

# Matéria escura, energia escura e a busca por uma nova teoria para a gravitação

Hermano Velten

Universidade Federal de Ouro Preto

---

## Resumo

Vamos discutir como a teoria da relatividade geral (RG) de Einstein nos conduz aos conceitos de matéria escura e energia escura que, juntas, devem compor cerca de 95% do universo. O desconhecimento da natureza destas componentes escuras nos leva a um delicado questionamento: Será que a TRG é correta? Existiriam outras teorias para a gravitação?

## Abstract

We discuss how the General Relativity (GR) theory drives us to the concepts of dark matter and dark energy which together sum up to 95% of the cosmic energy budget. The unknown nature of such dark components guide us to some delicate issues: Is GR correct? Are there others gravitational theories?

---

**Palavras-chave:** matéria escura, energia escura, relatividade geral, teorias gravitacionais modificadas.

**Keywords:** dark matter, dark energy, general relativity, modified gravity theories.

DOI: [10.47083/Cad.Astro.v1n1.31674](https://doi.org/10.47083/Cad.Astro.v1n1.31674)

## 1 O que esperar deste texto?

Primeiramente, é necessário dizer ao leitor que existem várias teorias para a gravitação. Pode ser decepcionante para muitos, mas a teoria da relatividade geral (RG) de Einstein não é a única teoria que temos em mãos. Ela é, de fato, aquela que chamamos de teoria padrão para a interação gravitacional, mas existem algumas observações astronômicas nas quais deve-se proceder com cuidado na interpretação dos resultados da RG.

Nosso objetivo, com esse texto, é discutir algumas destas teorias. Por vezes são chamadas de alternativas à RG, outras vezes de extensões da RG. No entanto, nossa estratégia será discutir os motivos que nos levam a buscar uma teoria além da relatividade geral.

Veremos que matéria escura e energia são conceitos chave e estão por trás desta busca por uma nova teoria da gravitação. Por fim, verificaremos quais elementos da RG são abandonados ou modificados na construção das novas teorias gravitacionais.

## 2 Gravitação universal de Newton e seu problema do tamanho de um planeta

A relação do homem com a astronomia data dos primórdios de nossa civilização. Todas as antigas culturas possuem algum tipo de representação própria para o que hoje chamamos de estrelas, constelações ou galáxias. A partir dos trabalhos de Ptolomeu,<sup>1</sup> Tycho Brahe,<sup>2</sup> Johannes Kepler<sup>3</sup> e da prática sistemática do método científico por Galileu Galilei,<sup>4</sup> temos o alvorecer da astronomia moderna. A partir disso fomos levados ao entendimento atual dos cosmos em termos físicos e matemáticos. Isaac Newton<sup>5</sup> nos fornece uma teoria para a gravitação com predições de fenômenos astronômicos testáveis sob o ponto de vista

---

<sup>1</sup>Cláudio Ptolemeu (90 – 168), foi um cientista grego que viveu em Alexandria/Egito.

<sup>2</sup>Tyge (Tycho) Ottesen Brahe (1546 — 1601) foi um astrônomo dinamarquês.

<sup>3</sup>Johannes Kepler (1571 — 1630) foi um astrônomo, astrólogo e matemático alemão.

<sup>4</sup>Galileu Galilei (1564 — 1642) foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo florentino.

<sup>5</sup>Isaac Newton (1643 — 1727) foi um astrônomo e cientista inglês, mais reconhecido pelos seus trabalhos como físico e matemático.

observacional. Até o século XIX, apesar da notória eficácia da teoria da gravitação Universal de Newton, surgem duas observações astronômicas intrigantes. Ambas são relacionadas a aspectos cinemáticos peculiares das órbitas dos planetas no sistema solar. Estas observações iniciariam uma revolução na astronomia. O primeiro destes episódios refere-se à várias discrepâncias, surgidas ao longo da primeira metade do século XIX, na órbita de Urano. Aparentemente, as previsões da teoria newtoniana não correspondiam ao observado. Em 1846, o astrônomo francês Urbain Le Verrier<sup>6</sup> anuncia uma importante previsão sobre a existência de um novo planeta no sistema solar que poderia explicar o comportamento anômalo da órbita de Urano. Ele aponta com grande precisão a posição do suposto novo corpo celeste e rapidamente o planeta Netuno é descoberto.

O outro episódio desta trama é relacionado à órbita de Mercúrio. A órbita do planeta Mercúrio possui um deslocamento angular positivo considerável a cada revolução. Este fenômeno é comumente chamado de avanço do periélio de Mercúrio e não é compatível com a teoria de Newton para a gravitação. A constatação desta discrepância ocorre em 1859 também por Urbain Le Verrier [1]. A previsão da teoria newtoniana para o avanço do periélio da órbita de Mercúrio é de 5.557,62 segundos de arco por século. Este valor é insuficiente para alcançar o valor observado, por meio de medidas realizadas principalmente por Urban le Verrier, de cerca de 5.600,73 segundos de arco por século. Note que permanece, ainda, uma diferença de 43 segundos de arco por século que não poderia ser ignorada. Estava claro também que esta diferença não era associada a erros experimentais do ato da observação o que colocava, assim, a validade da teoria newtoniana sob forte suspeita.

Diante do sucesso obtido com a estratégia adotada no episódio da descoberta de Netuno e, portanto, dada a enorme crença na teoria de Newton, a solução encontrada para o caso da órbita de Mercúrio foi, novamente, postular a existência de outro planeta. Vulcano, assim como foi chamado o hipotético planeta, deveria orbitar o Sol em uma órbita interior a de Mercúrio e, com isso, poderia explicar tal anomalia. No entanto, Vulcano nunca foi encontrado. Tampouco foram en-

contrados corpos menores, como um cinturão de asteróides, por exemplo. A partir deste momento passava a existir uma forte evidência colocando à prova a teoria da gravitação universal de Newton.

