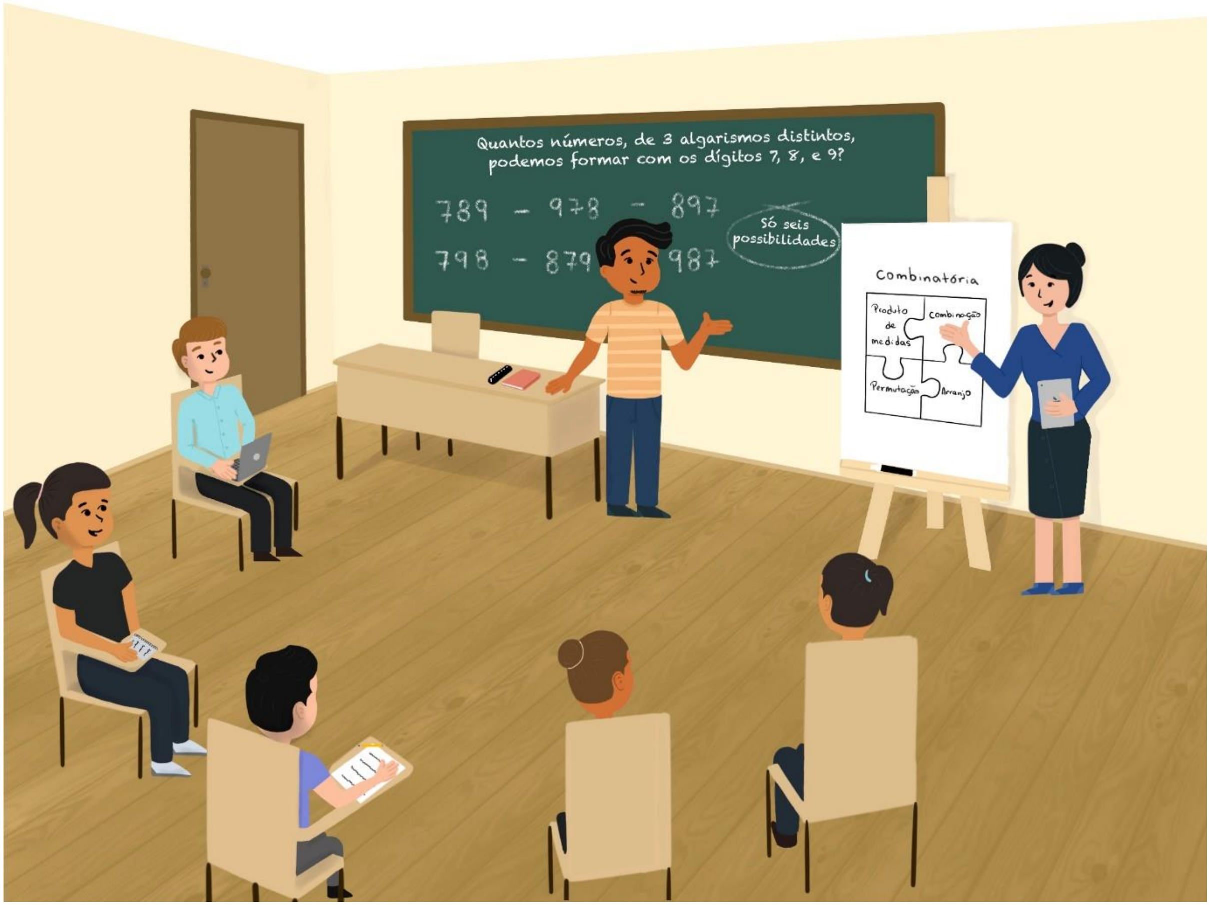
Estratégias de resolução de atividades envolvendo Raciocínio Combinatório enquanto dispositivo para a Formação de Professores de Matemática



Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Fabrícia Gomes Moreira

Douglas da Silva Tinti

Estratégias de resolução de atividades envolvendo Raciocínio Combinatório enquanto dispositivo para a Formação de Professores de Matemática

Estratégias de resolução de atividades envolvendo Raciocínio Combinatório enquanto dispositivo para a Formação de Professores de Matemática

EDITORA UFOP

Ouro Preto | 2021

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Educação Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitora da UFOP | Profa. Dra. Cláudia Aparecida Marliére de Lima
Vice-Reitor | Prof. Dr. Hermínio Arias Nalini Júnior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS
Diretor | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva
Vice-Drietor | Prof. Dr. Rodrigo Fernando Bianchi

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Profa. Dra. Renata Guerra de Sá Cota
Pró-Reitoria-Adjunta | Prof. Dr. Thiago Cazati

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Coordenação | Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti
Vice - Coordenação | Prof. Dr. Milton Rosa

MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira
Prof. Dr. André Augusto Deodato
Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes
Prof. Dr. Daniel Clark Orey
Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti
Prof. Dr. Eder Marinho Martins
Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Profa. Dra. Inajara de Salles Viana Neves
Prof. Dr. José Fernandes da Silva
Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Profa. Dra. Marli Regina dos Santos
Prof. Dr. Milton Rosa

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M838e Moreira, Fabricia Gomes .
Estratégias de resolução de atividades envolvendo raciocínio combinatório enquanto dispositivo para a formação de professores de matemática . [manuscrito] / Fabricia Gomes Moreira. - 2021.
69 f.

Orientador: Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti.
Produção Científica (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Análise combinatória. 2. Estratégias de aprendizagem. 3. Ensino fundamental . 4. Professores - Formação. I. Tinti, Douglas da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51:378

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

“O sucesso nasce do querer,
da determinação e persistência
em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo,
quem busca e vence obstáculos,
no mínimo, fará coisas admiráveis”

José de Alencar

Expediente Técnico

Organização | Fabrícia Gomes Moreira | Douglas da Silva Tinti

Pesquisa e Redação | Fabrícia Gomes Moreira

Revisão | Fabrícia Gomes Moreira | Douglas da Silva Tinti

Projeto Gráfico | Editora UFOP

Capa | Hellen Cristina Coelho da Silva

Fotos | Fabrícia Gomes Moreira

Ilustração | Fabrícia Gomes Moreira

Índice

Iniciando a Conversa...

Caro(a) Professor(a),

Sou professora de Matemática da Educação Básica desde 2010, iniciei a minha carreira docente ministrando aulas de Matemática em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. Desde então, atuei em todas as turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, atuei como formadora na área de Matemática do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) no período de 2014 a 2017. Atualmente, trabalho no Ensino Fundamental e Médio nas redes pública estadual e municipal do estado de Minas Gerais.

O presente trabalho é um recorte de uma dissertação de Mestrado do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, intitulada *"Análise de estratégias de resolução, mobilizadas por alunos do 9º ano, frente a atividades envolvendo raciocínio combinatório"*, realizada entre os anos de 2019 à 2021, sob a orientação do Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti.

Este Produto Educacional é voltado para você, professor (a) de Matemática, que trabalha ou que irá trabalhar com os quatro tipos de problemas da Combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação). O objetivo aqui é compartilhar estratégias de resolução registradas por alunos do 9º aluno do Ensino Fundamental, tendo como base estudos e discussões teóricas e metodológicas acerca da temática. Além de explicar os tipos de problemas combinatórios, você, professor(a), terá acesso às estratégias de resolução de alunos, no qual você, professor(a) terá a oportunidade de identificá-las e analisá-las para propor situações/problema relativas ao Campo das Estruturas Multiplicativas, em especial a combinatória dependendo do nível de ensino que os alunos estejam cursando.

Nesse sentido, entendendo as provocações que é a sala de aula e as dificuldades em produzir um material didático que seja atrativo e ao mesmo tempo capaz de proporcionar momentos de aprendizagem é um desafio para nós professores desenvolvermos materiais no intuito de colaborar com o trabalho dos colegas e de mós mesmos. Assim, durante a realização da pesquisa, a investigação culminou na aplicação de uma sequência de atividades envolvendo raciocínio combinatório e que pode servir de base para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Agradeço a todos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho. Desejando que esse Produto Educacional desperte em vocês professoras e professores de Matemática o desenvolvimento de ações no sentido promover praticas inovadoras em sala de aula, assim como auxiliá-los na elaboração de aplicação de atividades que contemplam a combinatória em contextos escolares e extraescolares.

Um abraço,

Profª Fabrícia Gomes Moreira

Princípio Fundamental da Contagem e os tipos de problemas combinatórios

O estudo da Análise Combinatória começou no século XVI com o matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557), também conhecido por *Tartaglia* (que significa gago). A este, seguiram-se os franceses Pierre de Fermat (1601- 1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Refere-se a uma parte da Matemática que estuda os processos de contagem, no entanto, não se esgota no estudo das combinações, arranjos e permutações, e sim, um ramo da Matemática que analisa estruturas e relações Matemáticas.

Pode-se dizer que a Análise Combinatória surgiu da necessidade de se calcular o número de possibilidades que podem ocorrer em uma certa experiência, sem precisar descrever cada uma dessas possibilidades. Desse modo, é também o suporte da Teoria das Probabilidades, apoiando-se no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo (PM).

