**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**

**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - ICEB**
**Departamento de Educação Matemática – DEEMA**
**Mestrado Profissional em Educação Matemática**

**DISSERTAÇÃO**

# ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO MOBILIZADAS POR ALUNOS DO 9º ANO FRENTE A ATIVIDADES ENVOLVENDO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

**FABRÍCIA GOMES MOREIRA**

**Ouro Preto, Minas Gerais**
**Março, 2021**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**

**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - ICEB**
**Departamento de Educação Matemática – DEEMA**
**Mestrado Profissional em Educação Matemática**

# ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO MOBILIZADAS POR ALUNOS DO 9º ANO FRENTE A ATIVIDADES ENVOLVENDO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti.

**Ouro Preto, Minas Gerais**
**Março, 2021**

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M838a Moreira, Fabricia Gomes .
Análise de estratégias de resolução mobilizadas por alunos do 9º ano frente a atividades envolvendo raciocínio combinatório. [manuscrito] / Fabricia Gomes Moreira. - 2021.
123 f.

Orientador: Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Análise combinatória. 2. Estratégias de aprendizagem. 3. Ensino fundamental. I. Tinti, Douglas da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51:37

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

# FOLHA DE APROVAÇÃO

**Fabrícia Gomes Moreira**

**ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO MOBILIZADAS POR ALUNOS DO 9º ANO FRENTE A ATIVIDADES ENVOLVENDO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado Profissional) da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Aprovada em 31 de março de 2021

Membros da banca

Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba - Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Profa. Dra. Marli Regina dos Santos - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 09/06/2021

*"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo, fará coisas admiráveis"*

- José de Alencar

## AGRADECIMENTOS

A Deus e a Nossa Senhora, em primeiro lugar, por ter me concedido o dom da vida, saúde, sabedoria e paciência, na complexa tarefa de concretização de mais uma etapa da minha formação, que constitui não apenas por uma realização pessoal, mas também profissional.

Ao meu orientador Prof. Douglas Tinti, pela disponibilidade ao atendimento, paciência e comprometimento que tornaram possíveis a realização desta pesquisa.

Às professoras doutoras Rute Borba e Marli, pelas valorosas contribuições na qualificação, imprescindíveis para a conclusão desta pesquisa e por aceitarem participar da banca.

Aos meus familiares em especial meus pais Armando e Aracy que sempre estiveram presentes e apoiando minhas decisões.

À minha querida amiga e colega de trabalho Ana Paula, pelo companheirismo durante o meu mestrado, pelas dicas, pela amizade, pelas risadas.

Às amigas e colegas de trabalho professoras de Matemática Ana Paula e Adriana. Obrigada pela amizade, conselhos, carinho, risadas e pelo incentivo de sempre.

À direção da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz Lúcia Marinho onde atuo e que pude desenvolver este estudo. Agradeço pela flexibilidade nos horários para que eu pudesse participar das aulas e atividades relacionadas ao mestrado.

À supervisora Juliana que foi muito importante nesse processo em apoiar todas as etapas da pesquisa desenvolvidas nesta instituição de Educação Básica.

Aos alunos que demonstraram interesse e comprometimento ao participarem da pesquisa.

Aos professores e amigos da Escola Municipal "Ana Amélia Queiroz" e da Escola Estadual “Henrique Michel”, pela amizade e companheirismo.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFOP pelos encontros semanais cruciais para o amadurecimento desta pesquisa com os quais tive a oportunidade de aprender. Em especial das disciplinas de Seminários que, gentilmente, deram excelentes contribuições ao longo da pesquisa.

Aos meus queridos colegas da turma do Mestrado em Educação Matemática/2019. Estudamos e trabalhamos muito, mas também tivemos vários momentos de alegria e muitos risos.

Enfim, a todos os que contribuíram direta ou indiretamente para concretização desta pesquisa.