### 3 A teoria da relatividade geral de Einstein e seus triunfos

Em 1915, Albert Einstein propõe sua aclamada teoria da relatividade geral (RG), que viria a ser publicada no ano seguinte. Há, na proposta de Einstein, uma previsão teórica que resolvia o problema do avanço do periélio da órbita de Mercúrio [2].<sup>7</sup> Com a teoria de Einstein, um problema que atormentava a astronomia por décadas acabava de ser solucionado. Dentre outras previsões da teoria de Einstein havia ainda o fenômeno da deflexão da luz devido à curvatura do espaço tempo. Por exemplo, a luz de uma estrela, ao tangenciar um objeto como o Sol, sofreria um desvio de sua trajetória retilínea e alcançaria outra rota. Em 29 de Maio de 1919 uma equipe da Royal Astronomical Society obteve medidas da deflexão da luz durante o eclipse ocorrido na cidade de Sobral/CE. Com este resultado a RG passa a ser celebrada. Além disso, a RG ainda oferecia a previsão de novos efeitos físicos, até então não vislumbrados pela ciência. Isto inicia uma nova era para a pesquisa teórica e observacional na área de astrofísica, cosmologia e gravitação. Trata-se do capítulo inicial de uma revolução no conhecimento da interação gravitacional com consequências diretas, inclusive, no nosso dia a dia, uma vez que, por exemplo, sinais de GPS são corrigidos pelas correções relativísticas.

Até hoje não houve nenhum experimento que foi capaz de contradizer as previsões da RG.<sup>8</sup> Além da precessão da órbita de Mercúrio e da previsão do desvio da luz havia ainda um terceiro teste (chamado de teste clássico) da RG. Nesse novo fenômeno da natureza revelado pela RG, fótons mudariam sua frequência desde sua emissão até sua captação por influência da interação gravitacional. Em 1959 foi realizado um experimento para testar a mudança da frequência de fótons gama emitidos por uma fonte radioativa

<sup>7</sup>Veja também a contribuição de O. Piattella neste mesmo volume.

<sup>8</sup>Como veremos adiante, matéria escura e energia escura são utilizadas para compatibilizar a RG com as observações.

<sup>6</sup>Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811 — 1877) foi um matemático e astrônomo francês.

do elemento Ferro 57 (contendo 26 prótons e 31 nêutrons) ao atravessar o campo gravitacional da Terra. Nesse caso, a diferença de campo gravitacional foi correspondente a altura de um prédio de 4 andares (cerca de 22,5 metros). Os pesquisadores Robert Pound<sup>9</sup> e Glen Rebka<sup>10</sup> confirmaram que, de fato, havia uma mudança na frequência destes fótons compatível com a predição da RG [5].

Vários outros testes foram realizados desde a segunda metade do século XX até os dias atuais. Poderíamos também citar o efeito Shapiro (um atraso no tempo de viagem de sinais no sistema solar), a observação da queda do período orbital do pulsar binário de Hulse-Taylor, a própria verificação direta da existência das ondas gravitacionais e a recente imagem do buraco negro no centro da galáxia M87 como grandes triunfos da RG.<sup>11</sup> Assim, pode-se dizer que a RG é uma teoria confiável, robusta e capaz de descrever fenômenos gravitacionais assim como os observamos. Estaríamos então em uma situação de conforto, onde não há mais a necessidade de buscar um melhor entendimento da interação gravitacional? Na verdade, não. É o que veremos adiante.

#### 4 Observações astronômicas que levaram ao conceito de matéria escura

Fritz Zwicky<sup>12</sup> é um dos mais importantes nomes da astronomia da primeira metade do século XX. Na década de 1930 ele dá início a um projeto de observações de velocidades de galáxias pertencentes a um aglomerado de galáxias denominado COMA. Este aglomerado é um objeto astrofísico isolado, auto-gravitante e possui cerca de mil galáxias em sua composição.<sup>13</sup> Os resultados de Zwicky indicavam que a energia cinética de todo o aglomerado, calculada via a obtenção

das velocidades destas galáxias, não era compatível com a quantidade de energia potencial gravitacional, obtida através da contagem de objetos e inferência de sua massa. As quantidades de energia cinética ( $E_c$ ) e potencial gravitacional ( $E_g$ ) devem obedecer ao chamado teorema do virial  $2E_c + E_g = 0$ . A partir de suas observações, Zwicky não foi capaz de verificar o teorema do virial neste aglomerado. A energia cinética inferida excedia a quantidade de energia potencial gravitacional. Em outras palavras, faltava matéria para explicar as altas velocidades encontradas. De certa forma, deveria haver naquele sistema muito mais matéria do que podia ser observada no espectro ótico. Com esse resultado nascia o conceito de matéria escura. A hipótese de Zwicky para solucionar este problema é de que deve existir algum tipo de matéria capaz de interagir gravitacionalmente com as demais partículas e campos, mas que não emite nenhum tipo de radiação eletromagnética, logo, não é diretamente detectável.

Um segundo episódio na astronomia do século XX ocorre quando a astrônoma Vera Rubin mede as velocidades de rotação do disco de galáxias e, de maneira similar à Zwicky, conclui que as altas velocidades das estrelas não poderiam ser explicadas pela teoria newtoniana com base na quantidade de matéria diretamente observada. É importante frisar que a dinâmica de galáxias e aglomerados não necessitam de uma abordagem relativística. O fator de Lorentz para estes sistemas é praticamente igual à unidade e, portanto, a teoria newtoniana pode ser utilizada. Ainda, estes não são objetos astrofísicos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros. Neste objetos os efeitos da curvatura do espaço-tempo são fundamentais fazendo o uso da RG imprescindível.

Outro fenômeno astrofísico que também indica a existência de matéria escura é o de lenteamento gravitacional. Neste caso, trata-se de uma manifestação intrínseca da RG onde a deflexão dos raios de luz vindos de um objeto astrofísico distante são lenteados, por exemplo, por uma galáxia entre a emissão e o observador. Através da medição da forma e magnitude com que a galáxia curva a trajetória de um feixe de luz é possível reconstruir o perfil de massa da lente, ou seja, do objeto que desviou a luz. Esta técnica também tem confirmado a hipótese da existência de matéria escura e, ainda, fornecido informações

<sup>9</sup>Robert Vivian Pound (1919 — 2010) foi um físico estadunidense que ajudou a descobrir a ressonância magnética nuclear.

<sup>10</sup>Glen Anderson Rebka, Jr. (1931 – 2015) foi um físico estadunidense.

<sup>11</sup>Veja contribuição de Oscar Matsuura para este volume.

<sup>12</sup>Fritz Zwicky (1898 — 1974) foi um astrônomo suíço.

<sup>13</sup>Grosso modo, assim como uma galáxia é uma coleção de estrelas, um aglomerado de galáxias é uma coleção de galáxias. Não confundir este termo com os aglomerados globulares, que são grupos de centenas de estrelas. Aglomerados de galáxias são as maiores estruturas do universo com uma massa da ordem de  $10^{15} M_{\odot}$ .

precisas sobre o perfil de distribuição da matéria escura em galáxias e aglomerados de galáxias.

