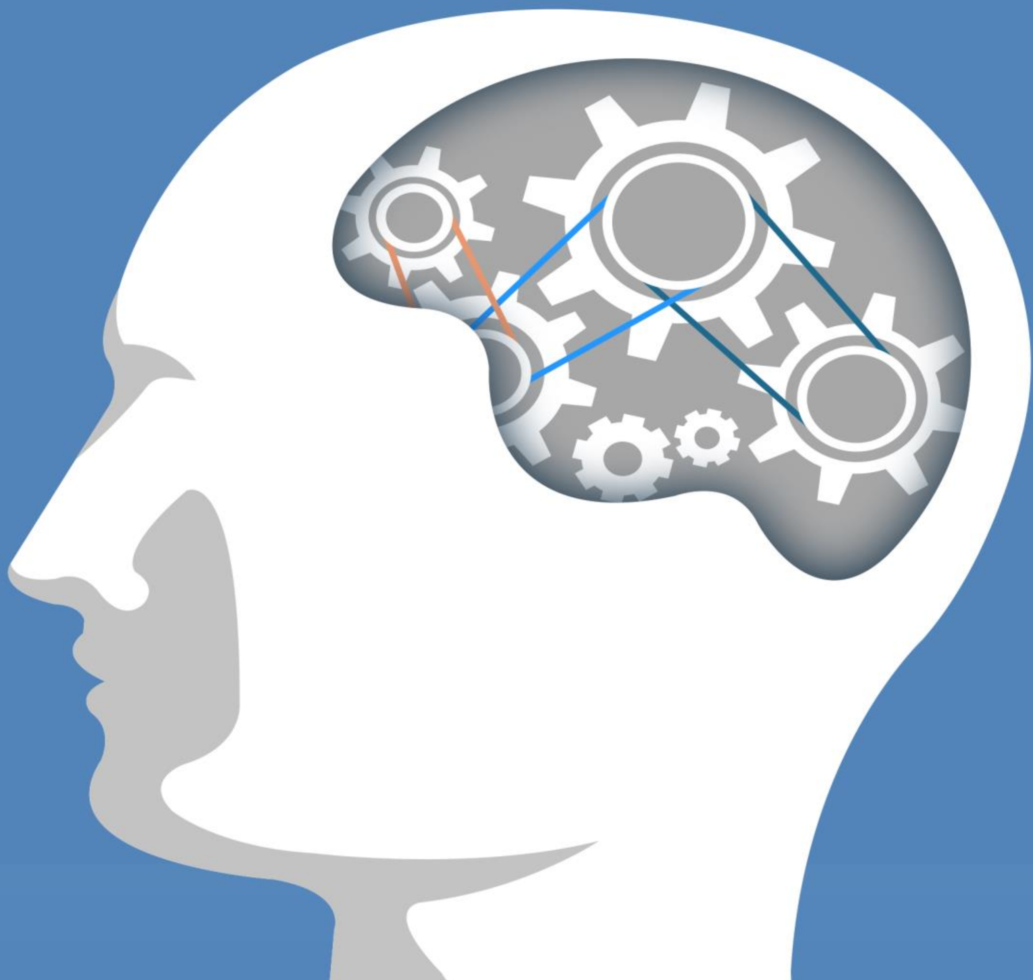
Mestrado Profissional em Educação Matemática

UMA SEQUÊNCIA DE TAREFAS PARA INTRODUZIR A NOÇÃO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

UMA SEQUÊNCIA DE TAREFAS PARA INTRODUZIR A NOÇÃO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

THAÍS ROCHA BRAGA



Thaís Rocha Braga
Ana Cristina Ferreira

UMA SEQUÊNCIA DE TAREFAS PARA INTRODUZIR A NOÇÃO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

UMA SEQUÊNCIA DE TAREFAS PARA INTRODUZIR A NOÇÃO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

EDITORA UFOP

Ouro Preto | 2021

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitora da UFOP | Prof.ª Dr.ª Cláudia Aparecida Marliére de Lima
Vice-Reitor | Prof. Hermínio Arias Nalini Júnior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS
Drietor | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva
Vice-Drietor | Prof. Dr. Rodrigo Fernando Bianchi

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitora | Prof.ª Dr.ª Renata Guerra de Sá Cota
Pró-Reitor Adjunto | Prof. Dr. Thiago Cazati

Coordenação | Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti

MEMBROS
Prof.ª Dr.ª Ana Cristina Ferreira, Prof. Dr. André Augusto Deodato, Prof.ª Dr.ª Celia Maria Fernandes Nunes, Prof. Dr. Daniel Clark Orey, Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira, Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti, Prof. Dr. Eder Marinho Martins, Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu, Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Prof.ª Dr.ª Inajara de Salles Viana Neves, Prof. Dr. José Fernandes da Silva, Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana, Prof.ª Dr.ª Marli Regina dos Santos, Prof. Dr. Milton Rosa

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

B813s Braga, Thaís Rocha.
Uma sequência de tarefas para introduzir a noção de função na educação básica. [manuscrito] / Thaís Rocha Braga. - 2021.
72 f.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira.
Produção Científica (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Educação matemática. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Professores de matemática - Formação. I. Ferreira, Ana Cristina. II. Moreira, Plínio Cavalcanti. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 517.9:37

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6 / 1589
Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

"Conscientemente, ensinamos o que sabemos; inconscientemente, ensinamos quem somos." (Hamachek, 1999 apud Flores, 2010)

Expediente Técnico

Organização | Thaís Rocha Braga | Ana Cristina Ferreira | Plínio Cavalcanti Moreira

Pesquisa e Redação | Thaís Rocha Braga

Revisão | Thaís Rocha Braga | Ana Cristina Ferreira | Plínio Cavalcanti Moreira

Capa | Núcleo de Projetos Gráficos da UFOP

Sumário

Apresentação

Caros(as) colegas,

Desde criança utilizava um quadro verde e giz, que “sobrava” das minhas professoras, para “dar aulas” para os meus brinquedos em casa. Mais tarde, ensinava meu irmão (oito anos mais novo que eu) e, na adolescência, dava “aulas de reforço” para meus colegas de classe.

Cursei a Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado de Minhas Gerais (UEMG). A escolha do curso se deu pela afinidade que sempre tive com o conteúdo desde a Educação Básica, aliada a influências familiares (algumas das mulheres da família são, ou foram, professoras, como é o caso de minha bisavó, avó, mãe e tias), bem como o gosto pelo ensino.

Quando comecei a lecionar fui percebendo a complexidade da prática docente e, também, a desvinculação entre os conhecimentos que aprendi na graduação e os conhecimentos demandados na prática de ensinar Matemática na Educação Básica.

Minha intenção aqui é compartilhar um pouco das minhas experiências durante o curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), e apresentar uma proposta para a introdução da noção de função na Educação Básica.

Desde já, agradeço por sua atenção e espero que este Produto Educacional, com as críticas e adaptações devidas, sirva de inspiração para seu trabalho.

Grande abraço,

Thaís.

Introdução

Ao iniciar a docência, em agosto de 2017, vivenciei momentos significativos de insegurança ao ensinar Matemática bem como dificuldades para responder a questionamentos dos alunos durante as aulas. Para exemplificar minhas dificuldades nesse período, apresento duas situações.

Certo dia, estava copiando no quadro algumas atividades que envolviam dízimas periódicas. Em uma das atividades, os alunos eram solicitados a encontrar a fração geratriz de cada uma das dízimas apresentadas. Observei que escrevi o número 0,99999... e então imaginei a fração 9/9 como sua geratriz, porém essa fração é igual ao número 1. Naquele momento, em minha percepção, e possivelmente na dos alunos também, 0,99999... não poderia ser equivalente ao número 1. Para não me sujeitar a questionamentos que não saberia responder, apaguei essa dízima e a substituí por outra.

Noutra ocasião, em uma aula sobre o plano cartesiano, não soube responder a uma pergunta feita por minha aluna. O que aconteceu foi o seguinte: após desenhar no quadro uma representação do plano cartesiano, apresentei os quatro quadrantes e, para facilitar a visualização, coloquei, em cada quadrante, os sinais dos termos componentes dos pares ordenados, informando que para um par ordenado pertencer ao primeiro quadrante, deve ser do tipo (+,+), ao segundo quadrante (-,+), ao terceiro quadrante (-,-) e ao quarto quadrante (+,-). Em seguida, os alunos começaram a resolver algumas tarefas do livro, sobre o assunto. Em uma delas, foram dados alguns pontos e eles deveriam dizer a qual quadrante esses pontos pertenciam. De repente, uma aluna me chamou: “Professora, no ponto (0,6) o seis está no meio certinho! Aí vai ser primeiro ou segundo quadrante?”. Nesse momento, me senti desnorteada por não saber identificar a qual quadrante pertenceria esse ponto. Respondi que iria pesquisar e traria uma resposta para ela na aula seguinte.

Situações como essas relatadas acima aconteceram com alguma frequência durante as minhas aulas e, a partir delas, fui percebendo que para lecionar Matemática na escola é importante saber bem mais do que aprendi no curso de Licenciatura. É recomendável, entre várias outras formas de conheciemnto profissional, entender, por exemplo, por que e em quais situações certas fórmulas se aplicam ou não se aplicam. É relevante ter conhecimento suficiente para ser capaz de identificar, numa dada situação de sala de aula, o que levou um aluno a determinado erro ou a uma resposta inadequada e, a partir daí, mediar a construção de uma nova compreensão da questão, de modo que ele mesmo identifique onde errou e eventualmente corrija seu próprio erro. Ensinar não se restringe a dizer aos alunos como se resolve o problema corretamente.

Em 2019, ao refletir sobre minha prática docente e sobre situações como essas relatadas, considerei interessante conhecer a percepção deles sobre minha atuação como professora de Matemática[1]. Então, construí e apliquei um questionário aos meus alunos. As respostas me mostraram que, para a maioria dos estudantes, a dinâmica das minhas aulas era boa e as explicações eram claras. Um dos aspectos mais destacados por eles foi minha boa vontade em ajudá-los a compreender os conteúdos. No entanto, um número significativo de alunos apresentou alguns pontos a melhorar: “deveria explicar a matéria de forma mais ampla, colocando assuntos do dia a dia para que os alunos entendessem melhor”; “você é uma boa professora, só precisa melhorar um pouco como explica a matéria. A respeito das dúvidas elas são sanadas, bom pelo menos as minhas são”.

Refletindo sobre isso, percebi o reconhecimento deles em relação à atenção que dedico às suas dúvidas e ao meu esforço (nem sempre bem-sucedido) no sentido de explicar a matéria de modo acessível. Por outro lado, reconheço que dava continuidade à matéria sem trabalhar adequadamente o conteúdo trabalhado, preocupada em cumprir o programa previsto para o ano letivo. Isso não favorece a aprendizagem matemática, pois, antes de compreenderem um assunto, eu já dava início a outro, que muito frequentemente dependia do domínio do tópico anterior.

[1] Uma síntese das respostas dos alunos a esse questionário encontra-se no Apêndice A.

Alguns alunos ressaltaram que minhas exposições para a turma toda (eles falam "no quadro") não são sempre inteiramente compreensíveis. E concordo com eles pois, ao trabalhar algum tópico pela primeira vez, não sinto segurança com relação à compreensão deles, mas quando vou explicar pela segunda vez, tento melhorar, partindo da experiência anterior. Talvez, no caso do atendimento individual eu tenha mais segurança por ter tido a experiência, durante um ano, trabalhando com atendimento individual de alunos em uma escola de aceleração para conclusão dos Ensinos Fundamental e Médio. O problema das limitações no domínio de vários tipos de conhecimentos matemáticos relevantes para o ensino escolar se soma a algumas das questões apontadas pelos alunos em suas respostas ao questionário.

Essa problemática motivou minha busca pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, onde desenvolvi a pesquisa intitulada "Aprendendo a ensinar funções na Educação Básica: um estudo sobre a própria prática". Esse estudo envolveu reflexões sobre a minha própria prática (de estudos, na literatura especializada e em livros didáticos; e de preparação de um conjunto de tarefas para introdução da noção de função na escola). Convido você a conhecer minha dissertação na íntegra, disponível na página do programa www.ppgedmat.ufop.br ou se preferir pode me contatar pelo e-mail thaisrocha.br@gmail.com.

Este pequeno livro é voltado para formadores de professores, futuros professores e professores de Matemática em exercício, no qual inicialmente descrevo como a noção de função é introduzida em alguns livros didáticos e apresento um breve histórico da noção de função. Em seguida, apresento uma proposta para a introdução da noção de função na Educação Básica. Essa proposta é constituída por 17 tarefas, cuidadosamente selecionadas e fundamentadas, elaboradas a partir dos estudos e reflexões vivenciados durante o Mestrado.

Como a noção de função é introduzida em alguns livros didáticos?

Uma das primeiras atividades que realizei ao me preparar para elaborar o conjunto de tarefas para introduzir a noção de função, foi buscar ideias na minha principal fonte de apoio, enquanto professora de matemática em início de carreira: o liro didático. Ao iniciar minha prática profissional como docente, o livro didático passou a cumprir um papel intensivo no planejamento das minhas aulas, sob a justificativa de que todos os alunos tinham acesso a esse material. Comecei a seguir o livro didático do início ao fim, sem refletir muito sobre a adequação e a relevância das atividades propostas para os alunos. Essa postura me colocou em algumas situações delicadas, como, por exemplo, quando algum aluno ia até minha mesa perguntar como poderia resolver certo problema, mas eu também não sabia resolver.

Percebo hoje que minha atitude inicial era a de uma “obediência” quase cega ao que constava nos livros didáticos de matemática, e que evoluiu para uma postura, sempre respeitosa, porém mais crítica em relação à maior ou menor adequação, do meu ponto de vista, das abordagens neles veiculadas.

Essa mudança de postura foi acontecendo durante o processo de estudos de alguns livros didáticos. Passei a procurar compreender como cada autor(a) definia e desenvolvia a noção de função e a refletir sobre os caminhos escolhidos para isso. Consegui ter acesso a vários ivros que tratam do tema “funções”, sendo um referente a oitava série do Ensino Fundamental, equivalente ao nosso atual nono ano (DOMÊNICO, LAGO e ENS, 1986). Outros livros eram referentes ao nono ano do Ensino Fundamental (IMENES; LELLIS, 2010); (DANTE, 2012); (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012). Referentes ao primeiro ano do Ensino Médio foram (SOUZA, 2013); (BARROSO, 2010); (DANTE, 2010); (PAIVA, 2015); (DANTE, 2016); (IEZZI et al.; 2016).

