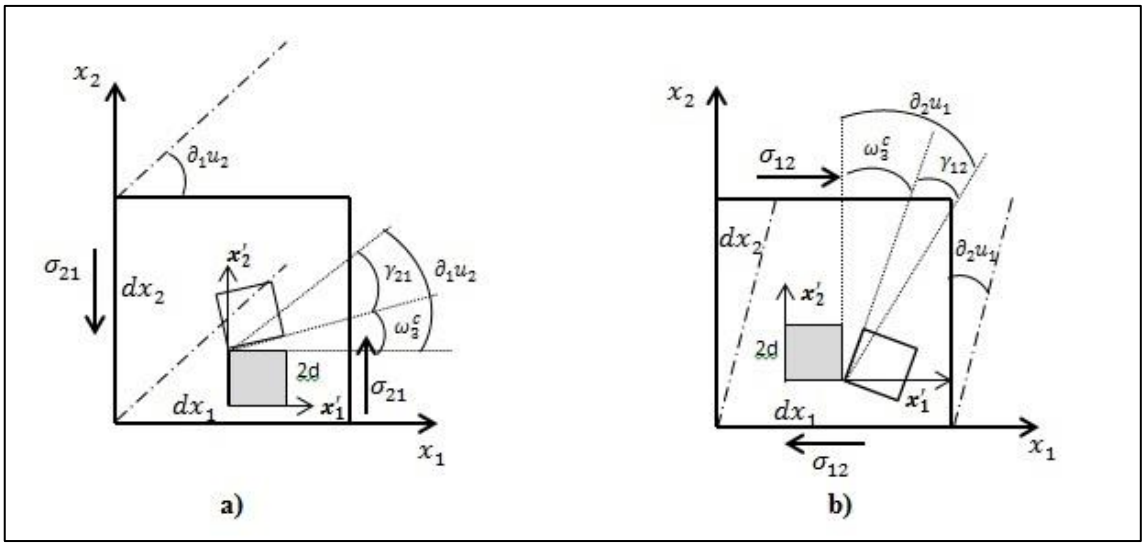

Figura 2.4 - Relações cinemáticas em cisalhamento: (a) γ_{21} ; (b) γ_{12} (Figueiredo, 1999).

A equação (2.21) constitui um sistema de equações diferenciais parciais. As condições de integrabilidade desse sistema podem ser escritas como segue (note-se a indiferença na ordem de derivação - *apud* Figueiredo, 1999):

- determinando as derivadas parciais à esquerda podem-se obter, respectivamente, as expressões à direita

$$\begin{aligned} \partial_2\gamma_{11}\ e\ \partial_1\gamma_{12} \qquad & \kappa_1 = \partial_1\gamma_{12} - \partial_2\gamma_{11} \\ \partial_1\gamma_{22}\ e\ \partial_2\gamma_{21} \qquad & \kappa_2 = \partial_1\gamma_{22} - \partial_2\gamma_{21} \\ \partial_2\kappa_1\ e\ \partial_1\kappa_2 \qquad & \partial_2\kappa_1 = \partial_1\kappa_2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

As equações (2.22) foram obtidas por Mindlin (1963) e representam as condições necessárias e suficientes para a continuidade dos campos cinemáticos de Cosserat em domínios conexos (*apud* Figueiredo, 1999). As condições de Saint-Venant para o contínuo clássico são recuperadas quando $\omega_3^c = 0$.

Dessa maneira, é fato que as condições de compatibilidade de Cosserat são menos restritivas quando comparadas às condições do contínuo clássico. Permitem, além da

deformação, a rotação relativa entre pontos vizinhos, como pode ser observado esquematicamente na Figura 2.5.

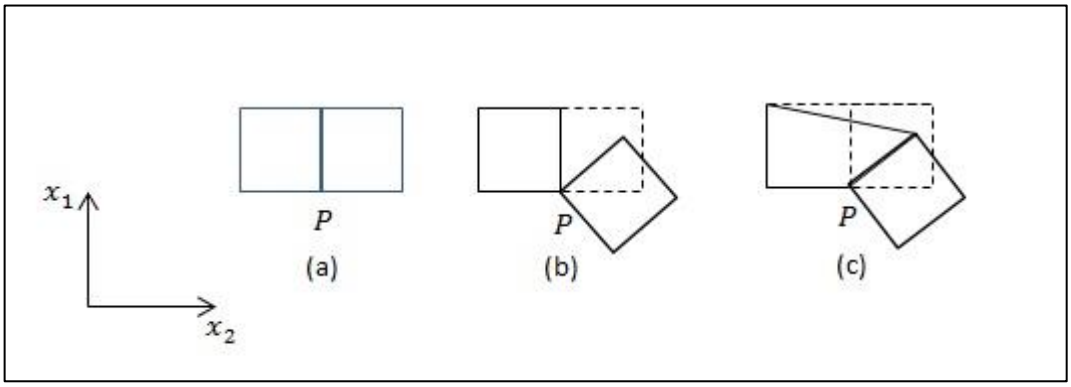

Figura 2.5 - Ilustração esquemática da maior "permissividade" de um meio de Cosserat com relação a um meio clássico na vizinhança de um ponto P qualquer: (a) configuração indeformada, (b) incompatibilidade clássica e (c) compatibilidade de Cosserat na mesma situação (Figueiredo, 1999).

2.4.2 ESTÁTICA E CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Um contínuo de Cosserat 2*D* deverá conter seis grandezas estáticas conjugadas em energia às componentes cinemáticas mostradas nas equações (2.21).

Considere-se o equilíbrio de um bloco retangular de dimensões infinitesimais dx_1 e dx_2 de espessura unitária (Figura 2.6). Supõe-se que essas dimensões são pequenas o bastante para que se possa assumir um valor médio para a distribuição dos vetores de tensões-força e de tensões-momento ("*tensões de Cosserat*") sobre as faces. Adicionalmente, permitem desprezar os termos de grau mais alto que o primeiro na aproximação, por séries de Taylor, das componentes de tensão numa face $x_i + dx_i$ em função daquelas em x_i. Definindo por F_i as forças de massa, as equações de equilíbrio para as tensões-força nas direções x_1 e x_2 num ponto qualquer do meio de Cosserat são:

$$\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + F_1 = 0 \qquad (2.23)a$$

$$\partial_1\sigma_{21} + \partial_2\sigma_{22} + F_2 = 0 \qquad (2.23)b$$

Nota-se que as equações (2.23)a e (2.23)b são idênticas em formato às do contínuo clássico. A única diferença como visto no item 2.3.2, reside na substituição do tensor de tensões de Cauchy pelo tensor assimétrico de Cosserat (equação (2.8), porém, aqui grafado sem o sobrescrito) nas equações.

O equilíbrio de momentos com relação ao ponto central do elemento é realizado de maneira análoga ao equilíbrio de forças (Figura 2.6 b). As componentes de tensão normal não produzem momentos e, por isso, não aparecem. Por outro lado, as componentes cisalhantes são incluídas, como se pode notar, com valores iguais nas faces em x_i e $x_i + dx_i$. Isto não quer dizer que desprezamos a não-uniformidade dessas, mas que os momentos resultantes dos termos de primeiro grau das séries de Taylor para tais componentes serão infinitésimos de ordem superior e acabarão sendo "eliminados" de qualquer maneira. A equação resultante será:

$$\partial_1 m_1 + \partial_2 m_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12}) + \Theta = 0 \tag{2.24}$$

sendo Θ o momento de massa.

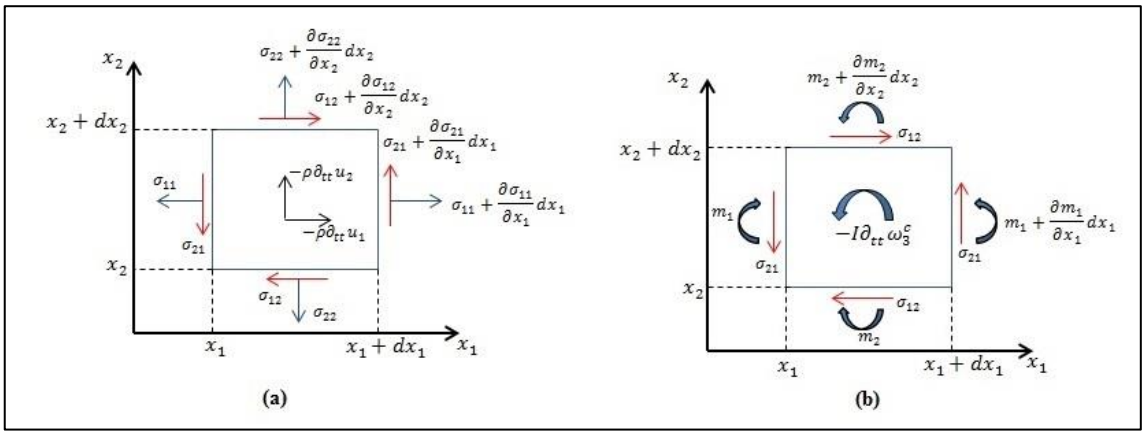

Figura 2.6 - Equilíbrio em um contínuo de Cosserat 2D: (a) forças; (b) momentos (Figueiredo, 1999).

Na Figura 2.6 as componentes estão todas em sentido positivo. A convenção de sinais das tensões-força presume que as tensões de tração são positivas. No caso das tensões-

momento, é definido que uma tensão-momento é positiva quando atua sobre uma face do elemento cuja normal direcionada para o exterior, tem o mesmo sentido do eixo coordenado correspondente (ou inverso) e é orientado (pela regra da mão direita) no sentido positivo (ou negativo) do eixo com a qual está alinhada.

Efeitos dinâmicos são incluídos nas forças e momentos de massa pelo princípio d'Alembert, sendo calculados por:

$$F_i = -\rho \partial_{tt} u_i \tag{2.25}$$

$$\Theta = -I \partial_{tt} \omega_3^c \tag{2.26}$$

onde I é o momento de inércia da partícula e ρ a densidade do material.

Na equação (2.24) percebe-se que onde existam gradientes de tensões-momento não nulos, as tensões cisalhantes, σ_{21} e σ_{12}, não serão necessariamente iguais. Daí o sentido físico da assimetria do tensor de tensões-força de Cosserat, supramencionado no item 2.3.2. Por outro lado, a simetria dar-se-á no caso estático se, e somente se, as tensões-momento, ainda presentes, estiverem autoequilibradas. No caso dinâmico, equação (2.26), conclui-se que os efeitos microinerciais por si só são suficientes para promover a assimetria de σ_{ij}.

2.4.3 CÍRCULO DE MOHR 2D

Para melhor entender o significado da assimetria do tensor de tensões-força, é interessante estudar seu efeito sobre a representação gráfica do estado de tensões no plano de Mohr. A Figura 2.7 ilustra o círculo de Mohr para este caso.

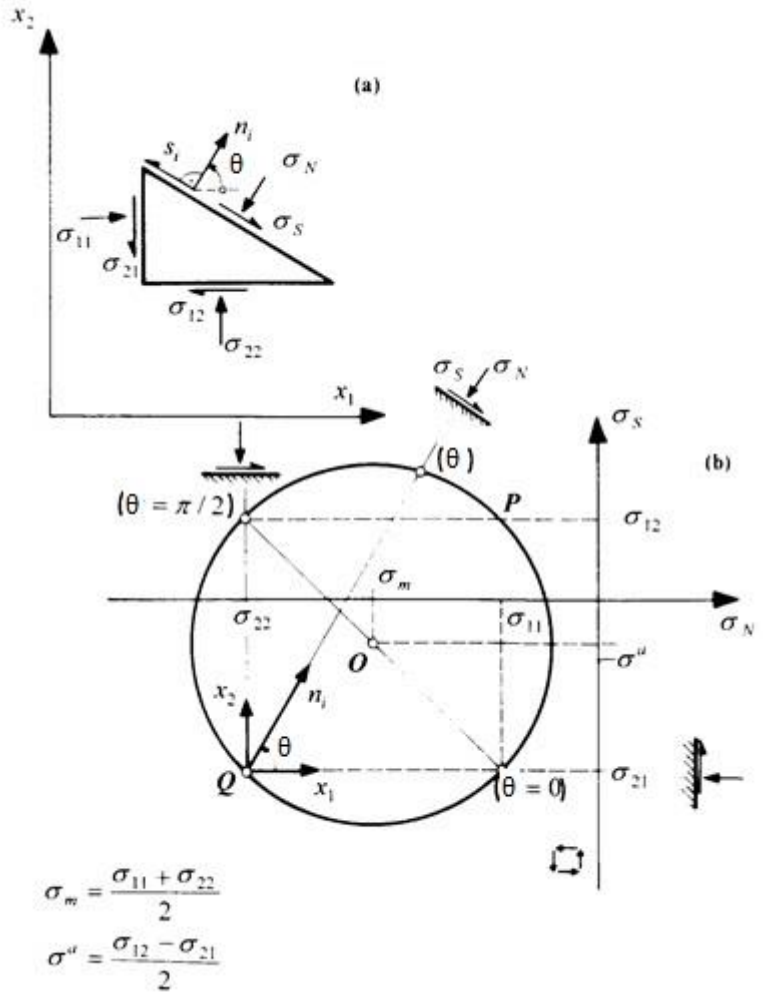

Figura 2.7 - Círculo de Mohr em 2D para um tensor de tensões-força assimétrico (Figueiredo, 1999).

Seja o diagrama de corpo livre da Figura 2.7(a) onde as componentes de tensão-força num ponto do meio contínuo estão indicadas. As faces estão orientadas perpendicularmente aos eixos coordenados e a um vetor unitário n_i, cuja orientação é fixada pelo ângulo θ. Os componentes do vetor unitário n_i e do vetor paralelo unitário s_i ao plano definido por α, podem ser definidos como:

$$n_1 = \cos\theta \qquad n_2 = \operatorname{sen}\theta \tag{2.27}$$

$$s_1 = -\operatorname{sen}\theta \qquad s_2 = -\cos\theta \tag{2.28}$$

As componentes do vetor de tensões-força, $t_i = \sigma_{ij} n_i$, no plano normal n_i podem ser determinadas. As projeções de t_i sobre n_i e s_i fornecerão as componentes normal σ_n e cisalhante σ_S no plano α, como:

$$\sigma_N = t_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i \qquad\qquad \sigma_S = t_i s_i = \sigma_{ij} n_j s_i \tag{2.29}$$

Por extenso, resulta em:

$$\sigma_N = \sigma_{11} cos^2\theta + \sigma_{22} sen^2\theta + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) sen\theta\ cos\theta \tag{2.30)a}$$

$$\sigma_S = \sigma_{21} cos^2\theta - \sigma_{12} sen^2\theta + (\sigma_{22} - \sigma_{11}) sen\theta\ cos\theta \tag{2.30)b}$$

Em termos do ângulo duplo 2α tem-se:

$$\sigma_N - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) cos2\theta + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) sen2\theta \tag{2.31)a}$$

$$\sigma_S - \frac{1}{2}(\sigma_{21} - \sigma_{12}) = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) sen2\theta + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) cos2\theta \tag{2.31)b}$$

Nota-se que nas equações (2.30), que a expressão da tensão normal é a mesma expressão do contínuo clássico, enquanto que a expressão da tensão de cisalhamento difere da expressão do contínuo clássico unicamente pela presença da chamada tensão antissimétrica (σ^a), qual seja:

$$\sigma^a = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \tag{2.32}$$

Assim, o *locus* geométrico do estado de tensões-força 2*D* representado no plano de Mohr é um círculo com seu centro transladado de $-\sigma^a$ ao longo da perpendicular ao eixo das tensões normais.

É conveniente separar as tensões de cisalhamento em duas parcelas, tendo em vista que uma parte das componentes da tensão de cisalhamento induz somente rotação, em lugar de distorção. Portanto, as duas parcelas serão: uma puramente de rotação (parcela antissimétrica - σ^a) e outra puramente de distorção (parcela simétrica - σ^s). A Figura 2.8, de Mindlin (1963), ilustra as duas parcelas da tensão cisalhante e seus respectivos modos de atuação.

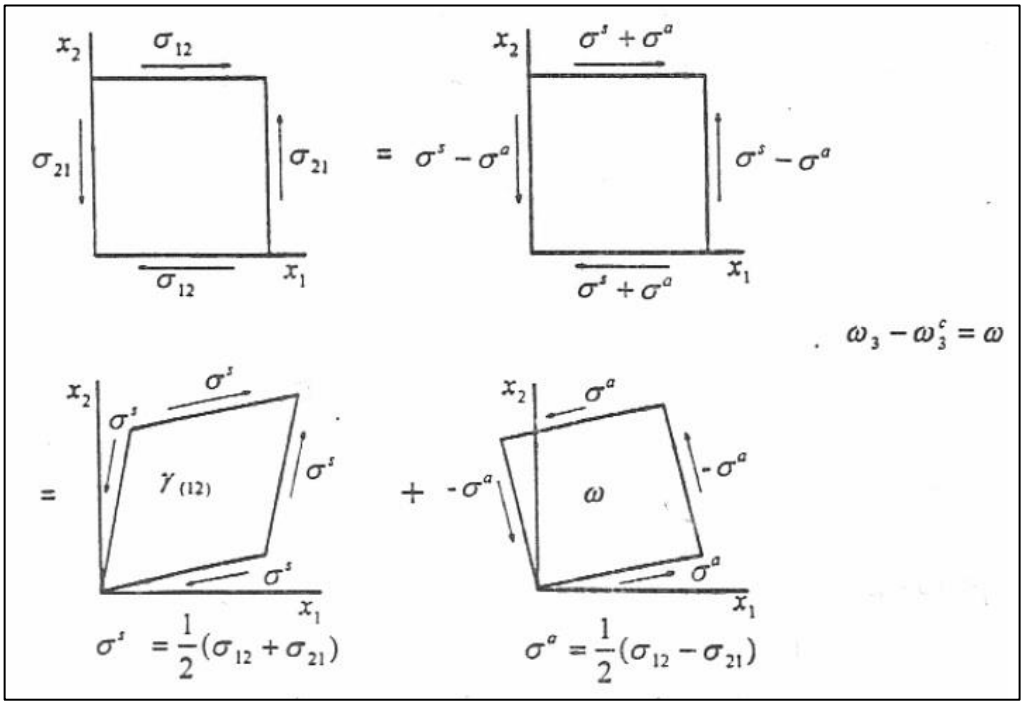

Figura 2.8 - Mecanismos pelos quais atuam as componentes simétrica e antissimétrica das tensões cisalhantes num contínuo de Cosserat (Mindlin, 1963).