Fora do ambiente astrofísico, a cosmologia fornece indicações fortes sobre a existência da matéria escura.<sup>14</sup> O universo possui 13,8 bilhões de anos. Entendemos que o processo de formação de estruturas cósmicas ocorreu de maneira hierárquica, ou seja, as menores estruturas, como nuvens estelares e protogaláxias, se formaram em um primeiro momento e a posterior evolução destes objetos, guiada pela interação gravitacional, deu origem às estruturas maiores como galáxias e aglomerados de galáxias. As observações da Radiação Cósmica de Fundo nos revela que a magnitude das flutuações na distribuição de matéria era da ordem de 1 parte em 100.000, quando o universo era muito jovem (com apenas 380.000 anos). Trata-se de um pequeno desvio da homogeneidade, mas fundamental para explicar a origem do padrão não homogêneo observado atualmente na distribuição de galáxias no universo. Estas flutuações são as sementes que viriam a formar as estruturas cósmicas que conhecemos. No entanto, há uma certa incompatibilidade ao confiar que a RG conduz a evolução das perturbações da matéria bariônica deste momento inicial até os dias atuais. A RG sozinha não é capaz de explicar o surgimento de estruturas colapsadas (não-lineares) como galáxias, por exemplo. Não há tempo suficiente, por mais que 13,8 bilhões de anos pareçam uma eternidade, para esse processo ocorra pois não há suficiente matéria no universo para impulsionar a criação das grandes estruturas cósmicas. Assim, se a matéria que forma estrelas e galáxias for deixada à sua própria sorte, ela nunca encontraria o caminho para a formação de uma estrutura astrofísica. No entanto, lembre-se que a magnitude da interação gravitacional é proporcional à massa do sistema. A saída para este enigma é assumir que a matéria escura exista no universo, desde seus instantes primordiais, e tenha papel crucial ao conduzir o processo de formação de estruturas. De maneira mais específica, a matéria escura desenvolve poços de potencial gravitacional que acelerará a aglomeração de matéria. Novamente, ao confiar na RG, é fundamental conceber a existência da matéria escura.

<sup>14</sup>Uma pequena explicação. Cosmologia é o estudo do universo como um todo, um sistema único, onde as leis da física são aplicadas para entender sua evolução global. O termo astrofísica é associado ao estudo de estruturas particulares como estrelas, galáxias e aglomerados.

## 5 Observações astronômicas que levaram ao conceito de energia escura

Qual o conteúdo do universo? Quais são os tipos de partículas e campos que o compõem? A partir da discussão feita até aqui, fica claro que o universo deve ser composto por matéria escura e componentes do modelo padrão de partículas como radiação (fótons e neutrinos relativísticos) e a matéria bariônica.<sup>15</sup> Porém, um problema deste tipo de universo é que ele seria muito jovem. Dificilmente teria mais do que 10 bilhões de anos. Ao mesmo tempo, modelos astrofísicos estimam que a idade dos aglomerados globulares pode ser de até 13 bilhões de anos. Há então uma clara contradição na possibilidade de que o universo fosse mais novo do que alguns objetos que ele contém.

Em 1998 mudamos radicalmente a maneira como entendemos o universo. O desenvolvimento das observações das explosões de Supernovas indicou algo inesperado. Estes eventos apresentavam intensidade luminosa abaixo do que seria esperado para um universo em expansão desacelerada. Como solução deste problema, a primeira hipótese utilizada foi a de que universo passaria por uma fase de expansão acelerada [6] devido a existência de uma nova componente cósmica. Como efeito dinâmico resultante, tais objetos estariam, de certa forma, mais distantes do observador o que explicaria seu brilho ser menor. Dada a natureza atrativa da atração gravitacional, uma expansão acelerada deveria ser ocasionada por algum tipo de matéria com propriedades antigravitacionais. A este tipo de entidade deu-se o nome de energia escura. Na formulação da RG para um universo em expansão, a energia escura pode ser compreendida com um fluido com pressão (suficientemente) negativa. Basta lembrar que na RG a pressão também “gravita”, ou seja, ela é capaz de induzir uma modificação no espaço-tempo e, conseqüentemente, determinar a dinâmica de expansão. De maneira equivalente ao uso de um fluido com pressão negativa, a famosa constante cosmológica de Einstein (uma quantidade geométrica introduzida por Einstein na RG para evitar

<sup>15</sup>O termo matéria bariônica é um jargão utilizado para representar toda a matéria conhecida, uma vez que os bárions (partículas pesadas como prótons e nêutrons) contribuem muito mais para a soma de toda a massa da matéria conhecida do que mésons (partículas de massa intermediária) e léptons (partículas leves).

a contração e colapso do universo) também seria capaz de explicar tal fenômeno.

## 6 O inventário cósmico

Como resumo do que foi exposto até aqui chegamos à conclusão que matéria e energia escuras devem compor o inventário cósmico. Mas qual seria a proporção destas componentes no balanço total do conteúdo cósmico? Elas são tão relevantes assim? Antes de responder a esta pergunta é importante frisar um resultado, um tanto quanto óbvio, que surge no estudo da dinâmica de um universo. A densidade de suas componentes depende do tempo. Assim, a composição do universo não permaneceu constante desde seu início até os dias atuais.

Uma aproximação muito comum em cosmologia utiliza a ideia de que a expansão cósmica, acima da escala de homogeneidade, pode ser idealizada através da fluidodinâmica, ou seja, podemos visualizar a expansão global do universo como resultado da mistura efetiva de diferentes fluidos. A densidade de cada uma dessas componentes cósmicas depende de sua equação de estado  $p = w\rho$  que relaciona sua pressão  $p$  com a sua densidade  $\rho$  e onde  $w$  é chamado de parâmetro da equação de estado.

A combinação de todas as fontes observacionais indica que a distribuição do inventário cósmico atual obedece a seguinte proporção: Todas as partículas relativísticas correspondem a cerca de 0,005%; a matéria comum, dita bariônica, a quase 5%; a matéria escura aproximadamente 25% enquanto que a energia escura 70%. Estes números refletem nossa ignorância sobre o universo. A grande maioria (95%) da atual composição cósmica está distribuída nas componentes escuras das quais não temos conhecimento sobre sua natureza e origem. Abaixo discutiremos com mais detalhes a obtenção destas proporções.