Segundo Morgado (1991, p. 2):

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com essa disciplina. Por exemplo, a primeira técnica Matemática aprendida por uma criança é contar, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. Dessa forma, as operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) por meio de sua utilização na Resolução de Problemas de contagem (MORGADO, 1991, p. 17).

Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou princípio multiplicativo

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo é um princípio de contagem muito importante no campo da Análise Combinatória e do cálculo de Probabilidades. Esse método consiste em calcular as possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de descrever todas as possibilidades. Pois facilita e reduz consideravelmente o número de fórmulas necessárias ao bom entendimento desse tema, nas classes do Ensino Médio. As primeiras noções de contagem discutidas nesse tema, podem ser abordadas inclusive nas classes Iniciais do Ensino Fundamental.

Com base em Santos *et al.* (2007, p. 39), definimos o Princípio Multiplicativo como:

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$. Em linguagem de conjuntos, se A é um conjunto

> com m elementos e B é um conjunto com n elementos, então o conjunto $A \times B$ (lê-se A cartesiano B) dos pares ordenados (a, b), tais que a pertence a A e b pertence a B, tem cardinalidade $m \cdot n$.

Sendo assim, o Princípio Fundamental da Contagem, pode ser considerada uma das estratégias mais importantes para a resolução de situações combinatórias e, também a base de fórmulas utilizadas no estudo da Análise Combinatória, pois evidencia o caráter multiplicativo dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Produtos cartesianos

Segundo Borba (2013) são duas relações básicas presentes em problemas envolvendo a combinatória: *a escolha de elementos* e a *ordenação dos elementos*. Então, “o que diferencia os problemas básicos de Combinatória – produtos cartesianos, arranjos, permutações e combinações – são as formas como são escolhidos e ordenados os seus elementos. Esse é um aspecto que precisa ficar claro aos alunos ao serem trabalhadas situações combinatórias em sala de aula” (BORBA, 2013, p. 3).

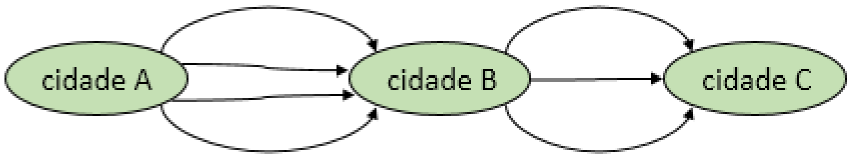
Em relação ao produto cartesiano, “os elementos são escolhidos a partir de dois ou mais conjuntos diferentes e a ordem na qual estes elementos são enumerados não constituem possibilidades distintas” (BORBA, 2013, p. 3). Já os problemas de arranjo, combinação e permutação “são determinados a partir da escolha de elementos de um conjunto único” (BORBA, 2013, p. 4), ou seja, o que os caracterizam é a circunstância do número de elementos a serem escolhidos e/ou do fato da ordenação dos elementos constituírem, ou não, possibilidades distintas.

A seguir exemplificamos uma situação característica de Produto Cartesiano, em que temos: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, resultando em $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$. O produto cartesiano de três conjuntos é definido de forma semelhante tomando ternos em lugares de pares. Em geral, se temos n conjuntos $A_1, A_2, \ . \ . \ . \ , A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ . \ . \ . \ \times A_n$ é definido como conjunto das *n*-uplas $(a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_n)$, onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ . \ . \ . \ , a_n \in A_n$.

Para entendermos melhor, observemos atentamente duas aplicações referente ao Princípio Multiplicativo a seguir.

a) Exemplo 1: *"De uma cidade A, saem quatro rodovias para a cidade B e, de B, partem três rodovias para a cidade C. De quantas formas é possível sair da cidade A e chegar à cidade C, passando pela cidade B".*

Figura 1: Esquema de resolução do exemplo 1



Fonte: Castrucci & Júnior (2018, p. 202).

O problema apresentado mobiliza os conhecimentos prévios que os alunos têm a respeito de possibilidades. Ele pode ser resolvido por meio de esquema como foi sugerido, desenhar as rodovias que partem da cidade A e chegam à B e, em seguida, desenhar as rodovias que partem de B e chegam à C.

Outro modo de resolver o problema é descrever os elementos dos conjuntos E_1 e E_2, em que E_1 corresponde ao conjunto das estradas que ligam as cidades A e B e E_2 ao conjunto das estradas que ligam B a C:

$E_1 = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ e $E_2 = \{d_1,\ d_2,\ d_3\}$. Usando o Princípio Multiplicativo, temos 12 possibilidades (4×3) de sair da cidade A e chegar à cidade C, passando pela cidade B.

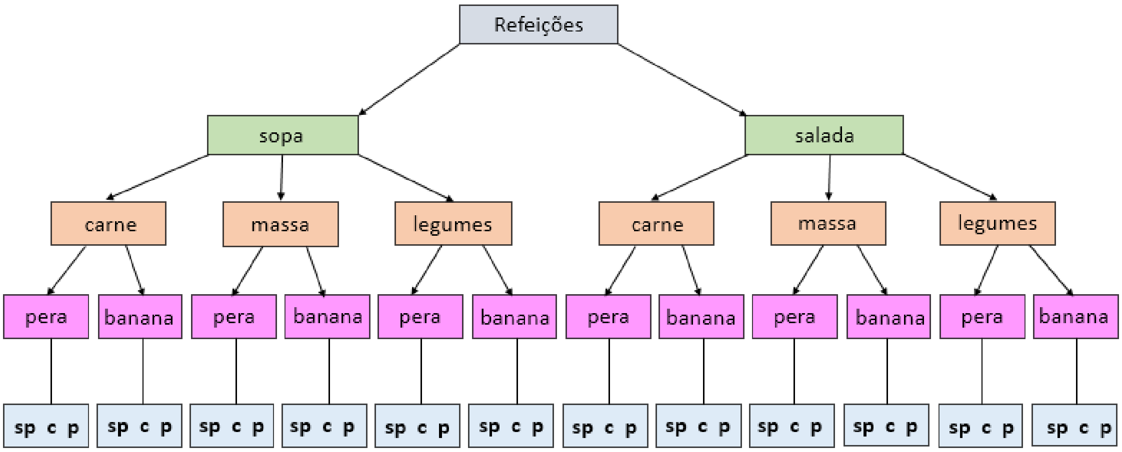
Uma outra situação que recai em problemas de contagem é a seguinte:

b) **Exemplo 2:** *“uma pessoa almoça em um restaurante que oferece refeições a um preço fixo com direito a uma entrada, um prato principal e uma fruta. O restaurante oferece 2 opções de entrada (sopa ou salada), 3 opções de prato principal (carne, massa ou legumes) e 2 de fruta (pera ou banana). Quantas refeições diferentes essa pessoa pode montar?”*

A pessoa deve fazer três tipos de escolha: E_1: sopa ou salada (*sp* ou *sl*); E_2: carne, massa ou legumes (*c*, *m* ou *l*); E_3: pera ou banana (*p* ou *b*).

Vamos enumerar os casos possíveis em uma árvore de possibilidades. Em problemas de contagem mais simples, *a árvore de possibilidades*, também chamada *diagrama de árvore* ou *diagrama sequencial*, ajuda na visualização e na contagem de todas as possibilidades.

Figura 2: Esquema de resolução do exemplo 2.



Fonte: Leonardo (2016, p. 201).

Usando o princípio multiplicativo, concluímos que essa pessoa pode montar $2\ x\ 3\ x\ 2 = 12$ maneiras de tomar as três decisões, ou seja, 12 refeições diferentes.

O diagrama de árvore, apresentado na situação de escolha de uma entrada, um prato principal e uma fruta é um bom recurso para resolução dos primeiros problemas apresentados aos alunos. Esse tipo de recurso fica inviável em situações que apresentam número maior de possibilidades.

No entanto, os problemas exigem procedimentos coerentes, criatividade e compreensão da situação proposta. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter clareza dos dados e da solução que se busca para o problema. A seguir buscamos estabelecer os vários modos de formar agrupamentos e deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado. Enfatizando que o Princípio Fundamental da Contagem é um procedimento de cálculo que pode ser utilizado na resolução dos tipos de problemas que envolvam o raciocínio combinatório e também na construção das fórmulas de Analise Combinatória.

Permutações simples

Uma *permutação* de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ \cdots 1 = n!$$

Definimos $P_0 = 0! = 1$

Para ilustrar, podemos tomar o seguinte exemplo: *Quantos são os anagramas[1] da palavra PRÁTICO?*

Observe que, para a primeira letra, temos 7 possiblidades (P, R, Á, T, I, C, O). Depois dessa escolha, há 6 possibilidades para a colocação da segunda letra, 5 para a terceira letra, 4 para a quarta, 3 para a quinta letra, 2 para a sexta letra e 1 para a sétima letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$, ou seja, $5\,040$ anagramas. Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra PRÁTICO.

De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam a posição. Daí o nome *permutação* (permutar significa

[1] Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, um anagrama da palavra AMOR é ROMA. Matematicamente, consideramos todas as ordens diferentes em que se podem colocar as letras de uma palavra, ainda que não sejam formadas novas palavras.

trocar os elementos que formam um todo com a finalidade de obter nova configuração).