2.4.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS: ELASTICIDADE LINEAR

Aqui apresentaremos as equações que caracterizam o comportamento elástico linear isotrópico de um meio de Cosserat 2*D*. Escreveremos as equações em função de:

$$\lambda, G, G_c, e\ B_c$$

sendo: λ e G os parâmetros clássicos de Lamé; G_c um módulo de cisalhamento antissimétrico (ou rotacional) e B_c um módulo de flexão.

Em termos dos parâmetros acima as equações podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + (G + G_c)\gamma_{ij} + (G - G_c)\gamma_{ji} \tag{2.33)a}$$

$$m_{3i} = m_i = B_c\kappa_i \tag{2.33)b}$$

(2.33)a pode também ser escrita como

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + 2G_c\gamma_{[ij]} \tag{2.33)c}$$

Para melhor compreender o significado dos parâmetros, podemos escrever (2.33) por extenso:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2G)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= (G + G_c)\gamma_{12} + (G - G_c)\gamma_{21} \\ \sigma_{21} &= (G - G_c)\gamma_{12} + (G + G_c)\gamma_{21} \\ m_1 = B_c\kappa_1 \qquad & \qquad m_2 = B_c\kappa_2 \end{aligned} \tag{2.33)d}$$

Lembrando que para deformação plana em x_1x_2, $\varepsilon_{33} = 0$, e, portanto,

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{2.33)e}$$

Como já dito anteriormente, as parcelas simétrica e antissimétrica das tensões cisalhantes deformam o corpo por mecanismos distintos, sendo assim, é conveniente expressar as componentes cisalhantes por meio dessas parcelas:

$$\sigma_{(12)} = \sigma_{(21)} = G(\gamma_{12} + \gamma_{21}) \qquad (2.33)f$$

$$\sigma_{[12]} = -\sigma_{[21]} = G_c(\gamma_{12} - \gamma_{21}) = 2G_c(\omega_3^c - \omega_3) \qquad (2.33)g$$

As duas primeiras equações em (2.33)d e a equação (2.33)f, que correspondem à parcela simétrica do contínuo de Cosserat, possuem o mesmo formato das relações tensão-deformação do contínuo clássico. Já a equação (2.33)g, que corresponde à parcela antissimétrica, juntamente com as equações para as tensões-momento, m_1 e m_2 em (2.33)d, governam o problema da microestrutura.

2.4.5 NOVOS PARÂMETROS: G_c E B_c

O conhecimento qualitativo e quantitativo do módulo de cisalhamento rotacional (G_c) e do módulo de flexão (B_c) ainda necessita de esclarecimentos experimentais. O módulo de cisalhamento rotacional (ou de Cosserat) é um parâmetro que controla a influência da microestrutura na distribuição de tensões macroscópicas.

Um G_c igual a zero (ou seja, tensões antissimétricas nulas), embora não signifique eliminar a presença da microestrutura, anula os seus efeitos sobre a macroestrutura. Tal caso foi considerado por Lakes (1985) uma improbabilidade física, observando certo tipo de perda de unicidade de soluções (*apud* Figueiredo, 1999). Assim, se considerarmos $G \gg G_c$, casos em que o módulo de cisalhamento clássico é muito maior que o módulo de cisalhamento rotacional, estaremos desprezando os efeitos da microestrutura no contínuo macroscópico.

No outro extremo, quando G_c é infinitamente grande não faz sentido em falar de tensões antissimétricas, pois estamos considerando um meio rígido no tocante às rotações relativas, isto é, em que não há nenhuma diferença entre a micro e macrorrotação. A formulação de Mindlin & Tiersten (1962), conhecida como Teoria das Tensões-Momento (ou de Cosserat restrita), contempla exatamente essa hipótese. Na teoria das tensões-momento (ou *Couple Stress Theory*) não há rotação relativa entre a

microestrutura e a macroestrutura, ou seja, considera-se que as rotações da microestrutura coincidem com as da macroestrutura ($\omega_3^c = \omega_3$), ficando as tensões antissimétricas de cisalhamento (equação (2.33)g) indefinidas (o que corresponde, teoricamente a um módulo de cisalhamento rotacional infinito). Foi mencionado anteriormente que a equação (2.33)a é uma das equações que caracterizam o comportamento elástico linear isotrópico de um meio de Cosserat 2*D*. Após algumas operações algébricas tal equação também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + 2G_c(\omega_3^c - \omega_3) \qquad (2.33)\text{h}$$

Pela equação (2.33)h notamos que quando $\omega_3^c = \omega_3$, caso da teoria das tensões-momento (ou de Cosserat restrita), G_c não tem "participação" no problema. Dessa análise, percebe-se que a teoria formulada por Mindlin & Tiersten (1962) é um caso particular da Teoria de Cosserat. Nessa última considera-se que as rotações da microestrutura são independentes das rotações da macroestrutura, havendo uma rotação relativa entre elas, e para o caso de Cosserat restrita tem-se que as rotações da microestrutura e da macroestrutura coincidem.

Enquanto G_c controla os efeitos da microestrutura, o módulo de flexão é um parâmetro que relaciona as tensões-momento às curvaturas (gradientes da rotação) da microestrutura, tendo dimensão de força. A razão entre o módulo de flexão e os demais módulos tem a dimensão de um comprimento ao quadrado. Esta razão vem a ser, neste caso, uma medida indireta das dimensões da microestrutura à qual chamamos de comprimento característico. Ter um $B_c \approx 0$ significa que a microestrutura possui proporções desprezíveis e vice-versa. Pal'mov (1964) sugere que tal razão supracitada seja:

$$h^2 = \frac{B_c}{4G} \qquad (2.34)$$

Já Mindlin (1963) sugere a razão:

$$l^2 = \frac{B_c}{G} \tag{2.35}$$

onde l é o comprimento característico do material, cuja dimensão é comprimento. Os coeficientes numéricos nos denominadores (quatro e um) nas equações (2.34) e (2.35) foram adotados de acordo com a conveniência na descrição das equações constitutivas por aqueles autores. De tal maneira, por vezes, é conveniente empregar o parâmetro l em lugar de B_c.

Se $l \approx 0$ (e daí $B_c \approx 0$ por (2.34) ou (2.35)) e $G_c \neq 0$ temos a chamada elasticidade assimétrica com rotações livres e sem tensões-momento (*apud* Figueiredo, 1999). Essa situação, de fato, pode vir a acontecer para materiais granulares formados de grãos arredondados e com alto índice de vazios. É interessante notar que, à medida que os espaços vazios diminuem, o número de contatos entre os grãos aumenta e assim os esforços tangentes tornam-se aproximadamente simétricos, anulando as rotações. Com isso, o contínuo clássico seria um modelo adequado e $G_c = 0$.

CAPÍTULO 3

3 TEORIA DA POROELASTICIDADE DE BIOT

3.1 INTRODUÇÃO

A teoria da poroelasticidade descreve, basicamente, o comportamento acoplado entre tensão e poropressão num meio poroso. Entre os anos de 1935 e 1962, Maurice Anthony Biot publicou uma série de artigos que fundamentaram a teoria da poroelasticidade descrevendo o comportamento mecânico de meios porosos saturados com fluidos. Segundo Geertsma (1966), a descrição matemática da teoria macroscópica da poroelasticidade é similar à descrição matemática utilizada na teoria da termoelasticidade.

Dois fenômenos básicos substanciam o comportamento poroelástico:

I. Acoplamento *sólido-fluido* que ocorre quando uma variação na tensão aplicada produz uma variação na poropressão;

II. Acoplamento *fluido-sólido* que ocorre quando uma variação na poropressão produz uma variação no volume dos poros.

Salienta-se que a palavra *sólido* refere-se ao esqueleto sólido presente num material poroso. Os acoplamentos *sólido-fluido* e *fluido-sólido* são assumidos acontecerem instantaneamente, numa aproximação quase-estática, na qual a propagação de ondas elásticas é ignorada. Esses dois fenômenos envolvendo o acoplamento de sólidos e fluidos são descritos por formulações matemáticas do tipo linear. As equações constitutivas da poroelasticidade são uma generalização da elasticidade linear, na qual a pressão do fluido é incorporada de uma maneira análoga à temperatura na termoelasticidade.

Em seu trabalho, Biot (1941) considerou o comportamento de uma coluna de solo sujeita a um carregamento do tipo estático e o meio composto por dois elementos distintos: os grãos de solo e a água, esta preenchendo totalmente os vazios. Biot (1941) adotou algumas hipóteses para as propriedades básicas dos solos:

1. o material é considerado isotrópico;
2. o material é considerado perfeitamente elástico, ou seja, o carregamento e o descarregamento seguem o mesmo caminho no gráfico tensão-deformação;
3. as deformações do material são pequenas, ou seja, as relações entre deformações e deslocamentos são lineares;
4. a água contida nos vazios pode ser considerada incompressível;
5. o escoamento da água no meio poroso ocorre segundo a lei de Darcy; e
6. o solo é considerado saturado, ou seja, os vazios são totalmente preenchidos por água.

Note-se que todas as hipóteses propostas por Biot são aproximações. Contudo, em vários casos práticos em engenharia, essas aproximações correspondem de maneira satisfatória ao comportamento de um solo real.

No presente capítulo, veremos de maneira sintetizada a teoria da poroelasticidade proposta por Biot, apresentando os seus preceitos, a formulação matemática e a interpretação física das constantes nela presentes.

3.2 POROELASTICIDADE DE BIOT

Normalmente, em diversas aplicações na engenharia, as rochas são tratadas como um material homogêneo. No entanto, em uma escala microscópica percebe-se que a composição das rochas é em sua grande maioria heterogênea. Segundo Fjaer *et al.* (2008, capítulo 6) a teoria da poroelasticidade é justamente baseada na ideia de que as rochas consistem de partes sólidas e fluidas, que estão separadas numa escala microscópica, mas que coexistem numa escala macroscópica.

A teoria da poroelasticidade proposta por Biot (1941) é estabelecida a partir das propriedades elásticas de um material poroso macroscópico, consubstanciada no conhecimento de alguns parâmetros, tais como o módulo volumétrico (K) e o módulo de cisalhamento (G). Note-se que é um desafio interessante determinarem-se propriedades da macroestrutura da rocha através de parâmetros microscópicos. Uma vez obtidos os valores dos parâmetros macroscópicos, a partir de teorias que consideram a estrutura microscópica é possível considerar que tais parâmetros representem um material que é homogêneo na escala macroscópica.

Apresentar-se-á nesta parte do trabalho um breve resumo da teoria da poroelasticidade proposta por Biot (1941) e uma descrição desta teoria conforme apresentada por Wang (2000).

3.2.1 TEORIA GERAL DE BIOT

Terzaghi (*apud*. Wang (2000), Detournay & Cheng (1993)) foi o primeiro a propor uma teoria sobre o fenômeno chamado de consolidação. O tratamento matemático de Terzaghi foi baseado nos resultados de experimentos em laboratório. Segundo esse autor a matriz sólida seria composta por grãos ou partículas, que estão mais ou menos ligados entre si por certas forças moleculares. Entre essas partículas tem-se a presença de espaços vazios e o conjunto teria propriedades elásticas. Um bom exemplo desse conceito seria pensar numa esponja saturada com água: quando aplicada uma carga sobre tal sistema, ocorrerá um assentamento gradual. Instantaneamente, a carga seria absorvida pela água. À medida, entretanto, que a água é expulsa dos vazios, a carga é transferida para a matriz sólida. Terzaghi (*op. cit*) aplicou esse conceito para um caso unidimensional, com carga constante e sem expansão lateral.

A extensão do problema para um caso tridimensional foi proposta por Biot (1941) em seu artigo intitulado "*General Theory of Three-Dimensional Consolidation*". Biot assumiu que o material seja isotrópico, linear-elástico, com pequenas deformações. O fluido presente nos poros é incompressível, o meio está saturado, ou não, e o escoamento do fluido através dos poros segue a Lei de Darcy.

De maneira resumida serão apresentados agora os conceitos básicos desenvolvidos por Biot (1941) para a teoria da poroelasticidade.

Tensões atuantes

Considere-se um elemento cúbico pequeno, cujos lados são paralelos às coordenadas dos eixos de referência. Esse elemento é grande o bastante quando comparado com o tamanho dos poros, mas pequeno quando comparado à escala de um fenômeno macroscópico.

As tensões médias representadas, por forças distribuídas uniformemente sobre as faces do elemento cúbico, podem ser descritas por um tensor de 2ª ordem (σ_{ij})[2]:

$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{matrix} \tag{3.1}$$

As seguintes equações de equilíbrio para o campo de tensões devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Fisicamente, as tensões estão distribuídas em duas partes: uma parte das tensões é absorvida pela pressão hidrostática da água e a outra parte é absorvida pelo esqueleto da matriz rochosa.

[2] O índice i representa a direção que dá origem à componente e o índice j representa a direção normal ao plano de atuação da componente.

Deformação relacionada à tensão e pressão de fluido

Assumindo deformações pequenas (infinitesimais), tem-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} & \varepsilon_{32} &= \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} & \varepsilon_{31} &= \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial x_3} & \varepsilon_{21} &= \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde u, v e w são, respectivamente, as componentes de deslocamentos nas direções x_1, x_2 e x_3.

Para descrever completamente a condição macroscópica do meio poroso, deve-se adicionar uma variável expressando a quantidade de fluido nos poros. Denota-se por θ o incremento de volume de fluido por unidade de volume do meio poroso. O incremento de pressão de fluido denotar-se-á por p.

Na introdução da pressão de fluido, deve-se ter em mente que o meio é considerado isotrópico e que, portanto, esta não causará nenhuma deformação cisalhante e o seu efeito será igual sobre as três componentes de deformações normais $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$. Assim, tem-se:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{p}{3H} \tag{3.4a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \frac{p}{3H} \tag{3.4b}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{p}{3H} \tag{3.4c}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} \tag{3.4d}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{G} \tag{3.4e}$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{\sigma_{32}}{G} \tag{3.4f}$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, ν é o Coeficiente de Poisson drenado, E é o módulo de Young drenado e $\frac{1}{H}$ é um parâmetro introduzido por Biot para considerar especificamente o acoplamento sólido-fluido, relacionando as variações de volume do meio poroso às variações de pressão no fluido.

Com a premissa de considerar o material isotrópico e que não há efeito das tensões cisalhantes sobre θ, Biot propôs que o incremento de volume de fluido por unidade de volume de sólido possa ser escrito como:

$$\theta = \frac{1}{3H}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{p}{R} \tag{3.5}$$

onde $\frac{1}{R}$ é outro parâmetro introduzido por Biot na formulação.

As equações (3.4) e (3.5) são as relações fundamentais que descrevem as propriedades de uma matriz sólida contendo um fluido em condição de equilíbrio no espaço poroso. Existem nessa nova relação quatro constantes físicas (*E*, *ν*, *H* e *R*) que serão analisadas posteriormente. Invertendo-se as equações (3.4) e (3.5) encontra-se que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2G\left(\varepsilon_{11} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) - \alpha p \\
\sigma_{22} &= 2G\left(\varepsilon_{22} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) - \alpha p \\
\sigma_{33} &= 2G\left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) - \alpha p \\
\sigma_{12} &= \frac{\varepsilon_{12}}{G} \\
\sigma_{31} &= \frac{\varepsilon_{31}}{G} \\
\sigma_{32} &= \frac{\varepsilon_{32}}{G}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\frac{G}{H}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

3.2.2 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS CONSTANTES DE BIOT

Em sua teoria, Biot (1941) introduziu duas novas constantes físicas nas equações da elasticidade clássica para a formulação da teoria da poroelasticidade. Discutiremos agora a descrição apresentada por Wang (2000), para aclarar a interpretação física das constantes de Biot.

Alguns trabalhos relacionados à hidrogeologia, como os de Jacob (1940) e Theis (1938), já apresentavam a ideia de incremento de volume de fluido por unidade de volume de sólido, θ, definido por Biot (*op. cit.*), que em outras palavras, seria o volume de fluido adicionado ao armazenamento.

Detournay & Cheng (1993) apresentou discussões detalhadas da teoria com uma variedade de soluções, especialmente para problemas relacionados a poços e formulações numéricas.

Como dito anteriormente, são necessários quatro parâmetros poroelásticos para relacionar as deformações e os incrementos de fluidos à tensão e à poropressão. O parâmetro $\frac{1}{R}$ é chamado, por Wang (2000), de coeficiente de armazenamento específico sob tensão constante ou "*unconstrained specific storage coefficient*" e relaciona a mudança do incremento de fluido com a pressão de poros (p) em uma amostra. Wang (2000, seção 3.3) demonstra, numa análise micromecânica, que $\frac{1}{R}$ é determinado pela compressibilidade da matriz rochosa, dos poros e dos grãos.

O outro parâmetro, $\frac{1}{H}$, é denominado por Wang (2000) de coeficiente de expansão poroelástico e relaciona a deformação volumétrica com a poropressão, em um estado de tensão constante. Segundo Wang (*op. cit.*) o coeficiente de expansão poroelástico é frequentemente chamado de compressibilidade.

Coeficiente de Biot-Willis

Como definido, anteriormente, nas equações (3.6), o coeficiente de expansão poroelástico ou a compressibilidade pode ser escrita como:

$$\frac{1}{H} = \frac{\alpha}{K}$$

onde $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ é o módulo volumétrico e α é denominado coeficiente de Biot-Willis.

O coeficiente de Biot-Willis é definido como:

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \tag{3.7}$$

onde K_s é o módulo de deformação volumétrica da matriz sólida.

Biot (1941) mostrou que o problema unidimensional da consolidação de Terzaghi (*op. cit*) é um caso especial de sua teoria. No ano de 1969 em um artigo intitulado "*Elastic storage of aquifers. In Flow Through Porous Media*", Verruijt validou a aplicabilidade geral da teoria de Biot ao comportamento dos aquíferos. Outras aplicações importantes da teoria de Biot foram apresentadas, tais como: por Geertsma (1966) com relação à subsidência devida à extração de petróleo e Haimson & Fairhurst (1969) com relação ao fraturamento hidráulico.