## 7 A expansão do universo e a teoria da relatividade geral

O trabalho de Edwin Hubble<sup>16</sup> no fim da década de 1920 foi crucial para o desenvolvimento da cosmologia moderna. Primeiramente, suas

<sup>16</sup>Edwin Powell Hubble (1889 — 1953) foi um astrônomo estadunidense.

observações foram importantes para certificar a existência de outras galáxias, além da nossa Via Láctea. Assim, como consequência desta observação, ele estabeleceu um ingrediente chave para a cosmologia moderna que é a expansão do universo. Hubble verificou que galáxias se distanciam das outras com uma velocidade proporcional à sua distância. Para descrever esse processo é preciso parametrizar a expansão do universo em termos do fator de escala cósmico  $a(t)$ . Dessa maneira, a distância física  $\mathbf{r}_f$  entre dois objetos em um certo instante  $t$  pode ser escrita como  $\mathbf{r}_f = a(t)\mathbf{r}_0$ , onde  $\mathbf{r}_0$  é uma distância fixada em um instante  $t_0$  que pode ser identificado com o tempo presente. Na nossa notação, o subíndice 0 denota o valor de uma quantidade física medida hoje. Com isso, acabamos de definir que o fator de escala do universo atual é  $a(t_0) = a_0 = 1$ . Calculando a derivada temporal  $\dot{\mathbf{r}}_f$  obtemos a velocidade de expansão  $\mathbf{v}_f$ , com isso,<sup>17</sup>

$$\dot{\mathbf{r}}_f \equiv \mathbf{v}_f = H(t)\mathbf{r}_f, \quad (1)$$

onde  $H(t)$  é a taxa de expansão do universo

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2)$$

Se esta relação é tomada no tempo presente com  $H(t_0) \equiv H_0$ , a relação (1) torna-se a famosa lei de Hubble, sendo  $H_0$  a chamada constante de Hubble. Recentemente, esta nomenclatura foi modificada para incluir o nome de Lemaitre pois ela já havia surgido em trabalhos anteriores à Hubble [3].

Com esta convenção  $a_0 = 1$  o fator de escala passa a ser relacionado com o parâmetro do desvio para o vermelho (redshift) cósmico  $z$  por meio da definição  $a(t) = (1+z)^{-1}$ . Assim, o tempo presente corresponde à  $z = 0$ . O passado longínquo ocorre no limite  $z \rightarrow \infty$  ( $a \rightarrow 0$ ), ou seja, O limite futuro  $a \rightarrow \infty$  ocorreria em  $z = -1$ .

A RG é a teoria padrão para descrever os processos que envolvem a interação gravitacional. Nossa ideia daqui em diante é fazer uma breve introdução de seu aparato ferramental.<sup>18</sup>

<sup>17</sup>Temos em mente o chamado tempo cósmico  $t$  medido em segundos. O fator de escala e o desvio para o vermelho são outras formas de parametrizar a evolução temporal do universo.

<sup>18</sup>Existem ótimos livros sobre a RG mas, em sua grande maioria, são escritos na língua inglesa. Uma ótima referência, em língua portuguesa, sobre a RG pode ser encontrada em [4]. Veja novamente a contribuição de Oliver Piattella à este volume.

O ponto de partida será introduzir a chamada equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Não é o objetivo deste trabalho deduzir a equação acima. Tenha em mente que o elemento chave de uma geometria é o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Analisando uma geometria em 4 dimensões, uma temporal e três espaciais - (1+3) - os índices assumem valores  $\mu \rightarrow (0, 1, 2, 3)$  que correspondem às coordenadas  $(t, x, y, z)$ . A partir de  $g_{\mu\nu}$  podemos calcular o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e o escalar de Ricci  $R \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ . O termo  $\Lambda$  é a constante cosmológica. Assim, um objeto do tipo  $R_{\mu\nu}$  deve ser idealizado como uma matriz 4x4. Todo o lado esquerdo de (3) representa a geometria do espaço-tempo. A parte do conteúdo material é representada pelo tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  que se encontra ao lado direito desta equação.  $G$  é a mesma constante da gravitação de Newton. A equação de Einstein descreve, de uma maneira bem geral, a interação entre a distribuição de matéria com a geometria do espaço-tempo. E como encontrar soluções desta equação? O primeiro passo é impor a simetria adaptada ao problema físico que se tem em mãos. Na cosmologia padrão esta simetria é motivada pelo Princípio Cosmológico, que diz que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Assim, ao exigir este tipo de simetria passa-se a fixar a métrica do espaço-tempo como a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + d\Omega^2 \right], \quad (4)$$

onde a constante  $k$  representa a curvatura espacial. O objetivo final é, a partir da equação de Einstein, determinar a forma funcional do fator de escala  $a(t)$ . Utilizando (4) na Eq. (3) obtém-se a chamada equação de Friedmann

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (5)$$

sendo  $\rho_i$  a densidade de energia associada cada componente  $i$  que compõe  $T_{\mu\nu}$ . Dadas as identidades geométricas de Bianchi, assume-se que cada componente conserva-se, ou seja, não interage com as demais via troca de energia ou momento. Dessa forma, elas obedecem individualmente à equação da continuidade

$$\dot{\rho}_i + 3H \left( \rho_i + \frac{p_i}{c^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Esta equação determina a evolução temporal da densidade de energia do fluido  $i$  uma vez que sua equação de estado  $p_i(\rho_i)$  é conhecida.

Para cada componente define-se um parâmetro de densidade fracionária

$$\Omega_i(z) = \frac{\rho_i(z)}{\rho_{c0}}, \quad \text{com} \quad \rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (7)$$

onde  $\rho_{c0}$  é a densidade crítica do universo hoje. A partir desta definição também encontra-se o valor da densidade fracionária da componente  $i$  hoje, ou seja,  $\Omega_{i0} = \rho_i(0)/\rho_{c0}$ . De uma maneira similar vamos definir as quantidades análogas para as demais componentes de (5) que podem atuar como fonte da expansão

$$\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{H_0^2} \quad \text{e} \quad \Omega_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}. \quad (8)$$