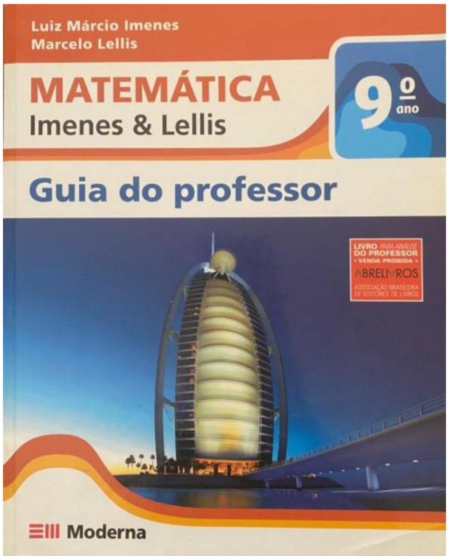
Observei que, de uma forma geral (embora cada autor opte por uma abordagem diferente ou escolha ordens diferentes para trabalhar o conteúdo), existe certa regularidade na apresentação referente ao conteúdo de funções em praticamente todos os dez livros. Selecionei três deles - Imenes e Lellis (2010), Paiva (2015) e Dante (2016) - para comentar aqui, por entender que me ofereceram mais oportunidades de reflexões para a pesquisa.

Algumas dessas reflexões, ainda que possam parecer relativamente simples, mostram meu processo de conquista de uma maior autonomia e autoconfiança profissional. Destaco, contudo, que não foi feita uma análise desses materiais didáticos, uma vez que o foco central desses estudos não está nos livros didáticos em si, mas no desenvolvimento profissional da professora pesquisadora, que ocorreu ao longo do processo de estudo desses livros.

A apresentação de cada uma dessas três obras segue de forma que primeiro justifico sua escolha, apontando a razão principal que fez com que esse material fosse escolhido; em seguida apresento o material de uma forma geral, considerando o olhar que tive ao observá-lo como um todo; e, por último, considerando a forma que o livro apresenta o conteúdo específico de funções em determinado capítulo, trago as especificidades, reflexões e aprendizagens que emergiram do estudo desse capítulo em cada um dos respectivos livros.

“Matemática” de Imenes e Lellis (2010)

Figura 1 - Capa do livro de Imenes e Lellis (2010)



Fonte: (Matemática) de Imenes e Lellis (2010).

Sobre o tema em estudo, esse material denomina “Funções” o capítulo dez, composto pelos tópicos: Funções, suas tabelas e suas fórmulas; Gráfico: o retrato da função; Usando funções. Este livro, que é também Manual do Professor, possui formato maior que os demais que conheço. Ao invés de apresentar algumas orientações gerais no início ou ao final da obra, ele reproduz todas as páginas do livro-texto do aluno e acrescenta, nas laterais, comentários para auxiliar o professor em seu trabalho nas páginas específicas. Ou seja, os comentários dos autores para o professor não se limitam a alguns parágrafos ou páginas mais gerais no início do livro, mas contemplam observações específicas em cada página. Além disso, é apresentada uma síntese no final de cada capítulo. Essa obra se destacou, a meu ver, no quesito de conexão entre a Matemática, o cotidiano e outras áreas do conhecimento, abordando o conteúdo de uma forma, para mim, diferente, no sentido positivo, do que encontrei em outros materiais.

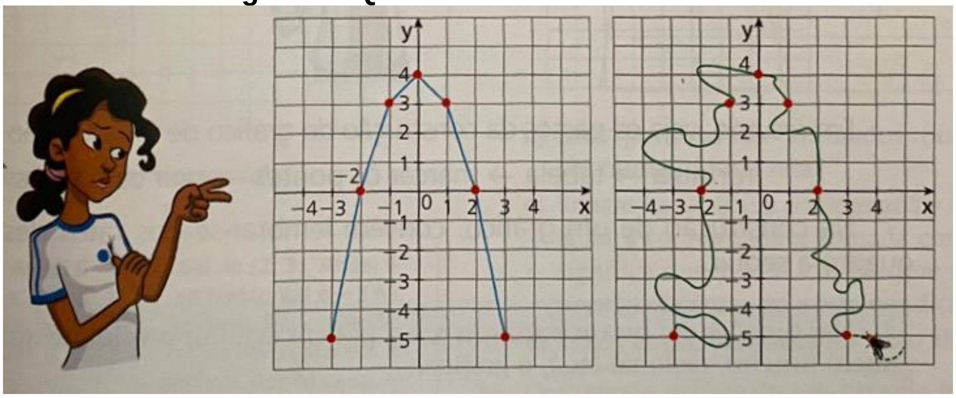
Para introduzir a noção de função, o livro apresenta situações que envolvem a relação de dependência implícita em trechos como por exemplo, “a quantidade de combustível que um veículo consome por quilômetro rodado é função de sua velocidade”. (IMENES; LELLIS, 2010, p. 206). Em seguida, afirma que a expressão (é função de) indica que uma quantidade depende da outra e que esses exemplos se referem ao conceito de função e complementa que “para melhorar o entendimento do conceito de função, podemos pensar em duas grandezas que variam, uma dependendo da outra” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 206). A partir disso, são apresentadas situações que envolvem a relação de dependência entre outras grandezas, em seguida apresenta exemplos (com situações descritas no enunciado, através de tabela e de fórmula matemática) com o intuito de que os estudantes percebam as noções de correspondência e variação envolvidas no conceito de função.

No livro de Imenes e Lellis (2010), são propostas atividades envolvendo o preenchimento de valores em tabelas e a determinação da lei da função para certas sequências que seguem um padrão. Além disso, é solicitado aos alunos que representem as funções no plano cartesiano, partindo da ideia inicial abordada sobre representação de pontos e a ligação entre eles. Posteriormente são apresentados gráficos de funções, sendo estes utilizados para representar informações “próximas da realidade”[2]. Observei, no entanto, que não foram apresentadas relações (entre grandezas) que não expressam a ideia de função. Como comentado anteriormente, acho que fica mais difícil, para os alunos em geral, compreenderem o que é uma função se não têm contato com situações que não expressam a ideia de função. Pensando nisso, proponho nas tarefas a análise de situações nas quais as relações entre as variáveis sejam também do tipo não funcional, com o intuito expresso de evitar a internalização da ideia de que qualquer relação entre duas grandezas representa uma função.

[2] Quando utilizo a expressão “próximas da realidade” estou me referindo a atividades que são contextualizadas, ou seja, envolvem situações que podem estar relacionadas, em alguma medida, ao cotidiano dos alunos ou, mesmo não fazendo parte da realidade dos alunos, fazem sentido para eles, por serem facilmente reconhecíveis como potencialmente reais.

Por fim, destaco a abordagem feita pelos autores no tópico “Gráfico: o retrato da função”. Apresenta-se uma tabela que representa a correspondência entre alguns valores de x e y através da lei quadrática $y = -x^2 + 4$. Em seguida esses sete pontos são marcados no plano cartesiano e dois gráficos cartesianos são desenhados. A pergunta aos estudantes refere-se a qual dos gráficos é o correto. Segue a imagem:

Figura 2 - Qual dos dois será o certo?



Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 213.

Destaquei essa imagem pois, o gráfico da esquerda (azul) já foi feito por mim, entendia que estava correto, e em minha prática docente já observei estudantes utilizando a régua para unir pontos do gráfico de uma função quadrática. Achei muito interessante esse tipo de abordagem, ao lado do gráfico da direita (verde) que simboliza o trajeto feito pela mosca, passando pelos pontos dados inicialmente, e que também não está correto. Assim, a tarefa estimula o pensamento funcional dos estudantes, levando-os a verificar se os pontos de cada uma das linhas (azul e verde) são pontos cujas coordenadas satisfazem a fórmula dada inicialmente, o que não acontece. Sugiro que o professor insira muitos outros pontos, até que fique evidente que o gráfico dessa função é uma curva diferente de ambas as linhas desenhadas. Após essas reflexões, seria apresentado o gráfico correto para essa função.

Essa estratégia de trabalhar com gráfico de função me pareceu interessante porque, além de promover uma forma ativa de participação dos alunos (eles é que vão “descobrindo” que nenhum dos dois gráficos desenhados representa a função), funcionou para mim como uma alternativa interessante para aquilo que, até então, eu me imaginaria fazendo ao resolver esse tipo de questão: explicar aos alunos que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola e que parábola não contém um segmento retilíneo. Observo ainda que a linha verde não poderia ser o gráfico de uma função quadrática porque não é gráfico de nenhuma função (para x = -2, por exemplo, existem seis valores correspondentes para y).

Em suma, posso dizer que esse livro de Imenes e Lellis me sugeriu importantes reflexões a respeito do trabalho com a introdução da noção de função na Educação básica. Por um lado, me abriu possibilidades interessantes (e, para mim, desconhecidas) de trabalhar certas questões relacionadas com o assunto. Por outro, igualmente interessante para meu crescimento profissional, colocou em questão algumas das visões que havia assimilado a partir de outros estudos e me levou a repensá-las (reafirmando-as ou adaptando-as) ao sentir que entravam em algum nível de conflito com a proposta dos autores, segundo a compreendi no estudo realizado. De um jeito ou de outro, entendo que foram reflexões ricas, no sentido de contribuição efetiva para meu desenvolvimento profissional.

“Matemática” de Paiva (2015)

Figura 3 - Capa do livro de Paiva (2015)

Fonte: (Matemática) de Paiva (2015).

Em linhas gerais, esse livro do primeiro ano de Ensino Médio apresenta, no início de cada capítulo, recursos visuais e textuais que podem despertar o interesse do aluno. Todos os capítulos trazem *Exercícios propostos*, distribuídos ao longo do texto e, ao final de cada capítulo, uma seção de *Exercícios complementares*, que segundo o autor, são para fixação e revisão dos conteúdos. Algumas seções são apresentadas em todos os capítulos: *Mentes brilhantes*; *Criando problemas*; *Questões para reflexão*; *Pré-requisitos para o capítulo seguinte* e *Trabalhando em equipe*.

Na seção *Mentes brilhantes* são apresentados feitos de pessoas que revolucionaram a Matemática ou a Ciência em sua época. A seção *Criando problemas* incentiva a elaboração de problemas pelos próprios alunos. A seção *Questões para reflexão* estimula a argumentação dos alunos sobre os conteúdos. A seção *Pré-requisitos para o capítulo seguinte* é composta de exercícios para, segundo o autor, rever conceitos importantes para o desenvolvimento do capítulo seguinte. Por último, a seção *Trabalhando em equipe* propõe uma das competências exigidas pelo mundo moderno, segundo o autor, que é saber trabalhar em equipe.

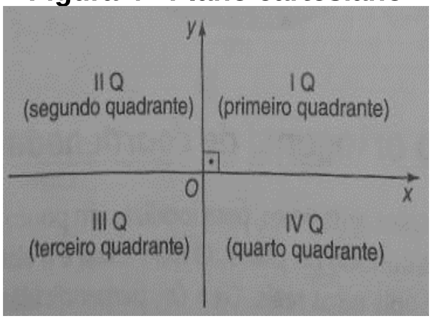
Logo no início do capítulo que trata da linguagem das funções, o autor diz o que é uma grandeza e estabelece relações de dependência entre grandezas, por exemplo, “o crescimento de uma planta depende do tempo (PAIVA, 2015, p. 122)”. Em seguida constrói uma tabela para mostrar uma relação entre volume e tempo numa determinada situação. No entanto, o autor comenta que a representação dessa relação por meio da tabela tem limitações (por mais que acrescentemos valores na tabela, sempre existirá valores a serem acrescentados) e, então, apresenta uma alternativa, que considera mais adequada para descrever a situação: a fórmula $v = 25t$. Essa foi, segundo entendi, a forma utilizada para introduzir a noção de função.

Sobre o conteúdo de função, esse livro traz, no capítulo 5, “A linguagem das funções”, os seguintes tópicos: 1 Sistema de coordenadas no dia a dia; 2 O conceito de função; 3 Formas de Representação de uma função; 4 Imagem de x pela função f; 5 Função real de variável real; 6 Zero (ou raiz) de uma função; 7 Variação de uma Função; 8 Funções inversas.

Destaco ainda, nesse livro, a definição proposta nas figuras 6 e 7, a seguir. Após estudos de vários livros didáticos em busca de uma definição que caracterizasse o pertencimento de um ponto a cada um dos quatro quadrantes, acabei encontrando essa que considerei mais adequada, comparada às da maioria dos livros didáticos consultados. Já mencionei anteriormente a dúvida levantada por uma aluna em sala de aula e que me levou à busca de uma definição que esclarecesse satisfatoriamente essa questão. Segundo a maioria das definições um ponto com uma das coordenadas igual a zero pertenceria a mais de um quadrante, o que me parece provocar certa confusão para os alunos (como provocou a mim, quando a aluna fez a pergunta). A definição de Paiva (2015) esclarece a questão de um modo satisfatório, a meu ver, ao decidir que pontos pertencentes aos eixos não estão em nenhum dos quadrantes, ou seja, os quatro quadrantes não possuem interseção.

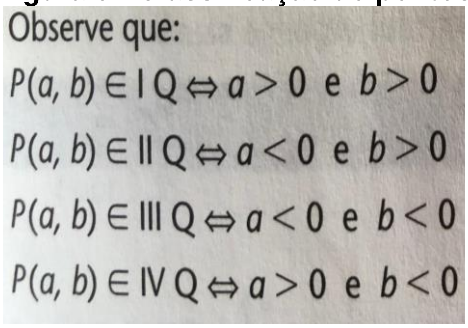
A classificação proposta pelo autor segue nas figuras 6 e 7, adiante.

Figura 4 - Plano cartesiano



Fonte: PAIVA, 2015, p. 120.

Figura 5 - Classificação de pontos


Observe que:

$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0$

$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0$

$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0$

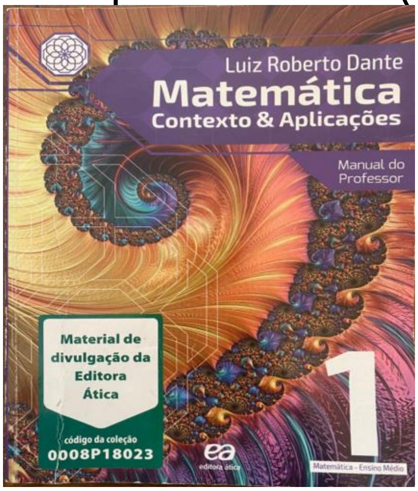
$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0$

Fonte: PAIVA, 2015, p. 121.