Uma reformulação das equações constitutivas da poroelasticidade linear foi proposta por Rice & Cleary em 1976 e vem sendo amplamente adotada em problemas geofísicos (Wang, 2000). Rice & Cleary (1976) escolheram parâmetros constitutivos que enfatizam os comportamentos limites em condições drenadas (poropressão constante) e não-drenadas (sem fluxo), que correspondem aos comportamentos de longo e curto prazos, respectivamente.

Coeficiente de Skempton

Os efeitos poroelásticos afetam apenas as parcelas de tensão hidrostática e deformação volumétrica. Dessa forma, as equações constitutivas (3.4)a, (3.4)b e (3.4)c podem ser reescritas em função do módulo volumétrico, K:

$$\varepsilon = \frac{1}{3K}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{H}p \tag{3.8}$$

Note-se que, em caso de tensões normais iguais a zero ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$), cada deformação normal ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$) é diretamente proporcional à poropressão, na proporção de $\frac{1}{3H}$.

O coeficiente de Skempton, B, é definido como sendo a relação entre a poropressão induzida e a tensão aplicada, sob condição não-drenada, isto é, não ocorrendo movimento de entrada ou saída de fluido no volume de referência[3].

$$B \equiv -\left.\frac{\delta p}{\delta \sigma}\right|_{\theta=0} \tag{3.9}$$

Observe-se que nessa definição considera-se que uma tensão compressiva é negativa, o que justifica o sinal negativo na equação (3.9). O subscrito na equação ($\theta = 0$) é

[3] Volume de referência é definido como sendo um volume fixo ou em movimento com velocidade constante através do qual um gás, líquido ou sólido flui.

importante porque expressa a condição não-drenada. Considerando essa condição na equação (3.5) supramencionada tem-se:

$$B = \frac{R}{H} = -\frac{p}{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3}\bigg|_{\theta=0} \tag{3.10}$$

O coeficiente de Skempton, como pode ser visto, é uma grandeza adimensional e seu intervalo de variação é o seguinte: $0 \leq B \leq 1$. Mensura como as tensões aplicadas se distribuem entre o esqueleto sólido e o fluido sob condição não-drenada. Seu valor será 1 (um) para meios porosos saturados, quando o fluido contido nos poros for altamente incompressível, significando que as cargas são suportadas por esse último. Tenderá a 0 (zero) para poros preenchidos com gás, quando as cargas são suportadas pelo esqueleto sólido, que, nesse caso, é "infinitamente" mais rígido que o fluido.

Definidos os coeficientes de Biot-Willis e de Skempton as equações (3.5) e (3.8) podem ser reescrita com tais coeficientes, sendo:

$$\theta = \frac{\alpha}{3K}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{\alpha}{KB}p \tag{3.11}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3K}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{\alpha}{K}p \tag{3.12}$$

Wang (2000) fornece alguns valores típicos de constantes poroelásticas para diferentes tipos de rochas. Alguns desses valores podem ser encontrados no Apêndice A.

CAPÍTULO 4

4 TEORIA DE BIOT ACOPLADA À TEORIA DE COSSERAT

4.1 INTRODUÇÃO

Conforme visto no capítulo 2, os irmãos Cosserat propuseram uma mecânica dos meios contínuos generalizada, na qual os pontos materiais possuem todos os graus de liberdade de um corpo rígido, ou seja, estes pontos além de sofrerem translações também sofrem rotações. Em consequência, aparecem na estática do meio, grandezas energeticamente conjugadas aos gradientes dessas rotações (curvaturas), que são as tensões-momento (momentos por unidade de área). A relação entre tensões-momento e gradientes das rotações introduz, implicitamente, as dimensões e a forma das partículas nas relações constitutivas, o que permite contemplar efeitos de escala microestruturais no comportamento do meio.

Por outro lado, Maurice A. Biot no artigo "*General Theory of Three-Dimensional Consolidation*", em 1941, desenvolveu a sua conhecida teoria da poroelasticidade, que permite acoplar os efeitos de um fluxo interno de fluidos à resposta mecânica do sólido poroso. Segundo Fjaer *et.al* (2008) a teoria da poroelasticidade é justamente baseada na ideia de que as rochas consistem de partes sólidas e fluidas, que estão separadas numa escala microscópica, mas que coexistem numa escala macroscópica.

Na análise da estabilidade de poços e demais aberturas subterrâneas, o que mais se utiliza na prática é considerar a rocha como um sólido elástico, através da solução proposta por Kirsch (1898). Alguns autores, como, por exemplo, Alcure (2013), em sua dissertação "*Determinação do modelo mais representativo para o cálculo do gradiente de fratura e sua influência na janela operacional*", têm pesquisado a importância de se considerar a poroelasticidade na definição da janela operacional de um poço de petróleo. Outros, como Bayona Mendoza (2003), em sua tese "*Análise da instabilidade*

de poços de petróleo associada à produção de areia através de um modelo do Contínuo de Cosserat", têm pesquisado a relevância dos efeitos microestruturais provenientes da relação tensões-momento versus curvaturas na estabilidade de poços.

O presente capítulo propõe acoplar a relevância dos efeitos de escala microestruturais, através da mecânica dos meios contínuos generalizada de Cosserat, com os efeitos poroeláticos, na concentração de tensões em aberturas circulares em rochas. Conforme visto nos capítulos 2 e 3, as teorias de Cosserat e Biot modificam a maneira de se considerar as tensões cisalhantes e normais, respectivamente, em relação à mecânica do contínuo clássico. Sabendo-se que tais modificações ocorrem de forma independente, ou seja, o efeito da teoria de Cosserat modifica apenas o tratamento das tensões cisalhantes e o efeito da teoria de Biot modifica apenas o tratamento das tensões normais, a superposição dos efeitos não violaria nenhuma prescrição intrínseca às referidas teorias, sendo apenas uma consequência das duas estarem ou não presentes na formulação do problema. Adianta-se a informação de que o acoplamento aqui proposto se desfaz prontamente quando uma das teorias não é satisfeita/aplicada e isso não causa nenhuma interferência à outra. A proposta do capítulo, até onde é do nosso conhecimento, um estudo inédito, é formular o acoplamento dos efeitos da poroelasticidade com os efeitos da mecânica dos meios contínuos generalizados de Cosserat sobre a concentração das tensões em torno de aberturas circulares. Vale ressaltar que não se abordou aqui o processo transiente de dissipação das poropressões que ocorre em sequência à escavação da abertura, como foi tratado por Detournay & Cheng (1988). Trata-se aqui apenas da condição de curto prazo.

4.2 TEORIA DE COSSERAT E TEORIA DAS TENSÕES-MOMENTO

No capítulo 2 vimos que a teoria proposta pelos irmãos Cosserat é caracterizada pela introdução de um vetor rotação, que atribui à partícula material a cinemática de um corpo rígido, sendo as microrrotações, w_i^c, graus de liberdade adicionais a u_i e os gradientes dessas rotações relacionados às curvaturas. A equação (2.33)h é uma das

equações que caracterizam o comportamento elástico linear isotrópico de um meio de Cosserat 2*D:*

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} + 2G_c(\omega_k^c - \omega_k) \qquad (2.33)\text{h}$$

onde λ e G são as constantes de Lamé, G_c é o módulo de cisalhamento rotacional e a diferença $\omega_k - \omega_k^c$ é definida como sendo a rotação relativa entre a microestrutura e a macroestrutura.

Pal'mov publicou, em 1964, o artigo "*The plane problem in the theory of nonsymmetrical elasticity*", no qual estabeleceu uma solução analítica para as concentrações de tensões em torno de um furo circular (por exemplo, um poço ou uma abertura subterrânea), considerando o efeito das tensões-momento. O referido autor encontrou valores de concentrações 1.8 vezes menores que aqueles determinados por Kirsch (1898) – (*apud* Jaeger & Cook, 1979), que são os usualmente empregados nestes contextos.

De acordo com Pal'mov (1964), o valor da tensão tangencial máxima (σ_θ) na parede de um furo circular inserido num campo de tensão uniaxial é:

$$\sigma_{\theta(max)} = P\frac{3+F}{1+F}, para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \qquad (4.1)$$

onde P é a tensão uniaxial do campo e θ é o ângulo medido no plano x_1x_2 a partir do eixo x_1;

e

$$F = \frac{8(1-\nu)\frac{h^2}{l^2}}{\left[4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l}\frac{K_0(\frac{a}{l})}{K_1(\frac{a}{l})}\right]} \qquad (4.2)$$

sendo:

$$h^2 = \frac{B_c}{4G}$$

$$l^2 = \frac{B_c(G + G_c)}{4GG_c}$$

Os parâmetros que aparecem acima são:

— B_c é o módulo de flexão;

— ν é o coeficiente de Poisson;

— G e G_C são os módulos de cisalhamento e cisalhamento rotacional, respectivamente;

— h e l são parâmetros com dimensão de comprimento, definidas por Pal'mov ("*chamados comprimentos característicos*");

— a é o raio do furo circular (poço ou abertura subterrânea);

— K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel de segunda classe e ordens zero e um, respectivamente (Spiegel, 1973).

De maneira análoga, Mindlin (1963) também estabeleceu uma solução analítica para as concentrações de tensões em torno de um furo circular, considerando o efeito das tensões-momento. Conforme apresentado no Capítulo 2, na Teoria das Tensões Momento (*Couple Stress Theory*) não há rotação relativa entre a microestrutura e a macroestrutura, ou seja, considera-se que as rotações da microestrutura coincidem com as rotações da macroestrutura ($\omega_k^c = \omega_k$). Dessa forma, o módulo de cisalhamento rotacional G_c, presente no último termo da equação (2.33)h, fica indeterminado.

Mindlin (1963) mostrou que o valor da tensão tangencial máxima (σ_θ) na parede de um furo circular inserido num campo de tensão uniaxial é:

$$\sigma'_{\theta(max)} = P\frac{3 + F'}{1 + F'}, para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{4.3}$$

onde P é a tensão uniaxial do campo e θ é o ângulo medido no plano x_1x_2 a partir do eixo x_1;

e

$$F' = \frac{8(1-\nu)}{\left[4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l'}\frac{K_0(\frac{a}{l})}{K_1(\frac{a}{l})}\right]} \tag{4.4}$$

sendo:

$$l^2 = \frac{B_c}{G}$$

Os parâmetros que aparecem na equação (4.4) acima são:

— B_c é o módulo de flexão;

— ν é o coeficiente de Poisson;

— G é o módulo de cisalhamento;

— l é um parâmetro com dimensão de comprimento, definido por Mindlin ("*chamado comprimento característico*");

— a é o raio do furo circular (poço ou abertura subterrânea);

— K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel de segunda classe e ordens zero e um, respectivamente (Spiegel, 1973).

Note que as funções Fe F' encontradas, respectivamente, por Pal'mov (1964) e por Mindlin (1963) são bem parecidas, exceto pela razão h^2/l^2 que aparece no numerador da função F.

Kaloni & Ariman (1967) apresentaram uma solução com base na teoria micropolar de Eringen (1965) (com microrrotações independentes das macrorrotações) e obtiveram os mesmos resultados que Pal'mov (1964). Para Kaloni & Ariman (1967) a função F' apresentada no trabalho de Mindlin (1963) não seria aceitável. Segundo esses autores uma comparação cuidadosa das funções indica que F só se tornaria igual à função F' se, e somente se:

$$\frac{h^2}{l^2} = 1 \tag{4.5)a}$$

Para os referidos autores a equação (4.5)a contradiz as restrições termodinâmicas impostas aos valores dos parâmetros da teoria micropolar (ou de Cosserat) e seria fisicamente irrealista. Contudo, veremos a seguir que a solução apresentada por Mindlin não infringe nenhuma restrição termodinâmica da Teoria das Tensões Momento, como concluíram, sem procedência, Kaloni & Ariman (1967). Podemos escrever a equação (4.5)a em termos dos parâmetros B, G e G_c:

$$\frac{h^2}{l^2} = \frac{G_c}{G + G_c} \tag{4.6}$$

Assim, a igualdade da equação (4.5)a é válida se considerarmos $G_c \to \infty$, isto é:

$$\lim_{G_c \to \infty} \left(\frac{G_c}{G + G_c} \right) = 1 \tag{4.7}$$

De fato, a equação (4.5)a faz sentido para um módulo de cisalhamento rotacional (G_c) tendendo para o infinito. Pela equação (2.33)g, nota-se que nesse caso as tensões antissimétricas ficam indeterminadas, pois se tem o produto de um termo nulo (as rotações relativas) por um valor infinito (G_c). Isso é justamente o que ocorre na Teoria das Tensões Momento: uma indeterminação das tensões antissimétricas. Conforme visto no Capítulo 2, não faz sentido falar em tensões antissimétricas para um meio rígido com respeito às rotações relativas. Reside justamente aí, a razão da sua indeterminação. Portanto, na solução de Mindlin (equação (4.4)) não é violada nenhuma restrição termodinâmica da teoria das tensões momento. O equívoco de Kaloni & Ariman (1967) foi tentar aplicar uma restrição termodinâmica válida para a teoria micropolar, a uma solução obtida com base em outra teoria (a das Tensões Momento), para a qual as restrições sobre os valores dos parâmetros são, naturalmente, diferentes.

4.3 BIOT ACOPLADA À COSSERAT

Comparando as relações tensões-deformações do contínuo clássico com as teorias apresentadas por Cosserat e Biot conclui-se que: (a) conforme visto no Capítulo 2, as

relações tensões-deformações para o contínuo de Cosserat são essencialmente as mesmas no caso dos termos para as tensões normais, mas, para as tensões cisalhantes, as relações são diferentes, incluindo as microrrotações que, por sua vez, são diferentes das macrorrotações do contínuo clássico; (b) no Capítulo 3 foi visto que as relações tensões-deformações na teoria da poroelasticidade são as mesmas no caso dos termos para as tensões cisalhantes, mas, para as tensões normais as relações são diferentes, incluindo a poropressão. Tendo em vista que a teoria de Cosserat modifica apenas as tensões cisalhantes e a teoria proposta por Biot modifica apenas as tensões normais, será proposto a seguir um acoplamento entre as duas, considerando assim, a rotação das partículas e a poropressão de fluido na matriz rochosa.

As equações que caracterizam o comportamento elástico linear isotrópico de um meio de Cosserat 2*D* são:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + 2G_c\gamma_{[ij]} \tag{4.8)a}$$

$$m_{3i} = m_i = B_c\kappa_i \tag{4.8)b}$$

Já as equações que caracterizam o comportamento linear poroelástico são:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - \alpha p \tag{4.9)a}$$

$$\theta = \frac{\alpha}{3K}(\sigma_{kk}) + \frac{\alpha}{KB}p \tag{4.9)b}$$

O acoplamento proposto é uma simples superposição dos efeitos causados tanto nas tensões cisalhantes pela introdução das rotações, quanto nas tensões normais pela introdução da poropressão.

Definiremos a seguir as novas equações que caracterizarão o comportamento elástico linear de um meio de Cosserat poroelástico:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + 2G_c\gamma_{[ij]} - \alpha p \tag{4.10)a}$$

$$m_{3i} = m_i = B_c\kappa_i \tag{4.10)b}$$

$$\theta = \frac{\alpha}{3K}(\sigma_{kk}) + \frac{\alpha}{KB}p \tag{4.10)c}$$

4.3.1 PROBLEMA BIDIMENSIONAL

Vários problemas da engenharia podem ser representados por uma seção transversal (2D), perpendicular à maior das suas dimensões. O estado plano de deformação é caracterizado quando uma das direções é infinitamente maior que as outras duas direções. Pode-se citar como exemplos de casos de estado de deformação plana: túneis, barragens, poços etc. Estabeleceremos, a partir deste momento, uma solução analítica para as concentrações de tensões num problema bidimensional sob os efeitos da poroelasticidade acoplada à rotação das partículas de um meio de Cosserat.

Equações de equilíbrio

Na Figura 4.1 estão representadas as componentes de tensões (σ_{ij}) e tensões-momentos (m_i) atuando sobre as faces de um elemento pequeno de comprimento (δ_{x1}), largura (δ_{x2}) e espessura unitária.

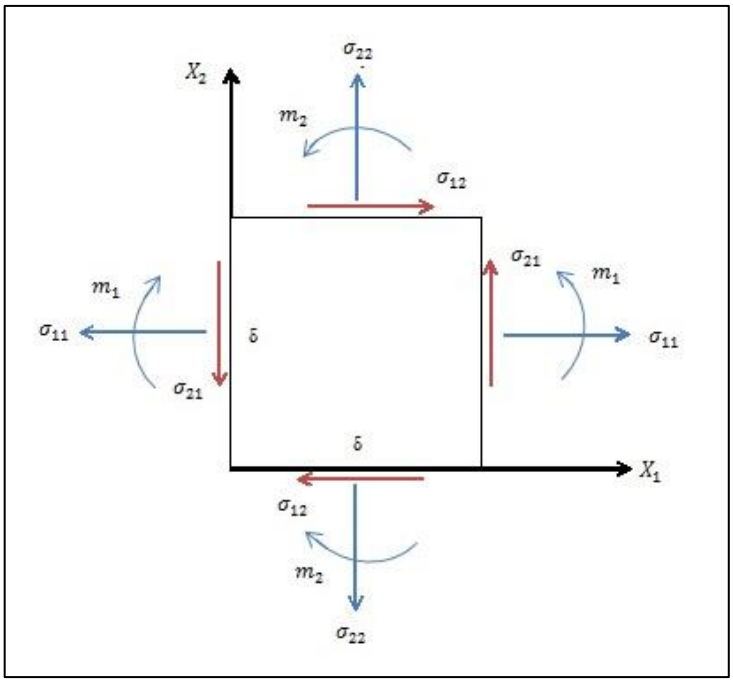

Figura 4.1 - Componentes de tensões e tensões-momento.