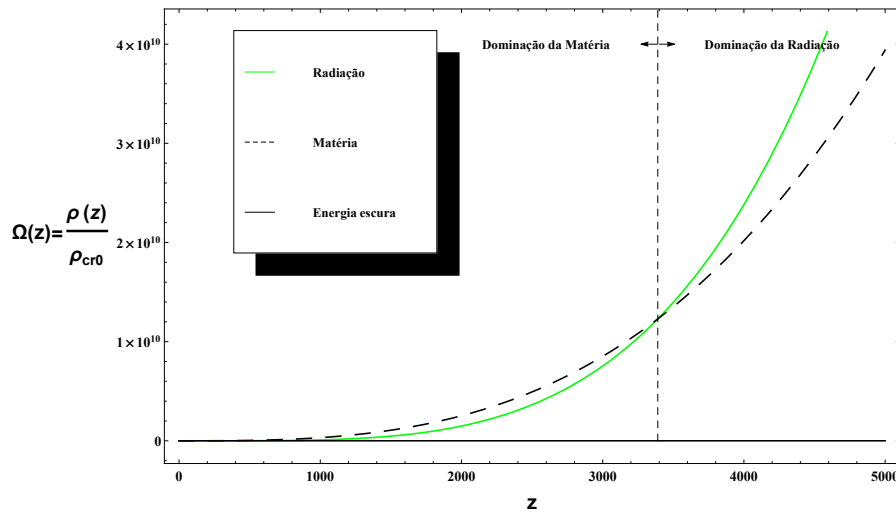
Ao assumir que a composição do universo consiste de radiação ( $i = r$ ), com equação de estado  $p_r = \rho_r c^2/3$ , e matéria ( $i = m$ ), com equação de estado  $p_m = 0$ , e resolvendo a equação da continuidade (6) para cada fluido, a Eq. (5) é reescrita como

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}. \quad (9)$$

Com esta expressão um modelo de referência pode ser construído. A tarefa, a partir da Eq. (9), é obter o valor das densidades fracionárias de radiação  $\Omega_{r0}$ , de matéria  $\Omega_{m0}$  (que é composta por uma parte de matéria bariônica  $\Omega_{b0}$  e matéria escura  $\Omega_{dm0}$ ), da curvatura espacial  $\Omega_{k0}$  e da energia escura  $\Omega_{\Lambda 0}$ . Já adiantamos o valor aproximado destes parâmetros acima. Ainda, é fundamental conhecer a constante de Hubble  $H_0$ . A obtenção de dados astronômicos precisos é fundamental para a determinação destes parâmetros cosmológicos. A seguir, vamos discutir brevemente quais foram (e tem sido) alguns dos principais resultados observacionais que ajudaram a pavimentar o caminho até a formulação de um modelo cosmológico de concordância.

## 8 Construindo um modelo padrão para a cosmologia

As observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) foram fundamentais para estabelecer alguns fatos. A própria existência da RCF é um



**Figura 1:** Evolução da densidade fracionária de energia da radiação (verde), matéria (tracejado) e energia escura (linha preta horizontal) como uma função do desvio para o vermelho ( $z$ ).

grande sucesso do chamado modelo do *Big Bang*. A RCF é, na verdade, uma relíquia do passado quente e denso do universo. Uma característica importante da RCF é possuir um espectro típico de corpo negro que possui uma temperatura específica associada à esta distribuição de radiação. Quando sabemos a temperatura desta distribuição, imediatamente encontramos duas densidade. Com isso, podemos afirmar com grande precisão que a densidade fracionária da radiação hoje é  $\Omega_{r0} = 9.29 \times 10^{-5}$ . A RCF também é fundamental para determinar que o universo não admite um valor considerável de curvatura. Em outras palavras, temos, na prática, que  $\Omega_{k0} \approx 0$ . Assumindo um universo plano  $\Omega_{k0} = 0$  e fazendo  $z = 0$  em (9) a quantidade de energia escura pode ser escrita como  $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{m0}$ . Estes resultados simplificam o número de parâmetros livres da Eq. (9) para apenas dois,  $H_0$  e  $\Omega_{m0}$ . Neste estágio, construímos o chamado modelo  $\Lambda$ CDM plano que figura como melhor descrição para a expansão do universo recente,

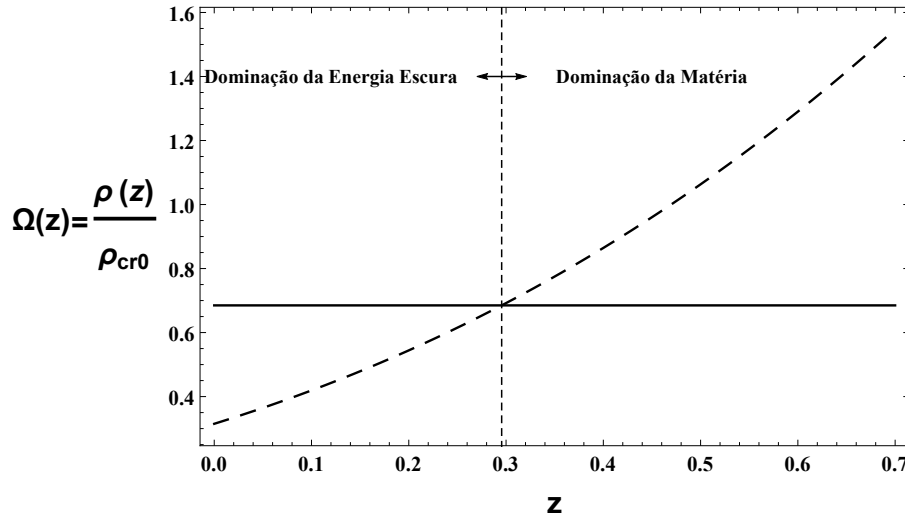
$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} \simeq \Omega_{m0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{m0}. \quad (10)$$

Por fim, o conjunto de diversas observações leva a um cenário onde  $\Omega_{m0} \approx 0.3$ . É importante lembrar, no entanto, que a quantidade de bárions está incluída em  $\Omega_{m0}$ . Dentro do cenário da bariogênese cósmica determina-se  $\Omega_{b0} \approx 0.05$ , o que significa dizer que cerca de 25% do cosmos atual é composto por matéria escura. Com isso,

chegamos ao resultado  $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$ .

O valor exato do parâmetro de Hubble  $H_0$  é tema de grande debate atual na literatura. Existem distintas formas de se obter  $H_0$ . A partir das análises estatísticas com dados cosmológicos, justamente o cenário descrito no parágrafo anterior, encontra-se um valor próximo a  $H_0^{cos} \approx 69$  km/s/Mpc [7]. Por outro lado, a velocidade de recessão de galáxias e outros objetos astrofísicos próximos à nossa galáxia pode ser determinada diretamente. Este tipo de análise indica valores  $H_0^{ast} \approx 73$  km/s/Mpc [8]. Trata-se de uma tensão considerável mesmo quando as barras de erros associadas a estes valores são levadas em consideração. A origem desta diferença é um dos grandes problemas atuais da astrofísica e cosmologia.