Tal definição me pareceu mais adequada para esse momento de introdução do trabalho com gráficos cartesianos. Com ela, os pontos A (2, 0), B (0, -5) e C (0,0) são classificados como pertencentes aos eixos, sendo, portanto, o ponto (0,0) pertencente aos dois eixos e não aos quatro quadrantes.

“Matemática: Contexto & Aplicações” de Dante (2016)

Figura 6 - Capa do livro de Dante (2016)



Fonte: (Matemática: Contexto & Aplicações) de Dante (2016).

Selecionei o livro de Dante (2016), principalmente, por ter contribuído significativamente para minha aprendizagem. Ao resolver alguns problemas e exercícios experimentei momentos de incômodo pessoal, que me fizeram refletir bastante sobre os conceitos matemáticos e o uso de certos termos relacionados ao conteúdo em estudo.

Em linhas gerais, o livro apresenta uma quantidade significativa de atividades a serem realizadas em duplas ou grupos, que segundo o autor, tem o intuito de valorizar a iniciativa e a capacidade de decisão dos estudantes. Em todos os capítulos são apresentados quadros dispostos nas laterais das páginas denominados: “Para refletir”, destacando conteúdos que os alunos provavelmente já estudaram em anos anteriores e devem ser relembrados ou relacionados com o assunto ali apresentado ou informações interessantes que ampliam o tema em estudo.

São apresentados também, em todos os capítulos, exercícios resolvidos, muitas vezes com mais de uma resolução seguindo estratégias diferentes. Indicam-se também algumas sugestões de leitura e são comentadas as relações entre a

Matemática e a tecnologia, sendo que nessa seção são apresentadas atividades em que o recurso do computador é utilizado para auxiliar a manipulação e visualização de gráficos e tabelas.

Sobre o conteúdo de funções, esse material traz, no capítulo 2, “Funções”, os seguintes tópicos: Um pouco da história das funções; Explorando intuitivamente a noção de função; A noção de função por meio de conjuntos; Domínio, contradomínio e conjunto imagem; Estudo do domínio de uma função real; Coordenadas cartesianas; Gráfico de uma função; Função crescente e função decrescente: analisando gráficos; Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva; Função e sequências.

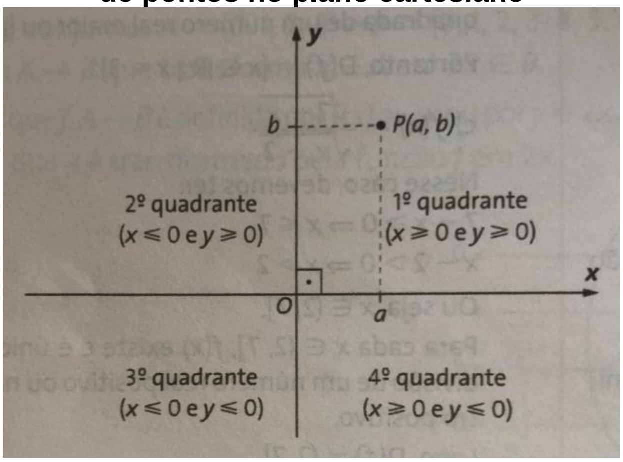
Dante (2016) inicia o estudo das funções apresentando a tabela de cordas como uma primeira representação, de forma intuitiva, destacando a noção de função presente na Antiguidade. Complementa observando que “de fato, qualquer tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis é uma função” (DANTE, 2016, p. 41). Seguindo um roteiro histórico (muito abreviado) até chegar a uma definição de função, esse autor propõe algumas atividades para que os alunos indiquem, nas situações apresentadas, qual seria a variável dependente e a independente. O foco das atividades está relacionado à identificação das leis das funções. Em seguida, pautados na representação pelo diagrama de Venn, os estudantes devem indicar os exemplos que são e os que não são função e indicar o domínio e imagem daqueles que são. Ressalto aqui que essas atividades são apresentadas em uma linguagem matemática, com os termos técnicos, e os elementos dos conjuntos representados pelos diagramas são sempre números.

Posteriormente, é feita a definição dos quadrantes no plano cartesiano, propostas atividades envolvendo a representação de pontos no plano, e é apresentada a fórmula para o cálculo de distância entre dois pontos. Feito isso, são propostas atividades que envolvem a identificação de gráficos cartesianos que representam funções. Ressalto que nessas atividades não são indicados os conjuntos domínio e contradomínio, ao passo que em outras é informado que cada gráfico dado representa uma função e é solicitado aos estudantes que indiquem o domínio e o conjunto imagem de cada uma dessas funções. Apresenta-se também um exercício resolvido envolvendo função constante.

O capítulo relacionado à introdução da noção de função se encerra com a discussão dessa questão da classificação das funções como sobrejetivas, injetivas ou bijetivas. Os demais capítulos irão abordar alguns tipos particulares de função: afim, modular e outras.

Dentre os livros que estudei, dois deles, que se referem ao nono ano do Ensino Fundamental, não abordam a localização de pontos nos quadrantes no plano cartesiano, de acordo com as coordenadas. Dos oito restantes, sete apresentaram uma definição semelhante à utilizada por Dante (2016):

Figura 7 - Definição de Dante para representação de pontos no plano cartesiano

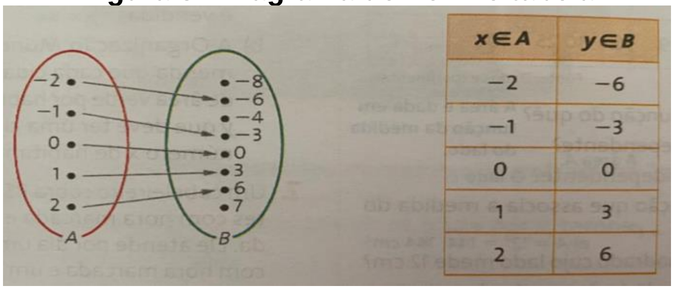


Fonte: DANTE, 2016, p. 52.

Essa questão já foi discutida quando comentamos o estudo do livro de Paiva (2015). Trago-a de volta aqui apenas para registrar a divergência entre as definições dos livros e confirmar a afirmação feita anteriormente de que a maioria dos livros didáticos recorre a essa definição e não à outra.

Ao estudar a introdução da noção de função no livro de Dante (2016), da mesma forma que fiz com os demais, tive uma dúvida, aparentemente simples: uma função representada pelo diagrama de Venn com 5 valores no domínio, alguns elementos sobram no contradomínio. Ai o gráfico dessa função seria só os pontos ou posso fazer ligações entre um ponto e outro, seguindo o mesmo padrão? Segue a imagem do livro que gerou essa dúvida:

Figura 8 - Diagrama de Venn e tabela



Fonte: DANTE, 2016, p. 48.

Aprendi que tudo depende do domínio (além, claro, da lei da função). O gráfico existe “em cima dos pontos do domínio”, ou seja, se o domínio tem 5 elementos, então no gráfico só existem cinco pontos, não “ligados”. Essas nossas discussões permitiram que eu percebesse a importância de especificar domínio, contradomínio e lei ou regra de uma função e não apenas sua lei, ou o domínio. Compreendi que o gráfico está diretamente relacionado ao domínio da função (e à lei), ou seja, se o domínio é o conjunto dos números reais, o gráfico dessa função pode ser uma linha contínua (dependendo da lei), porém, se o domínio é um conjunto discreto, como o conjunto dos números naturais, então o gráfico da função vai ser representado por um conjunto discreto de pontos no plano, não por uma linha contínua.

Assim, pensei na seguinte situação: por exemplo tenho a função y=3x, sei que como função, de domínio em R, então eu poderia fazer uma reta para seu gráfico. Mas como não foi especificado qual é o domínio (suponha que tenham sido dados apenas alguns elementos), posso desenhar uma reta como gráfico dessa função? Ou tenho que colocar só os pontos do gráfico correspondentes aos valores dados de x? Em conversas com meus orientadores, ficou esclarecido que y=3x pode nem ser função, por exemplo se o domínio for o conjunto A= {1,2,3} e o contradomínio ser B {0, 4, 7, 9} uma vez que com essa lei e esses conjuntos domínio e contradomínio não são atendidos os critérios que caracterizam a correspondência como funcional.

Aqui destaco o quanto foram imprescindíveis as discussões de orientação que tive durante o desenvolvimento da pesquisa que gerou esse produto, pois apenas estudando materiais e outras fontes, possivelmente eu não teria desenvolvido sozinha, muitas das percepções que me fizeram avançar nos meus conhecimentos matemáticos para o ensino de funções. Tais percepções foram favorecidas pelas muitas discussões que mantivemos (eu e meus orientadores) ao longo de todo o processo.

A partir desses estudos e reflexões, aprendi o que é uma relação funcional, aprendi também as noções de relação de dependência entre grandezas; compreendi que as relações entre números representadas pelo diagrama de Venn, quando funcionais, são representadas geometricamente no plano cartesiano por pontos, e antes não considerava essa representação geométrica como válida (possivelmente porque nunca tinha visto esse tipo de representação gráfica cartesiana para funções cujo domínio é composto por uma quantidade finita de números).

Certamente essas aprendizagens contribuíram para as adequações e aprimoramentos que tiveram lugar durante o processo de construção do conjunto de tarefas para a introdução da noção de função na Educação Básica. A seguir, apresento e comento essas tarefas.

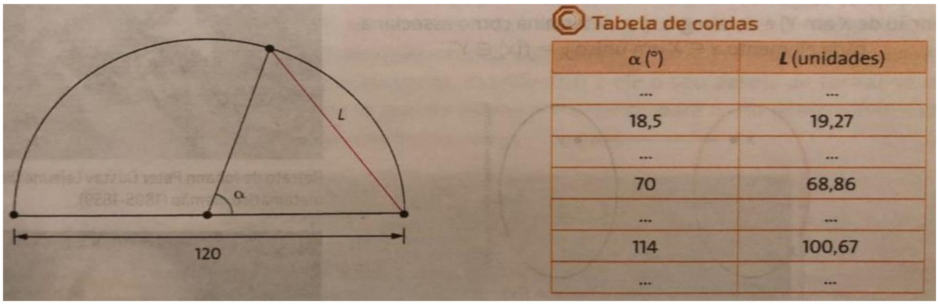
Breve histórico da noção de função

Durante a preparação do plano de ensino de funções, estudei os capítulos de vários livros didáticos, como já mencionado, observando como esses livros apresentam o conteúdo. Observei, nesses livros, alguns aspectos destacados sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função. Esse primeiro contato despertou, em mim, certa curiosidade. Dessa forma, pesquisei sobre o assunto em outras fontes e trago a seguir uma síntese desse estudo.

Youschkevich (1976), apud Pelho (2003), entende que o desenvolvimento da noção de função divide-se em três etapas principais que são: a Antiguidade, a Idade Média e o Período Moderno. Essas etapas se relacionam com os obstáculos enfrentados por cientistas durante a evolução do pensamento matemático. A seguir apresento alguns acontecimentos históricos relacionados com o desenvolvimento da noção de função, extraídos da literatura que consultei.

Um exemplo interessante da noção de função presente na Antiguidade, de forma intuitiva, é a Tabela de Cordas, um instrumento que foi fundamental para cálculos de astronomia e navegação, elaborada por Cláudio Ptolomeu, cientista do século II (DANTE, 2016). “Essa tabela foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e que, para cada ângulo central, associava o comprimento *L* da corda correspondente.” (DANTE, 2016, p.41).

Figura 9 - Tabela de cordas



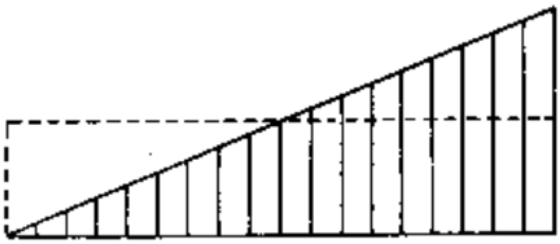
α (°)	*L* (unidades)
...	...
18,5	19,27
...	...
70	68,86
...	...
114	100,67
...	...

Fonte: DANTE (2016, p. 41)

Posteriormente, no século XIV (Idade Média), o filósofo e matemático francês Nicole Oresme questionou: “Será possível traçar uma figura ou gráfico mostrando a maneira pela qual as coisas variam?” (DANTE, 2012, p. 97).

Na busca de resposta para sua própria pergunta, Oresme marcou, ao longo de uma reta horizontal, pontos representando instantes de tempo relativos a um movimento de um corpo que se movia a uma aceleração constante e, para cada instante, traçou, perpendicularmente à reta horizontal, um segmento de reta cujo comprimento representava a velocidade. Assim, a área do triângulo formado representaria a distância percorrida (caso o movimento partisse do repouso) (BOYER, 1974).

Figura 10 - Gráfico da distância em função do tempo



Fonte: BOYER (1974, p. 193)

Eves (2011, p. 660) destaca que a palavra função, no sentido que conhecemos hoje, foi possivelmente introduzida por Gottfried Leibniz (1646-1716) em 1694 (Período Moderno) e foi por volta de 1718 que Johann Bernoulli chegou a considerar uma função como uma expressão qualquer, formada por uma variável e algumas constantes. Logo depois, o matemático suíço Leonard Euler (1707-1783) passou a considerar uma função como uma equação ou uma fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. A Euler é atribuída a notação f(x) para representar uma função.

Já no início do século XIX, Lejeune Dirichlet (1805-1859) escreveu que: “uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável **independente**, e y, variável **dependente**” (DANTE, 2016, p. 42). Na tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet chegou à seguinte formulação, que acentua a ideia de relação entre dois conjuntos de números:

> Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a *y*, então se diz que *y* é uma *função* (unívoca) de *x*. A variável *x*, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que *x* pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por *y* constituem o *campo de valores* da função (EVES, 2011, p. 661).

No final desse mesmo século XIX, Georg Cantor (1845-1918) criou a teoria dos conjuntos, que possibilitou o avanço de muitos campos da matemática, incluindo o conceito de função, que ganhou uma formulação mais conveniente, segundo Eves (2011). Ponte (1990, p. 4) aponta que, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, "a noção de função acabaria por ser entendida já no Século XX de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não".