A condição de equilíbrio de momentos é dada como:

$$\frac{\partial m_1}{\partial x_1} + \frac{\partial m_2}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \tag{4.11}$$

Considerando o equilíbrio de forças, temos:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \tag{4.12}$$

As componentes de deformações podem ser escritas em função das componentes de deslocamentos e rotações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \qquad & \gamma_{12} &= \frac{\partial v}{\partial x_1} - \omega_3^c \qquad & \kappa_{11} &= \frac{\partial \omega_3^c}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} \qquad & \gamma_{21} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \omega_3^c \qquad & \kappa_{11} &= \frac{\partial \omega_3^c}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Deformações produzidas por tensões e tensões-momento

Num estado plano de deformação (plano x_1x_2), tem-se $\varepsilon_{33} = 0$. Podemos escrever as deformações normais ε_{11} e ε_{22}, relacionando-as com as componentes das tensões normais e com a poropressão, como:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha] \tag{4.14)a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha] \tag{4.14)b}$$

Nota-se que as equações (4.14)a e (4.14)b são idênticas às equações encontradas por Wang (2000, seção 7.1). Por outro lado, podemos escrever as deformações transversais γ_{12} e γ_{21} relacionando-as com os módulos de cisalhamento (G) e de cisalhamento rotacional (G_c). Tais deformações podem ser escritas como:

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4G} + \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{4G_c} \tag{4.15)a}$$

$$\gamma_{21} = \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4G} - \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{4G_c} \tag{4.15)b}$$

As equações (4.15)a e (4.15)b são idênticas às propostas por Pal'mov (1964). É possível verificar nas equações acima o surgimento do termo que envolve o módulo rotacional (G_c) que não aparece nas deformações do contínuo clássico, bem como, podemos identificar nas tensões cisalhantes as partes simétricas e antissiméticas, tal como definido no capítulo 2.

Equações de compatibilidade

As equações de compatibilidade, para um caso particular de deformação plana, podem ser conseguidas com um pouco de exercício algébrico utilizando as componentes de deformações supramencionadas nas equações (4.13):

$$\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} - \kappa_{11} = 0 \qquad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} - \kappa_{22} = 0 \qquad \frac{\partial \kappa_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \kappa_{11}}{\partial x_2} = 0 \tag{4.16}$$

Conforme visto no capítulo 2 (seção 2.4.4) as tensões-momento relacionam-se com as curvaturas (κ_i) por meio do módulo de flexão (B_c) da seguinte forma:

$$m_{3i} = m_i = B_c \kappa_i \tag{4.17}$$

Dessa maneira, podemos substituir as expressões 4.14, 4.15 e 4.17 nas equações de compatibilidade (4.16). Obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\sigma_{12}+\sigma_{21}}{4G} - \frac{\sigma_{12}-\sigma_{21}}{4G_c}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha\right]\right] - \frac{m_1}{B_c} = 0 \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha\right]\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\sigma_{12}+\sigma_{21}}{4G} + \frac{\sigma_{12}-\sigma_{21}}{4G_c}\right] - \frac{m_2}{B_c} = 0 \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_2}{B_c}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{m_1}{B_c}\right) = 0 \tag{4.20}$$

Funções de tensão

Uma função de tensão é uma função em que a tensão pode ser derivada em qualquer ponto de x_1 e x_2, e que satisfazem automaticamente as condições de equilíbrio. As equações (4.12) e (4.20) são condições necessárias e suficientes para a existência de funções φ_1, φ_2 e ω. Assim como Mindlin (1963) e Pal'mov (1964) reescreveremos as tensões e as tensões-momento em função de φ_1, φ_2 e ω:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \qquad \sigma_{21} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \tag{4.21}$$

$$m_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \qquad m_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \tag{4.22}$$

Adicionalmente, consideraremos uma condição não-drenada, ou seja, não ocorre movimento de entrada ou saída de fluido no volume de referência (equação (3.9)). Segundo Wang (2000, seção 7.1) para esta situação temos a seguinte relação:

$$\partial(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-3\partial p}{B(1 + \nu_u)} \tag{4.23}$$

Onde ν_u é o coeficiente de Poisson na condição não-drenada.

Podemos reescrever a equação (4.23) da seguinte forma (Wang, 2000, seção 3.2):

$$(\nu_u - \nu)\partial(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\alpha(1 - 2\nu)\partial p \tag{4.24}$$

Se as equações (4.21) e (4.22) forem inseridas na equação (4.11), teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \varphi_1\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \varphi_2\right) = 0 \tag{4.25}$$

A equação (4.25) é necessária e suficiente para a existência de uma função φ tal que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \qquad e \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \tag{4.26}$$

Conforme visto acima, podemos escrever as equações (4.21) em função de φ e ω:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial {x_2}^2} \\
\sigma_{21} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial {x_1}^2}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dessa maneira, todas as componentes das tensões e das tensões-momento estão expressas em termos de duas funções tensões φ e ω. Nota-se que se a função ω for igual à zero, não existirão as funções tensões-momento e as equações (4.27) se tornarão as usuais expressões das funções de tensão de Airy (Timoshenko, 1951).

Encontrando uma solução para o problema bidimensional

Derivando as funções (4.27), considerando-se a igualdade (4.24) e, daí substituindo nas equações (4.18) e (4.19) para determinar as funções φ e ω, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = -2(1-\nu_u)\, h^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\varphi \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = 2(1-\nu_u)\, h^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\varphi \tag{4.29}$$

onde:

$$h^2 = \frac{B_c}{4G} \qquad l^2 = \frac{B_c(G+G_c)}{4GG_c} \qquad \nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1-2\nu)}{3-\alpha B(1-2\nu)}$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)$$

- B_c é o módulo de flexão;
- h e l são variáveis de dimensão de comprimento tais como as definidas por Pal'mov (chamados *"comprimentos característicos*");
- ν é o coeficiente de Poisson;
- ν_u é o coeficiente de Poisson não-drenado;
- B é o Coeficiente de Skempton;
- α é coeficiente de Biot-Willis.

Toda a demonstração algébrica das equações (4.28) e (4.29) encontra-se no Apêndice B.

Se diferenciarmos a equação (4.28) em relação à x_2 e a equação (4.29) em relação à x_1 e subtrairmos uma da outra obteremos uma equação bi-harmônica para a função de tensão φ

$$\nabla^4\varphi = 0 \tag{4.30}$$

onde

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \left(\frac{\partial^4}{\partial {x_1}^4} + \frac{2\partial^2}{\partial {x_1}^2 {x_2}^2} + \frac{\partial^4}{\partial {x_2}^4}\right) \tag{4.30}$$

e de maneira similar, obteremos uma equação para ω

$$\nabla^2(\omega - l^2\nabla^2\omega) = 0 \tag{4.31}$$

Nota-se que embora tenham sido obtidas equações separadas que satisfaçam as funções φ e ω, as suas soluções não são arbitrárias. Contudo, quaisquer outras soluções que forem encontradas devem satisfazer as equações (4.28) e (4.29).

4.3.2 CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO MÁXIMA EM UM FURO CIRCULAR (2D)

Após encontrarmos as soluções para um problema bidimensional, examinaremos agora a concentração de tensão máxima no entorno de um furo (abertura) circular, tanto para um campo de tensão uniaxial quanto para um campo de tensão biaxial.

Tensões em coordenadas polares

Para resolvermos o problema proposto é conveniente transformar as coordenadas retangulares em coordenadas polares cilíndricas. A Figura 4.2 mostra as componentes de tensões e tensões-momento em tal sistema de coordenadas.

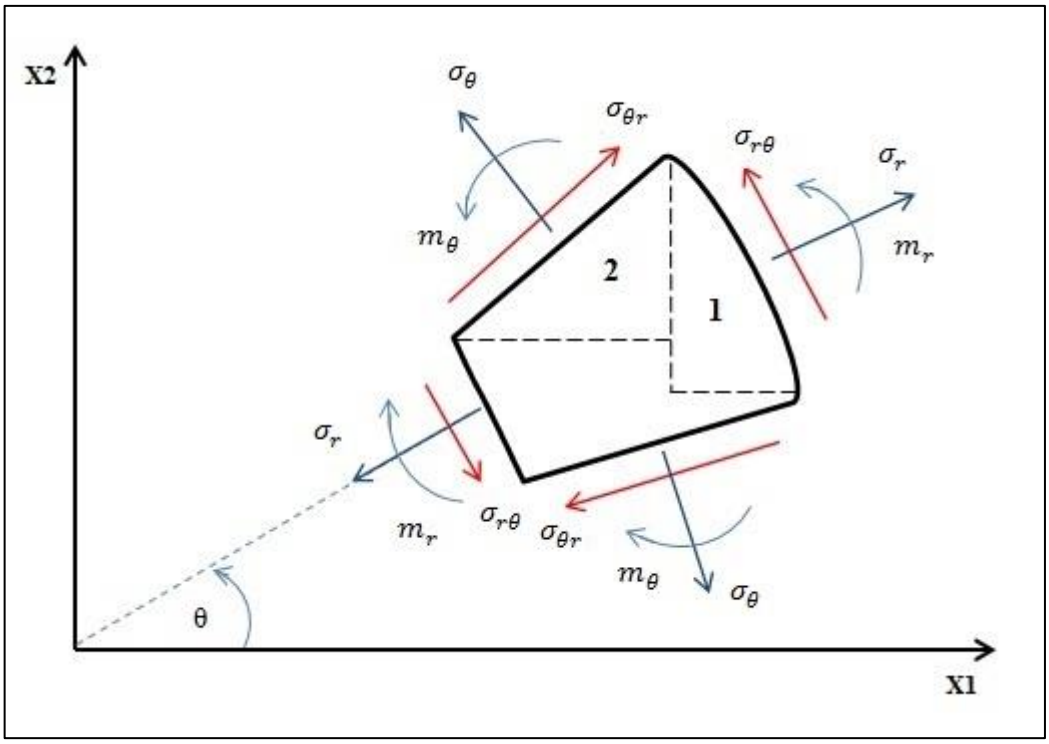

Figura 4.2 - Componentes de tensão e tensão-momento em coordenadas polares (Mindlin, 1963).

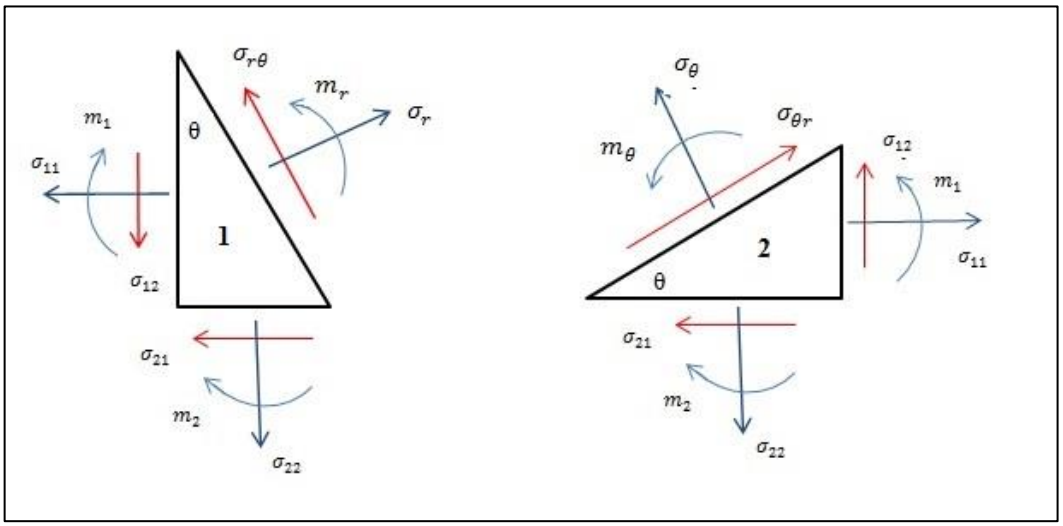

Figura 4.3 - Equilíbrio das componentes polares e retangulares de tensões e tensões-momento (Mindlin, 1963).

Considerando o equilíbrio dos elementos triangulares, extraídos da Figura 4.2 e mostrados na Figura 4.3, e após algumas transformações, encontramos as seguintes relações (ver Mindlin, 1963):

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} \tag{4.32}$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}$$

$$m_r = \frac{\partial\omega}{\partial r}$$

$$m_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$

Assim, as equações (4.28) e (4.29) transformadas em coordenadas polares se tornam:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = -2(1-\nu_u)\,h^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\varphi \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = 2(1-\nu_u)\,h^2\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\varphi \tag{4.34}$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

Campo de tensão uniaxial e biaxial

Considere um furo (abertura) circular de raio igual a inserido num campo de tensão uniaxial (P) e também num campo de tensão biaxial $(P\ e\ S)$, alinhados com os eixos de referência cartesianos x_1 e x_2, conforme a Figura 4.4.

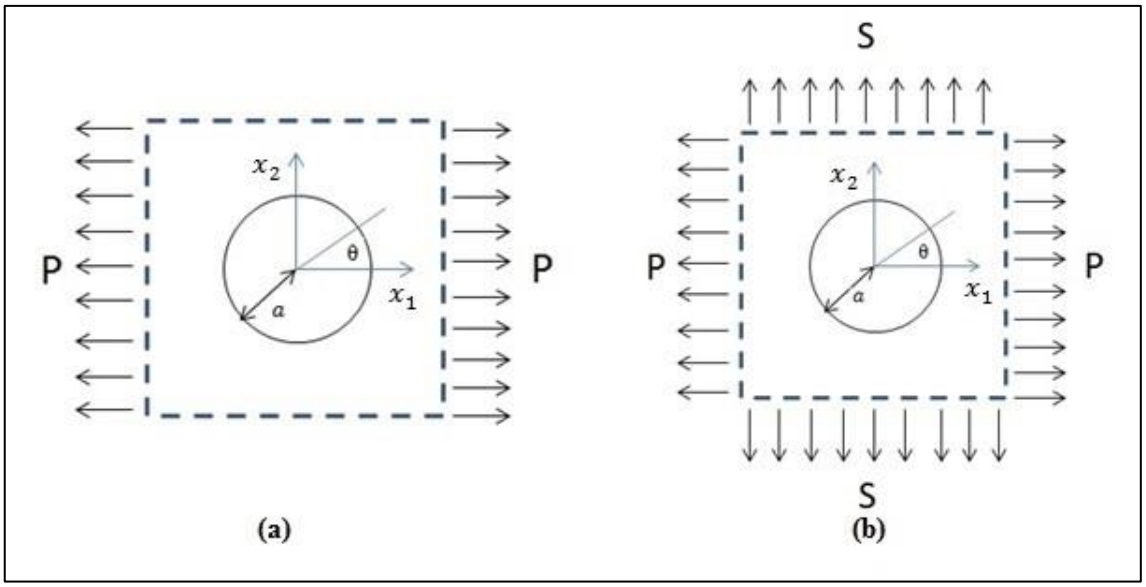

Figura 4.4 - Furo circular num campo de tensão uniaxial (a) e biaxial (b) (Modificada de Mindlin, 1963).

Após alguns cálculos e substituições algébricas (Apêndice C), o valor da tensão tangencial máxima (σ_θ) na parede de um furo circular inserido num campo de tensão simples é:

$$\sigma_{\theta(max)} = P\frac{3 + F_{BC}}{1 + F_{BC}}, \qquad para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{4.35)a}$$

onde P é a tensão uniaxial do campo e

$$F_{BC} = \frac{8(1 - \nu_u)\frac{h^2}{l^2}}{\left[4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l}\frac{K_0(\frac{a}{l})}{K_1(\frac{a}{l})}\right]} \tag{4.35)b}$$

Verifica-se que a equação (4.35) se assemelha às equações (4.1) e (4.2) encontradas por Pal'mov (1964). A diferença se dá especificamente entre as equações (4.2) e (4.35)b, ficando por conta do termo $(1 - \nu_u)$ que aparece no numerador de F_{BC}. Note-se que esse termo é justamente consequência do acoplamento da teoria de Biot à formulação de Cosserat. Uma vez que, desconsiderando o efeito da poroeslaticidade, ocorre um

desacoplamento e o problema passa a considerar apenas os efeitos da teoria de Cosserat, como obtido por Pal'mov (1964).

Realizando cálculos análogos aos feitos para o campo de tensão *in situ* uniaxial, encontramos, para o campo de tensão biaxial mostrado na Figura 4.4 (b), o seguinte valor da tensão tangencial máxima (σ_θ) na parede do furo circular:

$$\sigma_{\theta(max)} = \frac{3P - S + (P + S)F_{BC}}{1 + F_{BC}} \quad , para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{(se } P > S\text{)} \qquad (4.36)\text{a}$$

$$\sigma_{\theta(max)} = \frac{3S - P + (P + S)F_{BC}}{1 + F_{BC}} \quad , para\ \theta = 0,\ \pi \quad \text{(se } P < S\text{)} \qquad (4.37)\text{b}$$

CAPÍTULO 5

5 RESULTADOS – CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

5.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo apresentaremos os resultados das concentrações de tensões numa abertura circular (caso bidimensional) segundo a formulação apresentada no capítulo 4, que considera o acoplamento da teoria de Biot com a teoria de Cosserat.

De maneira a facilitar a compreensão dos resultados, primeiro apresentaremos a concentração de tensão tangencial máxima para um campo de tensão uniaxial e, posteriormente, apresentaremos os valores de concentração de tensão tangencial máxima num campo de tensão biaxial. Note que a escolha de apresentar o valor da concentração de tensão tangencial máxima deve-se à sua relevância no problema proposto.

Para cada resultado apresentado, far-se-á uma comparação com os resultados apresentados por Pal'mov (1964) e Mindlin (1963), de maneira a mostrar os efeitos da poroelasticidade num contínuo generalizado de Cosserat.

5.2 TENSÃO TANGENCIAL MÁXIMA – CAMPO DE TENSÃO UNIAXIAL

Conforme vimos no capítulo 4, o valor da tensão tangencial máxima para um campo de tensão uniaxial é:

$$\sigma_{\theta(max)} = P\frac{3+F_{BC}}{1+F_{BC}}, \qquad para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{5.1}$$

onde P é a tensão uniaxial do campo;

e

$$F_{BC} = \frac{8(1-\nu_u)\frac{h^2}{l^2}}{\left[4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l}\frac{K_0(\frac{a}{l})}{K_1(\frac{a}{l})}\right]}$$

Sendo

$$h^2 = \frac{B_c}{4G} \qquad l^2 = \frac{B_c(G+G_c)}{4GG_c} \qquad \nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1-2\nu)}{3 - \alpha B(1-2\nu)}$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)$$

Os parâmetros que apareceram acima são:

- B_c é o módulo de flexão;
- h e l são variáveis de dimensão de comprimento tais como as definidas por Pal'mov ("*chamados comprimentos característicos*");
- ν é o coeficiente de Poisson;
- ν_u é o coeficiente de Poisson não-drenado;
- B é o Coeficiente de Skempton;
- α é coeficiente de Biot-Willis.
- a é o raio do furo circular (poço ou abertura subterrânea);
- G e G_c são os módulos de cisalhamento e de cisalhamento rotacional, respectivamente;
- K_0 e K_1 são funções de Bessel de segundo classe de ordem zero e ordem um, respectivamente.