## RESUMO

A presente pesquisa teve por objetivo identificar e analisar as diferentes estratégias de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de situações/problemas do Campo Conceitual Multiplicativo, especificamente os problemas de Combinatória. Para subsidiar nossa pesquisa, buscamos respaldo teórico na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986; 1996; 2009), especialmente no campo das Estruturas Multiplicativas e no entendimento de Pessoa e Borba (2009) e Borba (2013) acerca de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Participaram da pesquisa 16 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública Municipal do Itabirito/MG. Os dados foram produzidos por meio da aplicação de uma sequência de atividades envolvendo raciocínio combinatório, do diário de campo da pesquisadora e de registros produzidos pelos alunos ao longo do trabalho. A sequência de atividades proposta continha doze questões envolvendo os quatro tipos de problemas combinatórios, defendidos por Pessoa e Borba (2009), ou seja, Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação. Para a análise, selecionamos quatro problemas, nos quais foram os mais representativos, sendo cada um apresentando um significado da Combinatória. Assim, a análise se estruturou em quatro categorias: a) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Produto Cartesiano; b) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Arranjo; c) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Permutação; e d) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Combinação. Na análise dos resultados verificamos que todos os alunos mobilizaram diversas estratégias ao resolver os problemas propostos, diferentes formas de representação, como: Princípio Fundamental da Contagem, desenhos, esquemas, contagem direta das possibilidades, respostas inconclusivas (sem conexão ao problema proposto), utilização de fórmulas, registro de argumentação pessoal, apenas respostas corretas ou incorretas, princípio aditivo, algoritmos da multiplicação e da divisão. A pesquisa revelou que a estratégia de resolução mais utilizada pelos alunos foi o Princípio Fundamental da Contagem e a estratégia menos usada, o diagrama. Como sugestão para futuras investigações com os mesmos dados, poderia ser feito uma análise relacionada aos erros e acertos praticados pelos alunos nos quatro tipos de problemas de Combinação, no sentido de propor uma discussão teórica e metodológica, quanto a estratégia adotada se pode ou poderá induzir ao erro ou acerto. A partir dos resultados da pesquisa foi elaborado um Produto Educacional, na perspectiva de um dispositivo de formação, voltado à formação de professores de Matemática, com vistas a propiciar um espaço formativo pautado na reflexão acercada dos processos de ensino e de aprendizagem de Combinatória.



**Palavras-chave:** Combinatória; Raciocínio combinatório; Estratégias de resolução; Princípio Fundamental da Contagem; Estruturas Multiplicativas.

## ABSTRACT

This research aimed to identify and analyze the different strategies employed in the elementary school by 9th grade students when solving situations / problems in the Multiplicative Conceptual Field, specifically the Combinatorial problems. To support our research, we sought theoretical support in the Theory of Conceptual Fields (VERGNAUD, 1986; 1996; 2009), especially in the field of Multiplicative Structures and in the understanding of Pessoa & Broba (2009) and Borba (2013) about problems involving combinatorial reasoning. Sixteen students from the 9th grade of elementary school from a public school in the Municipality of Itabirito / MG participated in the study. The data were produced through the application of a sequence of activities involving combinatorial reasoning, the researcher's field log and records produced by the students throughout the work. The proposed sequence of activities contained twelve questions involving the four types of combinatorial problems, defended by Pessoa and Borba (2009), that is, Cartesian Product, Arrangement, Permutation, Combination. For the analysis, we selected four problems, which were the most representative, each presenting a meaning of the Combinatorics. Thus, the analysis was structured in four categories: a) Analysis of the strategies mobilized by the students in the Cartesian Product Problem; b) Analysis of the strategies mobilized by the students in the Arrangement Problem; c) Analysis of the strategies mobilized by the students in the Permutation Problem; and d) Analysis of the strategies mobilized by the students in the Combination Problem. In the analysis of the results, we found that all students mobilized different strategies when solving the proposed problems and different forms of representation, such as: Fundamental Counting Principle, drawings, schemes, direct counting of possibilities, inconclusive answers (without connection to the proposed problem), use of formulas, note of personal arguments, just correct or incorrect answers, additive principle, multiplication and division algorithms. The research revealed that the resolution strategy most used by students was the Fundamental Principle of Counting and the least used strategy, the tree of possibilities, the diagram. As a suggestion for future research with the same data, an analysis related to the mistakes and successes practiced by the students in the four types of Combination problems could be made, in order to propose a theoretical and methodological discussion, as to know if the strategy adopted can or may induce to error or success. From the results of the research and in the perspective of a training device, an Educational Product was elaborated, focused on the training of Mathematics teachers and intended to provide a formative space based on the reflection upon the Combinatorial teaching and learning processes.