Após a disseminação da linguagem dos conjuntos, tornou-se possível a ampliação do conceito de função de forma a abranger relações entre dois conjuntos de quaisquer elementos, sejam eles números ou qualquer outra coisa. Dessa forma, uma função de A em B pode ser entendida como um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano *A* x *B*.

> Assim, na teoria dos conjuntos, uma *função f* é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto *A* dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto *B* de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função (EVES, 2011, p. 661).

Ponte (1990, p. 8) ainda ressalta que o estudo das funções permite aos estudantes "uma ancoragem em conhecimentos anteriores e em múltiplas representações de situações suas conhecidas". Posso dizer que ter esse tipo de conhecimento me fez uma professora um pouco mais capacitada do que aquela que entendia que o conceito de função era, desde sempre, o apresentado nos livros didáticos, ou seja, um conceito pronto e acabado, que surgiu da mesma forma que o concebemos hoje. Ter ciência de que esse conceito foi sendo construído ao longo do tempo, foi importante para minha formação profissional, pois ampliou a visão que tinha sobre o mesmo e me ajudou a entender melhor o atual conceito de função. Passei a ver esse conceito de uma forma mais situada historicamente, como resultado de um processo que durou séculos, permeando várias formas de representá-lo, até ser constituída a definição formal que conhecemos atualmente.

Além disso, pode ter contribuído, juntamente com o estudo da literatura especializada, na forma de elaboração do plano de ensino (apresentado no próximo capítulo), fazendo com que eu refletisse sobre questões como a escolha da melhor representação para começar a trabalhar com os alunos o conceito de função e a escolha cuidadosa dos exemplos presentes nas situações descritas nas atividades propostas para esse início de trabalho. Em suma, foi importante para a minha formação profissional docente porque afetou minha formação matemática geral a respeito de funções, além de me auxiliar na preparação das tarefas propostas para a introdução do conceito em salas de aula do primeiro ano do Ensino Médio.

Meu propósito não é transladar para o ensino, hoje, a forma como se desenvolveu historicamente o conceito de função. Entretanto, penso que conhecer um pouco desse processo histórico, bem como alguns dos obstáculos enfrentados até se chegar ao conceito na forma atual, pode se mostrar útil em minha prática docente escolar daqui para a frente, na medida em que favoreceu o desenvolvimento de uma visão mais ampla do assunto. Tal visão ampliada seguramente se reflete na minha maior capacidade de compreensão das eventuais dificuldades e dúvidas dos alunos no trabalho com o tema.

Uma proposta para a introdução da noção de função na Educação Básica

Já no Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, ao refletir sobre o contato que tive com funções no decorrer da Educação Básica e na formação inicial, me perguntei: que aspectos seriam relevantes a ponto de serem levados em conta na hora de introduzir a noção de função na Educação Básica?

Na tentativa de responder a esse questionamento, busquei na literatura informações sobre o ensino e aprendizagem desse conceito. Rosa (2005, p. 59-60) alerta: “não podemos esperar que os alunos construam facilmente o conceito de função”, e ressalta que a “ideia de função só fica clara usando outras ideias. Fazendo conexões com outros conceitos podemos dar forma a esta ideia, e com ela produzir entendimento sobre o significado de uma função”.

A partir dessas considerações, entendi que o conceito de função carrega um alto grau de abstração e que trabalhar com ele na Educação Básica exige conexões com outras noções matemáticas. Existem conceitos que são difíceis de definir ou que dispensam a apresentação de uma definição matematicamente correta para que os alunos da escola possam compreendê-los. Hoje, proponho, antes de tudo, trabalhar com os alunos a ideia de dependência/correspondência entre os valores de duas grandezas, levando-os a examinar uma variedade de exemplos e contraexemplos, até que percebam a ocorrência de um conjunto abrangente de relações possíveis entre duas variáveis, em uma gama de situações e contextos simples e que lhes façam sentido.

Assim, creio que caberia ao professor, sempre segundo meu entendimento atual (construído a partir de ideias inspiradas por estudos e pesquisas a respeito do conhecimento matemático para o ensino de funções), apontar as particularidades comuns a um grupo específico das relações examinadas e discutidas, particularidades essas que caracterizam a relação funcional e que distinguem esse grupo de um segundo grupo de relações, nas quais pelo menos uma das características especiais, identificadas no primeiro grupo, não ocorre. Feito isso, considero desnecessário, e talvez até inadequado, num primeiro momento, solicitar que os alunos apresentem uma definição de função, em atividades do tipo: o que é função? Em um trabalho de introdução do conceito de função, o fundamental, a meu ver, é o aluno saber reconhecer com competência quando está lidando com uma relação funcional, bem como saber identificar quando a relação em questão não caracteriza uma dependência do tipo função. Ficaria, então, a cargo de cada professor avaliar se cabe ou não, mais adiante, a construção, junto com os alunos, de uma definição formal para o conceito.

As tarefas (descritas mais adiante) que constam do conjunto construído para a introdução da ideia de função possibilitam que os alunos reflitam, a partir da mediação do professor, sobre os critérios que devem ser considerados para indicar se uma dada relação representa ou não uma função, antes mesmo de conhecer qualquer definição de função. Com base em meus estudos, acredito que a definição não é capaz de substituir esse processo (de reflexão e de construção de um conjunto de exemplos e contraexemplos) que o estudante desenvolve ao realizar as tarefas propostas.

Com base em minha (ainda limitada) experiência docente, acredito que os estudantes brasileiros, em sua maioria, chegam ao Ensino Médio sem terem construído a noção de função. Com isso em mente, a seguir, proponho a construção desse conceito a partir de um roteiro estruturado em acordo com a orientação que recomenda um avanço progressivo, desde a análise de situações que envolvem o reconhecimento e a expressão, em forma de tabelas, por exemplo, de diversos tipos de dependência entre duas variáveis, passando pela distinção dos diversos tipos de relação estudadas, pela nomenclatura pertinente e pelas diferentes formas mais complexas de representação. Essa é então, basicamente, a lógica que orientou a construção da sequência de tarefas.

O conjunto de tarefas está organizado em três blocos nos quais as tarefas são propostas de modo a promover um avanço progressivo, desde as tarefas que favorecem o desenvolvimento do pensamento funcional até aquelas em que se procura alcançar uma elaboração mais operacional do conceito. Incluem-se entre essas últimas a leitura e interpretação de gráficos cartesianos, após a devida familiarização do aluno com a nomenclatura associada ao conceito e com o trânsito entre as várias formas de representação gráfica (tabelas, diagramas, etc.) e analítica (fórmulas matemáticas) de uma função. De acordo com a lógica da proposta, os três blocos poderiam ser trabalhados de modo que cada professor, conhecedor de sua realidade, imprimi-se maior ou menor ênfase em cada um deles, de acordo com as necessidades de cada turma. A seguir, descrevo brevemente os três blocos e seus propósitos específicos.

Bloco 1 (tarefas 1-9)

As oito primeiras tarefas enfatizam pelo menos quatro elementos fundamentais do trabalho de introdução ao conceito de função:

a) a constituição de um nível mínimo de desenvolvimento do pensamento funcional por parte dos alunos (reconhecimento de dependência/associação entre variáveis em situação, utilizando tanto variáveis quantitativas - cujos valores específicos são expressos por números – como também as de natureza não quantitativa, como figuras geométricas ou times de voleibol).

Embora tenha características específicas, o pensamento funcional é, de acordo com vários autores, parte do pensamento algébrico. O desenvolvimento do pensamento funcional está ancorado em relações entre variáveis, nas quais a variável independente pode assumir diversos valores. Assim, de acordo com Carraher e Schliemann,

> no início, os alunos aprendem a fazer generalizações em situações envolvendo quantidades físicas. Eles aprendem a usar tabelas, gráficos, notações algébricas e outras representações matemáticas para capturar aspectos gerais de seu raciocínio sobre tais situações. Gradualmente eles se sentem confortáveis usando letras para representar quantidades variáveis e operam diretamente em

> expressões algébricas. Apenas em estágios razoavelmente avançados os estudantes raciocinam em situações mais complexas dentro das restrições sintáticas desses sistemas simbólicos (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2008, apud MARQUES, 2019, p. 53).

b) a construção, para uso, tanto do professor, no ensino, como do aluno, na aprendizagem, de um pequeno arsenal de exemplos de situações (que fazem sentido para o estudante), a partir das quais se pode discutir na sala de aula, alguns aspectos teóricos fundamentais associados à elaboração de uma noção básica de função, incluindo a própria distinção entre dois tipos de relação entre variáveis: as funcionais e as não funcionais.

Rosa (2005), baseada nas ideias de Basson (2002), aponta para a relevância de iniciarmos o ensino de um conceito novo (no nosso caso, o conceito de função) explorando situações próximas do cotidiano real, por constituírem cenários que fazem sentido para o aluno e, por isso, de mais fácil apreensão do contexto em que acontecem as relações funcionais e suas representações mais simples. Gradativamente, dentro do mesmo processo, caminhamos para situações mais abstratas e representações mais sofisticadas, como as formas analíticas e o gráfico cartesiano.

c) a construção de uma familiaridade progressiva do estudante com a nomenclatura pertinente: variável dependente, variável independente, domínio, contradomínio, imagem de um elemento do domínio, conjunto imagem.

Rosa (2005, p. 177) afirma que a identificação do papel de cada variável (dependente ou independente), numa relação funcional foi qualificada por Sierpinska (1992) como uma forma de compreensão fundamental associada ao conceito de função, já que esse papel se vincula à determinação do domínio e do contradomínio da função e, em última instância, à própria natureza da relação funcional.

d) a construção de uma familiaridade progressiva do estudante com algumas formas escolares usuais de representação de função: linguagem natural, tabela, diagrama de Venn, fórmulas matemáticas simples. Coloca-se em pauta também a discussão das vantagens e limitações de cada uma dessas formas de representação e o eventual trânsito entre elas. Em tarefas posteriores, coloca-se a conveniência de avançar na direção do tratamento de um tipo mais sofisticado e mais completo de representação de função, que é o gráfico cartesiano.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 117), existem quatro modos principais de representar uma função:

> (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. Estes modos de representação podem ser usados em conjunto, sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações.

Esses quatro aspectos fundamentais ligados ao trabalho docente de introdução do conceito de função (descritos nos itens a, b, c, d, acima) deverão ser objeto de discussão explícita numa aula dialogada, a partir dos trabalhos desenvolvidos pelos estudantes (focando também eventuais dificuldades e dúvidas) na resolução das oito primeiras tarefas. A tarefa 9, nesse sentido, tem o propósito duplo de complementar e, de certa forma, sintetizar essa discussão.

Bloco 2 (tarefas 10 – 11)

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 127), os alunos

> [...] necessitam de trabalhar com gráficos que apresentem vários tipos de variação em certos intervalos. [...] Os alunos devem também saber interpretar gráficos construídos a partir de variáveis discretas, isto é, que podem tomar um conjunto específico de valores, como o “número de um sapato” ou variáveis contínuas, que podem assumir qualquer valor num certo intervalo, como a “distância percorrida”.

Nesse bloco, concordando com Ponte, Branco e Matos (2009), retomam-se alguns aspectos da aprendizagem e do ensino relacionados com as tarefas anteriores, mas o foco específico está na construção, em alguns casos simples, de gráficos cartesianos de funções, com domínios e contradomínios numéricos, discretos ou contínuos (subconjuntos de R).

Bloco 3 (tarefas 12-17)

O último bloco de tarefas avança no sentido de trabalhar a leitura, interpretação e análise de gráficos cartesianos, sempre procurando reforçar o aprendizado dos elementos já discutidos nos blocos anteriores, fazendo uso de situações diversificadas do ponto de vista da aprendizagem.

Ponte, Branco e Matos (2009) apontam alguns aspectos, que incluem os destacados por Zuffi (1999), e que, segundo esses autores, constituem uma boa referência para aquilo que os estudantes devem compreender sobre o conceito de função. Sintetizo esses aspectos da seguinte maneira:

- Compreender as noções de dependência e correspondência entre variáveis;
- Identificar correspondências que são e que não são funções;
- Desenvolver a capacidade de ler e interpretar gráficos de funções;
- Reconhecer que as funções podem ser representadas de diversas formas;
- Ser capaz de usar esse conceito (de função) na resolução de problemas.

Observo que algumas abordagens de ensino têm sido utilizadas com maior frequência (no campo da Educação Matemática) para o estudo das funções. Como exemplos, posso citar a abordagem via Resolução de Problemas ou Modelagem Matemática, entre outras. No entanto, considerando que o conjunto de tarefas que elaborei se restringe à introdução do conceito de função, considerei mais adequada a esse estudo introdutório, em acordo com meus orientadores, uma abordagem baseada na análise de situações simples das quais emergem (e podem ser progressivamente explorados) os cinco aspectos fundamentais destacados por Ponte, Branco e Matos (2009) e sintetizados acima.

Como se poderá notar, a proposta que faço não se enquadra exatamente em nenhuma das abordagens mais frequentes do tema, citadas anteriormente, nem constitui, rigorosamente, um plano de ensino de funções. Trata-se de um conjunto de tarefas, construído a partir de fundamentos ancorados na literatura especializada, cujo objetivo é, mais que ensinar, no sentido tradicional do termo, expor os alunos a situações em que se requer análise, reconhecimento e eventual assimilação da pertinência de certas ideias matemáticas ligadas ao conceito de função. A proposta é que o estudante construa os conhecimentos introdutórios relativos ao conceito de função sem muita preocupação com a heurística da resolução de problemas ou com técnicas de construção e avaliação de modelos matemáticos, e que tais conhecimentos, uma vez construídos, possam servir de base para as etapas subsequentes do estudo das funções, agora em condições talvez mais favoráveis ao trabalho com as abordagens referidas anteriormente.

A seguir, apresento as dezessete tarefas que proponho para o trabalho docente de introdução do conceito de função, que foram construídas e reconstruídas a partir dos meus estudos sobre o conhecimento matemático para o ensino de funções, de minhas reflexões sobre esses estudos, bem como da reflexão sobre o próprio processo vivenciado, de construção e reconstrução das tarefas.