Caso 1

Neste primeiro caso, consideraremos uma abertura circular num arenito com as características (Apêndice A) apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Algumas propriedades do arenito Berea (Wang, 2000).

Rocha	ν_u	ν	α	B
Arenito Berea	0.33	0.20	0.79	0.62

Substituindo-se as características do arenito Berea na equação (5.1) temos os resultados da Figura 5.1 para o fator de concentração de tensão tangencial máxima (δ) numa abertura circular ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$).

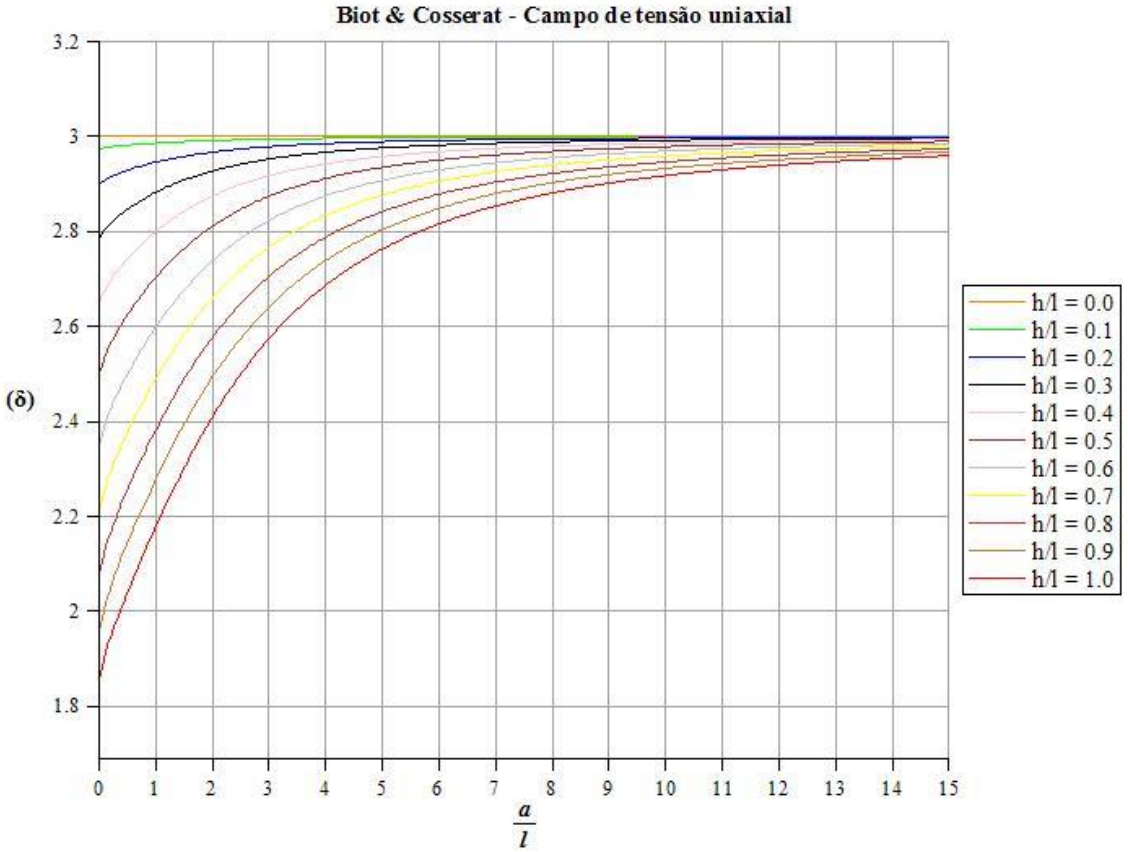

Figura 5.1 - *Biot acoplada a Cosserat.* Resultados do fator de concentração de tensão tangencial máxima (δ) numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

Realizando uma análise dos resultados acima se verifica que:

1) Quando a razão h/l é igual a zero (0), o fator de concentração de tensão (δ) é igual a 3.0. Esse resultado significa retornarmos à teoria clássica, obtendo-se o seu fator de concentração (Jaeger & Cook, 1979). Note-se que, para que $h/l \rightarrow 0$, é necessário que G_c tenda a zero e, equivalentemente, $l \rightarrow \infty$. Como discutido no capítulo 2 (item 2.4.5), um $G_c \rightarrow 0$ equivale à existência de uma microestrutura sem efeitos sobre a macroestrutura. Na presença de microestruturas com dimensões consideráveis ($l \rightarrow \infty$), isso seria fisicamente improvável;

2) À medida que a relação h/l se aproxima do valor 1.0 o fator de concentração de tensão (δ) tende ao seu valor mínimo possível. Conforme visto no capítulo 4 (seção 4.2), podemos escrever a relação dos "*comprimentos característicos*", h/l, como sendo:

$$h/l = \sqrt{\frac{G_c}{G + G_c}}$$

Assim, para a relação h/l assumir o valor um (1.0) é necessário que $G_c \rightarrow \infty$. Nesse caso verifica-se que a formulação aqui proposta retorna à teoria das tensões-momento (Mindlin & Tiersten (1962); Mindlin (1963)), quando $h/l = 1.0$;

3) No eixo *x* temos a razão a/l, ou seja, uma relação entre o tamanho da abertura circular e o "*comprimento característico* (l)" do material. Note-se que à medida que a razão cresce, o efeito sobre o fator de concentração de tensão (δ) diminui; ou seja, à medida que o tamanho do "*comprimento característico*" se torna irrelevante em relação ao tamanho da abertura circular, o efeito da microestrutura tende a desaparecer e o fator de concentração de tensão tende ao valor da teoria clássica (= 3.0; Jaeger & Cook, 1979). De maneira inversa,

quando a/l tende a zero ($l \rightarrow \infty$), os efeitos da microestrutura sobre δ são os mais apreciáveis.

Já a Figura 5.2 mostra os resultados para o mesmo caso 1, quando consideramos apenas a formulação da Teoria de Cosserat, desconsiderando o efeito da poroelasticidade. É possível verificar que o fator da concentração de tensão, nas mesmas condições de a/l e h/l, diminuiu quando consideramos apenas os efeitos microestruturais. Esse fato nos remete a uma interpretação de que a presença de fluidos tenderia a diminuir os efeitos microrrotacionais.

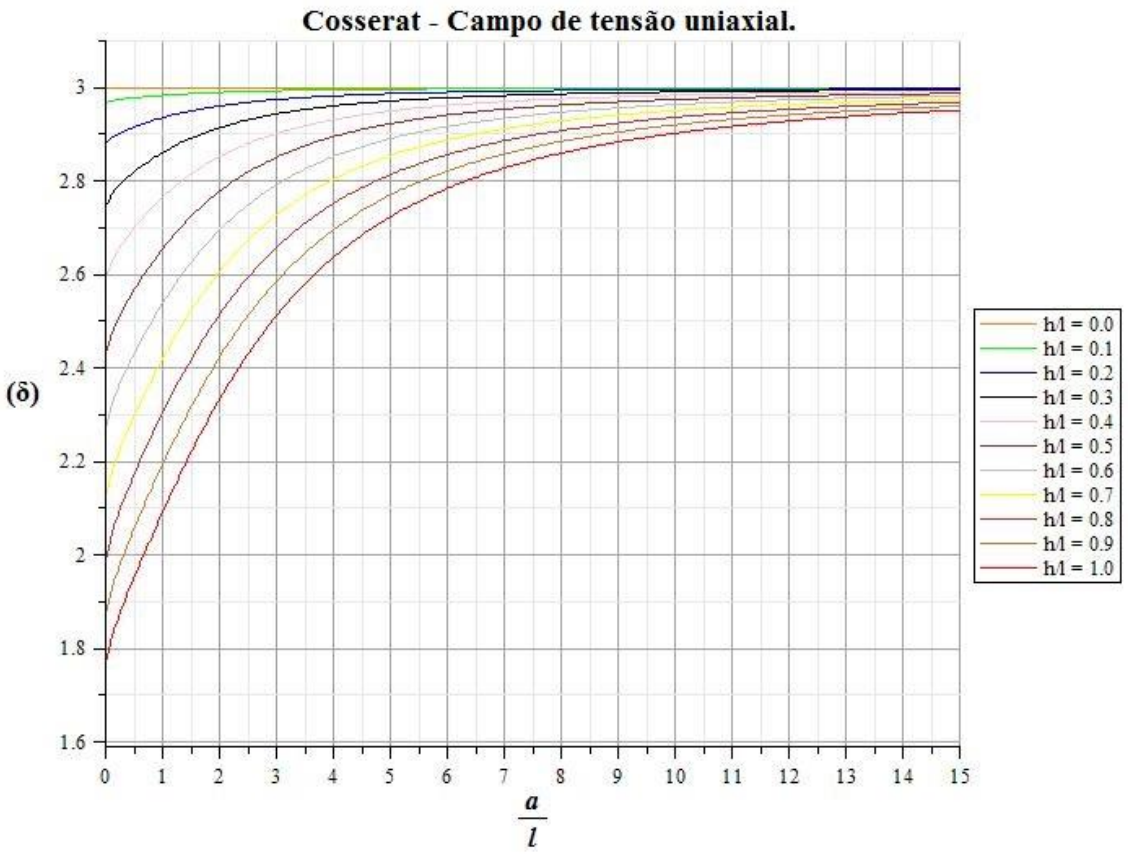

Figura 5.2 - *Teoria de Cosserat.* Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2 podemos realizar uma comparação entre os valores dos fatores de concentração de tensão para as diferentes

abordagens aplicadas ao caso 1. Verifica-se facilmente que, por exemplo, para a razão $h/l = 1.0$ (linha vermelha), o valor mínimo do fator de concentração na Figura 5.1 é aproximadamente 1.90, enquanto que na Figura 5.2 é de aproximadamente 1.80, demonstrando que quando se considera o acoplamento da teoria de Cosserat com a poroelasticidade, esse fator tende a ser maior que no caso em que se considera apenas Cosserat.

A Tabela 5.2 mostra de maneira completa, e quantitativamente, a comparação dos fatores de concentrações de tensões entre o acoplamento Biot & Cosserat e somente Cosserat. Já na Tabela 5.3, agora em termos de porcentagem, pode-se visualizar o "ganho" na redução do fator de concentração de tensão (δ) para o problema proposto (observação: considerou-se a teoria clássica como referência (valor de 3,0 = 100%)).

Os resultados na Tabela 5.3 demonstram que pode ocorrer uma redução do fator de concentração de até 27,7% em relação à teoria clássica quando consideramos o acoplamento Biot & Cosserat e uma redução do fator de concentração de até 30,3% quando consideramos apenas Cosserat.

Tabela 5.2 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão uniaxial.

Arenito Berea – Campo de tensão uniaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$\mathrm{h/l} = 0.0$	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3.00	3,00	3,00	3,00	3,00
$\mathrm{h/l} = 0.1$	2,98	2,99	2,99	2,99	2,99	2,98	2,99	2,99	2,99	3,00
$\mathrm{h/l} = 0.2$	2,94	2,96	2,98	2,98	2,99	2,93	2,95	2,97	2,97	2,98
$\mathrm{h/l} = 0.3$	2,89	2,93	2,95	2,97	2,97	2,85	2,91	2,94	2,95	2,96
$\mathrm{h/l} = 0.4$	2,80	2,87	2,91	2,94	2,95	2,76	2,85	2,89	2,92	2,94
$\mathrm{h/l} = 0.5$	2,70	2,80	2,87	2,90	2,93	2,65	2,77	2,84	2,89	2,92
$\mathrm{h/l} = 0.6$	2,60	2,73	2,82	2,87	2,90	2,53	2,69	2,79	2,85	2,88
$\mathrm{h/l} = 0.7$	2,49	2,66	2,76	2,83	2,87	2,42	2,60	2,72	2,80	2,85
$\mathrm{h/l} = 0.8$	2,38	2,57	2,70	2,78	2,84	2,30	2,51	2,65	2,75	2,81
$\mathrm{h/l} = 0.9$	2,28	2,49	2,64	2,73	2,80	2,19	2,42	2,58	2,69	2,76
$\mathrm{h/l} = 1.0$	2,17	2,41	2,57	2,66	2,76	2,09	2,33	2,51	2,63	2,72

Tabela 5.3 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão uniaxial.

Arenito Berea – Campo de tensão uniaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
$h/l = 0.1$	99,3%	99,7%	99,7%	99,7%	99,7%	99,3%	99,7%	99,7%	99,7%	100,0%
$h/l = 0.2$	98,0%	98,7%	99,3%	99,3%	99,7%	97,7%	98,3%	99,0%	99,0%	99,3%
$h/l = 0.3$	96,3%	97,7%	98,3%	99,0%	99,0%	95,0%	97,0%	98,0%	98,3%	98,7%
$h/l = 0.4$	93,3%	95,7%	97,0%	98,0%	98,3%	92,0%	95,0%	96,3%	97,3%	98,0%
$h/l = 0.5$	90,0%	93,3%	95,7%	96,7%	97,7%	88,3%	92,3%	94,7%	96,3%	97,3%
$h/l = 0.6$	86,7%	91,0%	94,0%	95,7%	96,7%	84,3%	89,7%	93,0%	95,0%	96,0%
$h/l = 0.7$	83,0%	88,7%	92,0%	94,3%	95,7%	80,7%	86,7%	90,7%	93,3%	95,0%
$h/l = 0.8$	79,3%	85,7%	90,0%	92,7%	94,7%	76,7%	83,7%	88,3%	91,7%	93,7%
$h/l = 0.9$	76,0%	83,0%	88,0%	91,0%	93,3%	73,0%	80,7%	86,0%	89,7%	92,0%
$h/l = 1.0$	72,3%	80,3%	85,7%	88,7%	92,0%	69,7%	77,7%	83,7%	87,7%	90,7%

Caso 2

No segundo caso, consideraremos uma abertura circular num granito com as seguintes características (Apêndice A) apresentadas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 - Algumas propriedades do granito Charcoal (Wang, 2000).

Rocha	ν_u	ν	α	*B*
Granito Charcoal	0.30	0.27	0.27	0.55

Substituindo-se as características do granito Charcoal na equação (5.1) temos os resultados da Figura 5.3 para o fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$).

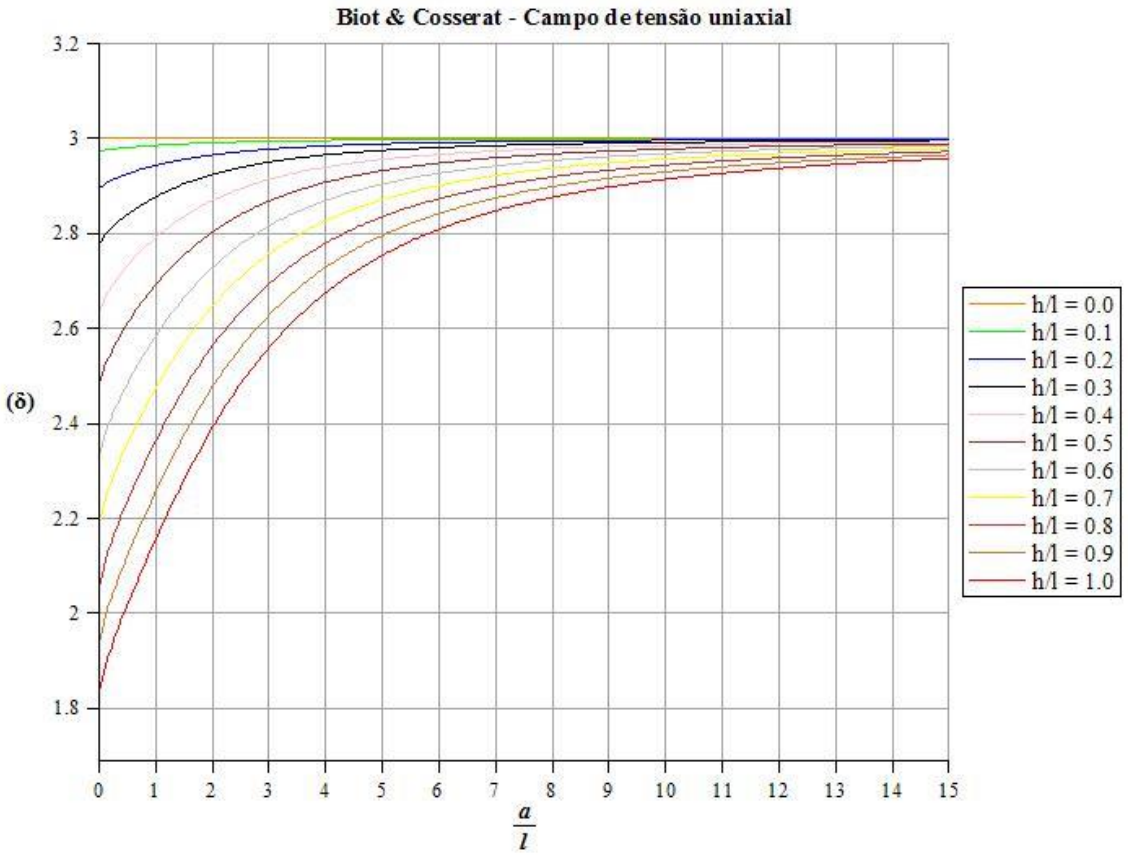

Figura 5.3 - *Biot acoplada a Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