Permutações com repetição

Na permutação com repetição, como o próprio nome indica, as repetições são permitidas e podemos estabelecer uma fórmula que relacione o número de elementos, n, e as vezes em que o mesmo elemento aparece.

Tomemos o seguinte exemplo: *Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?*

Esse é um caso que demanda um certo cuidado. A resposta seria $10! = 3\,628\,800$ anagramas, caso todas as letras fossem distintas. Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, é claro que uma permutação entre essas duas letras não geraria anagramas novos. Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples $(10!)$ por $(3!\,2!\,2!)$. Logo, o número correto de anagramas é $3\,628\,800 : 24 = 151\,200$ anagramas. Problemas como esse é o que denominamos de *Permutações com elementos repetidos*.

O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, . . ., n_k de um *k*-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Em que $n_1, \; n_2, \; n_3, \; . \; . \; ., n_k$ representam a quantidade de repetições de cada um dos elementos repetidos.

Arranjos simples

Vamos considerar a definição apresentada por Santos (2007, p. 57):

> *Arranjo Simples* de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação A_n^p.

Usando o princípio multiplicativo, encontramos uma expressão Matemática que caracterize A_n^p. Temos n elementos dos quais queremos tomar p. Este é um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p lugares.

$$\underset{L_1}{\_} \quad \underset{L_2}{\_} \quad \underset{L_3}{\_} \quad \cdots \quad \underset{L_p}{\_}$$

O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido L_1, restam $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de L_2, há $(n-2)$ maneiras de se preencher L_3 e, assim sucessivamente, vamos preenchendo as posições de forma que L_p terá $[n-(p-1)]$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo, podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2)\cdots[n-(p-1)]$ maneiras diferentes.

Portanto, $A_n^p = \frac{[n\,(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))][(n-\mathrm{p})(n-\mathrm{p}-1)\cdots 2\cdot 1]}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}$,

Podendo ser simplificada para

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Com vistas a ilustrar o exposto, tomemos por base o seguinte exemplo: *Considerando os dígitos* $1, 2, 3, 4, 5,$ *quantos números de* 2 *algarismos diferentes podem ser formados?*

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Podemos verificar que um arranjo simples é, de certa forma, similar a uma permutação simples, sendo que em cada grupamento formado usamos apenas p elementos, dos n distintos disponíveis. Também, arranjo simples é conhecido como arranjo sem repetição

Arranjos com repetição

Seja X um conjunto com n elementos, isto é, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chamamos arranjo com repetição dos n elementos, tomados p a p, toda p-upla ordenada (sequência de tamanho de p) formada com elementos de X não necessariamente distintos. Para a dedução da fórmula do número de arranjos com repetição, seja, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e indiquemos por $(AR)_{n,\,p}$ o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p.

Cada arranjo com repetição é uma sequência de n elementos, em que cada elemento pertence a X.

$$\underbrace{(-,-,-,\ .\ .\ .\ ,-)}_{p\ elementos}$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de arranjos $(AR)_{n,\ p}$ será:

$$(AR)_{n,\ p} = \underbrace{(n \cdot n \cdot\ .\ .\ .\ \cdot n)}_{p\ vezes} = n^p$$

Observemos que, se $p = 1$, $(AR)_{n,\ 1} = n$ e a fórmula acima continua válida $\forall\ p \in N^*$.

A seguir, apresentamos um exemplo: *Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e resposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?*

Assim, temos: Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) em que $x, y \in X = \{V, B, A\}$. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de pares é

$$(AR)_{3,\ 2} = 3^2 = 9.$$

Combinações simples

De acordo com Santos (2007, p. 62), podemos definir:

> *Combinação simples* de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Notação: $C_n^p = \binom{n}{p}$ (lê-se combinação de n p a p). Se $p > n$, p e n inteiros, define-se $C_n^p = 0$.

Pra ilustrar, vamos considerar um exemplo proposto por Morgado (1991, p. 31): "de quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?"

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe p dos n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 são

$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_1, a_2, a_4\}$	$\{a_1, a_2, a_5\}$	$\{a_1, a_3, a_4\}$	$\{a_1, a_3, a_5\}$
$\{a_1, a_4, a_5\}$	$\{a_2, a_3, a_4\}$	$\{a_2, a_3, a_5\}$	$\{a_2, a_4, a_5\}$	$\{a_3, a_4, a_5\}$

O número de combinações simples de classes p de n objetos é representado por C_n^p. Assim, $C_5^3 = 10$.

Analisemos esta resposta: a escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 5 modos; a do 2º, de 4 modos e a do 3º, de 3 modos. A resposta parece ser $5 \times 4 \times 3 = 60$. Entretanto, se pensarmos numa combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, etc... são idênticas e foram contadas e foram contadas como se fossem diferentes. Com efeito, se dissemos que há 5 modos de escolher o 1º elemento da combinação é porque estamos considerando as escolhas a_1 e a_2 como diferentes e, portanto, estamos contando $\{a_1, a_2, a_3\}$ como diferente de $\{a_2, a_1, a_3\}$. Em suma, na resposta 60 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo a resposta é $60/6 = 10$.

No caso geral temos

$$C_n^p = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}, \qquad 0 < p \leq n \qquad \text{e} \qquad C_n^p = 1.$$

Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por $(n-1)!$. Obtemos

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \qquad 0 \leq p \leq n.$$

Vamos considerar o seguinte exemplo: q*uantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?*

Dessa maneira, para formar uma salada basta escolher 4 das 10 frutas, o que pode ser feito de:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \text{ modos}$$

Combinações com repetição

Vamos pensar na seguinte situação: um menino está em um parque de diversões, onde há 4 tipos de brinquedos; chapéu mexicano, trem fantasma, montanha russa e roda gigante. O menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele pode comprar 2 bilhetes iguais para ir num mesmo brinquedo? Esta é uma situação que pode ser matematicamente representada por uma combinação completa. Note que o número de possibilidades possíveis aumenta consideravelmente.

Dados n elementos distintos, chamamos combinações completas, de ordem ou classe p dos n elementos, os agrupamentos sem repetição ou com repetição, formados com p dos elementos dados, de maneira que um agrupamento difere do outro pela natureza de seus elementos (MORGADO, 1991, p. 48).

Em geral, C_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, e CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados. Por exemplo, se temos um conjunto $\{a_1,\ a_2,\ a_3\ ,\ a_4\}$ com 4 elementos e queremos escolher 3 elementos. Neste caso, sabemos que $C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$ maneiras de escolher 3 objetos distintos dos 4 elementos dados. A escolha é a seguinte:

$$a_1, a_2, a_3 \quad a_1, a_2, a_4 \quad a_2, a_3, a_4 \quad \text{e} \quad a_1, a_3, a_4$$

Mas no caso de combinações completas, a escolha não é necessariamente por elementos distintos, ou seja, podemos escolher

$\{a_1, a_1, a_1\}$	$\{a_1, a_1, a_2\}$	$\{a_1, a_1, a_3\}$	$\{a_1, a_2, a_4\}$	$\{a_1, a_4, a_3\}$
$\{a_2, a_2, a_2\}$	$\{a_2, a_2, a_1\}$	$\{a_2, a_2, a_3\}$	$\{a_2, a_2, a_4\}$	$\{a_1, a_3, a_4\}$
$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_3, a_3, a_3\}$	$\{a_3, a_3, a_1\}$	$\{a_3, a_3, a_2\}$	$\{a_3, a_3, a_4\}$
$\{a_4, a_1, a_4\}$	$\{a_4, a_4, a_4\}$	$\{a_4, a_4, a_1\}$	$\{a_4, a_4, a_2\}$	$\{a_2, a_3, a_4\}$

Neste caso temos $C_4^3 = 20$.

A fórmula para o cálculo de combinações completas é dada por:

$$C_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,\ p} = \frac{(n\ -1+p)!}{p!\,(n-1)!}$$

Para ilustrar, podemos pensar na seguinte situação: *de quantos modos podemos comprar 4 salgadinhos em uma lanchonete que oferece 7 opções de escolha de salgadinhos?*

Assim, temos que escolher os quatro tipos de salgadinhos, entre as 7 opções disponíveis (distintos ou não). Isto será igual a:

$$C_7^4 = P_{10}^{6,\ 4} = \frac{10!}{6!\,4!} = 21 \text{ modos}$$

É importante salientar que apresentamos nesse tópico as fórmulas que podem ser utilizadas para resolver três principais tipos de problemas de Análise Combinatória (arranjo, combinação e permutação), no sentido de evidenciar essa discussão no âmbito do Ensino de Matemática. Contudo, ressaltamos que a intensão pedagógica não deve estar centrada em um movimento de defesa de que o aluno memorize todas as fórmulas de Análise Combinatória, mas numa perspectiva de possibilitar que ele compreenda cada conceito envolvido e saiba o “por que” da aplicação da fórmula para cada tipo de problema, pois sabemos que muitos problemas não serão resolvidos sem o uso de fórmulas.