Gostaria de destacar antes, no entanto, que, no processo de refletir sobre a adequação dessas tarefas ao propósito do conjunto delas como um todo, tentei me colocar na posição de um estudante e as “resolvi”, uma por uma, lendo cuidadosamente os enunciados e pensando também nas possibilidades de diferentes interpretações por parte dos alunos. Ao me colocar nessa posição, além de ter conseguido aprimorar as tarefas, aprendi que essa é uma atitude a ser transformada em hábito, permeando tudo que vier a fazer como professora de Matemática da escola. Afinal, pude perceber que saber se colocar na posição de quem aprende faz parte das competências profissionais daquele que ensina. Isso porque ajuda o professor da escola a entender melhor a dinâmica prevalecente no espaço em que se desenvolve a parte fundamental de sua prática docente: a sala de aula.

Ressalto que a sequência de tarefas segue uma ordem lógica pautada na literatura estudada, sem ter em mente um aluno ou uma classe específica. Assim, como cada sala de aula é única, caberá ao(a) professor(a) identificar a melhor maneira de propô-las, se considerar adequado, adaptando-as à sua realidade e necessidades dos seus alunos. É importante também criar um ambiente no qual os estudantes sejam estimulados a aprender, a expressar livremente suas dúvidas e formas pessoais de resolver as tarefas propostas.

Tarefa 1: Número de salgados vendidos e valor a receber

Clarice trabalha, sozinha, na cantina de uma escola, atendendo aos alunos, professores e demais funcionários. Os salgados, principal demanda dos clientes, custam R$2,50 cada. Clarice não sabe de antemão quantos salgados cada pessoa vai comprar a cada momento e, por isso, gasta um pouco de tempo para calcular quanto deve cobrar pela quantidade de salgados pedidos por cada um dos diferentes frequentadores da cantina. Para tornar mais rápido o atendimento, Clarice resolveu construir uma tabela, de modo que a simples leitura indicasse o valor a cobrar, sem ter que fazer certas contas. Para a construção da tabela, identificou as grandezas que se relacionam nessa situação: a **quantidade de salgados** pedidos por um cliente e o **valor a receber** pelos salgados entregues a esse cliente. Para simplificar as entradas da tabela, chamou de **S** o número de salgados e de **V** o valor correspondente a receber. A tabela ficou mais ou menos como abaixo.

S	V
1	2,50
2	5,00
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Essa tarefa foi selecionada para ser a primeira porque descreve uma situação compreensível pelos alunos e pode, em princípio, ser entendida com facilidade por eles.

a) Complete a tabela para ajudar a Clarice a ganhar tempo.

b) No dia 12 de setembro é aniversário da professora Mariana. Lucas e alguns colegas estão organizando uma festa na escola para ela e decidiram encomendar 130 salgados. Qual o cálculo que deve ser feito para saber quanto Clarice vai receber por esses 130 salgados?

c) Qual a conta que deve ser feita para calcular o valor V a receber por uma quantidade S de salgados vendidos? Em outras palavras, escreva uma fórmula matemática que explicite o

valor de V, dada a quantidade S de salgados comprados.

d) É possível que alguém tenha gasto exatamente R$76,00 comprando apenas salgados na cantina da Clarice? Explique sua resposta.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa situação mostra uma relação de dependência funcional entre as variáveis S e R, que foi descrita de tal forma que, para a pessoa que se coloca na posição de Clarice, fica subentendido que S é a variável independente e R é a variável dependente. Assim, o domínio dessa função é o conjunto dos números naturais, que é discreto e, por isso, a representação gráfica cartesiana dessa função é formada por um conjunto discreto de pontos do plano (embora alinhados).

Tarefa 2: Cubos enfileirados

De origem japonesa, a palavra Origami significa dobrar papel. Vamos utilizar essa técnica para construir alguns cubos[3].

Agora vamos colocar um desses cubos encostados na esquina de duas paredes. Quantas faces desse cubo podem ser visualizadas? E se colocarmos dois cubos empilhados (um em cima do outro) e ambos encostados nas duas paredes, quantas faces ficam visíveis? Já se pode perceber que estamos interessados na relação que se estabelece, nesta situação, entre a **quantidade de cubos empilhados** e a **quantidade de faces visíveis** desses cubos.

Sugiro que a tarefa seja realizada em pequenos grupos, de modo que cada aluno confeccione algumas faces do sólido e depois todos montem, juntos, o cubo.

a) Escolha letras do alfabeto para representar cada uma dessas duas grandezas, coloque a letra escolhida para a quantidade de cubos na primeira linha da coluna da esquerda e a letra escolhida para a quantidade de faces visíveis no espaço correspondente da coluna da direita. Agora complete os espaços que estão faltando na coluna da direita.

1	3
2	5
3	
4	
5	
6	
8	
15	
18	
20	
31	
40	
92	
120	

[3] Essa construção pode ser feita pelos próprios alunos e são necessárias apenas folhas de papel, como proposto no Anexo A.

b) Como você calculou o número de faces visíveis para 120 cubos empilhados?

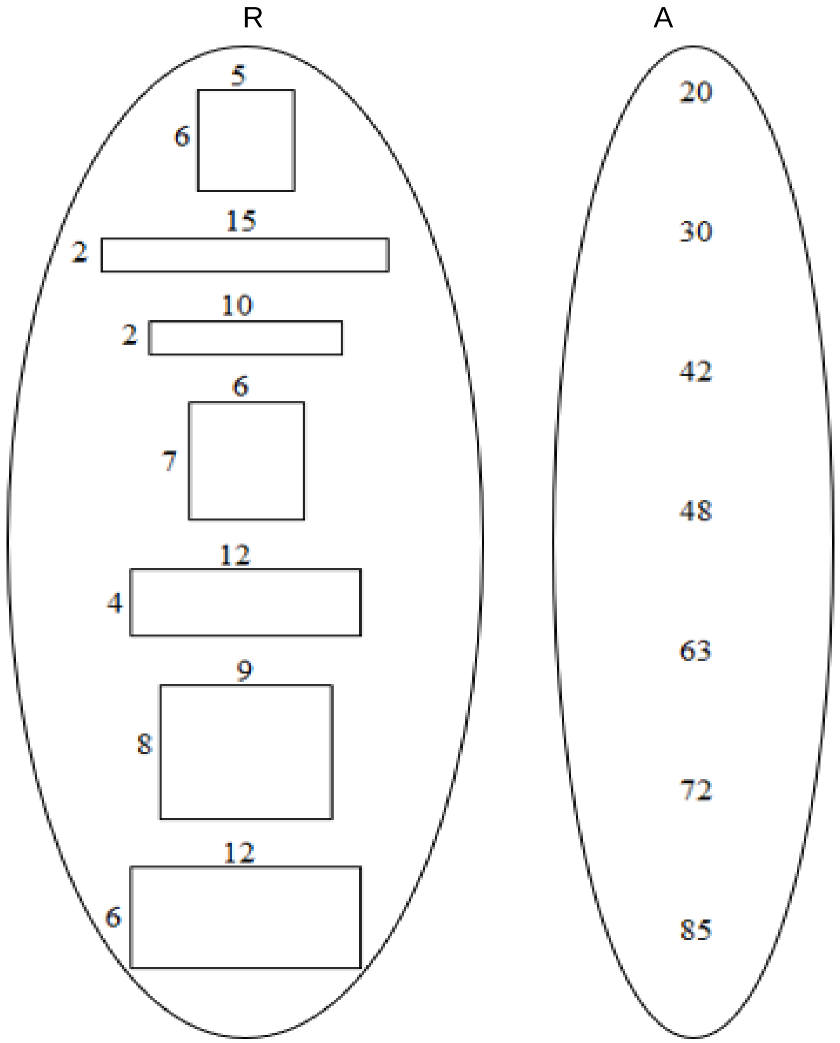
c) Estabeleça, se possível, uma fórmula matemática que permite calcular quantas faces ficam visíveis se for dado o número de cubos empilhados.

Fonte: adaptada de Veloso (2012, p. 79).

Essa tarefa se assemelha à primeira (ambas as variáveis independentes tomam valores em $\mathbb{N}$), mas tem algumas particularidades. Uma delas é que os estudantes devem nomear as variáveis relacionadas (um pequeno passo na direção de uma participação ativa do estudante na realização da tarefa). Outras particularidades se referem à obtenção da lei da função, bem como à construção e utilização de material concreto para facilitar o preenchimento da tabela e, com isso, favorecer a obtenção da lei da função.

Tarefa 3: Retângulos e suas áreas

Sabemos que para calcular a área de um retângulo devemos multiplicar a medida de sua base pela medida de sua altura. Assim, vemos que existe uma relação entre as dimensões (isto é, base e altura) de um retângulo e o valor da sua área, ou seja, dadas as dimensões, fica determinada a área. Associe, através de uma seta, por exemplo, cada retângulo de R (lado esquerdo do diagrama abaixo) com os valores dados em A (lado direito do diagrama) que indicam as possíveis medidas das áreas (as unidades de comprimento são centímetros e as de área centímetros quadrados).



Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa situação descreve uma relação de dependência funcional entre as variáveis R e A, sendo que fica subentendido, no enunciado, que R é a variável independente e A é a variável dependente. As particularidades dessa tarefa em relação à anterior estão: nos elementos do domínio que são objetos (figuras geométricas, com dimensões lineares específicas), não simplesmente números; na classificação dessa função como não sobrejetiva (o que não será discutido no momento, mas tem importância na compreensão da distinção entre as características das relações de tipo funcional e não funcional); na forma de representação dessa função, que foi dada pelo diagrama de Venn; no fato de que os alunos devem apenas associar os elementos do domínio com suas respectivas imagens, não fazendo sentido, neste caso, obter uma fórmula matemática que expresse a lei da função.

Tarefa 4: Ovos recolhidos e caixas para transporte

Toda segunda feira, Joana coordena o processo de transporte dos ovos que alguns funcionários de uma granja recolhem no fim de semana. Para não haver perdas com quebras durante o transporte, os ovos recolhidos são embalados em caixas que levam até 20 ovos cada uma e são transportados em pilhas de no máximo 8 caixas. A questão que Joana tem sempre que definir a cada segunda feira é o número de caixas que serão necessárias para acomodar os ovos recolhidos. Assim, nota-se que Joana deve prestar atenção na relação existente entre o número de ovos a serem embalados e a quantidade de caixas a serem usadas.

a) Represente cada uma dessas duas variáveis (o número de ovos recolhidos e a quantidade de caixas necessárias para embalá-los) por uma letra do alfabeto e coloque-as nos espaços em branco no extremo esquerdo da tabela abaixo, considerando que na primeira linha estão colocados os valores da primeira variável e na segunda linha os valores da segunda variável. Em seguida, complete os demais espaços vazios da segunda linha da tabela.

	1	2	4	20	26	47	58	60	181	297	306	341	424	638
	1	1		1	2									

b) Como você calculou a quantidade de caixas necessárias para embalar 638 ovos?

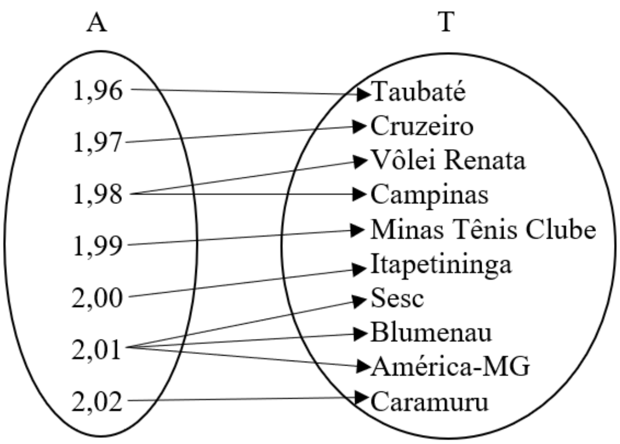
c) Nos fins de semana do mês de novembro, foram recolhidos um total de 2.468 ovos. Quantas caixas foram necessárias para embalar essa quantidade de ovos?

Fonte: adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 130).

Nessa tarefa, a situação apresentada é uma relação de dependência funcional entre as grandezas “número de ovos recolhidos” e “quantidade de caixas usadas para embalar os ovos recolhidos”, sendo que fica subentendida a relação de dependência entre essas duas variáveis (qual funciona como a dependente e qual como a independente, de acordo com a descrição da situação). No entanto, observe-se que a disposição dos pontos do gráfico no plano cartesiano indica uma forma de alinhamento horizontal em níveis que “sobem” uma unidade (na vertical) a cada 20 unidades (na horizontal). Conferir tarefa 10, adiante.

Tarefa 5: Altura média dos jogadores de times de voleibol da Superliga

O diagrama a seguir representa a relação entre a média das alturas dos jogadores de voleibol de alguns times da Superliga (figura A, à esquerda) e os respectivos times a que pertencem os jogadores (figura T, à direita). Obs.: as médias de altura são fictícias, mas os times são reais.



Pergunta-se:

a) Qual time tem a maior média de altura dos jogadores?

b) Qual time tem a menor média de altura dos jogadores?

c) Quantos times têm uma média de altura acima de 1,97?

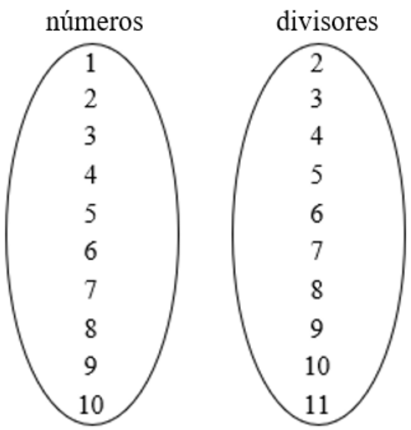
d) Existem times com a mesma média de altura? Se sim, quais?

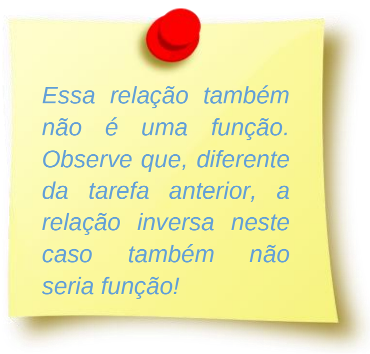
Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Nessa tarefa, a situação apresentada é uma relação de dependência entre a "média das alturas dos jogadores" e os "times de voleibol da Superliga". Porém, essa não é uma relação funcional, pois existem elementos do domínio que possuem mais de um correspondente no contradomínio. Observe-se, de passagem, que a relação inversa entre essas duas variáveis seria uma função.