**Keywords:** Combinatorial Problem; Combinational reasoning; Resolution strategies; Fundamental Principle of Counting; Multiplicative Structures.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Número de pesquisas produzidas (por Universidade) e por Região Brasileira ............33
Figura 2: Diagrama para a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud ..................................47
Figura 3: Esquema de classificação de problemas do Campo Multiplicativo..............................51
Figura 4: Esquema referente aos tipos de problemas Combinatórios. ........................................52
Figura 5: Escalar multiplicativa: um caminho para resolver problemas multiplicativos .............53
Figura 6: Quadro de correspondência (isomorfismo de medidas) ...............................................57
Figura 7: Esquema de resolução do exemplo 1 ...........................................................................62
Figura 8: Esquema de resolução do exemplo 2. ..........................................................................63
Figura 9: Etapas de coleta e análise de dados ..............................................................................71
Figura 10: Questão (desafio) ........................................................................................................77
Figura 11: Registro da interação na aula de dúvidas com os alunos do 9º ano. ...........................78
Figura 12: Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item a do Problema de Produto Cartesiano ......................................................................................................................................84
Figura 13: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do item a do Problema de Produto Cartesiano ......................................................................................................................................85
Figura 14: Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item b do Problema de Produto Cartesiano ......................................................................................................................................87
Figura 15: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do item b do Problema de Produto Cartesiano ......................................................................................................................................87
Figura 16 Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item c do Problema de Produto Cartesiano ......................................................................................................................................89
Figura 17: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do item c do Problema de Produto Cartesiano ......................................................................................................................................90
Figura 18: Estratégia mobilizada pelo Aluno A6 na resolução do Problema de Arranjo ............92
Figura 19: Estratégia mobilizada pelo Aluno A14 na resolução do Problema de Arranjo ...........93
Figura 20: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do Problema de Permutação.......95
Figura 21: Estratégia mobilizada pelo Aluno A7 na resolução do Problema de Permutação.......96
Figura 22: Estratégia mobilizada pelo Aluno A7 na resolução do item a do Problema de Combinação ...................................................................................................................................99
Figura 23: Estratégia mobilizada pelo Aluno A11 na resolução do item a do Problema de Combinação .................................................................................................................................100
Figura 24: Estratégia mobilizada pelo Aluno A7 na resolução do item b do Problema de Combinação .................................................................................................................................102
Figura 25: Estratégia mobilizada pelo Aluno A11 na resolução do item b do Problema de Combinação .................................................................................................................................102

**LISTA DE GRÁFICOS**

Gráfico 1: Pesquisas que investigaram Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud ..................................................................................... 31

Gráfico 2: Distribuição das pesquisas envolvendo Estruturas Multiplicativas, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no período de 1997 a 2018................................. 32

Gráfico 3: Segmentação das pesquisas por Sujeito de pesquisa e/ou Objeto de investigação ...... 35

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Documentos curriculares brasileiros e orientações quanto ao Ensino de Combinatória ....................21

Quadro 2: Distribuição das pesquisas cujos sujeitos envolvidos são alunos. ....................36

Quadro 3: Distribuição das pesquisas cujos sujeitos envolvidos são professores. ....................37