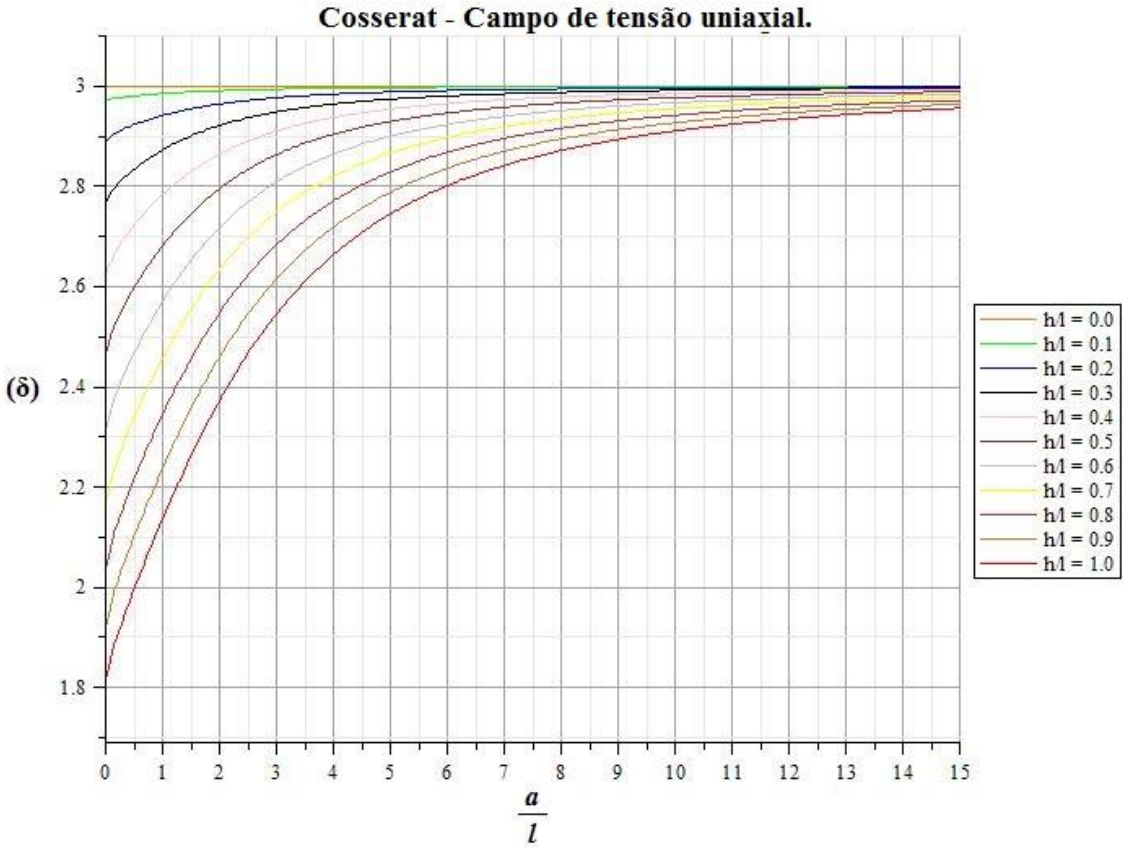

Figura 5.4 - *Teoria de Cosserat.* Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

A Tabela 5.5 mostra de maneira completa, e quantitativamente, a comparação dos fatores de concentrações de tensões entre o acoplamento Biot & Cosserat e somente Cosserat. Já na Tabela 5.6, agora em termos de porcentagem, pode-se visualizar o "ganho" na redução do fator de concentração de tensão (δ) para o problema proposto (observação: considerou-se a teoria clássica como referência (valor de 3,0 = 100%)).

Os resultados na Tabela 5.6 demonstram que pode ocorrer uma redução do fator de concentração de até 28,3% em relação à teoria clássica quando consideramos o acoplamento Biot & Cosserat e uma redução do fator de concentração de até 29% quando consideramos apenas Cosserat.

Tabela 5.5 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão uniaxial.

Granito Charcoal – Campo de tensão uniaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3.00	3,00	3,00	3,00	3,00
$h/l = 0.1$	2,97	2,97	2,98	2,99	2,99	2,98	2,98	2,99	2,99	2,99
$h/l = 0.2$	2,94	2,96	2,97	2,97	2,98	2,93	2,96	2,97	2,98	2,98
$h/l = 0.3$	2,87	2,92	2,95	2,97	2,97	2,87	2,91	2,94	2,96	2,97
$h/l = 0.4$	2,78	2,86	2,91	2,93	2,95	2,78	2,86	2,90	2,93	2,95
$h/l = 0.5$	2,69	2,80	2,86	2,90	2,93	2,68	2,79	2,86	2,90	2,92
$h/l = 0.6$	2,58	2,72	2,81	2,87	2,90	2,57	2,71	2,80	2,86	2,89
$h/l = 0.7$	2,47	2,64	2,75	2,82	2,87	2,45	2,63	2,74	2,81	2,86
$h/l = 0.8$	2,36	2,56	2,69	2,77	2,83	2,34	2,54	2,68	2,77	2,82
$h/l = 0.9$	2,26	2,48	2,63	2,73	2,79	2,24	2,46	2,61	2,71	2,78
$h/l = 1.0$	2,15	2,39	2,56	2,67	2,75	2,13	2,37	2,54	2,66	2,74

Tabela 5.6 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão uniaxial.

Granito Charcoal – Campo de tensão uniaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
$h/l = 0.1$	99,3%	99,3%	99,7%	99,7%	99,7%	99,3%	99,3%	99,7%	99,7%	99,7%
$h/l = 0.2$	98,0%	98,7%	99,0%	99,0%	99,3%	97,7%	98,7%	99,0%	99,3%	99,3%
$h/l = 0.3$	95,7%	97,3%	98,3%	99,0%	99,0%	95,7%	97,0%	98,0%	98,7%	99,0%
$h/l = 0.4$	92,7%	95,3%	97,0%	97,7%	98,3%	92,7%	95,3%	96,7%	97,7%	98,3%
$h/l = 0.5$	89,7%	93,3%	95,3%	96,7%	97,7%	89,3%	93,0%	95,3%	96,7%	97,3%
$h/l = 0.6$	86,0%	90,7%	93,7%	95,7%	96,7%	85,7%	90,3%	93,3%	95,3%	96,3%
$h/l = 0.7$	82,3%	88,0%	91,7%	94,0%	95,7%	81,7%	87,7%	91,3%	93,7%	95,3%
$h/l = 0.8$	78,7%	85,3%	89,7%	92,3%	94,3%	78,0%	84,7%	89,3%	92,3%	94,0%
$h/l = 0.9$	75,3%	82,7%	87,7%	91,0%	93,0%	74,7%	82,0%	87,0%	90,3%	92,7%
$h/l = 1.0$	71,7%	79,7%	85,3%	89,0%	91,7%	71,0%	79,0%	84,7%	88,7%	91,3%

5.3 TENSÃO TANGENCIAL MÁXIMA – CAMPO DE TENSÃO BIAXIAL

Agora consideraremos a abertura circular inserida num campo de tensão biaxial. Conforme foi visto no capítulo 4, o valor da tensão tangencial máxima inserida num campo de tensão biaxial é:

$$\sigma_{\theta(max)} = \frac{3P - S + (P + S)F_{BC}}{1 + F_{BC}}, \qquad para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{5.2}$$

onde P e S (com $P > S$) são as tensões atuantes no campo (Figura 4.4 b).

Consideraremos que o estado de tensão biaxial seja o de cisalhamento puro, ou seja, com $P = -S$.

Caso 3

No caso 3 consideraremos uma abertura circular no arenito Berea, porém, agora inserida num campo de tensão biaxial de cisalhamento puro.

De maneira semelhante ao feito para os casos 1 e 2, plotaremos para os casos 3 e 4 tanto a situação considerando-se o acoplamento Biot & Cosserat, quanto somente Cosserat, para comparação dos resultados e posterior análise.

Substituindo-se as características do arenito Berea na equação (5.2) temos, para o fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$), os resultados mostrados nas Figuras 5.5 e 5.6.

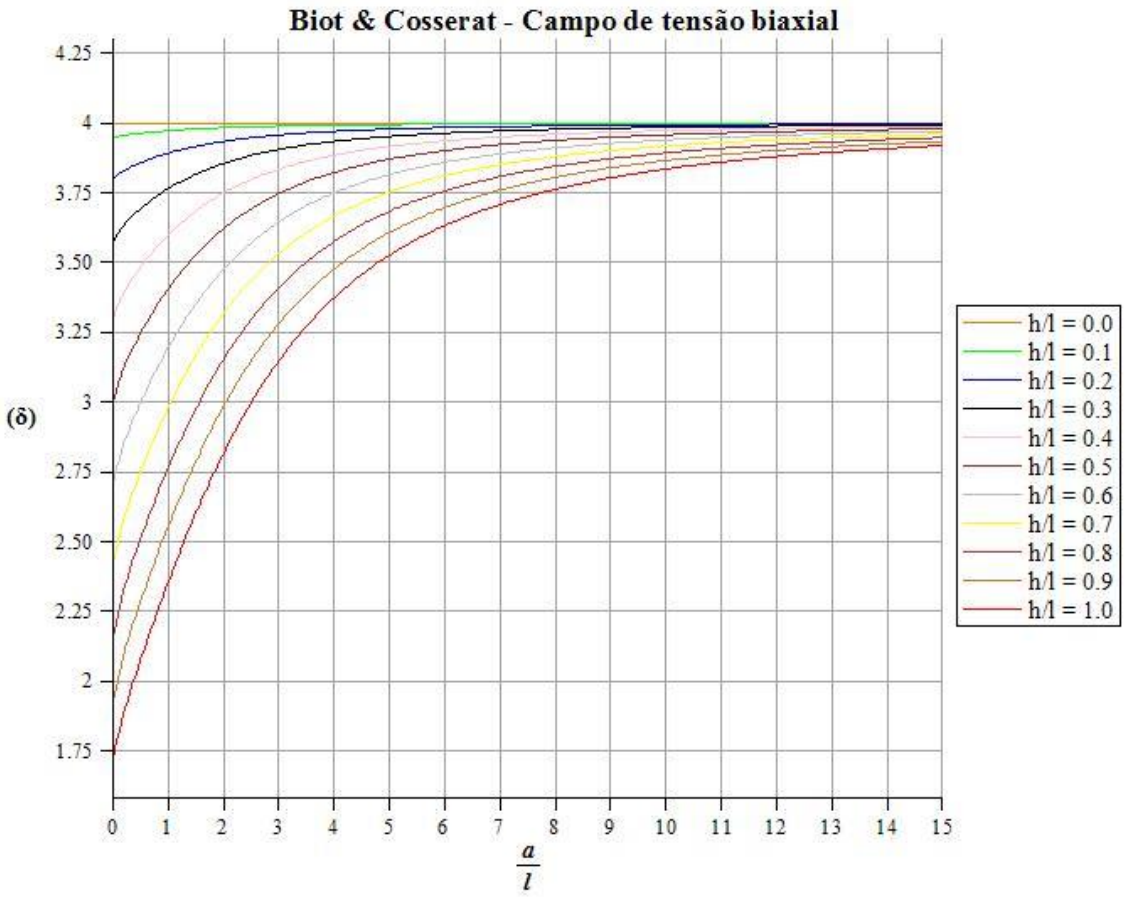

Figura 5.5 - *Biot acoplada a Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

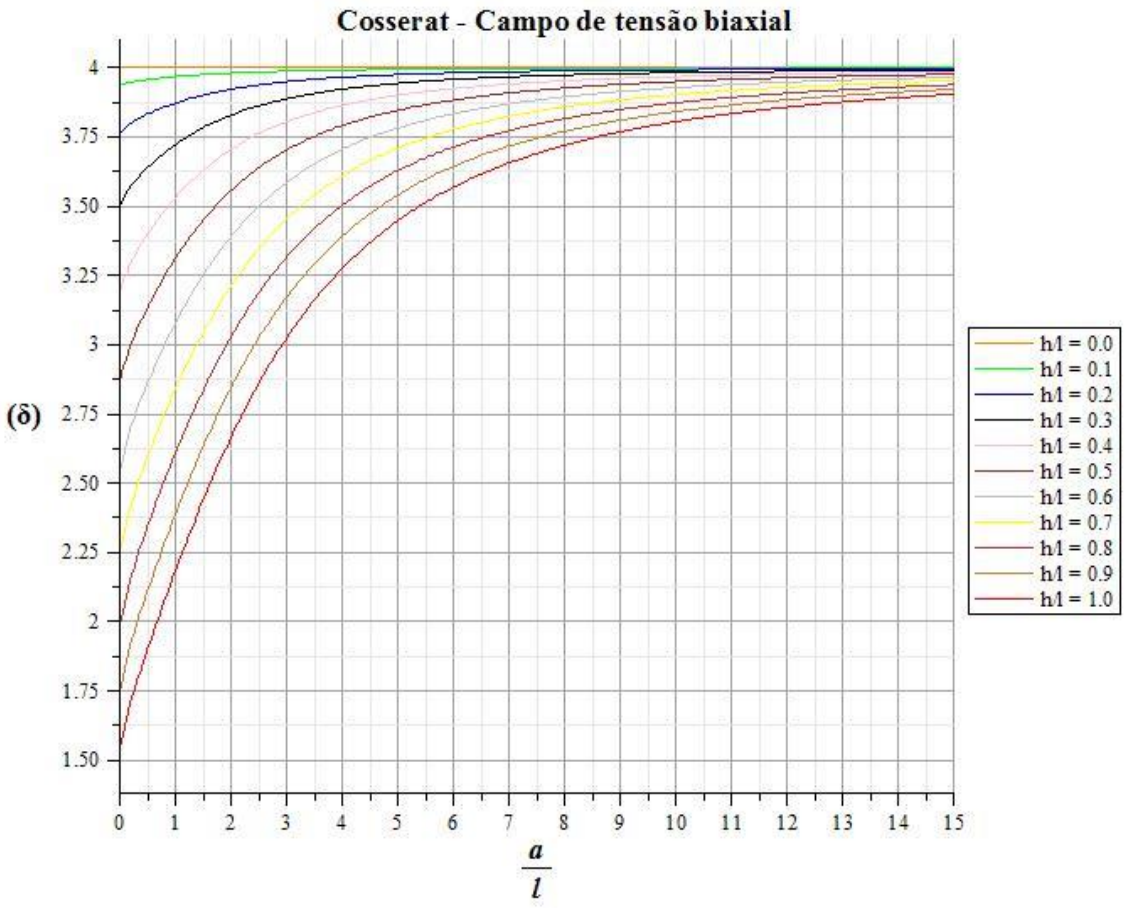

Figura 5.6 - *Teoria de Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num arenito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

A Tabela 5.7 mostra de maneira completa, e quantitativamente, a comparação dos fatores de concentrações de tensões entre o acoplamento Biot & Cosserat e somente Cosserat. Já na Tabela 5.8, agora em termos de porcentagem, pode-se visualizar o "ganho" na redução do fator de concentração de tensão (δ) para o problema proposto (observação: considerou-se a teoria clássica como referência (valor de 4,0 = 100%)).

Os resultados na Tabela 5.8 demonstram que pode ocorrer uma redução do fator de concentração de até 41,2% em relação à teoria clássica quando consideramos o acoplamento Biot & Cosserat e uma redução do fator de concentração de até 45,5% quando consideramos apenas Cosserat.

Tabela 5.7 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão biaxial.

Arenito Berea – Campo de tensão biaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
$h/l = 0.1$	3,96	3,97	3,98	3,98	3,99	3,96	3,97	3,98	3,98	3,98
$h/l = 0.2$	3,88	3,93	3,95	3,96	3,97	3,86	3,91	3,94	3,96	3,97
$h/l = 0.3$	3,76	3,85	3,90	3,92	3,94	3,71	3,82	3,88	3,91	3,93
$h/l = 0.4$	3,59	3,74	3,82	3,87	3,91	3,52	3,70	3,8	3,86	3,89
$h/l = 0.5$	3,40	3,61	3,74	3,81	3,86	3,31	3,55	3,70	3,78	3,84
$h/l = 0.6$	3,20	3,47	3,64	3,74	3,81	3,07	3,38	3,58	3,70	3,77
$h/l = 0.7$	2,99	3,32	3,53	3,66	3,75	2,84	3,21	3,45	3,60	3,7
$h/l = 0.8$	2,76	3,15	3,4	3,57	3,68	2,61	3,02	3,31	3,50	3,62
$h/l = 0.9$	2,55	2,98	3,27	3,47	3,60	2,39	2,84	3,17	3,38	3,53
$h/l = 1.0$	2,35	2,82	3,15	3,37	3,52	2,18	2,66	3,02	3,27	3,44

Tabela 5.8 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num arenito Berea inserido num campo de tensão biaxial.

Arenito Berea – Campo de tensão biaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
$h/l = 0.1$	99,0%	99,3%	99,5%	99,5%	99,8%	99,0%	99,3%	99,5%	99,5%	99,5%
$h/l = 0.2$	97,0%	98,3%	98,8%	99,0%	99,3%	96,5%	97,8%	98,5%	99,0%	99,3%
$h/l = 0.3$	94,0%	96,3%	97,5%	98,0%	98,5%	92,8%	95,5%	97,0%	97,8%	98,3%
$h/l = 0.4$	89,8%	93,5%	95,5%	96,8%	97,8%	88,0%	92,5%	95,0%	96,5%	97,3%
$h/l = 0.5$	85,0%	90,3%	93,5%	95,3%	96,5%	82,8%	88,8%	92,5%	94,5%	96,0%
$h/l = 0.6$	80,0%	86,8%	91,0%	93,5%	95,3%	76,8%	84,5%	89,5%	92,5%	94,3%
$h/l = 0.7$	74,8%	83,0%	88,3%	91,5%	93,8%	71,0%	80,3%	86,3%	90,0%	92,5%
$h/l = 0.8$	69,0%	78,8%	85,0%	89,3%	92,0%	65,3%	75,5%	82,8%	87,5%	90,5%
$h/l = 0.9$	63,8%	74,5%	81,8%	86,8%	90,0%	59,8%	71,0%	79,3%	84,5%	88,3%
$h/l = 1.0$	58,8%	70,5%	78,8%	84,3%	88,0%	54,5%	66,5%	75,5%	81,8%	86,0%

Caso 4

No caso 4 consideraremos uma abertura circular no granito Charcoal, porém, agora inserida num campo de tensão de cisalhamento puro.

Substituindo-se as características do granito Charcoal na equação (5.2), para o fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$), os resultados mostrados nas Figuras 5.7 e 5.8.