Tarefa 6: Números naturais e seus divisores

Sabemos que um número natural *d* é divisor do número natural *n* se a divisão de *n* por *d* deixar resto zero. Assim, 1 é divisor de qualquer número natural e 20, por exemplo, tem os seguintes divisores naturais: {1, 2, 4, 5, 10, 20}. Associe (usando setas, por exemplo) cada número (lado esquerdo do diagrama abaixo) com seus respectivos divisores (lado direito do diagrama) e responda:





a) quais números (à esquerda) possuem apenas um divisor (à direita)?

b) quais números possuem mais de 2 divisores?

c) quais números possuem exatamente dois divisores?

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Assim como a tarefa anterior, essa relação de dependência entre os números e seus divisores em N não é uma função, pois além de existirem elementos do conjunto de partida que possuem mais de um correspondente no conjunto de chegada, existe um elemento do conjunto de partida (1) que não possui nenhum correspondente no conjunto de chegada.

Tarefa 7: Valor a pagar na saída do estacionamento de um Shopping

Roberto foi fazer compras num Shopping e deixou seu carro às 14 horas no estacionamento, que cobra o valor de R$ 2,00 a cada intervalo de até 15 minutos, sendo que os primeiros 15 minutos não são cobrados. Assim, se o carro permanecer no estacionamento até 14:15h, por exemplo, Roberto não pagará nada; se permanecer 18 minutos, deverá pagar R$2,00; se permanecer 40 minutos, deverá pagar 4 reais etc. Como estamos em período de pandemia, o estacionamento desse Shopping funciona diariamente, mas apenas entre 12:00 e 20:00 horas. Nessas condições, responda as seguintes perguntas relacionadas à situação descrita:

a) Qual a variável importante a ser considerada para o cálculo do valor a pagar, quando Roberto (ou qualquer outra pessoa que tenha deixado seu carro no estacionamento desse Shopping) for retirar seu carro? Escolha uma letra do alfabeto para representar essa variável e outra letra para representar o valor a pagar.

b) Coloque a letra que você escolheu para o preço a pagar na primeira linha da coluna da direita e a letra escolhida para a outra variável no espaço correspondente da coluna da esquerda. Agora complete os espaços que estão faltando na coluna da direita.

Repare que, nesse caso, a representação gráfica cartesiana é dada por linhas cheias e não por pontos discretos.

8	0,00
15	0,00
18	2,00
25	
30	
39	
45	
200	

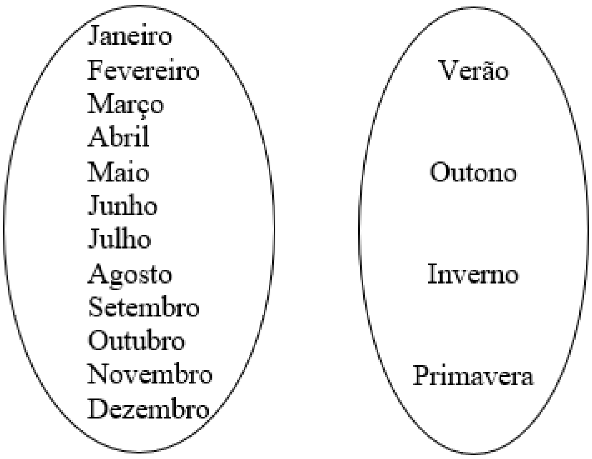
c) Quanto Roberto pagou pelo estacionamento se saiu às 18:12? Explique como você fez o cálculo.

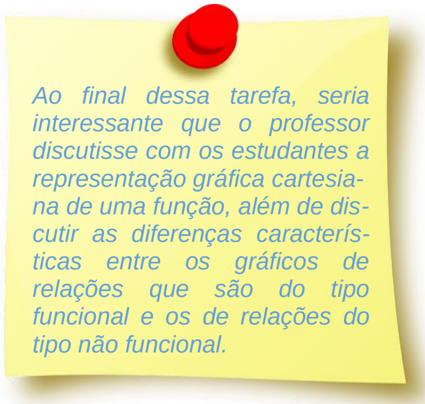
Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa tarefa se refere a uma situação em que as variáveis envolvidas se relacionam segundo uma função. Uma particularidade dessa tarefa se mostra no fato de que o domínio dessa função (contido no conjunto dos reais não negativos) é um conjunto contínuo.

Tarefa 8: Estações e meses do ano

As estações do ano são subdivisões baseadas em padrões climáticos, representando quatro períodos distintos: verão, outono, inverno e primavera. O verão começa no dia 21 de dezembro e termina quando começa o outono, no dia 20 de março. Em seguida vem o inverno, que começa em 20 de junho e termina no dia 22 de setembro, quando começa a primavera. Esta estação vai até o começo do verão, quando um novo ciclo se inicia. De posse dessas informações, associe cada mês do ano a uma das quatro estações (observe que alguns meses poderão ser associados a mais de uma estação):





Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Nessa tarefa, a associação entre os meses e as estações do ano não é uma função, pois existem elementos do domínio (no caso, os meses do ano) que possuem mais de um correspondente no contradomínio (as estações). A relação inversa também não seria função.

Tarefa 9: Características de relações funcionais, nomenclatura pertinente

Em cada uma das tarefas de 1 a 8 verifique se a relação estabelecida entre as duas variáveis é ou não uma função, justificando sua resposta para cada caso. Nos casos em que for função, identifique a variável independente e a variável dependente.

Em cada caso, proponha um conjunto que possa ser considerado como o domínio da função e um conjunto que possa ser o contradomínio, de acordo com a situação descrita.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa tarefa objetiva que o estudante identifique as relações funcionais e não funcionais apresentadas nas oito tarefas anteriores. Dessa forma, essa tarefa complemen-ta a aula expositiva dialogada (que deve acontecer anterior-mente à apresentação da tarefa 9), além de possibilitar discussões sobre o conceito de função e suas características próprias, uma vez que para as relações funcionais o estudante deve indicar o domínio e escolher o contradomínio de cada uma delas.

Tarefa 10: Construindo gráficos I

10.1 Reveja as respostas dadas na Tarefa 9 que se referem à função da Tarefa 1, na qual se associa a cada quantidade de salgados comprados na cantina da Clarice o valor correspondente a pagar. Agora responda:

a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Qual é o domínio e qual é o contradomínio propostos por você na Tarefa 9?

c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 1. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da função que fornece o valor a pagar, dado o número de salgados comprados. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido.

10.2 Reveja as respostas dadas na Tarefa 9 referentes à função da Tarefa 4, que associa a cada quantidade de ovos o número de caixas necessário para a embalagem. Agora responda:

a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Qual foi o domínio e qual foi o contradomínio propostos por você na Tarefa 9?

c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 4. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da função que fornece o número de caixas necessárias, dado o número de ovos. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido.

O diferencial dessa tarefa está nas construções gráficas das relações funcionais, sendo que os gráficos cartesianos a serem construídos nos itens 10.1 e 10.2 são formados por pontos separados, pois o domínio dessas duas funções está contido no conjunto dos números naturais.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

A forma com que varia o valor recebido em função da quantidade de salgados vendidos é diferente da forma como varia a quantidade de caixas em função da quantidade de ovos. Isso também é um ponto que, segundo a literatura, contribui para uma compreensão mais abrangente do conceito de função: diversidade de exemplos que mostram a amplitude do espectro de formas quantitativas de dependência existentes entre duas variáveis, mantidas as características que definem as relações funcionais. Essa amplitude é contemplada também nos gráficos cartesianos construídos e/ou analisados nas tarefas 12 a 17, adiante.

Tarefa 11: Construindo gráficos II

11.1 Reveja as respostas à tarefa 9 referentes à função da Tarefa 7, em que se associa a cada período de tempo que o carro passou no estacionamento o valor a pagar na saída. Agora responda:

a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Qual foi o domínio e qual foi o contradomínio propostos por você na Tarefa 9?

c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 7. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da função que fornece o valor a pagar, dado o tempo de permanência do carro no estacionamento. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido.

11.2 Reveja as respostas à tarefa 9 referentes à função da tarefa 2 (cubos e faces visíveis), em que se associa o número de faces visíveis à quantidade de cubos empilhados. Agora responda:

a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Qual foi o domínio e qual foi o contradomínio propostos por você na Tarefa 9?

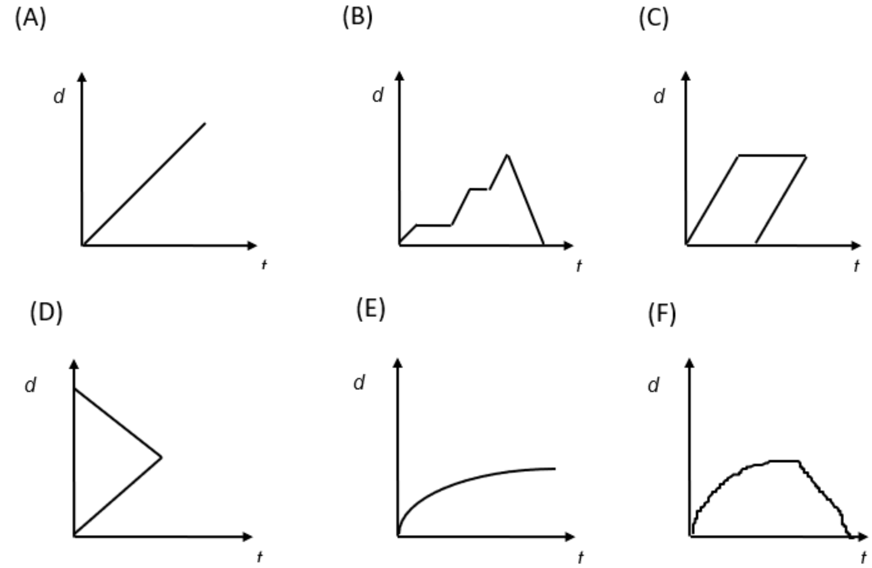
c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 2. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da referida função, que fornece o número de faces visíveis, dada a quantidade de cubos enfileirados. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

A construção gráfica no item 11.2 é semelhante ao gráfico feito no item 10.1, mas se diferencia dele pelas respectivas leis das funções. Já o gráfico pedido no item 11.1 se diferencia de todas as demais construções de gráficos cartesianos anteriores, uma vez que o domínio dessa função é um intervalo dos reais, portanto contínuo. Por isso, a representação gráfica dessa função é feita por segmentos de retas (no caso, devido à lei da função, paralelos ao eixo das abscissas).

Tarefa 12: Comparando gráficos

Em todos os gráficos *d* é a distância relativa a um ponto de partida e *t* o tempo. Para cada gráfico, informe se é ou não uma função, justificando sua escolha.



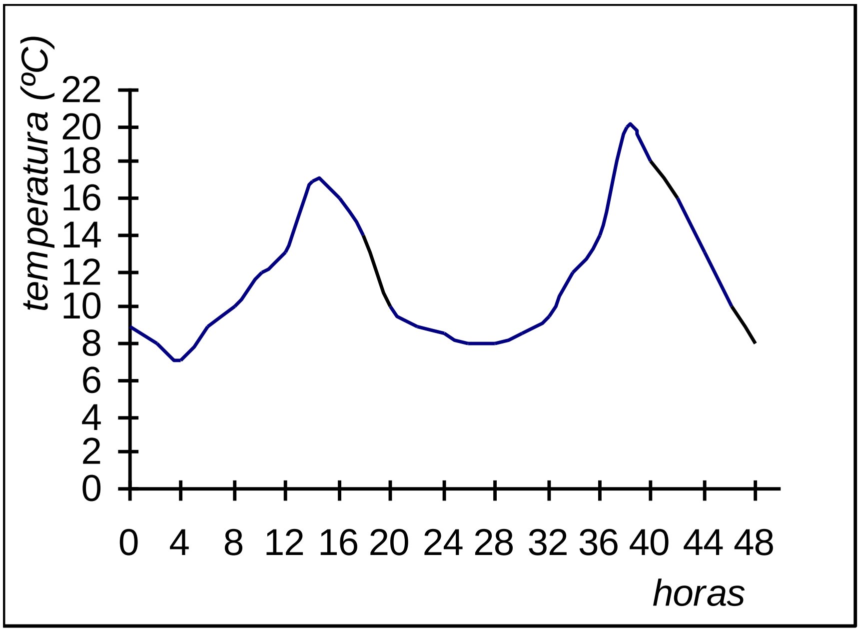
Fonte: adaptada de Teixeira et al. (1997, p. 70).

Feitas as construções gráficas das relações funcionais, é proposta essa tarefa para que o estudante indique, com base nos assuntos já trabalhados, os gráficos que representam funções. Nota-se então que o gráfico cartesiano indica de modo claro se a relação representada é ou não uma função.

Essa tarefa pode remeter também às tarefas anteriores, relembrando as características que definem (ou não) como função, cada uma das relações estudadas nessas tarefas.

Tarefa 13: Temperatura ambiente

No gráfico abaixo, estão registradas as temperaturas ambiente durante um período de 48 horas de dois dias de Outono.



a) Identifique as variáveis dependente e independente da função representada no gráfico.

b) Identifique o domínio e o contradomínio.

c) A que horas se fez sentir a temperatura máxima em cada um dos dois dias? E a mínima?

d) Qual foi a temperatura máxima durante todo o período?

Fonte: adaptada de Teixeira et al. (1997, p. 67).

Essa tarefa, assim como as próximas, tem o objetivo de trabalhar a leitura, interpretação e análise de gráficos cartesianos de funções, reforçando a aprendizagem dos elementos já discutidos em tarefas anteriores. O diferencial dessa tarefa está na representação gráfica dessa função que possui taxa de variação constante apenas em um pequeno intervalo contido no domínio.

Ponte, Branco e Matos (2009) ressaltam que, muitas vezes, são apresentados aos alunos problemas que se enquadram em proporcionalidade direta ou inversa, ou seja, os valores das grandezas variam, mas, geralmente, com um padrão fixo nessa variação. Por exemplo: se o preço unitário de um certo produto é R$ 2,00, quando uma pessoa comprar três desses produtos, irá pagar R$ 6,00. Outro exemplo comum costuma ser o seguinte: em certo plano de telefone, é cobrada uma taxa fixa para liberação do plano e a pessoa tem 60 minutos para utilizar durante o mês, com um valor de R$ 0,15 que será cobrado por minuto que ultrapassar os 60 cobertos pela taxa fixa.