Quadro 4: Distribuição das pesquisas envolvendo Materiais curriculares. ....................37

Quadro 5: Pesquisas que abordam a temática: Raciocínio Combinatório ....................38

Quadro 6: Classe de problemas do tipo multiplicativo. ....................55

Quadro 7: Classe de problemas com seu respectivo exemplo ....................56

Quadro 8: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item a do Problema de Produto Cartesiano ....................83

Quadro 9: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item b do Problema de Produto Cartesiano ....................86

Quadro 10: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item c do Problema de Produto Cartesiano ....................88

Quadro 11: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o Problema de Arranjo ....................91

Quadro 12: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o Problema de Permutação ....................94

Quadro 13: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item a do Problema de Combinação ....................98

Quadro 14: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item b do Problema de Combinação ....................101

Quadro 15: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolverem problemas de Combinatória propostos. ....................104

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES

**BNCC -** Base Nacional Comum Curricular

**CAPES -** Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

**CEPE -** Comitê de Ética em Pesquisa

**CRMG -** Currículo Referência de Minas Gerais

**OBEDUC -** Programa Observatório da Educação

**PCN -** Parâmetros Curriculares Nacionais

**PCNEM -** Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

**PFC -** Princípio Fundamental da Contagem

**PIBID -** Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

**PM** - Princípio Multiplicativo

**PNAIC -** Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa

**TCLE -** Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

**TRI** - Teoria de Resposta ao Item

**UFOP** – Universidade Federal de Ouro Preto

**SUMÁRIO**

**INTRODUÇÃO** ........................................................................................................ **16**

**JUSTIFICATIVA DO ESTUDO** ................................................................................ **17**

**APRESENTAÇÃO DO ESTUDO** .............................................................................. **27**

**CAPÍTULO 1 - MAPEAMENTO DE PESQUISAS SOBRE O CAMPO DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GERARD VERGNAUD** ........................................................ **29**

1.1 Critérios e procedimentos para a composição do mapeamento ................................... 29

1.2 Um olhar para as pesquisas sobre o Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud ................................................................ 30

1.2.1 Aspectos gerais e *lócus* de produção ........................................................................ 30

1.2.2 Sujeitos de pesquisa e/ou Objeto de investigação ...................................................... 34

1.3 Pesquisas que investigam o Raciocínio Combinatório na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud ............................................................................................ 38

**CAPÍTULO 2 – PRESSUPOSTOS TEÓRICOS: TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS, PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E ANÁLISE COMBINATÓRIA** ......... **44**

2.1 Alguns pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud ............. 44

2.1.1 A Teoria dos Campos Conceituais .................................................................................. 44

2.1.2 – O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas ............................................................................................................ 50

2.1.3 - Sobre as relações multiplicativas ................................................................................. 50

2.1.4 O Campo Conceitual Multiplicativo ............................................................................. 54

2.1.4.1 Classes de problemas do tipo multiplicativo ............................................................. 55

2.2 Princípio Fundamental da Contagem e os tipos de problemas combinatórios ............... 60

2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou princípio multiplicativo ................... 60

2.2.1.1 Produtos cartesianos ................................................................................................. 61

2.2.1.2 Permutações simples ................................................................................................ 63

2.2.1.3 Permutações com repetição ...................................................................................... 64

2.2.1.4 Arranjos simples ....................................................................................................... 65

2.2.1.5 Arranjos com repetição ............................................................................................. 66

2.2.1.6 Combinações simples ............................................................................................... 66

2.2.1.7 Combinações com repetição ..................................................................................... 68

**CAPÍTULO 3 - PERCURSO METODOLÓGICO ........ 70**
3.1. Natureza da pesquisa ........ 70
3.2. Questão de pesquisa, objetivo e procedimentos ........ 70
3.3. Contexto da pesquisa ........ 72
3.4. Aspectos Éticos da Pesquisa ........ 73
3.5. O cenário de pandemia e a produção de dados ........ 74
3.5.1 Instrumentos relacionados à produção de dados ........ 75
3.6. Procedimentos de organização e análise de dados ........ 79
3.7. O Produto Educacional ........ 79

**CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS ........ 80**
4.1 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos em um Problema de Produto Cartesiano ... 82
4.1.1 Análise das estratégias mobilizadas no item a - Produto Cartesiano ........ 83
4.1.2 Análise das estratégias mobilizadas no item b - Produto Cartesiano ........ 86
4.2 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Arranjo ........ 90
4.3 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Permutação ........ 93
4.4 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Combinação ........ 96
4.4.1 Análise das estratégias mobilizadas no item a - Combinação ........ 98
4.2.2 Análise das estratégias mobilizadas no item b - Combinação ........ 101
4.5 Algumas considerações sobre as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos no presente estudo ........ 103

**CONSIDERAÇÕES FINAIS ........ 106**

**REFERÊNCIAS ........ 110**

**Apêndices**
Apêndice 1 – Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE para pais ou responsáveis) .. 118
Apêndice 2 – Termo de autorização da escola ........ 120
Apêndice 3 – Sequência de atividades sobre raciocínio combinatório: Problemas propostos aos alunos (na ordem em que foram apresentados) ........ 121

## INTRODUÇÃO

Quando a palavra *Matemática* é mencionada, percebo que diversos sentimentos são despertados sobretudo quando o assunto é seu estudo. Estudantes, pais, professores e gestores educacionais se preocupam com os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Assim, inicio[1] este estudo relatando um pouco da minha trajetória acadêmica e profissional, destacando os caminhos que me conduziram à docência e os principais motivos que me levaram a pesquisar no campo da Educação Matemática.

Durante a minha graduação no curso de Licenciatura em Matemática atuei em projetos da Universidade que visavam atender a comunidade escolar do entorno daquele município. Projetos como monitorias, Universidade e Escola, o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), que tinham por objetivos valorizar o magistério e apoiar estudantes de licenciatura plena das instituições de educação superior; incentivar, promover e realizar ações que estimulassem o estudo durante a graduação de Matemática e também com um olhar direcionado ao campo de investigação em Educação Matemática e áreas afins.

Antes mesmo de concluir a graduação, comecei a lecionar Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio nas redes públicas de ensino Municipal e Estadual em Minas Gerais.

Concluída a graduação, dei continuidade aos estudos em um curso de Pós-Graduação *Lato Senso* em Matemática com ênfase em Cálculo, no qual pude desenvolver um trabalho de conclusão de curso na área de Avaliação Educacional, cujo objetivo foi o de estudar a Teoria de Resposta ao Item (TRI) e calcular as proficiências estimadas para os alunos que fizeram provas de Matemática em larga escala no estado de Minas Gerais. Nesse trabalho buscou-se um entendimento mais aprofundado dessa Teoria e de como estimar as proficiências dos alunos a partir de um banco de dados reais.

No período de 2014 a 2017, tive a oportunidade de atuar como formadora na área de Matemática do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC). Trabalhando como formadora pude vivenciar experiências em relação às práticas de professores do Ciclo de Alfabetização e, daí que surgiram muitas inquietações para a realização deste estudo.

Atualmente, ainda como professora efetiva de Matemática dos Anos Finas do Ensino Fundamental e Ensino Médio nas redes públicas de ensino Estadual e Municipal, percebo a necessidade de o professor buscar novas possibilidades para proporcionar a construção do

[1] Por se tratar da trajetória pessoal da professora-pesquisadora, a escrita desta introdução está na 1ª pessoa do singular.

conhecimento matemático aos seus alunos. Para mim, lecionar Matemática na Educação Básica na rede pública de ensino é um grande desafio, visto que nos deparamos com condições, às vezes, adversas do meio escolar.