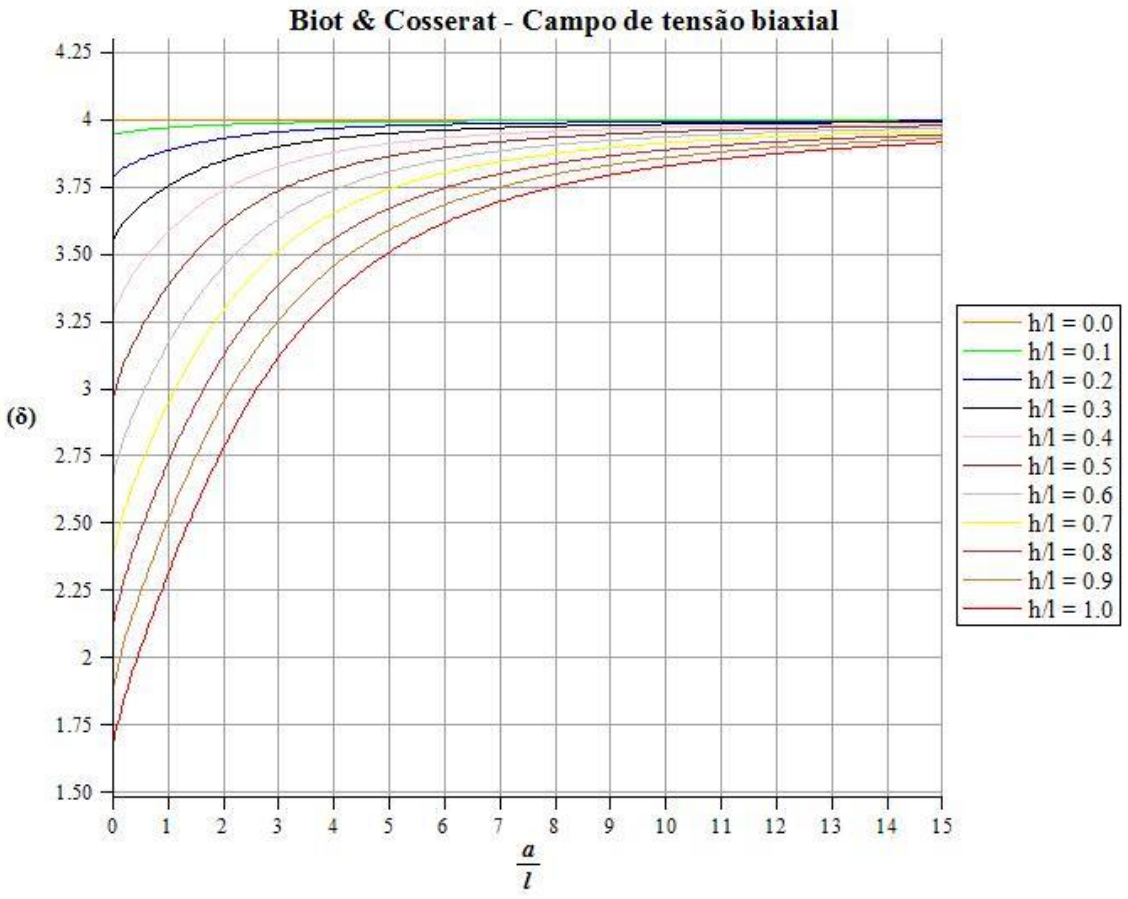

Figura 5.7 - *Biot acoplada a Cosserat*. Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

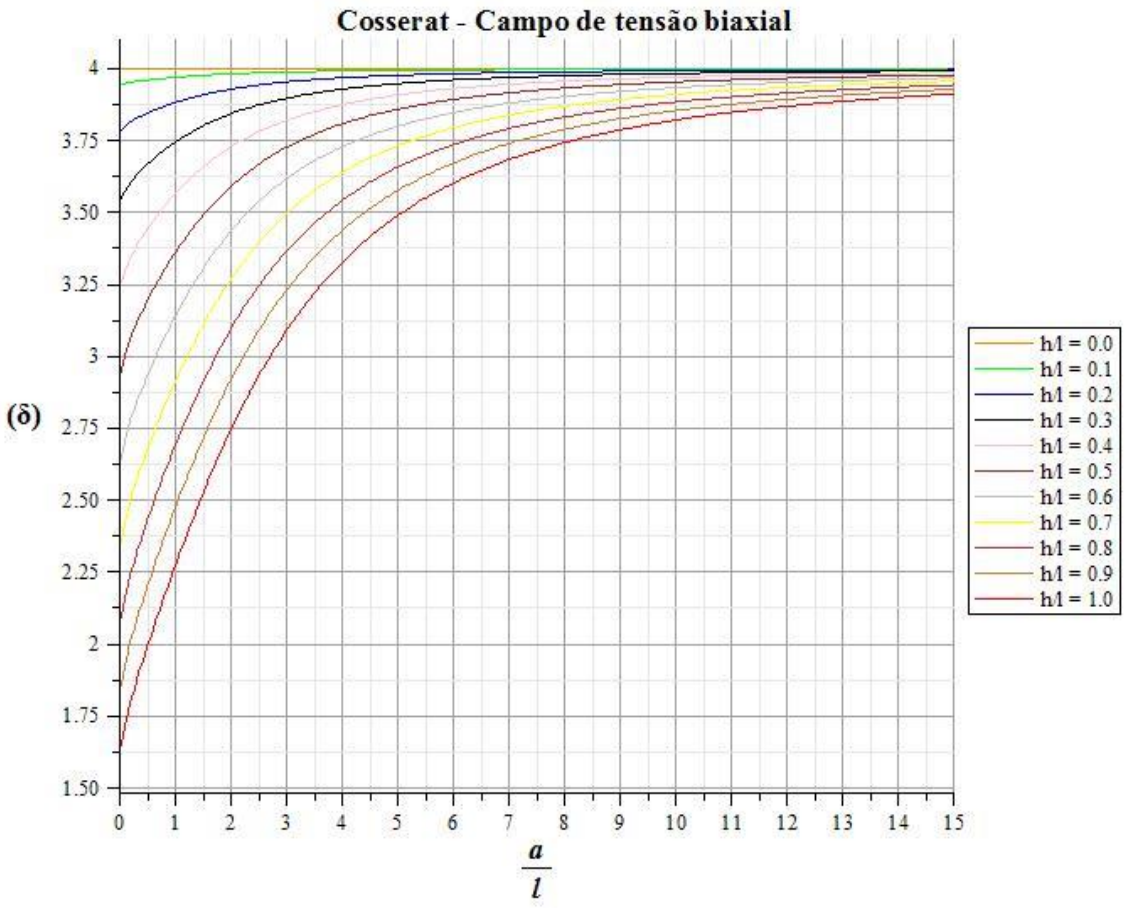

Figura 5.8 - *Teoria de Cosserat.* Resultados do fator de concentração (δ) de tensão tangencial máxima numa abertura circular inserida num campo de tensão biaxial num granito: relação entre o tamanho da abertura e o comprimento característico do material.

A Tabela 5.9 mostra de maneira completa, e quantitativamente, a comparação dos fatores de concentrações de tensões entre o acoplamento Biot & Cosserat e somente Cosserat. Já na Tabela 5.10, agora em termos de porcentagem, pode-se visualizar o "ganho" na redução do fator de concentração de tensão (δ) para o problema proposto (observação: considerou-se a teoria clássica como referência (valor de 4,0 = 100%)).

Os resultados na Tabela 5.10 demonstram que pode ocorrer uma redução do fator de concentração de até 42,2% em relação à teoria clássica quando consideramos o acoplamento Biot & Cosserat e uma redução do fator de concentração de até 43,2% quando consideramos apenas Cosserat.

Tabela 5.9 - Resultados para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão biaxial.

Granito Charcoal – Campo de tensão biaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
$h/l = 0.1$	3,96	3,97	3,98	3,98	3,98	3,96	3,97	3,98	3,98	3,99
$h/l = 0.2$	3,88	3,92	3,95	3,96	3,97	3,87	3,92	3,94	3,96	3,97
$h/l = 0.3$	3,74	3,84	3,89	3,92	3,94	3,74	3,83	3,89	3,92	3,84
$h/l = 0.4$	3,58	3,73	3,82	3,87	3,9	3,56	3,72	3,81	3,87	3,9
$h/l = 0.5$	3,38	3,6	3,73	3,81	3,86	3,36	3,59	3,72	3,8	3,85
$h/l = 0.6$	3,16	3,45	3,62	3,73	3,8	3,14	3,43	3,61	3,72	3,79
$h/l = 0.7$	2,96	3,29	3,51	3,64	3,73	2,91	3,26	3,49	3,63	3,72
$h/l = 0.8$	2,74	3,12	3,38	3,5	3,66	2,69	3,09	3,36	3,53	3,65
$h/l = 0.9$	2,51	2,95	3,25	3,46	3,59	2,48	2,92	3,23	3,43	3,57
$h/l = 1.0$	2,31	2,79	3,11	3,35	3,50	2,27	2,74	3,09	3,32	3,48

Tabela 5.10 - Resultados em termos de porcentagem para a redução no fator de concentração de tensão (δ) tangencial máxima num granito Charcoal inserido num campo de tensão biaxial.

Granito Charcoal – Campo de tensão biaxial										
Relação	**Biot & Cosserat**					**Cosserat**				
	Concentração (δ)					**Concentração (δ)**				
	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$	$a/l = 1$	$a/l = 2$	$a/l = 3$	$a/l = 4$	$a/l = 5$
$h/l = 0.0$	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
$h/l = 0.1$	99,0%	99,3%	99,5%	99,5%	99,5%	99,0%	99,3%	99,5%	99,5%	99,8%
$h/l = 0.2$	97,0%	98,0%	98,8%	99,0%	99,3%	96,8%	98,0%	98,5%	99,0%	99,3%
$h/l = 0.3$	93,5%	96,0%	97,3%	98,0%	98,5%	93,5%	95,8%	97,3%	98,0%	96,0%
$h/l = 0.4$	89,5%	93,3%	95,5%	96,8%	97,5%	89,0%	93,0%	95,3%	96,8%	97,5%
$h/l = 0.5$	84,5%	90,0%	93,3%	95,3%	96,5%	84,0%	89,8%	93,0%	95,0%	96,3%
$h/l = 0.6$	79,0%	86,3%	90,5%	93,3%	95,0%	78,5%	85,8%	90,3%	93,0%	94,8%
$h/l = 0.7$	74,0%	82,3%	87,8%	91,0%	93,3%	72,8%	81,5%	87,3%	90,8%	93,0%
$h/l = 0.8$	68,5%	78,0%	84,5%	87,5%	91,5%	67,3%	77,3%	84,0%	88,3%	91,3%
$h/l = 0.9$	62,8%	73,8%	81,3%	86,5%	89,8%	62,0%	73,0%	80,8%	85,8%	89,3%
$h/l = 1.0$	57,8%	69,8%	77,8%	83,8%	87,5%	56,8%	68,5%	77,3%	83,0%	87,0%

5.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir dos resultados anteriormente apresentados podemos verificar que:

1 Aplicando-se as formulações de Biot & Cosserat ou somente de Cosserat, tanto para um arenito quanto para um granito, verifica-se uma redução no fator de concentração de tensão, em comparação com a teoria clássica, em todos os casos apresentados (casos 1, 2, 3 e 4). Essa redução depende da relação entre o tamanho da abertura circular (a) e o "*comprimento característico"* (l) e, também, da relação entre os "*comprimentos característicos"* (h/l) do material. A redução mais significativa no fator de concentração ocorre quando consideramos tanto a relação (a/l) próxima a zero (0), quanto a relação (h/l) igual a um (1). Esses resultados já eram esperados, pois, como foi visto, quanto menor a relação (a/l), maiores e mais significativos são os efeitos da microestrutura do material (pois corresponde a $l \to \infty$). Por outro lado, quando a relação (a/l) aumenta ($l \to 0$), o efeito da microestrutura tende a desaparecer. No caso da relação (h/l), quanto mais próxima ela estiver do valor um (1), significa termos um módulo de cisalhamento rotacional (G_c) infinitamente grande, fazendo com que o meio seja rígido e não permita nenhuma rotação relativa. Por outro lado, quando a relação (h/l) se aproxima do valor zero (0), embora não signifique que as dimensões da microestrutura sejam irrelevantes no problema (pois l poderia, inclusive, tender ao infinito nesse caso), a microestrutura passa a não causar nenhum efeito sobre a macroestrutura. Isso corresponderia aos casos em que $G_c \approx 0$. Como discutido no capítulo 2 (item 2.4.5), essa situação é fisicamente improvável;

2 Comparando-se os resultados entre as formulações Biot & Cosserat e de Cosserat para a mesma rocha (seja o arenito ou o granito), verifica-se que os fatores de concentração na formulação de Cosserat são menores que na formulação Biot & Cosserat. Isso pode estar relacionado ao fato dos efeitos da poroelasticidade anularem parcialmente os efeitos da microrrotação da microestrutura;

3 Os resultados para os fatores de concentração de tensão na formulação Biot & Cosserat mostram que as propriedades físicas das rochas (arenito e granito) influenciam de maneira significativa os resultados. Considerando o campo de tensão uniaxial, verificou-se uma redução de até 27,7% no fator de concentração de tensão para o arenito e de até 28,3% para o granito. Considerando o campo de tensão biaxial, a redução foi de até 41,2% para o arenito e até 42,2% para o granito. Esses resultados, de certa maneira, corroboram a suspeita mencionada no tópico II, pois os efeitos poroelasticos tendem a ser mais significativos em rochas porosas do que em rochas menos porosas como, por exemplo, o granito. Assim, é plausível que os fatores de concentração de tensão na formulação de Biot & Cosserat sejam menores em arenitos do que em granitos.

CAPÍTULO 6

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

6.1 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi possível discutir vários aspectos relacionados à mecânica do contínuo generalizada, idealizada pelos irmãos Cosserat, bem como verificar os efeitos da poroelasticidade acoplada aos efeitos microestuturais em aberturas circulares.

Os resultados demonstram a importância de considerarmos os efeitos microestruturais em problemas onde o "*comprimento característico*" do material seja relativamente grande comparado com o tamanho da abertura subterrânea. Nesses casos há uma redução considerável nos fatores de concentração de tensão atuantes em torno da abertura.

Alguns autores, como Mindlin (1964) e Pal'mov (1964), já haviam demonstrado que ao se levar em consideração os efeitos microestruturais haveria uma redução no fator de concentração de tensão. Neste trabalho, foi possível observar esses mesmos efeitos acoplados à poroelasticidade. Os resultados demonstraram que diferentes tipos de rocha apresentam diferentes fatores de concentração, uma vez que tanto as propriedades hidromecânicas como as microestruturais das rochas (ν, ν_u, h e l) influenciam diretamente nos resultados. Foi possível identificar a relevância relativa dos efeitos da microestrutura, da poroelasticidade e do acoplamento de ambos.

Na maioria dos casos de análises de estabilidade de poços e aberturas subterrâneas, o que mais se utiliza na prática é a consideração da rocha como um sólido elástico, por meio da solução proposta por Kirsch (1898). Neste trabalho foi possível investigar analiticamente a relevância dos efeitos de escala microestruturais numa abertura circular

(seja um poço ou escavação subterrânea), através do acoplamento da mecânica dos meios contínuos generalizada de Cosserat com a teoria da poroelasticidade de Biot.

O estudo do comportamento mecânico de aberturas circulares em rochas, por meio do acoplamento da teoria da poroelasticidade com a teoria do contínuo generalizado, demonstrou que ocorrem reduções significativas no fator de concentração de tensão, porém, menores que as reduções encontradas por Mindlin (1963) e Pal'mov (1964) quando se consideram apenas os efeitos de Cosserat.

6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Diante do trabalho apresentado e de posse dos resultados obtidos, propõem-se aqui as seguintes sugestões para pesquisas futuras:

I. Aprofundar o conhecimento qualitativo e quantitativo sobre os módulos de cisalhamento rotacional (G_c) e de flexão (B_c). Adicionalmente, idealizar e realizar experimentos que possam esclarecer seus comportamentos;

II. Schijve (1966) realizou alguns testes para estudar a influência do "*comprimento característico"* em placas de alumínio. Aqui se faz necessário estudar de maneira mais detalhada os efeitos do "*comprimento característico*" em rochas, visto que as características microestruturais e as propriedades mecânicas dos diferentes materiais influenciam diretamente no resultado;

III. Realizar um estudo de caso real para comparar os resultados obtidos com as formulações Biot & Cosserat, de Cosserat e de Kirsch;

IV. Estender o acoplamento Biot & Cosserat para o domínio do tempo, ou seja, para as condições transientes entre o curto prazo (não-drenado) e o longo prazo (drenado), nos moldes do que foi feito por Detournay & Cheng (1988) para a formulação de Kirsch (contínuo clássico).

BIBLIOGRAFIA

Alcure, M. (2013). Determinação do modelo mais representativo para o cálculo do gradiente de fratura e sua influência na janela operacional. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio Brasil.

Altenbach, H. *et al*. (2011). Mechanics of Generalized Continua. Springer.

Alshibli *et al.* (2006). Modelling strain localization in granular materials using micropolar theory: Mathematical formulations. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 30, p. 1501 - 1524.

Ariman, T. (1967). On the stresses around a Circular Hole in Micropolar Elasticity. Acta Mechanica, v. 4, p. 216 - 229.

Bayona Mendoza, A. (2003). Análise da instabilidade de poços de petróleo associada à produção de areia através de um modelo do Contínuo de Cosserat. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio Brasil.

Biot, M. A. (1941). General Theory of Three-Dimensional Consolidation. Journal of Applied Physics, v. 12, p. 155 - 164.

Bogdanova-Bontcheva, N. & Lippmann, H. (1975). Rotationssymmetrisches ebenes Fließen eines granularen Modellmaterials, Acta Mechanica, v. 21, p. 93 - 113.

Chang, C.S. & Ma, L. (1991). Elastic material constants for isotropic granular solids with particle rotation. Int. J. Solids Structures, v. 28, n. 8, p. 1001 - 1018.

Chen, W. F. & Han, D. J. (1988). Plasticity for structural engineers, New York: Springer - Verlag Inc.. 661 p.