Em ambos os exemplos as taxas de variação são constantes, embora num caso a função seja linear e, no outro, afim. Esses autores apontam a relevância de apresentarmos aos alunos situações em que grandezas variam a taxas não constantes, como, por exemplo, a medição, ao longo do tempo, do crescimento de uma planta. A ideia é evitar que os estudantes desenvolvam uma concepção equivocada, entendendo que em todos os processos de variação, as taxas sejam constantes. Esse aspecto foi considerado nessa tarefa 13, acima.

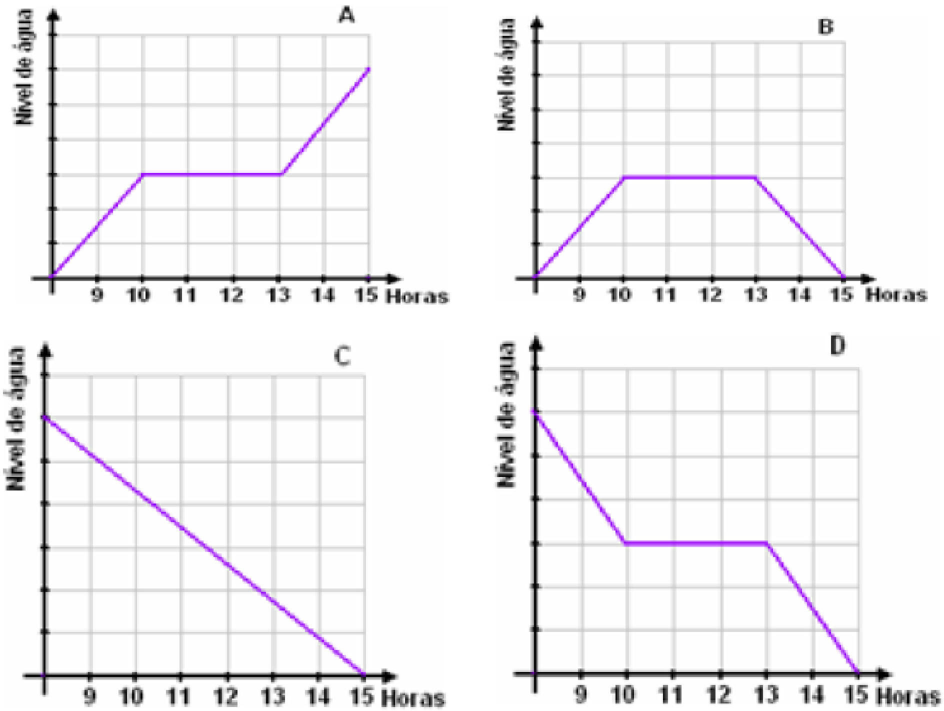
Entretanto, é importante observar que o problema de apresentar uma grande diversificação de taxas de variação, especificamente no processo de introdução do conceito de função, se coloca porque as funções com taxas de variação não constantes possuem expressão analítica (e, em consequência, representação gráfica cartesiana) mais complexa do que aquelas que normalmente podemos utilizar num estudo introdutório. Por isso, tentei diversificar esse aspecto nas tarefas, mas sem contar com a necessidade de fazer uso de conhecimentos matemáticos que só serão trabalhados mais adiante, como, por exemplo, a associação do gráfico de uma função quadrática com a parábola, entre outros.

Tarefa 14: Esvaziando o tanque do agricultor

Às 8 horas um agricultor começou a esvaziar um dos tanques da sua propriedade, cuja capacidade é de 600 litros de água. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque. Sabendo que a vazão de água na saída do tanque é de 150 litros por hora, pergunta-se:

a) Às 11 horas, quantos litros de água ainda estavam dentro do tanque?

b) Qual dos gráficos abaixo representa mais corretamente a situação descrita no enunciado? Explique sua resposta.

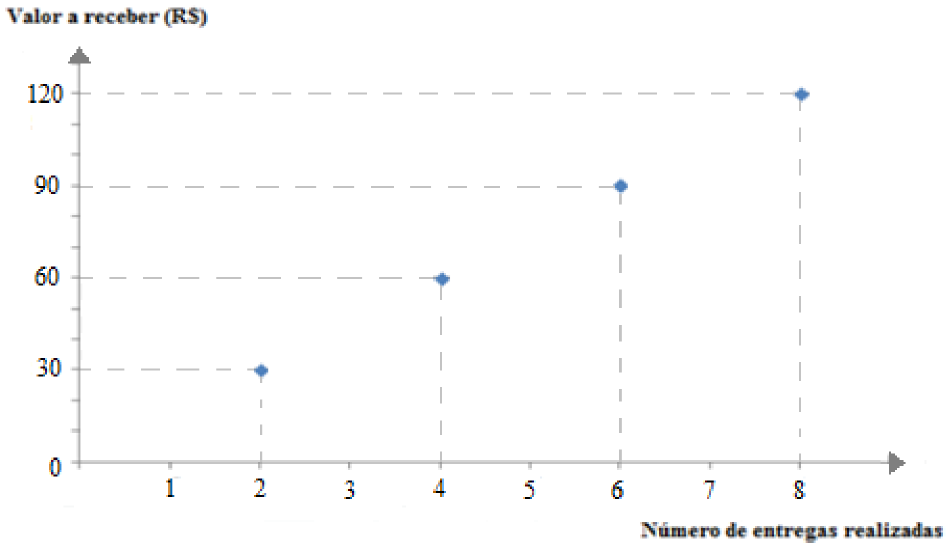


Fonte: adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 128).

Nessa tarefa, ao solicitar que o estudante explique as razões que o levaram a optar pelo gráfico indicado em sua resposta (assim como as razões que o fizeram descartar as demais opções), abre-se uma oportunidade para trabalhar a capacidade de argumentação dos alunos.

Tarefa 15: Entregas

Rogério trabalha em uma empresa que entrega mercadorias compradas pela internet. O gráfico abaixo representa a relação entre o valor que Rogério recebe e o número de entregas realizadas. Ele precisa pagar uma conta no valor de R$ 850,00, que vence hoje, e ele só tem R$ 550,00. Sabendo disso e com base no gráfico, responda:



a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Determine a lei de correspondência dessa função, supondo que o processo descrito no gráfico até 8 entregas permaneça o mesmo para números de entrega maiores.

c) Se Rogério fez 45 entregas, quanto ele recebeu? Ou seja, quanto vale f (45)?

d) Quantas entregas Rogério precisa fazer para conseguir o dinheiro exato para pagar a conta hoje?

Fonte: adaptada de Souza (2016, p. 95).

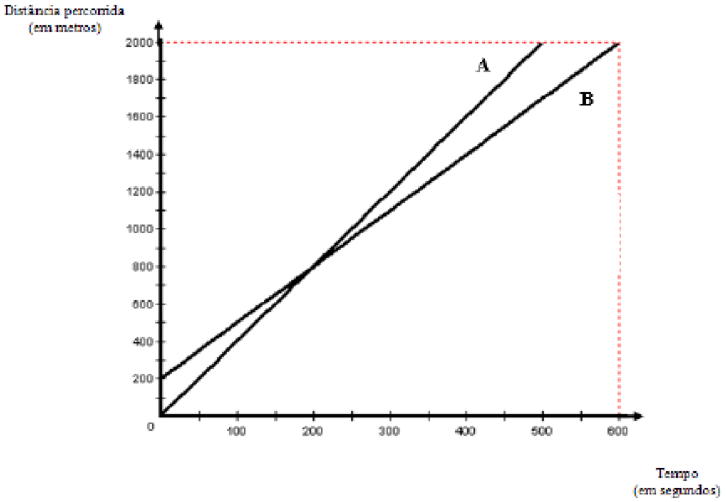
Nessa tarefa, além de trabalhar a leitura, interpretação e análise de gráficos cartesianos, reforçando a aprendizagem de elementos já discutidos em tarefas anteriores, reforça-se também a notação f (45), para representar o valor da função f no ponto 45.

Tarefa 16: João e Maria

João e Maria resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo de 2000 metros. Por ser mais rápida e para tornar a corrida mais competitiva, Maria disse a João que o deixaria partir alguns metros à sua frente. Suponha que:

- Maria percorre 4 metros por segundo;
- João percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Os gráficos abaixo mostram como se desenvolveu a corrida (são dois gráficos num mesmo sistema de coordenadas).



INFORMAÇÃO

O gráfico desta tarefa não permite que o estudante informe valores exatos para as questões colocadas, o que faz com que o aluno utilize outras estratégias para resolvê-la.

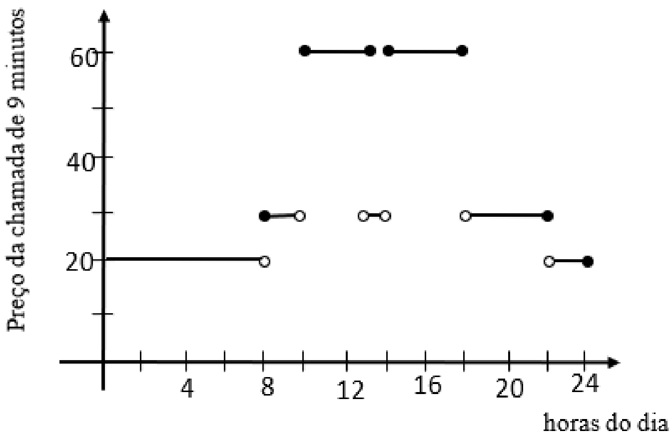
a) Identifique as variáveis (independente e dependente) que estão relacionadas em cada um dos gráficos.
b) Qual gráfico representa a distância percorrida por João em função do tempo?
c) Indique o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções representadas em cada gráfico.
d) Que distância Maria percorreu ao fim de 100 segundos?
e) Quanto tempo Maria demora para percorrer 1400 metros?
f) Quem venceu a corrida?

Fonte: adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 123).

Nessa tarefa, os estudantes devem indicar a imagem correspondente a um dado valor do domínio, bem como indicar o valor do domínio ao qual corresponde um dado valor no contradomínio. Além disso, o gráfico não indica explicitamente esses valores pedidos, o que pode fazer com que o aluno utilize outras estratégias para resolver essa questão, como por exemplo, encontrando as leis das funções.

Tarefa 17: Custo de chamada telefônica

Suponha que o custo de uma chamada telefônica varie com a distância para onde se deseja telefonar e com a hora do dia em que a ligação é feita. O gráfico abaixo fornece o preço (em reais) de uma chamada de 9 minutos de Belo Horizonte para Lisboa, em função da hora do dia em que a chamada é realizada. Pede-se:



Um aspecto interessante a ser observado é que, nos pontos de descontinuidade (onde ocorrem os "saltos"), o critério utilizado para fixar o custo parece beneficiar a empresa operadora.

a) O domínio e o conjunto imagem dessa função.

b) Seja f(x) o preço pago pela chamada de 9 minutos e seja x a hora do dia em que essa chamada foi realizada. Calcule:
b1) f (4)
b2) f (9)
b3) os valores de x tais que f (x) = 20 reais
b4) os valores de x tais que f (x) = 60 reais
b5) f (23)
b6) f (0)

Fonte: adaptada de Teixeira et al. (1997, p. 74).

Aqui temos um gráfico análogo ao da tarefa 11.1, com a diferença de que lá, os "patamares" sempre sobem à medida que a abcissa aumenta, enquanto aqui, eles sobem e descem, dependendo da hora do dia. Por exemplo, uma chamada que começa às 10 horas custa R$ 60,00, mas uma que tem início às 18 horas custa também R$ 60,00, quando deveria custar R$ 30,00, se fosse seguido um critério homogêneo de definição do custo nos valores extremos dos intervalos em que esse custo é constante.

Considerações Finais

Ao longo dos últimos dois anos, me dediquei de forma intensa a compreender melhor minha própria prática e isso envolveu perceber a distância existente entre a matemática acadêmica, que predominou em minha formação inicial, e a matemática da escola, que é aquela que o professor de Matemática realmente mobiliza cotidianamente em suas salas de aula.

Ball, Thames e Phelps (2008) entendem que os professores devem conhecer o conteúdo que vão ensinar, denominado Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)[4], mas esse conhecimento, por si só, não é suficiente para o ensino. Para esses autores, basta observar uma sala de aula por poucos minutos para perceber que a matemática utilizada pelos professores na Educação Básica não é a mesma matemática ensinada nas aulas dos cursos universitários de formação inicial. Além disso, argumentam que é pouco provável que a matemática avançada ou acadêmica seja adequada para responder às especificidades vivenciadas no ensino escolar. Esses pesquisadores concluem que o mais importante é conhecer e ser capaz de usar a matemática que é relevante para o trabalho do professor em sala de aula e, segundo eles, é recomendável focalizar o tipo de matemática presente no trabalho dos professores em sua prática docente.

Esses autores realizaram pesquisas com o objetivo de entender o que era relevante para o trabalho profissional do professor de Matemática da escola, tomando por base a prática dos professores. Eles buscaram identificar o conhecimento matemático que é exigido para o trabalho que os professores executam em seu dia a dia. Nessa busca, eles definiram o Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT) como o conhecimento matemático advindo da prática do ensino. Essa noção é apresentada com mais detalhes em minha pesquisa de mestrado, citada anteriormente.

[4] Original: Common Content Knowledge (CCK).

Mas como construir esses conhecimentos profissionais próprios da docência? Braga (2013, p. 42) considera que a investigação sobre a própria prática é "um processo fundamental de conhecimento sobre essa mesma prática e tem um grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que se envolvem com esse tipo de pesquisa".

Em minha pesquisa de Mestrado, investiguei minha própria prática de estudos (da literatura especializada e de livros didáticos que abordam o ensino de funções) e construção do conjunto de tarefas descrito nesse livro. Certamente essa prática está permeada pelas interlocuções estabelecidas no desenvolvimento da pesquisa com a literatura consultada, a orientadora, o coorientador, os colegas de trabalho, os docentes e discentes do Programa de Pós-graduação, entre outros.

Essa troca de experiências, principalmente com meus orientadores durante todo o estudo, foi essencial, uma vez que apenas estudando materiais e outras fontes, possivelmente eu não teria desenvolvido sozinha, muitas das percepções que me fizeram avançar nos meus conhecimentos matemáticos para o ensino de funções, bem como no aprimoramento do conjunto de tarefas, proposto neste material, que tem a finalidade de auxiliar o trabalho com a noção de função na escola. Ressalto que esse conjunto de tarefas pode ser aplicado em todos os níveis de ensino, a depender das adequações a serem feitas pelo professor.