Normalmente, os problemas de Análise Combinatória podem ser resolvidos através de algoritmos da adição, da multiplicação e da divisão. É importante ressaltar que o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é um procedimento de cálculo muito usado nas diversas situações/problema do Campo Multiplicativo, contemplando os problemas combinatórios, o que facilita muito nas resoluções e é utilizado em todas as fórmulas de Combinatória. As definições e fórmulas de arranjo, permutação e combinação podem ser apresentadas e deduzidas entre as questões propostas e até podem ser usadas para resolver outras questões mais rapidamente; no entanto, a memorização dessas fórmulas, além de em nenhum momento conseguir substituir o raciocínio, prejudica a aprendizagem quando, de tão destacadas, deixam de ser parte e são confundidas com o todo.

No entanto, podemos observar dois tipos de conjuntos de elementos interligados, aqueles em que a ordem dos elementos é importante; e aqueles em que a ordem não é importante. Os conjuntos de elementos interligados em que a ordem dos elementos é importante são chamados arranjos ou permutações. E, quando a ordem dos elementos não é importante temos, uma combinação. A seguir apresentamos um quadro com fórmulas onde é evidenciando tais características.

Fórmulas para resolver os tipos de problemas combinatório (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação)

Nesse sentido apresentamos o Quadro 1, no qual contempla cada um desses tipos de problemas combinatórios com seus respectivos exemplos e fórmulas.

Quadro 1: Resumo das fórmulas os tipos de problemas combinatórios.

<table>
<tr><th colspan="4">Produto Cartesiano</th><th>Fórmula</th></tr>
<tr><td colspan="4">Exemplo: Uma sorveteria dispõe de 16 sabores de sorvete que podem ser combinados com 3 caldas diferentes (morango, chocolate e caramelo). De quantas maneiras é possível combinar uma bola de sorvete e uma calda?

Resposta:
PC = 16 x 3 = 48 maneiras</td><td>$\boxed{PC = n \times p}$</td></tr>
<tr><th colspan="5">A ORDEM DOS ELEMENTOS É IMPORTANTE</th></tr>
<tr><th></th><th>Simples</th><th>Fórmula</th><th>Com repetição</th><th>Fórmula</th></tr>
<tr><td>Permutações</td><td>Exemplo: De quantas maneiras 10 moças e 10 rapazes podem formar pares para uma dança?

Resposta:
$P_{10} = 10!$</td><td>O número de permutações simples de n elementos.

$\boxed{P_n = n!}$</td><td>Exemplo: De quantas maneiras podemos distribuir 7 doces entre 3 crianças, sendo que a mais nova recebe 3 doces e cada uma das outras recebe 2?

Resposta:
$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210\ maneiras$</td><td>O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, . . ., n_k de um k-ésimo tipo.

$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$</td></tr>
</table>

Arranjos	**Exemplo:** Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras? **Resposta:** $A_{23}^{2} = \frac{23!}{21!} = 506\ anagramas$	O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por: $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$	**Exemplo:** Quantas são as siglas de três letras, escolhidas a partir das letras: A, B, C, D, E, F? **Resposta:** $(AR)_{6,\ 3} = 6^3 = 216$ siglas	O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p é dado por: $\boxed{(AR)_{n,\ p} = n^p}$
A ORDEM DOS ELEMENTOS NÃO É IMPORTANTE				
	Simples	**Fórmula**	**Com repetição**	**Fórmula**
Combinações	**Exemplo:** Quantos grupos de 3 pessoas podem ser selecionados de um conjunto de 8 pessoas? **Resposta:** $C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ grupos	O número de combinações de n elementos, tomados p a p, é dado por: $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$	**Exemplo:** De quantos modos podemos comprar 5 refrigerantes em um supermercado que vende 3 tipos de refrigerantes? **Resposta:** $C_5^3 = P_7^{5,\ 2} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$ modos	O número de combinações com repetição de n elementos, tomados p a p, é dado por: $\boxed{C_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,\ p} = \frac{(n-1+p)!}{p!\,(n-1)!}}$

Fonte: elaborado pelos autores (2020).

Borba (2013) defende o ensino de Análise Combinatória desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, num processo de aprofundamento contínuo criando possibilidades aos alunos para que no ensino médio estes tenham melhor compreensão das fórmulas da Análise Combinatória. Segundo a autora desde os primeiros anos de escolarização devem ser trabalhadas situações explícitas de Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação, sendo que atualmente o único tipo de problema combinatório apresentado explicitamente em propostas curriculares e em livros didáticos no início do Ensino Básico, é o Produto Cartesiano.

O ensino da Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental

Desde os primeiros anos de escolarização da criança em relação às primeiras aprendizagens matemáticas, constitui-se na contagem dos elementos de diferentes conjuntos no sentido de enumerá-los para a verificação de quantidades. Considerada com a arte de contar, a Combinatória integra um tipo de contagem, exigindo a superação do pensamento de enumeração de elementos isolados para a compreensão da contagem de elementos de distintos conjuntos, através do princípio multiplicativo.

A Combinatória demanda um trabalho que envolve o raciocínio combinatório fazendo conjecturas, manipulação de variáveis, enumeração de possibilidades, escolhas de estratégias adequadas para a resoluções das situações propostas.

E nessa perspectiva, Borba (2013) defende que, no ensino, conceitos estreitamente relacionados podem ser abordados conjuntamente, uma vez que situações que dão significado a estes conceitos estão intrinsicamente imbricadas, e se pode trabalhar progressivamente aspectos mais complexos dos conteúdos focados.

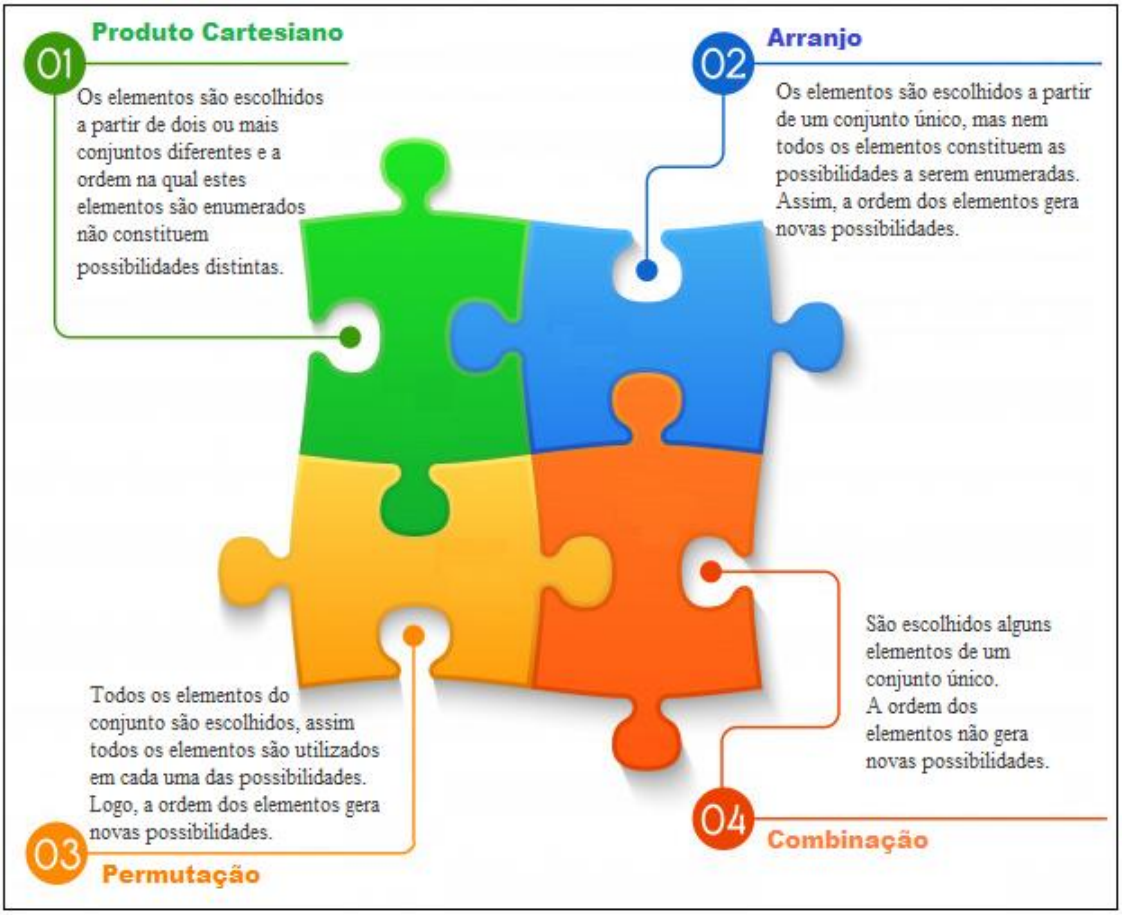
No entendimento de Borba (2013), sobre os tipos de problemas combinatórios, a autora reconhece:

> [...] que diferentes situações que dão significado à Combinatória – tais como os problemas de *produto cartesiano*, de *arranjo*, de *combinação* e de *permutação* – são intimamente associadas por relações Combinatórias básicas, mas também possuem relações próprias que devem ser tratadas por meio de representações simbólicas que permitem o adequado levantamento de possibilidades. (p. 2)

Assim, são vários os desafios e dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de alguns conteúdos da Matemática, enfrentados por parte dos alunos, quanto dos professores, como por exemplo, os conceitos da Combinatória.