Cosserat, E. & Cosserat, F. (1909). Théorie des Corps Déformables. Paris: Hermann et Fils, 226 p.

de Borst, R. (1990). Simulation of localization using Cosserat theory. In Proc. 2nd Int. Conf. Comp. Aided Anal. and Design of Concrete Structures, Bicanic & Mang (eds.), p. 931 – 943, Swansea.

de Borst, R. (1991). Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum, Engineering Computations, v. 8, p. 317 - 332.

de Borst, R. (1993). A generalisation of J2-flow theory for polar continua. Comp. Meth. in Applied Mech. and Engng., v. 103, p. 347 - 362.

Detournay, E. & Cheng, A. H-D. (1993). Fundamentals of Poroelasticity, Chapter 5 in Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, v. II, p. 113 - 171.

Detournay, E. & Cheng, A. H-D. (1988). Poroelastic response of a borehole in a non-hydrostatic stress field. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., v. 25, n. 3, p. 171 - 182.

Drucker, D. C. (1950). Some implications of work-hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math., v. 7, p. 411 - 418.

Eringen, A. C. & Suhubi, E. S. (1964). Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids – I, International Journal of Engineering Science, v. 2, p. 189 - 203.

Eringen, A. C. (1965). Linear Theory of Micropolar Elasticity, Technical Report n° 29, Office of Naval Research, Department of the Navy, Purdue University, 29 p.

Eringen, A. C. (1966). Linear Theory of Micropolar Elasticity. Journal of Mathematics and Mechanics. v. 15, nº 6, p. 909 - 924.

Eringen, A. C. (1968). Mechanics of Micromorphic Continua, proceedings of 1967 IUTAM Symposium on Generalized Continuum (E. Kröner, ed.), p. 18 - 35, Springer-Verlag, New York

Eringen, A. C. (1992). Balance laws of micromorphic continua revisited. International Journal Engineering Sciences, v. 30, nº 6, p. 805 - 810.

Figueiredo, R. P. (1999). Modelagem de Maciços Rochosos como Meios Contínuos Generalizados de Cosserat. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio Brasil.

Fjaer, E. *et al.* (2008). Petroleum related rock mechanics, 2nd Edition, Amsterdam: Elsevier, 491 p.

Jaeger, J. C. & Cook, N. G. W. (1979). Fundamentals of Rock Mechanics. 3rd ed., London: Chapman & Hall, 593 p.

Jaeger, et al. (2004). Fundamentals of rock mechanics, 4th Edition, Carlton (Australia): Blackwell Publishing, 475 p.

Fuina, J. S. (2009). Formulação de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, UFMG, Brasil.

Gassendi, P. (1649). Syntagma philosophiae Epicuri, (*apud*. Kargon, 1964).

Geertsma, J. (1966). Problems of rock mechanics in petroleum production engineering, In Proc. 1st Cong. Int. Soc. Rock Mech., v. 1, p. 585 - 594, Lisboa.

Hadjesfandiari, A. R. & Dargush, G. F. (2011). Couple stress theory for solids. International Journal of Solids and Structures, v. 48, n. 18, p. 2496 - 2510.

Haimson, B. C. & Fairhurst, C. (1969). Hydraulic fracturing in porous-permeable materials. J. Pet. Technol., v. 21, p. 811 - 817.

IUTAM. (1968). Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics - Symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications (E. Kröner, ed.), Freudenstadt and Stuttgart, Springer-Verlag, New York.

Itou, S. (1972). The effect of couple-stress on the dynamic stress concentration around a crack. International Journal Engineering Sciences, v. 10, p. 393 - 400.

Jacob, C. E. (1940). On the flow of water in an elastic artesian aquifer, Trans. Am. Geophys. Union, v. 22, p. 783 - 787.

Kaloni, P. N. & T. Ariman (1967). Stress Concentration Effects in Micropolar Elasticity. ZAMP, v. 18, p. 136 - 141.

Kargon, R. (1964). Walter Charleton, Robert Boyle and the Acceptance of Epicurean Atomism in England. Isis, v. 55, n 180, p. 184 - 192.

Kirsch, E. G. (1898). Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 42, 797–807 (*apud* Jaeger & Cook, 1979; Fjaer et al., 2008).

Lages, E. N. (1997). Modelagem de Localização de Deformações com Teorias de Continuo Generalizado. Tese de Doutorado, PUC-Rio Brasil.

Lazar, M. & Maugin, G. A. (2004). Defects in gradient micropolar elasticity-I: screw dislocation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v. 52, n. 10, p. 2263 - 2284.

Malvern, L. E. (1969). Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Mindlin, R. D. (1963). Influence of Couple-stresses on Stress Concentrations. Experimental Mechanics, v. 1, n. 1, p. 1-7;

Mindlin, R. D. & Tiersten H. F. (1962). Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis. v. 11, n. 1, p. 415 - 448.

Mindlin, R. D. (1964). Micro-structure in Linear Elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, v. 16, p. 51 - 78.

Mühlhaus, H-B. & Vardoulakis, J. (1987). The thickness of shear bands in granular materials. Géotechnique, v. 37, p. 271 - 283.

Pal'mov, V.A. (1964). The plane problem in the theory of nonsymmetrical elasticity, PMM, v. 28, n. 6, p. 1117 - 1120.

Park, H. C. & Lakes, R. S. (1986). Cosserat micromechanics of human bone: strain redistribution by a hydration sensitive constituent, Journal Biomechanics, nº 5, v. 19, p. 385 - 397.

Rice, J. R., & Cleary, M. P. (1976). Some basic stress diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents. Rev. Geophys. Space Phys., v. 14, p. 227 - 241.

Schijve, J. (1966). Note on Couple Stresses. J. Mech. Phys. Sol., v. 14, p. 113 - 120.

Spiegel, M. R. (1973). Manual de Tabelas e Fórmulas Matemáticas. McGraw-Hill do Brasil, Coleção Schaum, 270 p.

Timoshenko, S. & Goodier. J.N. (1951). Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Terzaghi, K. (1923). Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen, (*apud*. Wang (2000), Detournay & Cheng (1993)).

Theis, C. V. (1938). The significance and nature of the cone of depression in ground-water bodies. Economic Geology, v. 33, p. 889 - 902.

Toupin, R. A. (1962). Elastic Materials with Couple-Stresses, Archive for Rational Mechanics and Analysis. v. 11, n. 1, p. 385 - 414.

Vermeer, P. A. & de Borst, R. (1984). Non-associated plasticity for soil, concrete and rock. HERON, v. 29, n. 3, p. 1 - 64.

Verruijt, A. (1969). Elastic storage of aquifers. In Flow Through Porous Media, ed. R.J.M. DeWiest, p. 331 - 376.

von Mises, R. (1928). Mechanik der plastichen Formänderung von Kristallen. Z. Angew Math. Mech. (ZAMM), v. 8, p. 161 - 185.

Voigt, W. (1887). Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenchaften zu Göttingen, v. 34 (*apud*. Mindlin & Tiersten, (1962); Eringen, (1968), Hadjesfandiari, A. R. & Dargush, G. F., (2011)).

Wang, H. F. (2000). Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology, Princeton: Princeton University Press, 287 p.

APÊNDICE A

A tabela abaixo mostra alguns valores típicos de constantes poroelásticas para diferentes tipos de rocha (Wang, 2000).

Tabela A.1 – Valores típicos de constantes poroelásticas.

Rocha	$G\ (GPa)$	ν	ν_u	α	B
Arenito Berea	6	0.20	0.33	0.79	0.62
Arenito Ohio	6.8	0.18	0.28	0.74	0.50
Granito Charcoal	19	0.27	0.30	0.27	0.55
Granito Westerly	15	0.25	0.34	0.47	0.85
Calcário Indiana	12.1	0.26	0.33	0.71	0.46

APÊNDICE B

Equações de compatibilidade – Biot acoplada a Cosserat

As equações de compatibilidade para um caso particular de deformação plana podem ser deduzidas, com algum exercício algébrico, utilizando-se as componentes de deformação das equações (4.13) (Capítulo 4):

$$\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} - \kappa_{11} = 0 \qquad (1)a$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} - \kappa_{22} = 0 \qquad (1)b$$

$$\frac{\partial \kappa_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \kappa_{11}}{\partial x_2} = 0 \qquad (1)c$$

A tensão-momento relaciona-se com o módulo de flexão (B_c) e a curvatura (κ_i) da seguinte forma:

$$m_{3i} = m_i = B_c \kappa_i \qquad (2)$$

Consideraremos uma condição não-drenada, ou seja, não ocorre movimento de entrada ou saída de fluido no volume de referência (equação (3.9)). Segundo Wang (2000, seção 7.1) para esta situação temos a seguinte relação:

$$\partial(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-3\partial p}{B(1 + \nu_u)} \qquad (3)$$

Onde ν_u é o coeficiente de Poisson na condição não-drenada.

Podemos reescrever a equação (3) da seguinte forma (Wang, 2000, seção 3.2):

$$(\nu_u - \nu)\partial(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\alpha(1 - 2\nu)\partial p \qquad (4)$$

As equações das deformações num estado plano de deformação são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha] \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha] \\
\gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4G} + \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{4G_c} \\
\gamma_{21} &= \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4G} - \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{4G_c}
\end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo (5) e (2) em (1)a, (1)b e (1)c, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4G} - \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{4G_c}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1+\nu}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha]\right] - \frac{m_1}{B_c} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1+\nu}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1-2\nu)p\alpha]\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4G} + \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{4G_c}\right] - \frac{m_2}{B_c} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_2}{B_c}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{m_1}{B_c}\right) = 0 \tag{8}$$

Na seção 4.3.1 (Capítulo 4) foi visto que podemos escrever as tensões e as tensões-momento em função de φ e ω como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\sigma_{12} &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial {x_2}^2} \\
\sigma_{21} &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial {x_1}^2} \\
m_1 &= \frac{\partial\omega}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$m_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$$

Substituindo (4) e (9) em (6), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{4G}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial {x_2}^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial {x_1}^2}\right) - \frac{1}{4G_c}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial {x_1}^2}\right)\right]$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2}\right) - (\nu_u - \nu)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2}\right)\right)\right] \quad \text{(10)a}$$
$$= \frac{1}{B_c}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}$$

Reagrupando os termos encontramos que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B_c(G+G_c)}{4GG_c}\right)\nabla^2\omega - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{B_c}{2G}(1-\nu_u)\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\varphi \quad \text{(10)b}$$

Onde

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)$$

Na equação (10)b, escreveremos que:

$$h^2 = \frac{B_c}{4G}$$

$$l^2 = \frac{B_c(G+G_c)}{4GG_c}$$

Assim, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = -2(1-\nu_u)\, h^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\varphi \quad \text{(10)}$$

A equação (10) é uma das soluções. Substituindo (4) e (5) em (7) encontraremos a segunda solução do problema. Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1\partial x_2}-\nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2}\right)-(\nu_u-\nu)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2}\right)\right)\right]$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1}{4G}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial {x_2}^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial {x_1}^2}\right)\right. \tag{11)a}$$
$$\left.-\frac{1}{4G_c}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial {x_1}^2}\right)\right]=\frac{1}{B_c}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}$$

Reagrupando-se os termos encontramos que:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{B_c(G+G_c)}{4GG_c}\right)\nabla^2\omega-\frac{\partial\omega}{\partial x_2}=-\frac{B_c}{2G}(1-\nu_u)\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\varphi \tag{11)b}$$

De maneira semelhante ao feito para a equação (10)b escreveremos a equação (11)b em função de h^2 e l^2. Assim, temos a segunda solução do problema:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\omega-l^2\nabla^2\omega)=2(1-\nu_u)\,h^2\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\varphi \tag{12}$$

APÊNDICE C

Soluções do problema bidimensional (2D) para Biot & Cosserat

Conforme visto no capítulo 4 e demonstrado no Apêndice B, as soluções encontradas para o problema proposto são:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = -2(1-\nu_u)\, h^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\varphi \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\omega - l^2\nabla^2\omega) = 2(1-\nu_u)\, h^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\varphi \tag{2}$$

Se diferenciarmos a equação (1) em relação à y e a equação (2) em relação à x e subtrairmos uma da outra, obteremos uma equação bi-harmônica para a função de tensão φ,

$$\nabla^4\varphi = 0 \tag{3}$$

e, de maneira similar, obteremos uma equação para ω:

$$\nabla^2(\omega - l^2\nabla^2\omega) = 0 \tag{4}$$

Nota-se que, embora tenham sido obtidas equações separadas que satisfaçam as funções φ e ω, as suas soluções não são arbitrárias: quaisquer soluções que forem encontradas devem satisfazer as equações (1) e (2).

As duas funções que satisfazem (3) e (4) simultaneamente são:

$$\varphi = \left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta) \tag{5}$$

$$\omega = \left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2, \frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta) \tag{6}$$

onde $BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)$ é uma função de Bessel modificada de segunda classe e segunda ordem e $A, B, D, E\ e\ H$ são constantes.

Tensões em coordenadas polares

Conforme visto no capítulo 4, as equações das tensões em função de φ e ω em coordenadas polares podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} \\
\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} \\
\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} \\
\sigma_{\theta r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} \\
m_r = \frac{\partial\omega}{\partial r} \\
m_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}
\end{gathered} \tag{7}$$

Substituindo-se as funções de tensão encontradas em (5) e (6), podemos encontrar os valores para as tensões σ_r, σ_θ, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta r}$ e para as tensões-momento m_r e m_θ, quais sejam:

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta) \\
+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta) \\
\sigma_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta) \\
- \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta)
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta)$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta)$$

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A + Br^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cos(2\theta)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta)$$

$$m_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta)$$

$$m_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{E}{r^2} + H.BesselK\left(2,\frac{r}{l}\right)\right)\sin(2\theta)$$

Efeitos de aberturas circulares sobre a distribuição de tensões 2D

A Figura C.1, abaixo, representa uma abertura circular submetida a um campo de tensão uniaxial uniforme, de magnitude *P*, na direção *x*.

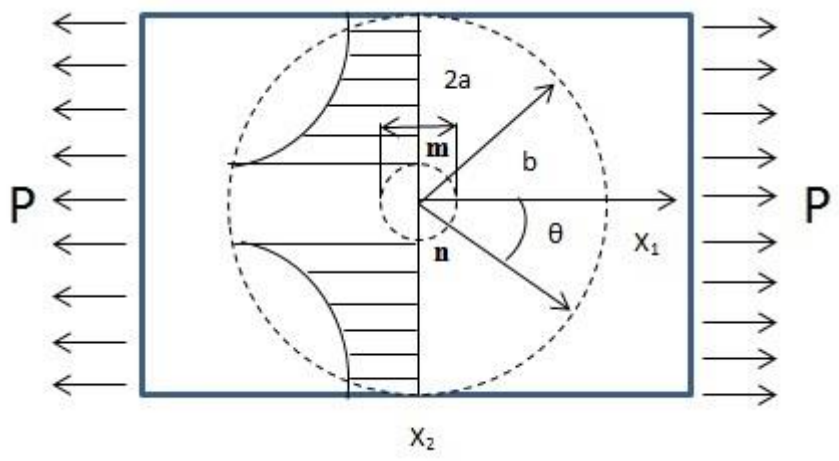

Figura C.1 - Representação da distribuição de tensões numa abertura circular inserida num campo de tensão uniaxial uniforme (adaptada, Timoshenko,1951, p. 78).

Verifica-se pela Figura C.1, que as tensões se redistribuem em torno da abertura, produzindo uma concentração máxima nos pontos *n* e *m*, de interseção do contorno com o diâmetro perpendicular à direção de *P*. A partir daí a concentração evanesce

progressivamente à medida que a distância ao contorno aumenta. Podemos concluir do principio de Saint-Venant, que as concentrações se tornam desprezíveis a uma distância muito grande comparada ao raio (a) da abertura. Para encontrarmos os valores das constantes $A, B, D, E\ e\ H$ nas tensões da equação (8), consideraremos as seguintes condições de contorno:

Quando $r = a$, temos:

$$\sigma_r = 0 \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad m_r = 0 \tag{9}$$

Quando $r \to \infty$, temos:

$$\begin{gathered} \sigma_r = \frac{1}{2} P\big(1 + \cos(2\theta)\big) \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2} P\big(1 - \cos(2\theta)\big) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = m_r = m_\theta = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

No caso de uma abertura circular inserida num campo de tensão uniforme biaxial, com P atuando segundo x e maior que S atuando segundo y, temos as seguintes condições de contorno:

Quando $r = a$, temos

$$\sigma_r = 0 \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad m_r = 0 \tag{11}$$

Quando $r = \infty$, temos

$$\begin{gathered} \sigma_r = \tfrac{1}{2}[(P + S) + (P - S)\cos 2\theta] \\ \sigma_\theta = \tfrac{1}{2}[(P + S) - (P - S)\cos 2\theta] \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = m_r = m_\theta = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Após algumas operações algébricas encontramos que a tensão tangencial máxima que atua sobre o contorno da abertura circular (em θ = ± π/2) inserida num campo de tensão uniaxial uniforme é:

$$\sigma_{\theta(max)} = P\frac{3 + F_{BC}}{1 + F_{BC}}, \qquad para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{13}$$

e a tensão tangencial máxima que atua sobre o contorno da abertura circular inserida num campo de tensão biaxial uniforme é:

$$\sigma_{\theta(max)} = \frac{3P - S + (P + S)F_{BC}}{1 + F_{BC}}, \qquad para\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{14}$$

onde F_{BC} é

$$F_{BC} = \frac{8(1 - \nu_u)\frac{h^2}{l^2}}{\left[4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l}\frac{K_0(\frac{a}{l})}{K_1(\frac{a}{l})}\right]}$$

Sendo

$$h^2 = \frac{B_c}{4G} \qquad l^2 = \frac{B_c(G + G_c)}{4GG_c} \qquad \nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1 - 2\nu)}{3 - \alpha B(1 - 2\nu)}$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)$$

Os parâmetros que apareceram acima são:

— B_c é o módulo de flexão;

— h e l são variáveis de dimensão de comprimento tais como as definidas por Pal'mov ("*chamados comprimentos característicos*");

— ν é o coeficiente de Poisson;

— ν_u é o coeficiente de Poisson não-drenado;

— B é o Coeficiente de Skempton;

— α é coeficiente de Biot-Willis.

— a é o raio do furo circular (poço ou abertura subterrânea);

— G e G_c são os módulos de cisalhamento e de cisalhamento rotacional, respectivamente;

— K_0 e K_1 são funções de Bessel de segundo classe de ordem zero e ordem um, respectivamente.