Contudo, espero que os professores-leitores deste livro o aproveitem e se inspirem para promover, cada vez mais, a aprendizagem de seus estudantes.

Referências

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 3. ed. Renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 59, p. 389-407, 2008.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2010.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ec. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRAGA, Nádia Helena. **Pesquisando a própria prática: narrativa de uma professora de matemática**. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, 2013, 181 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2010.

_______. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, v. 4, 2012. (Projeto Teláris).

_______. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2016.

DOMÊNICO, Luiz Carlos de; LAGO, Samuel Ramos; ENS, Waldemar. **Matemática moderna**. 8ª série. Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1986.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. Disponível em: https://onedrive.live.com/?authkey=%21AlFOs08clKFA83A&cid=6CB61445C90BE09D&id=6CB61445C90BE09D%21165&parId=root&o=OneUp.

FLORES, Maria Assunção. **Algumas reflexões em torno da formação inicial de professores**. Educação, Porto Alegre, v. 33, n. 3, set./dez. 2010. p. 182-188.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciências e aplicações**. São Paulo: Saraiva, v. 1, 9. ed. 2016.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, v. 4, 2010.

MARQUES, Ana Paula. **O ENSINO DE FUNÇÕES NO 9º ANO: construindo significados para Função a partir de generalizações**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação. Belo Horizonte, 2019. 210 p.

OLIVEIRA, OLIVEIRA, Thaís de. **Aprendizagem e constituição profissional de uma professora de matemática: um estudo de si**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin. Campinas, São Paulo, 2015.

PAIVA, Manuel. **Matemática.** 3ª ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2015.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, *2003*. 146 p.

PONTE, João Pedro da. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, 15, 3-9, 1990.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/7105.

ROSA, Marlusa Benedetti da. **A construção do conceito de função em atividades integradas entre a Matemática e a Física**. Dissertação (Mestrado em Ciências e atemática). Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2005, 291 p.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar: matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, v. 1, 2013.

SOUZA, Rebeca Pereira de. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2016.

TEIXEIRA, Paula; PRECATADO, Adelina; ALBUQUERQUE, Carlos; ANTUNES, Conceição; NÁPOLES, Suzana. **FUNÇÕES**. MEC, 1997, 137 p. Disponível em: https://mat.absolutamente.net/joomla/images/recursos/documentos_curriculares/arquivo/brochura_sec_func10.pdf

VELOSO, Débora Solva. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática. 2012, 245 p.

ZUFFI, Edna Maura. **O tema “funções” e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados**. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo 1999, 307 p.

Apêndice A

Síntese das respostas dadas no questionário

Perguntas	Respostas
1) Descreva como costumam ser as aulas de Matemática.	São bastante tranquilas e produtivas. Fácil e rápidas explicações. Boas nem sempre, mais construtivas e interativas. Costumam ser normais, algumas vezes interessantes. Costumam ser muito difícil. Bem chatas por ela sempre passar atividade mais pra copiar do que aulas práticas e também não entendo nada. Entediantes. Após a divisão da sala, estou conseguindo prestar atenção na aula, e aprendendo mais a matéria. Muito boa, a melhor de todas. Costumam ser legais e com bastante conteúdo. Não compreendo o que aprendo porque a professora não explica como tem que ser e ela manda outro aluno que entendeu explicar afinal ela é ou não professora. Após a matéria ser passada no quadro tem a explicação e depois as atividades para testar o nosso conhecimento e no outro dia faz a correção. É dado o conteúdo, explicado, realizadas atividades para que os alunos realizem com a supervisão da professora. Costumam ser dinâmicas e chatas (as vezes). A professora explica bem sua matéria, e além disso, em sua aula a sala fica mais quieta que em algumas outras. Bem explicativas, os detalhes costumam ser minuciosamente explicados até a compreensão de todos.

	Ótima, professora explica muito bem, e são sempre produtivas as aulas. Em caso de dúvida a professora vai na mesa explica tudo e sempre quer que a pessoa aprenda. A professora é sempre bem atenciosa. Na maioria são boas, as vezes copiamos muito, e conseguimos entender a matéria. A maioria das vezes passa muita matéria no quadro. Legais, por mais que eu não goste de Matemática, gostei das aulas desse ano. Muita conversa. A maioria atrapalha quem quer aprender. A professora ensina muito bem e com muita paciência até todos entender. Podiam ser mais explicativas e menos conteudistas. É bom, mas tem muitas explicações.
2) São sempre parecidas? Explique.	Não. As aulas sempre tem uma variedade. Mais ou menos porque ela sempre está passando mais coisas pra copiar. Mais ou menos, as vezes é muito tempo passando matérias. O método de ensino sim, pois são passadas no quadro e respondemos. Não. As aulas são alternadas com conteúdo no quadro e no livro sempre executado no caderno. As vezes dá atividade de folha, as vezes passa sua matéria e quando não faz isso, ela copia algumas atividades no quadro e nos manda fazer. Sim, é meio padrão, exceto a aula passada que entregou a folha quadriculada. Não. As atividades costumam ter dinâmicas diferentes. As vezes, ela sempre passa matéria, explicação e atividade. Não, cada assunto diferente a cada aula. Não. Pois são conteúdos diferentes sempre. Sempre tem uma matéria diferente. Sim, geralmente são aulas com texto e atividade. Só na parte que explica as mesmas coisas várias vezes.

	Cada dia algo novo. Não, porém acho que deveria ter umas aulas mais práticas, com materiais diferentes. Não é sim ela sempre explica a matéria novamente, porque sempre tem uns que não veio no dia ou que não entendeu direito, ai ela explica direitinho né! Não. São sempre diferentes uma das outras, sempre procura saber o que não aprendemos, para nos ensinar, é muito preocupada em saber se aprendemos a matéria passada. Sim. Nunca entendo. Não. Por que tem materiais e atividades interativas. Sim, com livro ou no quadro. Um pouco. Os conteúdos são fáceis. Parece ser de anos mais novos.
3) As aulas de Matemática sofreram alteração durante este ano?	Sim. Melhoraram durante o ano. As aulas deveriam fugir dos padrões. Antes passava muita matéria, agora é mais explicação. A quantidade de matéria passada no quadro diminui e a quantidade de atividades aumentou e também começou a usar o livro. Não. Ao meu ver se algo mudou teve tendência a melhorar, mas nada muito significativo. Não. Para mim o ensino continuou na mesma intensidade, só melhora. Sim, temos um conteúdo mais diversificado, e a explicação da professora é melhor. Sim, várias. Não. Não. Professora continua sendo a mesma, sempre prestativa e disposta a ensinar. Sim. Em questão de explicação. Não, só os materiais que estão evoluindo bem. Não, só ficou mais difícil. Sim. Começamos a utilizar o livro.

4) Na sua opinião, como deveria ser uma aula de Matemática para que a maioria dos alunos compreenda o assunto estudado?	Deveria usar mapeamento, ser mais rígida em questão das brincadeiras, colocar respeito sempre que sair do controle. Primeiramente que todos os alunos prestem atenção e que tivessem aulas práticas. Em forma de música. As aulas deveriam ser mais silenciosas, pois as explicações já são ótimas. A aula é boa e a maioria entende, mas o ambiente seria melhor para o nosso aprendizado se tivesse mais silêncio. Uma aula onde todos os alunos devam responder e explicar como chegou aquela conclusão. As melhores respostas ganham um prêmio, desde uma bala até uma paçoca, também fazer atividades extras valendo pontos extras e passar provas como revisão para provas que valem ponto. Diferente. As aulas podiam ser mais divertidas, ensinando macetes, ou até fazendo piadinhas para descontrair, podia ter músicas pra ajudar a fixar a matéria, e dinâmicas. Poderia passar mapas mentais, resumos... Deveriam ser mais dinâmicas, mas isso não depende apenas do professor, depende a maior parte dos alunos que ultimamente não tem interesse em aprender. Dinâmica e atenciosa. Só falta o interesse dos alunos. Ser explicada com clareza. Simples e direta. Com todo mundo colaborando para que todos prestem atenção. Falar coisa sobre o que vamos usar na vida, não de hipotenusa. Por um pouco de dificuldade. Ser aplicadas com dinâmica, descontraída. Comunicação mais interação. Menos matéria para copiar e mais exercícios. Explicando diferente Uma aula mais prática. Estudar o que cada um tem mais dificuldade. Com mais atividades

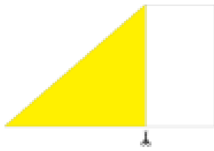
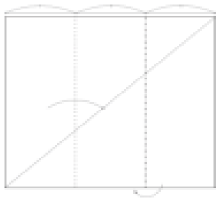
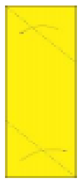
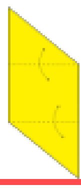
	Compreender cada pessoa e o modo como ela aprende. Com desenhos e exemplos fáceis de se compreender. Aulas em grupo fazem os alunos estudarem mais. Interativa. Como a aula da atividade do dragão.[5] Mais aulas com atividades em folhas em dupla ou grupo (pois assim iria unir a sala e aqueles que tem dificuldade). Obs: os grupos sendo divididos por você mesmo.
5) Como a professora explica a matéria e lida com as dúvidas dos alunos?	Ela dá uma boa explicação, lida mais ou menos bem com as dúvidas dos alunos. Ela precisa melhorar a explicação no geral mais em relação as dúvidas pessoais ela é muito boa. Ela lida de forma natural explicando, mais não entendo nada pelo jeito eu acho de explicar bem cansativo torna mais difícil. A professora explica muito bem a matéria e tira as dúvidas dos alunos até que todos cheguem a aprender. Sempre está disposta a ajudar e explicar aos alunos qualquer dúvida gerada. A professora e muito competente quando está explicando a matéria, apesar de as vezes o assunto ficar muito vago na explicação. Quanto a duvidas ela tira todas na medida do possível apesar do horário de aula. Exemplos no quadro, os explica e no fim pergunta se alguém entendeu, se forem poucos, explica em particular e se forem muitos, tenta explicar de uma outra forma para melhor compreensão. Faz uma explicação boa e tira as dúvidas sempre que pode. De forma detalhada, desde o básico se preciso; em relação às dúvidas, todas são costumeiramente tiradas. Explica bem e insiste quando um aluno não consegue aprender. De forma clara e muito bem entendível, vai nos lugares e retira todas as

[5] Essa atividade foi feita em grupos, cada grupo recebeu um “corpo” de dragão, 3 caudas e 3 cabeças. O objetivo do “jogo” foi que cada grupo elaborasse formas de vencer esse dragão “O dragão da ignorância”. Vence o dragão quem cortar suas 3 cabeças e suas três caldas. Porém se cortar uma cabeça, nasce outra; se cortar 2 cabeças não acontece nada; se cortar uma cauda, nascem duas caudas; se cortar duas caudas nasce uma cabeça. Interessados no molde do dragão, ou em mais informações sobre a dinâmica e/ou ter acesso ao molde do “dragão” podem me contatar no endereço eletrônico thaisrocha.br@gmail.com.

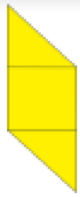
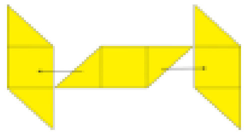
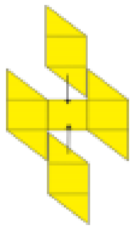
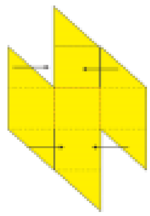
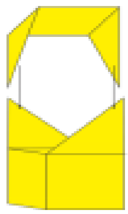
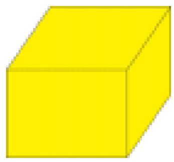
	dúvidas. Normal, explicando no quadro. Ela tinha que explicar pra todos os alunos. Com o máximo de clareza possível. Não sei, pois eu também não entendo muito bem, em algumas matérias ela explica muito bem e tira todas as minhas dúvidas. Na explicação em geral ela precisa melhorar, mas na explicação somente para mim é compreensível. Deveria explicar a matéria de forma mais ampla, colocando assuntos do dia a dia para que os alunos entendessem melhor. Explica a matéria de maneira muito clara e muitas das vezes explica mais de uma vez quando o aluno não entende. E lida com as dúvidas dos alunos com muita paciência e atende à todos igualmente. Explica bem fácil de entender e tira todas as dúvidas da melhor forma. Sempre voltando no começo de tudo para que possamos lembrar e compreender. Ela explica passo a passo sobre a matéria. Explica bem, sem palavras complicadas de entender, é atenciosa e dedicada. Preocupa com o nosso entendimento. Indo na mesa explicar e corrigir atividades no quadro. Ela passa de mesa a mesa olhando as operações para corrigi-las... e na explicação faz operações rápidas e simples. Explica quantas vezes for possível e se mesmo depois não entendeu ela clama a pessoa no particular para explica-lo melhor. Você é uma boa professora, só precisa melhorar um pouco como explica a matéria. A respeito das dúvidas elas são sanadas, bom pelo menos as minhas são.

Anexo A

Construção do hexaedro regular por meio do Origami

CONSTRUÇÃO DO HEXAEDRO	
Orientações	**Diagramas**
01- Partindo de uma folha retangular, dobre o vértice superior esquerdo rente ao lado inferior da folha retangular.	
02- Recorte o excesso obtendo, assim, um quadrado.	
03- Divida a folha em três partes iguais (como mostrado anteriormente). Dobre uma das partes para frente e outra para trás, obtendo um efeito sanfona.	
04- Dobre os vértices superior direito e inferior esquerdo sobre os respectivos lados opostos.	
05- Dobre as pontas sobre o quadrado central obtido.	

Fonte: PIMENTA (2017, p. 55)

06- O módulo finalizado possui duas pontas e, nas laterais do quadrado central, dois "bolsos" que servirão de encaixes para a montagem do sólido. Produza seis módulos.	
07- Pegue três módulos e encaixe como mostra a figura.	
08- Introduza outros dois no módulo central.	
09- Encaixe as pontas laterais de modo a iniciar a formação de um sólido.	
10- Agora, introduza a última peça como se estivesse colocando a tampa em uma caixa.	
11- Está pronto seu Hexaedro (poliedro regular com seis faces quadradas).	

Fonte: PIMENTA (2017, p. 56)

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto, em agosto de 2021
sobre papel 100% reciclato (miolo) 90g/m² e (capa) 300 g/m²