O diagrama representado na Figura 3 ilustra uma das ideias de Borba (2010, 2013) referente à Combinatória, ela considera quatro tipos de problemas como característicos do pensamento combinatório: o Produto Cartesiano, a Permutação, o Arranjo e a Combinação.

Figura 3: Esquema referente aos tipos de problemas Combinatórios.



Fonte: elaborado pelos autores a partir das ideias de Borba (2013).

Com base em Borba (2013), apresentamos neste diagrama os problemas que envolvem raciocínio combinatório trabalhados no Ensino Fundamental e Médio: Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo e Combinação, os quais estão intimamente associados por relações Combinatórias básicas, mas também possuem relações próprias que devem ser tratadas por meio de representações simbólicas que permitem o adequado levantamento de possibilidades. A pesquisadora defende que é necessário estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório bem antes do Ensino Médio. Isto, porque demanda um longo tempo para se apropriar de tal conhecimento, dado que são várias as possibilidades de situações Combinatórias a serem tratadas, as quais apresentam vários níveis de complexidade.

Os materiais curriculares brasileiros para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998; BRASIL, 2017 e BRASIL, 2018) trazem orientações relativas ao ensino da Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental.

Nos 3º e 4º Ciclos, relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (PCN, 1998, p. 52). Enquanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) prescrevem para os estudantes do Ensino Fundamental a resolução e elaboração de problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (BNCC, 2017; CRMG, 2018).

Os documentos curriculares (BRASIL, 1997, 1998, 2006, 2017, 2018), orientam na direção de que os processos de ensino e de aprendizagem da

Combinatória podem ser iniciados a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

É importante ressaltar que a BNCC de Matemática do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017), apresenta as habilidades estruturadas segundo unidades de conhecimento da própria área (*Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística*). Sendo que a Combinatória é pouco abordada na unidade de conhecimento *Probabilidade e Estatística*. Em relação à Probabilidade, "os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos" (BNCC, 2017, p. 518).

Para os anos inicias e finais do Ensino Fundamental indica-se a necessidade de o professor propiciar diferentes situações de aprendizagem que possibilitem a exploração de diversos conceitos e procedimentos em relação aos problemas de contagem e o princípio multiplicativo da contagem da unidade temática *Números* e são aplicados a partir do desenvolvimento de um conjunto de habilidades, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, esquemas e tabelas, etc. Como exemplo, temos (BNCC, 2017, p. 295): "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"

Com base nos PCN, relacionado aos 3º e 4º Ciclos[2] do Ensino Fundamental, as orientações didáticas referente ao eixo números e operações, também apresenta situações associadas à ideia da Combinatória. Por

[2] 3º Ciclo (faz referência a 5ª e 6ª série); 4º Ciclo (faz referência a 7ª e 8ª série).

exemplo: Lancei dois dados: um vermelho e um azul. Quantos resultados diferentes são possíveis de encontrar?

Embora os problemas relacionados à Combinatória fazem parte do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, estes não são problemas multiplicativos comuns, são mais complexos e, de um modo geral, não se resolvem por meio do algoritmo da multiplicação direta. É notável que a Combinatória é um assunto formalizado no Ensino Médio, momento em que são tratados com uma excessiva e desnecessária quantidade de fórmulas, por isso é muito importante um trabalho no Ensino Fundamental que contemple os problemas combinatórios do tipo: Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação, por meio da aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

A seguir são apresentados três Momentos de formação para professores e professoras de matemática no sentir de contribuir para uma prática reflexiva dentro da sala de aula ao se propor um trabalho com os tipos de problemas Combinatórios.

O 1º Momento de formação tem por finalilidade propor discussões relacionadas ao Ensino de Combinatória, onde o(a) professor(a) de matemática terá a oportunidade de estudar os tipos de problemas de Combinatória de discutir as principais características relacionadas a cada tipo de situação. Enquanto, o 2º Momento está relacionado às discussões acerca do Ensino de Combinatória, apresentamos alguns registros de estratégias de resoluções mobilizadas por alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de cidade de Itabirito/MG, com o intuito de conduzir, os professores a um processo reflexivo com relação ao ensino de Combinatória na Educação Básica. E por fim, o 3º Momento, no qual se propõe uma integração com os dois momentos anteriores, em que o(a) professor(a) reflita sobre problemas que envolvem o raciocicínio Combinatório objetivando a classificação dos mesmos, destacando suas principais características e os invariantes conforme as discussões apresentadas no 1º Momento e na sequência com base no 2º Momento, farão um levantamento de possíveis estratégias que podem ser mobilizadas pelos alunos ao resolverem problemas Combinatórios.

Pensando nas características dos problemas de Combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação)

Com a finalilidade de propor discussões relacionadas ao Ensino de Combinatória, propomos o 1º Momento, em que consiste na oportunidade de proporcionar o(a) professor(a) de matemática estudar os tipos de problemas de Combinatória e discutir as principais características pertinentes a cada tipo de situação.

Segundo Borba (2013) são duas relações básicas presentes em problemas envolvendo a combinatória: a *escolha de elementos* e a *ordenação dos elementos*. Então, "o que diferencia os problemas básicos de Combinatória – produtos cartesianos, arranjos, permutações e combinações – são as formas como são escolhidos e ordenados os seus elementos. Esse é um aspecto que precisa ficar claro aos alunos ao serem trabalhadas situações combinatórias em sala de aula" (BORBA, 2013, p. 3).

No que diz respeito ao produto cartesiano, "os elementos são escolhidos a partir de dois ou mais conjuntos diferentes e a ordem na qual estes elementos são enumerados não constituem possibilidades distintas" (BORBA, 2013, p. 3). Já os problemas de arranjo, combinação e permutação "são determinados a partir da escolha de elementos de um conjunto único" (BORBA, 2013, p. 4), ou seja, o que os caracterizam é a circunstância do número de elementos a serem escolhidos e/ou do fato da ordenação dos elementos constituírem, ou não, possibilidades distintas.

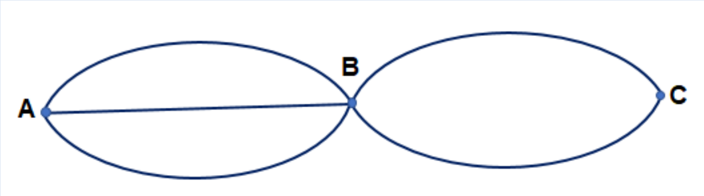
Ainda, evidenciamos um conceito muito importante para os professores e alunos, no qual precisa estar bem claro para compreensão de situações/problemas da Combinatória, que é o conceito de invariantes (relações e propriedades que se mantêm constantes). O conceito de invariante é compreendido tal como definido por Vergnaud (1986), ou seja:

> consiste em uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformação. Por exemplo, em geometria, a rotação e a simetria conservam certas propriedades das figuras, a homotetia não conserva as mesmas propriedades bem como a projeção. Ou seja, são propriedades que se relacionam com um determinado conceito, nas quais essas propriedades não sofrem alterações (VERGNAUD, 1986, p. 81).

Desse modo, os invariantes são propriedades fundamentais para que se compreendam as lógicas subjacentes em cada significado da Combinatória, isto significa, os tipos de problema combinatório. Independentemente da representação simbólica adotada, as propriedades permanecem inalteradas. Nesse sentido, Pessoa e Silva (2012) nos indica que os problemas podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de representação (representações simbólicas): desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras.

Vejamos alguns exemplos de problemas que envolvem o raciocínio combinatório e suas caraterísticas.

Combinação: Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?

b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

No problema acima temos que: para ir da cidade A até C passando por B, uma pessoa pode escolher dentre três caminhos (x, y, z) ligando A até B e dois outros caminhos (m, n) ligando B a C. Desse modo, são duas etapas de escolha neste caso: a escolha de A até B e a escolha de B até C. Estas escolhas são realizadas a partir de conjuntos diferentes (neste caso, o de cidades e o de caminhos), são combinações que formam um terceiro conjunto e a ordenação dos elementos não formam possibilidades distintas.

Invariantes:

- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades;
- Dado dois (ou mais) conjuntos diferentes, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto;
- A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.

Anotações:

Arranjo: Cinco cavalos disputam um páreo no Jockei Clube. Quantos são os possíveis trios para as três primeiras colocações nesta corrida?

O que caracteriza o problema de Arranjo em destaque é que de um grupo maior, assim denominamos (cinco cavalos: A, B, C, D, E), alguns subgrupos são organizados e a ordem de escolha destes elementos em arranjos gera possibilidades distintas, sendo importante na disposição das possibilidades, ou seja, a organização em “cavalo A, cavalo B, cavalo C” é diferente da “cavalo A, cavalo C, cavalo B”.

Invariantes:

- Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades;
- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $0 < p < n$, **p** e **n** naturais.