Ao utilizar estes números para os parâmetros cosmológicos podemos visualizar como as densidades de energia evoluíram desde o universo primordial até o hoje  $z = 0$ . Assim como demonstrado na Figura 1, o universo era dominado pela radiação - o termo  $\Omega_{r0}(1+z)^4$  domina o lado direito de (9) - em um momento anterior ao desvio para o vermelho  $z \approx 3400$ . Isso corresponde ao momento que o universo tinha apenas 60.000 anos de existência. É bom lembrar que a idade do universo não segue uma relação linear com o desvio para o vermelho. Do momento  $z \approx 3400$  até o desvio para o vermelho  $z \approx 0.3$ , correspondendo a cerca de 3,5 bilhões de anos atrás, a dinâmica cósmica é dominada pela matéria. Isso é fundamental para a execução do processo de formação



**Figura 2:** Evolução da densidade fracionária de matéria (tracejado) e energia escura (linha preta horizontal) como uma função do desvio para o vermelho ( $z$ ).

de estruturas pois é nessa etapa que galáxias e aglomerados de galáxias se formam. A Figura 2 é equivalente à Figura 1. No entanto, ela mostra mais detalhes sobre o período recente onde a energia escura passa a dominar a dinâmica da expansão cósmica. A densidade fracionária da energia escura, na forma de uma constante cosmológica, é representada pela linha sólida horizontal. A partir deste instante a expansão acelerada do universo impede a aglomeração de matéria nas escalas cósmicas. Isso faz com os aglomerados de galáxias sejam as maiores estruturas virializadas observadas no universo.

### 9 Precisamos de uma nova teoria para a gravitação?

A discussão feita nas seções anteriores deixa a percepção de que matéria escura e energia escura são ingredientes fundamentais no universo. No entanto, é possível reinterpretar as observações de outra maneira: a introdução das componentes escuras surgiu da ineficácia da RG em descrever os fenômenos observados e, portanto, devemos buscar uma nova teoria para a gravitação. De fato, matéria escura e energia escura são artifícios utilizados para acomodar a RG dentro da construção de um modelo cosmológico padrão. O ponto chave desta discussão é que não temos certeza absoluta da existência destas componentes escuras. Não há, até agora, observação direta das partículas que compõem a matéria ou a ener-

gia escura.<sup>19</sup> O que há, de fato, e não se discute, são os fenômenos astronômicos observados como a curva de rotação de galáxias espirais (que necessita de algo como matéria escura) e a expansão acelerada do universo (que necessita de algo como a energia escura). No caso específico da energia escura, sua explicação teórica via a descrição de uma constante cosmológica  $\Lambda$ , interpretada como efeito de flutuações quânticas do vácuo, leva ao chamado *problema da constante cosmológica*. Se utilizarmos a teoria quântica de campos (TQC) para fazer uma predição do valor teórico esperado para  $\Lambda$  encontra-se que a diferença entre teoria e observação é  $\sim 10^{120}$ . Este número não está errado. A TQC nos diz que a densidade associada a  $\Lambda$  é  $10^{120}$  maior do que o valor  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$  obtido por meio das observações astronômicas. Temos, portanto, um bom motivo para buscar uma alternativa à constante cosmológica.

A partir deste ponto passamos a discutir uma linha de investigação na área de astrofísica, cosmologia e gravitação que busca alternativas e extensões à gravitação padrão.<sup>20</sup> Trata-se de uma

<sup>19</sup>Durante a confecção de este artigo a colaboração Xenon1T (experimento dedicado à detecção direta da matéria escura) divulgou resultados apontando um excesso de eventos que poderia ser explicado pela existência de matéria escura. No entanto, existem outras duas explicações para estes eventos que não foram descartadas e que não tem relação com a matéria escura. Detalhes em <http://www.xenon1t.org/>.

<sup>20</sup>O termo gravitação padrão refere-se tanto ao uso da teoria da gravitação universal de Newton, quando apropriadamente dentro do limite clássico, quanto ao uso da



área não tão tradicional na física, mas que tem crescido muito na última década. Vamos discutir superficialmente algumas destas abordagens. Será impossível citar aqui todas estas propostas, até mesmo porque muitas das teorias alternativas já foram descartadas por algum tipo de observação astronômica e não seria muito proveitoso discutir modelos em desuso. Algumas teorias propostas ainda sobrevivem na arena de candidatas de sucessoras à gravitação padrão. No entanto, enquanto não houver algum resultado que contradiga a predições da RG, continuamos a tratar todas outras teorias como especulativas.

O processo de criação destas teorias alternativas deve iniciar com a hipótese de que algum aspecto da gravitação padrão poderia ser, na verdade, modificado. Algumas destas propostas de mudança são fisicamente motivadas, enquanto outras se baseiam em especulações e ideias mais abstratas. Nas próximas seções abordamos algumas das propostas mais populares neste campo.

### 9.1 MOND

MOND (Modified Newtonian Dynamics - Dinâmica Newtoniana Modificada) não nasce como uma teoria gravitacional alternativa. Trata-se, originalmente, de uma proposta de modificação da segunda lei de Newton visando resolver o problema da matéria escura em galáxias [9]. A ideia é muito simples. A segunda lei de Newton seria substituída por uma relação do tipo

$$F = m\mu(x)a, \quad (11)$$

onde é definida uma variável sem dimensão  $x = a/a_0$  sendo  $a_0$  uma constante com dimensão  $m/s^2$ . A função  $\mu(x)$  depende do valor da variável  $x$  da seguinte forma:  $\mu(x) \approx 1$ , se  $x \gg 1$  ( $a > a_0$ ) e  $\mu(x) \approx x$ , se  $x \ll 1$  ( $a < a_0$ ). E qual o valor de  $a_0$ ? O valor inicialmente proposto para esta constante seria da ordem de  $a_0 \sim 10^{-10}m/s^2$ . Acelerações que experimentamos no dia a dia são superiores a este valor, por exemplo, a aceleração da gravidade da superfície da Terra é da ordem de  $10m/s^2$ . Mas existiriam objetos com acelerações tão pequenas? Na verdade, sim, e justa-

RG, quando efeitos relativísticos devem ser considerados. Por exemplo, estrelas anãs brancas podem ser estudadas com a gravitação de Newton, enquanto estrelas de nêutrons, muito mais compactas, devem ser estudadas por meio da RG. Em ambos os casos estamos nos referindo ao que chamamos de gravitação padrão.

mente estrelas orbitando galáxias possuem acelerações centrípetas dessa ordem. Para verificar isto, basta substituir valores típicos da velocidade de rotação de estrelas  $v \sim 100km/s$  orbitando o centro da galáxias a distâncias da ordem de  $10Kpc$  na expressão  $v^2/r$ . Verifica-se que valores  $\lesssim 10^{-10}m/s^2$  serão encontrados. Apesar de resolver parcialmente o problema da curva de rotação de galáxias, assim indicando que a matéria escura não seria necessária (veja, por exemplo [10] para uma discussão desse problema), a proposta MOND encontra alguns problemas. Talvez, o principal deles é que a constante  $a_0$  não aparenta ter o caráter de uma constante universal, que possuiria um valor único para todos os sistemas astrofísicos [11, 12].