Anotações:

Permutação: Quantos números, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

____

____

____

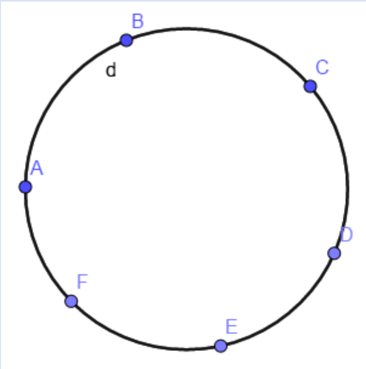
Para o problema acima, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações, com base no problema exposto, podemos usá-lo como exemplo: dado um conjunto de três elementos distintos (como 7-8-9), são usados todos os três elementos para formar as sequências ordenadas. Para formar todas as permutações com todos os algarismos, os três algarismos devem ser usados e quando a ordem dos elementos é modificada, novas possibilidades são geradas, por exemplo, 789 é diferente de 897, que é diferente de 978.

Invariantes:

- Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades;
- Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição).

Anotações:

Combinação: Seis pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.



a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)

____

____

____

____

b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

____

____

____

____

____

O que caracteriza o problema do tipo Combinação é a ordenação dos elementos que não determina possibilidades diferenciadas entre si. Deste modo, por exemplo, se temos uma circunferência como ilustrada no problema proposto, sendo seis pontos ao seu redor (A, B, C, D, E, F) e assim deseja escolher dois pontos quaisquer que estão nas extremidades da circunferência para formar uma corda. Então, temos um conjunto único com seis elementos (pontos) a partir do qual devemos escolher dois desses elementos. Se escolhermos o ponto A e o ponto B (corda $\overline{AB}$), esta possibilidade é idêntica à escolha dos pontos B e A (corda $\overline{BA}$).

Invariantes:

- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades;
- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $0 < p < n$, **p** e **n** naturais.

Julgamos importante que a percepção dessas características nos problemas de Combinatória, mesmo que não seja explícita e consciente, pelo aluno, auxilia na compreensão dos próprios enunciados e na resolução dos problemas mais facilmente.

Anotações:

Um olhar para as estratégias mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em problemas que envolvem o raciocínio Combinatório

Para o 2º Momento relacionado às discussões acerca do Ensino de Combinatória, propusemos apresentar alguns registros de estratégias de resoluções mobilizadas por alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de cidade de Itabirito/MG, com o intuito de conduzir, nós professores a um processo reflexivo com relação ao ensino de Combinatória na Educação Básica, não só no sentido de identicar erros e/ou acertos, mas levar em consideração as diversas formas de pensamento do aluno ao adotar tal estratégia para resolver problemas que envolvam o raciocínio combinatório.

Nesse sentido, os documentos curriculares sinalizam o que se espera que os estudantes mobilizem com relação às estratégias de resolução ao se deparem com situações problema envolvendo raciocínio combinatório. Desta forma listamos possiblidades de estratégias apontadas em Brasil (1998, 2017 e 2018):

- *Contagem direta das possibilidades: construção de diagramas; tabelas ou esquemas;*
- *Determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.*

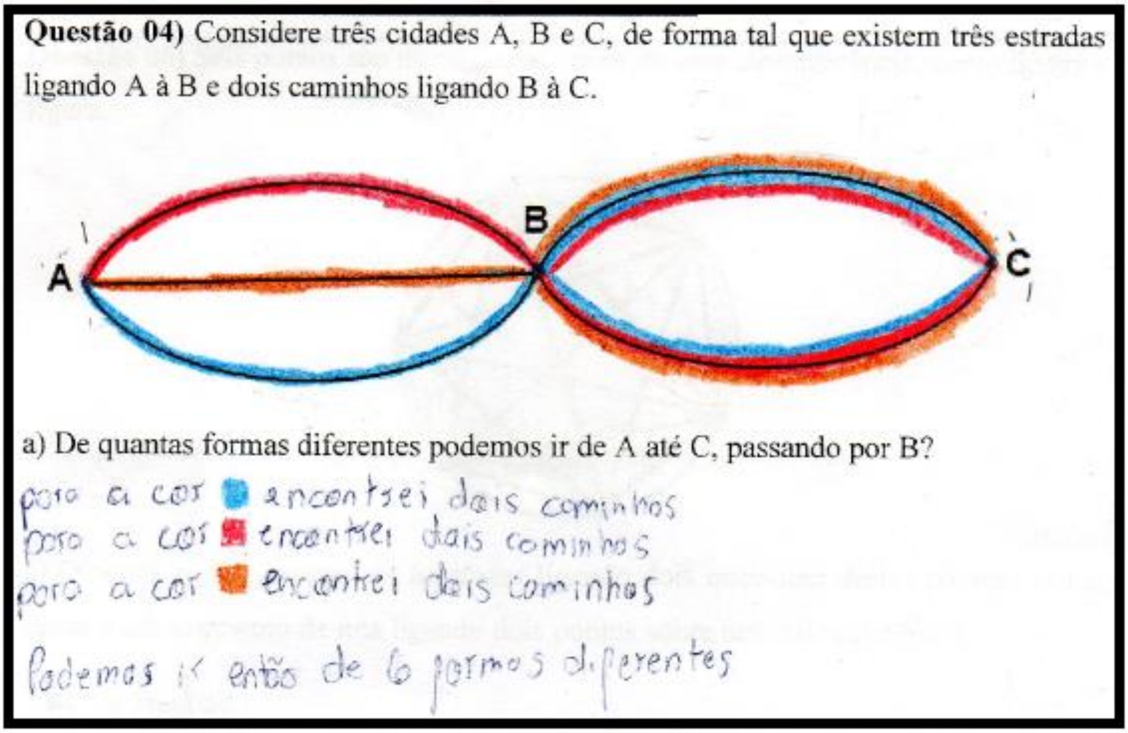
- *Resolução e elaboração dos problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.*

Observamos que as estratégias de resolução de problemas combinatórios mais indicadas recaem na construção de diagramas, tabelas, esquemas e formas de registro pessoais. Dessa forma, é muito importante que o estudante compreenda os conceitos envolvidos para utilização coerente dessas estratégias que os conduzem a solução esperada.

O estímulo ao uso de diferentes representações simbólicas (estratégias de resolução) ajudará o aluno na organização e representação do seu raciocínio em relação aos problemas combinatórios. Para possíveis mediações de ensino, poderemos utilizar as próprias estratégias de maneira espontânea desenvolvidas pelos alunos para, a partir delas, trabalhar o conteúdo da Combinatória. Diante do exposto passamos para a ilustração dos registros apresentados pelos alunos.

Na Figura 4, temos uma questão do tipo *Produto Cartesiano*, observamos que o Aluno A1 utilizou como estratégia a Elaboração de desenhos e esquemas, utilizando-se de lápis colorido para registrar seu raciocínio. Tal estratégia favoreceu a construção e o registro de uma argumentação pessoal para a solução do problema proposto.

Figura 4: Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item a do Problema de Produto Cartesiano



Questão 04) Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.

a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?

para a cor encontrei dois caminhos
para a cor encontrei dois caminhos
para a cor encontrei dois caminhos

Podemos ir então de 6 formas diferentes

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Com base no registro do aluno de 9º ano acima, responda:

- ❑ Olhando para a resolução do aluno, o que podemos inferir com relação a estratégia adotada pelo aluno?

- ❑ Quais outras estratégias o aluno poderia usar ao resolver o problema apresentado?

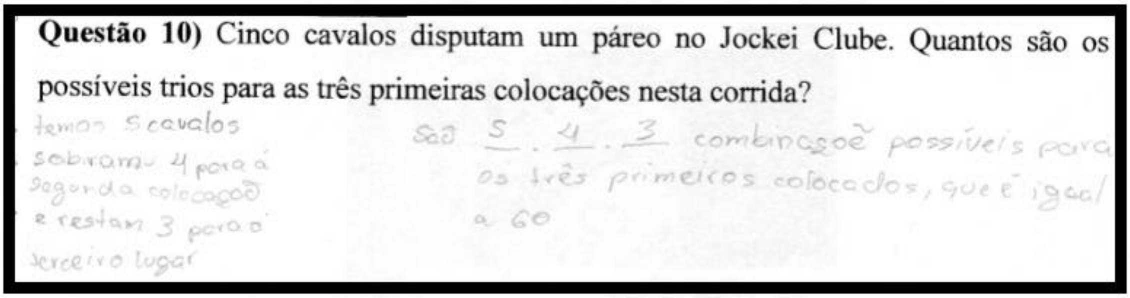
Espaço para anotações ...

Possibilidade de discussão ...

Com relação a resolução destacada na Figura 4 observamos que o aluno mobilizou representações simbólicas (estratégias) por meio de desenhos e esquemas, estimulando o uso do conceito-em-ação referente ao *Produto Cartesiano*. Haja vista que, ao colorir cada possibilidade de uma cor diferente, com o intuito de formalizar a sua resposta, podemos observar que essa estratégia implicou no entendimento do aluno em relação à situação proposta. O Registro destacado na Figura 4, demostra que o aluno teve a clareza do significado presente no problema combinatório acima, ele justifica sua resposta de forma coerente utilizando o Utilização do Princípio Fundamental da Contagem como estratégias de resolução, que o levou ao acerto.

Enquanto, na Figura 5 destacamos uma estratégia apresentada por um aluno do 9º ano para um problema do tipo *Arranjo*. Para este tipo de situação, é necessário nos atentarmos para algumas características presentes no referido problema de combinatória. “Os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas nem todos os elementos formam as possibilidades a serem enumeradas. Neste tipo de problema a ordem na qual os elementos são escolhidos constituem possibilidades distintas” (BORBA, 2013, p. 4).

Figura 5: Estratégia mobilizada pelo Aluno A14 na resolução do Problema de Arranjo


Questão 10) Cinco cavalos disputam um páreo no Jockei Clube. Quantos são os possíveis trios para as três primeiras colocações nesta corrida?

temos 5 cavalos
sobraram 4 para a segunda colocação e restam 3 para o terceiro lugar

São 5 . 4 . 3 combinações possíveis para os três primeiros colocados, que é igual a 60

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Com base no registro do aluno de 9º ano acima, responda:

- ❑ Olhando para a resolução do aluno, o que podemos inferir com relação a estratégia adotada pelo aluno?

- ❑ Quais outras estratégias o aluno poderia usar ao resolver o problema apresentado?

Espaço para anotações ...

Possibilidade de discussão ...

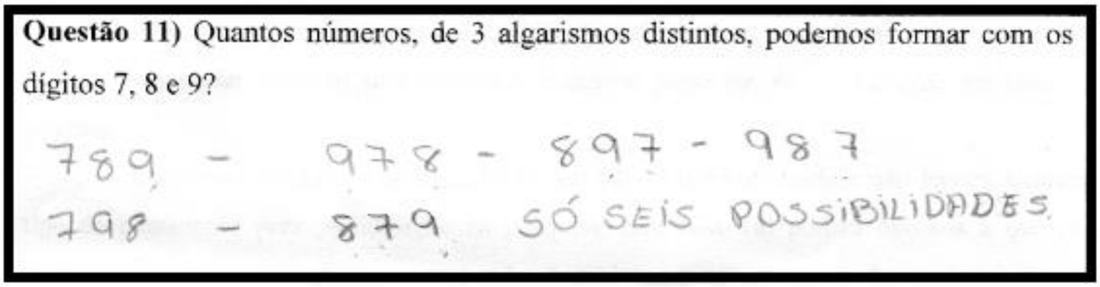
Em relação a estratégia de resolução mobilizada pelo Aluno A14 (Figura 5) no problema de Arranjo, os dados evidenciam o registro de um raciocínio coerente com a situação proposta em que o aluno opta por um esquema fazendo o uso do Princípio Fundamental da Contagem.

Dessa forma, um dos argumentos para a utilização desta estratégia, pode estar alinhada ao estudo de Moreira (2014) com professores que ensinam matemática, nos principais resultados com relação à análise qualitativa dos tipos de respostas e estratégias, o pesquisador afirma que: "as estratégias mais utilizadas foram o Princípio Fundamental da Contagem e as fórmulas, o que demonstrou uma preferência dos professores por métodos mais formais de resolução" (MOREIRA, 2014, p. 145).

Nesse sentido, podemos deduzir que as práticas/abordagens elegidas pelos professores no tocante às estratégias de resolução de problemas, podem estar influenciando na maneira como os alunos buscam solucionar as situações que lhes são apresentadas, pois há uma tendência de os alunos reproduzirem os mesmos procedimentos trabalhados em de sala de aula.

Dando prosseguimento às estrátegias mobilizadas pelos alunos do último ano do Ensino Fundadamental, exibimos um problema do tipo *Permutação* proposto aos alunos do 9º ano. Temos a situação em que se pede para formar números com três algarismos distintos (algarismos 7, 8 e 9) e, assim, o aluno pode listar sistematicamente as seis possibilidades. Provavelmente os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental não saberiam expressar matematicamente como se faz para obter todas as possíveis permutações de elementos de um dado conjunto.

Figura 6: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do Problema de Permutação



Questão 11) Quantos números, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

789 - 978 - 897 - 987
798 - 879 SÓ SEIS POSSIBILIDADES

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Com base no registro do aluno de 9º ano acima, responda:

- ❑ Olhando para a resolução do aluno, o que podemos inferir com relação a estratégia adotada pelo aluno?

- ❑ Quais outras estratégias o aluno poderia usar ao resolver o problema apresentado?

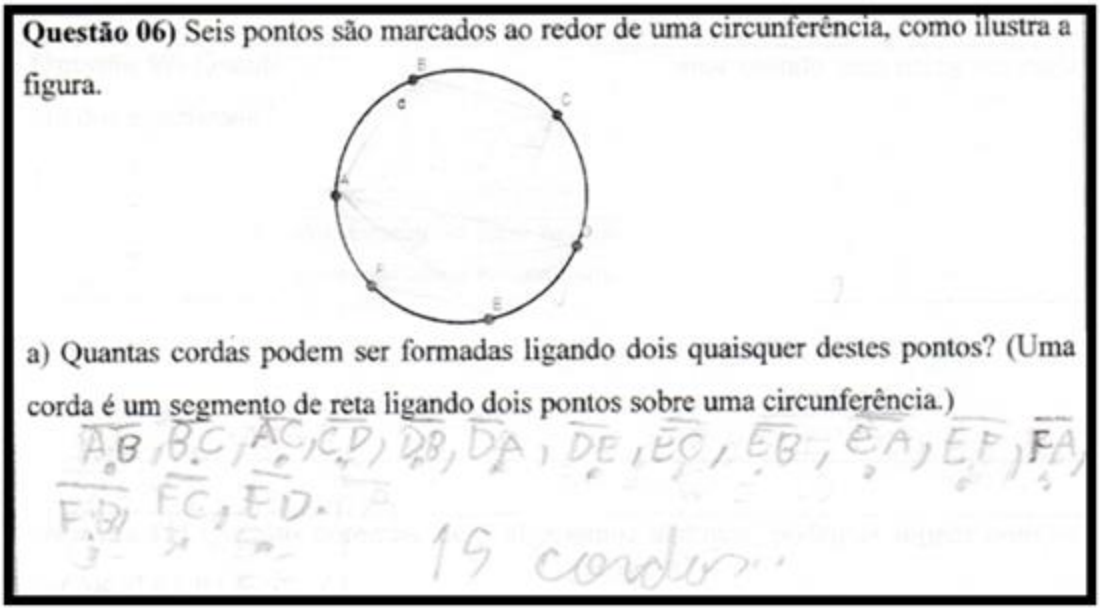
Espaço para anotações ...

Possibilidade de discussão ...

Para o problema de *Permutação* apresentado na Figura 6, podemos perceber a mobilização do conceito-em-ação de permutações por este aluno, mesmo sem ter conhecimento dos conceitos formalizados de *Permutações*, pois o ensino de Combinatória nos Anos Finais do Ensino Fundamental ainda não é trabalhado a formalização de tais conceitos, apenas as ideias relacionados ao tipo de raciocínio. Neste caso, o aluno A2, listou todas as possibilidades de três algarismos distintos com os algarismos 7, 8 e 9. Dessa forma, o que indica ter compreensão dos invariantes envolvidos no problema de Permutação.

Desta forma, para completar a nossa reflexão acerca de resoluções mobilizadas por alunos do 9º ano do ensino fundamental em problemas que envolvem o raciocínio combinatório, apresentamos um registro de estratégia adotada pelo Aluno 11, como mostra na Figura 7.

Figura 7: Estratégia mobilizada pelo Aluno A11 na resolução do item a do Problema de Combinação



Questão 06) Seis pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.

a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$, $\overline{DA}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, $\overline{EB}$, $\overline{EA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$.

15 cordas.

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Com base no registro do aluno de 9º ano acima, responda:

- ❑ Olhando para a resolução do aluno, o que podemos inferir com relação a estratégia adotada pelo aluno?
- ❑ Quais outras estratégias o aluno poderia usar ao resolver o problema apresentado?

Espaço para anotações ...

Possibilidade de discussão ...

Na situação apresentada, o aluno apresentou todos os casos possíveis. Assim sendo, o registro exibido na Figura 7, indica todas as possibilidades de combinação das cordas, utilizando a representação simbólica listagem (contagem direta das possibilidades) para responder o item a referente ao problema de Combinação, cuja solução está correta, chegando à conclusão de quinze possibilidades. Em problemas desse tipo em que apresentam um número de possibilidades considerado pequeno é bem razoável que o aluno utilize dessa estratégia, caso contrário, pode ficar inviável simbolizar uma quantidade de possibilidades quando se tem um resultado maior, pois dificulta no controle das possibilidades, neste caso, é necessário a formalização do procedimento realizado.

Na sequência apresentamos o Quadro 2 ancorado na concepção de (PESSOA, 2009), com a organização de diferentes tipos de estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem os problemas de Combinatória. Tal estudo foi, posteriormente, utilizado por Azevedo (2013) e Vega (2014) para classificar a variedade de respostas que os alunos utilizaram ao deparar-se com problemas combinatórios.

De acordo com Pessoa e Borba (2009) são várias as representações simbólicas, como: desenhos, listagens de possibilidades, árvores de possibilidades, diagramas, quadros, uso de fórmulas ou cálculos, entre outras.

Vale ressaltar que as estratégias destacadas no quadro a seguir, foram todas evidenciadas após a conclusão da nossa análise a partir dos dados coletados para a pesquisa desenvolvida.