### 9.2 Teorias escalares-tensoriais

Para discutir a formulação de teorias alternativas é preciso, primeiramente, ter em mente como a RG é construída. A RG é uma teoria tensorial sendo a interação gravitacional unicamente determinada pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Um componente matemático fundamental na construção de uma teoria gravitacional é a ação desta teoria. A obtenção das equações de campo da RG se dá a partir da aplicação do Princípio de Hamilton (ou, Princípio da mínima ação) à chamada ação de Einstein-Hilbert  $S_{EH}$ ,

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_{mat} \right), \quad (12)$$

com  $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$ . Na ação acima temos elemento de volume quadridimensional  $d^4x$ , o determinante da métrica  $g$  e o escalar de Ricci  $R$ . O papel da Lagrangiana da matéria  $\mathcal{L}_{mat}$  é incluir a contribuição de todas as formas de matéria e energia nas equações da teoria. O elemento chave desta ação, que designa a RG, é o escalar de Ricci  $R$ . Assim, com a aplicação do princípio variacional nesta ação podemos obter imediatamente a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Diferentemente da Eq. (3), aqui não consideramos a constante cosmológica  $\Lambda$ .

Importante deixar claro que teorias gravitacionais obedecem, portanto, a uma estrutura tríplice: i) deve-se propor a ação  $S$  da teoria, ii) a partir desta ação encontra-se as equações de

campo desta teoria e iii) por fim, uma vez que estabelecemos a geometria do problema em questão, como na Eq. (4), temos as suas soluções a exemplo das equações de Friedmann.

Teorias escalares-tensoriais são propostas onde a gravitação é mediada tanto por  $g_{\mu\nu}$  quanto por um campo escalar  $\phi$ . O conceito de campo escalar é muito utilizado na física. Por exemplo, a gravitação clássica de Newton faz uso de potencial gravitacional escalar. A partir do gradiente deste potencial gravitacional escalar podemos obter os conceitos de força gravitacional e aceleração gravitacional. Da mesma maneira, nas teorias escalares-tensoriais, gradientes deste campo escalar cosmológico  $\phi$ <sup>21</sup> dariam origem a um novo tipo de força, muitas vezes chamada de quinta força ou força escura, que poderia explicar os fenômenos observacionais associados à matéria e energia escura sem a necessidade destas componentes.

### 9.2.1 Teoria de Brans-Dicke

Teorias escalares-tensoriais foram formuladas por Jordan,<sup>22</sup> mas a teoria de Brans-Dicke, proposta em 1961, é um exemplo clássico deste tipo de teoria [13]. Ela serve, até hoje, como protótipo para teorias mais modernas. A parte geométrica de sua ação (não escrevendo aqui a contribuição  $\mathcal{L}_{mat}$ ) é

$$S_{BD} = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left( \phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right). \quad (14)$$

Note que o campo escalar  $\phi$  está presente desde a concepção desta teoria. O valor do parâmetro  $\omega_{BD}$  deve ser obtido a partir das observações. É possível argumentar que a teoria de Brans-Dicke recai na RG quando  $\omega_{BD} \rightarrow \infty$ , mas essa discussão não é tão trivial e é tema de debates recentes.

### 9.2.2 Teorias Horndeski

As teorias Horndeski [14] são muito populares pois elas apresentam uma alternativa viável e elegante para o problema da energia escura. São as teorias escalares-tensoriais mais gerais possíveis cujas equações de campo são de segunda ordem (evitando a complexidade existente ao se tratar

com equações de ordens maiores) e estáveis. Vamos omitir a descrição de sua ação neste texto devido à sua enorme estrutura. Por ser tão geral, todas teorias gravitacionais discutidas aqui podem se encaixar como subclasses das teorias Horndeski, inclusive a RG.

### 9.3 Teorias $f(R)$

Outra classe de teorias alternativas à RG é representada pelas teorias  $f(R)$ . É possível interpretar as teorias  $f(R)$  dentro da classe das teorias escalares-tensoriais, mas isso requer o conhecimento da utilização de técnicas de mudança do referencial de Jordan (onde a teoria é construída) para o referencial de Einstein (onde a ação tem forma similar à  $S_{EH}$ ), o que está além do nível deste texto. Aqui, a estrutura da ação de Einstein-Hilbert é mantida. No entanto, o escalar de Ricci  $R$  é substituído por uma composição mais complexa desta quantidade. A ação desta teoria é

$$S_{fR} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{f(R)}{2\kappa} \right). \quad (15)$$

Existem diversas propostas para a forma funcional de  $f(R)$ . Talvez o mais famoso deles é o modelo de Starobinsky onde  $f(R) = R + \alpha R^2$  [15].

Em analogia à proposta das teorias  $f(R)$  é importante citar a existência de várias outras teorias gravitacionais baseadas na substituição do escalar de Ricci  $R$  por outra função. Nesta classe, pode-se construir várias teorias do tipo  $f(R, \dots)$ . Por exemplo, temos as teorias  $f(R, T)$  onde  $T$  é o traço de  $T^{\mu\nu}$ ;  $f(R, \mathcal{G})$  onde  $\mathcal{G}$  é o termo de Gauss-Bonnet; teorias com teleparalelismo  $f(R, \mathcal{T})$ ; teorias  $f(R, R_{\mu\nu} T^{\mu\nu})$ ; teorias com o d'Alembertiano  $\square$  do escalar de Ricci  $f(R, \square R)$ , etc.

### 9.4 Abandonando pilares da RG

Um último grupo de teorias que vamos citar são aquelas onde se abandona alguns dos pilares sobre os quais a RG foi construída. Podemos citar teorias como a gravidade massiva, onde é atribuída massa ao gráviton (partícula que intermediaria a interação gravitacional); teorias não-locais, equivalentes a introduzir potências negativas do d'Alembertiano do escalar de Ricci; teorias com dimensões extras, ou seja, além das 4 dimensões usuais; teorias com violação de causalidade, etc.