Quadro 2: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolverem problemas de Combinatória propostos.

Estratégias	Características
1. Não explicitou estratégia	Quando o aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual estratégia foi utilizada para a resolução.
2. Adição / subtração	O aluno utilizou os valores apresentados no enunciado numa destas operações. A resposta é *incorreta sem relação*.
3. Divisão	Neste caso o aluno utilizou os valores apresentados no enunciado para realizar uma divisão. A resposta é *incorreta sem relação*.
4. Desenho	O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo, ou não, sistematização* no processo de resposta e *com* ou *sem o esgotamento de todas as possibilidades*.
5. Árvore de possibilidades	O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo, ou não, sistematização* no processo de resposta e *com* ou *sem o esgotamento de todas as possibilidades*. O aluno construiu uma árvore de possibilidades, podendo apresentar uma resposta *correta* ou *incorreta*, *com ou sem sistematização dos elementos, com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
6. Diagrma	O aluno construiu um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta *correta* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*, *com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
7. Listagem de possibilidades	O aluno listou as possibilidades de forma escrita, com os nomes ou com símbolos, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo*, ou *não*, o *estabelecimento de relação* e/ou o *esgotamento de todas as possibilidades*.
8. Adição inadequada de parcelas repetidas	Quando o aluno utilizou a adição de parcelas repetidas, mas esta é inadequada para o que o problema solicita. A resposta é *incorreta sem relação*.

9. Adição adequada de parcelas repetidas	Quando o aluno percebeu que pode utilizar uma adição de parcelas repetidas para resolver o problema, geralmente substituindo a multiplicação adequada. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.
10. Multiplicação inadequada	O aluno relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica. A resposta é *incorreta sem relação*.
11. Multiplicação adequada	O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.
12. Princípio Fundamental da Contagem (PFC)	Quando o aluno utilizou o PFC para resolver o problema. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.
13. Uso adequado de fórmulas	Quando o aluno utilizou uma fórmula adequada ao que o problema solicita. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.

Fonte: adaptado de Pessoa (2009).

Assim, optamos por adaptar o Quadro 2 com as representações simbólicas classificadas pela autora citada, e mencionar àquelas que foram encontradas durante o processo de análise dos dados da referida pesquisa. De todas as estratégias apresentadas pelos alunos participantes da pesquisa, destacamos treze tipos de representações simbólicas (estratégias), encontradas nos registros das resoluções utilizadas pelos alunos ao responderem os problemas propostos.

Por fim, almejamos com esse 2º Momento instigar os professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio a refletirem sobre as estratégias mobilizadas pelos alunos em sala de aula no que concerne ao ensino de Combinatoria e também dos conteúdos Matemáticos de uma maneira geral, valorizando sempre as estratégias por eles adotadas.

Proposta de atividades para a reflexão do(a) professor(a) de matemática acerca de estratégias mobilizadas por alunos do 9º ano

No tocante às discussões propostas no 1º Momento e no 2º Momento, convido você, professor(a) a refeletir sobre os problemas propostos que envolvem o raciocicínio Combinatório objetivando a classificação dos mesmos, destacando suas principais características e os invariantes conforme as discussões apresentadas no 1º Momento e na sequência com base no 2º Momento, farão um levantamento de possíveis estratégias que podem ser mobilizadas pelos alunos ao resolverem situações-problemas como, as propostas.

Problema proposto

Problema 01) Bernardo é o técnico do time masculino de handebol da escola de Mari. Ele tem de mandar confeccionar os uniformes do time para o campeonato que vai acontecer no fim do ano. Como as cores da escola são azul, amarela, vermelha e branca, a empresa que vai confeccionar os uniformes deu as seguintes opções de escolha para Bernardo: 3 cores de camisetas (vermelho, amarelo e branco) e 2 cores de shorts (branco com lista azul e todo azul). De quantas maneiras diferentes Bernardo pode montar um uniforme com uma camiseta e um shorts?

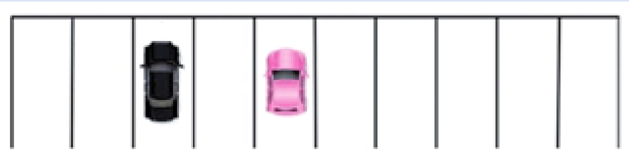
Características:

Invariantes:

Levantamento das possíveis estratégias de resolução que os alunos podem mobilizar ao resolver problema desse tipo:

Problema proposto

Problema 02) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



Características:

Invariantes:

____

____

____

____

Levantamento das possíveis estratégias de resolução que os alunos podem mobilizar ao resolver problema desse tipo:

____

____

____

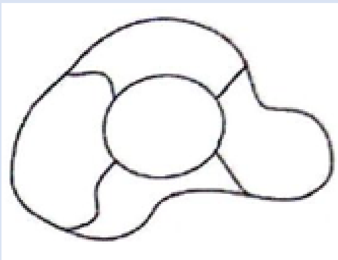
____

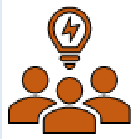
____

____

Problema proposto

Problema 03) A figura ao lado mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarelo, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?





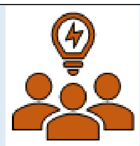
Características:

Invariantes:

Levantamento das possíveis estratégias de resolução que os alunos podem mobilizar ao resolver problema desse tipo:

Problema proposto

Problema 04) Luiz precisa trocar a lâmpada da sala, lavar a louça, estudar para a prova de matemática e arrumar seu quarto. De quantas maneiras diferentes ele pode executar essa sequência de atividades?



Características:

Invariantes:

Levantamento das possíveis estratégias de resolução que os alunos podem mobilizar ao resolver problema desse tipo:

Retorme ao Quadro 2 - "Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolverem problemas de Combinatória propostos" - indicado no 2º Momento.

Elabore um quadro semelhante apresentando um levantamento das possíveis estratégias que os alunos poderiam mobilizar diante de situações-problemas como as propostas.

Concluindo o início da nossa conversa

A nossa intenção aqui não é dar por encerrado estas discussões no que tange ao Ensino da Combinatória, mas a conclusão do início de uma conversa visando novas reflexões. Nesse sentido, convidamos você, professor(a) a buscar por práticas de ensino que visam a importância das diversas estratégias mobilizadas pelos alunos ao se depararem com situações-problemas envolvolvendo o raciocínio Combinatório.

A Combinatória é um conteúdo que tradicionalmente é abordado no Ensino Médio. No entanto, já se passaram mais de duas décadas, orientações curriculares (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998; BRASIL, 2017; BRASIL, 2018) e estudos de (PESSOA e BORBA, 2009); (BORBA, 2013) nessa direção indicam a necessidade e importância de se trabalhar esse conteúdo desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, através da resolução de diferentes tipos de problemas que envolvem o raciocínio Combinatório.

Para o referido Produto Educacional percorremos caminhos no sentido de contribuir, de alguma forma, para que nós professores nos atentemos para nossas dificuldades e limitações em relação aos nossos conhecimentos, procurando nos aperfeiçoar profissionalmente e compreender que a nossa formação é contínua. Assim esperamos, que as discussões teóricas e metodológicas aqui propostas acerca das estratégias de resoluções em problemas combinatórios auxiliem futuros professores de Matemática e também professores em formação inicial e continuada.

Nesse sentido esse Produto Educacional foi elaborado com o objetivo de fomentar os professores de Matemática a desenvolver habilidades em resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo e outros procedimentos de registros para resolver situações/problema, no que tange o raciocínio combinatório, permitindo assim aos alunos criarem suas próprias conjecturas, utilizando e comunicando suas estratégias de resolução de maneira mais clara e objetiva.

Referências

BORBA, R. **O Raciocínio Combinatório na Educação Básica**. In: Anais... do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia, 2010.

BORBA, R. **Vamos combinar, arranjar e permutar:** Aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: Anais... do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

JOSÉ RUY, G. J.; CASTRUCCI B. **A conquista da matemática:** 8º ano/ensino fundamental. 4ªEd. São Paulo: FTD, 2018.

LEONARDO, F. M. De. **Conexões com a Matemática:** 2º ano/ensino médio. 3ªEd. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, A. P. **Princípio fundamental da contagem: conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais**:** uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO-FILHO, J. A. de et al. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016, p.65-82.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n.1, p. 7-29, 2002.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORO, M. L. F. e SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, n.1, p. 99-124, 2006.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 267p. 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1. 2010.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

SANTOS, R. R. dos. **Formação continuada de professores sobre estruturas multiplicativas a partir de sequências didáticas.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 219p. 2006.

SILVA, A. C da. **A constituição dos saberes da docência:** uma análise do campo multiplicativo. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SILVA, A. C. V. & BORBA, R. E. S. R. Sondando o conhecimento de professoras sobre o desenvolvimento conceitual multiplicativo. **Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife: UFPE, 2008.

VERGNAUD, G. A. Multiplicative structures. Im R. Lesh 8 M. Landau (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press,1983, pp.127-174

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos conceituais.** In: BRUN, J. Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1996. p. 155-191.

VERGNAUD. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 10 (23): 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p.75 - 90, 1986.
VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.