Um aspecto fundamental da RG advém das chamadas identidades de Bianchi que atestam

<sup>21</sup>O uso do termo “cosmológico” dá a noção de que este campo escalar permeia todo o espaço, atuando em todas as escalas da natureza, inclusive no nível da cosmologia.

<sup>22</sup>Ernst Pascual Jordan (1902 – 1980) foi um físico teórico alemão.

que o tensor de Einstein possui divergência nula, ou seja,  $(R^{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}/2)_{;\nu} = 0$ . Como consequência, temos que  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ . Esta última igualdade fornece a noção de conservação de energia. De fato, as leis de conservação são fundamentais na física e são observadas em experimentos. Na cosmologia este resultado é fundamental para se obter a equação da continuidade (6) que dá sustentação ao modelo cosmológico padrão. Algumas teorias alternativas fazem uso da hipótese que a conservação de energia poderia ser violada em ambiente de alta curvatura do espaço-tempo. Um exemplo é a teoria de Rastall que parte do pressuposto que  $T^{\mu\nu}_{;\nu} \sim R^{;\mu}$  [16], ou seja, não há mais a conservação de energia.

### 10 Reconciliação com os testes clássicos da RG

A RG verifica-se em todos os possíveis testes como o periélio de Mercúrio, o desvio da trajetória luz por uma fonte gravitacional, o desvio para o vermelho gravitacional, o decaimento do período orbital de pulsares binários, etc. E o que ocorre com as teorias alternativas? Elas também passam nestes testes? A resposta para esta pergunta depende, evidentemente, de qual teoria gravitacional alternativa estamos lidando. Há, no entanto, teorias que possuem predições diferentes da RG. Isso significa que elas estariam descartadas? A princípio, sim. Mas, para salvar estas teorias, existem os chamados mecanismos de blindagem. Estes mecanismos teóricos são incrementos nestas teorias que possibilitam a conciliação com os testes locais.

### 11 Comentário Final

Iniciamos este trabalho discutindo a aplicação da Teoria da Relatividade Geral no estudo da cosmologia. Como consequência, fomos levados a aceitar a existência de duas componentes misteriosas denominadas Matéria Escura e Energia Escura. Estes resultados não enfraquecem a ideia de que a RG deve representar a maneira de descrever a interação gravitacional. Mas, existem, de fato, outras teorias que podem ser consideradas viáveis. Apesar de não termos motivos para desconfiar da validade da RG, também não podemos

simplesmente descartar todas as outras alternativas. Ainda há um longo caminho a se percorrer até conhecermos o que há em todo cosmos. Sem dúvida, faz parte deste percurso conhecer melhor os fenômenos que associamos à matéria escura e energia escura. O século XXI deve ser fundamental neste processo. Entramos na chamada *era das ondas gravitacionais*. Em 2015, após 100 anos desde o nascimento da RG e o surgimento do conceito de onda gravitacional, a colaboração LIGO conseguiu detectar estas perturbações do espaço-tempo. Desde então, temos investigado com grande detalhe fenômenos associados aos estágios finais de objetos como buracos negros e estrelas de nêutrons. Como exemplo recente, a velocidade de propagação das ondas gravitacionais foi obtida e seu valor é, com enorme precisão, o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo  $c$ . Isto está de acordo com a RG mas algumas teorias gravitacionais modificadas, notadamente alguns setores das teorias Horndeski, foram descartadas pois admitiam uma velocidade de propagação diferente de  $c$ . Estes resultados tem guiado rapidamente a comunidade de pesquisadores na área de gravitação para o refinamento e aperfeiçoamento destas teorias. Os próximos anos serão fundamentais no entendimento destas teorias.

### Agradecimentos

Agradeço o apoio financeiro do CNPq/FAPES e PROPP/UFOP. Também gostaria de agradecer a Raquel Fazolo e Ediones Paulino Castilho pela leitura deste texto e sugestões.

### Sobre o autor

Hermano Endlich Schneider Velten ([hermano.velten@ufop.edu.br](mailto:hermano.velten@ufop.edu.br)) é professor da UFOP. É doutor em física pela UFES e bolsista de produtividade do CNPq. Fez estágios de pós-doutoramento na Alemanha e França. O foco de suas pesquisas encontra-se nas áreas de astrofísica e cosmologia.

### Referências

- [1] U. Le Verrier, *Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète*, Comp-

- tes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **49**, 379–383 (1859).
- [2] A. Einstein, *Die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. der Phys. **49**, 769–822 (1916).
- [3] G. Lemaitre, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques* Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **A47**, 49–59 (1927) [Traduzido para o inglês em MNRAS **41**, 483 (1931)].
- [4] A. B. Henriques, *Teoria da relatividade geral: uma introdução* (Lisboa, Editora IST Press, 2009)
- [5] R. V. Pound e G. A. Rebka Jr., *Gravitational red-Shift in nuclear resonance*, Phys. Rev. Letters **3**, 439–441, (1959).
- [6] A. G. Riess et al. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009–1038 (1998); S. Perlmutter et al. *Measurement of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565–586 (1999).
- [7] PLANCK Collaboration, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, [arXiv:1807.06209v2](https://arxiv.org/abs/1807.06209v2) (2019).
- [8] T. Shanks, L. M. Hogarth, N. Metcalfe, *Gaia cepheid parallaxes and local hole relieve  $H_0$  tension*, MNRAS: Letters **484**(1), L64–L68 (2019).
- [9] M. Milgrom, *A modification of Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, Astrophys. J. **270**, 365–370 (1983).
- [10] H. E. S. Velten, *MOND: uma alternativa à mecânica newtoniana*, Rev. Bras. Ens. Fís. **30**(3), 3314.1–3314.5 (2008).
- [11] J. Fabris and H. Velten, *MOND virial theorem applied to a galaxy cluster*, Braz. J. Phys. **39**, 592–595 (2009).
- [12] D. C. Rodrigues, V. Marra, A. del Popolo e Z. Davari, *Absence of a fundamental acceleration scale in galaxies*, Nature Astron. **2**(8), 668–672 (2018).
- [13] C. Brans e R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925–935, (1961).
- [14] G. W. Horndeski, *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*, IJTP **10**(6), 363–384 (1974).
- [15] A. A. Starobinsky, *Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity*, JETP Lett. **86**, 157–163 (2007).
- [16] P. Rastall, *Generalization of the Einstein theory*, Phys. Rev. D **06**(12), 3357–3359 (1972).