Nesse sentindo, a busca incessante por novos conhecimentos, fez com que eu ingressasse em uma Pós-Graduação S*tricto Sensu* no campo da Educação Matemática. Assim sendo, o desenvolvimento desta pesquisa é mais uma oportunidade de ampliar os meus estudos na área de Educação Matemática, com base teórica aliada às práticas em sala de aula, trocas de experiências e desenvolvimento de novas estratégias metodológicas, a fim de contribuir para um ensino de qualidade na Educação Pública brasileira.

## JUSTIFICATIVA DO ESTUDO

Ao longo da minha trajetória como professora, com atuação permanente nos anos finais do Ensino Fundamental, algumas inquietações começaram a surgir. Uma das questões mais rotineiras é quando trabalhamos, principalmente em turmas de 6º ano, com situações-problema que envolvem as quatro operações elementares da Matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão), e muitos alunos fazem a seguinte pergunta: É de "*mais*" ou "*menos*"? De "*multiplicar*" ou "*dividir*"? O que percebe, analisando essa situação, é que os alunos não compreendem a situação e buscam uma "alternativa" mais rápida para resolver o problema, mesmo sem compreender o raciocínio presente.

A busca por respostas me impulsionou a explorar aos materiais do PNAIC (BRASIL, 2014) que, em sua edição, realizou uma formação continuada para professores do Ciclo de Alfabetização com um trabalho com foco na Alfabetização Matemática; e, assim, havia vários cadernos contemplando a Matemática do ciclo de Alfabetização. Dois desses cadernos destacaram na minha prática como professora formadora, são eles: Caderno 4 (Operações na Resolução de Problemas) e Caderno 7 (Educação Estatística). O Caderno 4, especificamente propunham algumas reflexões acerca do trabalho com Resolução de Problemas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Gérald Vergnaud. O contato com estes materiais suscitou diversos questionamentos como, por exemplo: qual a importância de refletir com os professores alfabetizadores as habilidades da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) e estratégias de ensino relacionadas à resolução de situação-problema sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais?

O caderno 04 abordou as situações-problema do Campo Aditivo (adição e subtração) e do Campo Multiplicativo (multiplicação e divisão), com o objetivo de oferecer subsídios teóricos e práticos para amparar as práticas pedagógicas e auxiliar para que a criança possa elaborar, interpretar e resolver situações-problema convencionais e não convencionais, utilizando e comunicando suas estratégias pessoais, envolvendo os seus diferentes significados (BRASIL, 2014).

Em relação ao caderno 7, contemplou um trabalho voltado para a Educação Estatística abordando o Ensino de Combinatória no Ciclo de Alfabetização, visando desenvolver estratégias de ensino voltada para essa etapa escolar trabalhando conceitos relacionados a problemas do tipo - produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação, problemas estes apontados por Borba (2013) como sendo integrantes da Combinatória.

A aproximação desses dois cadernos trouxe várias contribuições, no sentido de buscar respostas e compreensão ao trabalhar com conceitos relacionados à Combinatória. A partir disso, pude perceber uma grande necessidade de inovar as práticas pedagógicas em sala de aula, com o intuito de despertar o interesse dos alunos em aprender determinado conteúdo da Matemática, em especial, a Combinatória.

No que tange a Matemática no Ensino Fundamental, a BNCC indica:

> Essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade Matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, 2017, p. 263).

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental - anos finais, um dos pressupostos é levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos. A Base Nacional Comum Curricular (2017) recomenda que se faça uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano, com o objetivo de identificar a progressão das habilidades ano a ano, e também em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções Matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes. Se faz necessário considerar que,

> Para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à Resolução de Problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse

> modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto. (BRASIL, 2017, p. 297).

No meio escolar, especificamente na sala de aula, existem muitos desafios, desde do interesse do aluno pelo conteúdo até a maneira de como o professor media os processos de ensino e de aprendizagem com vistas propiciar situações de aprendizagem que contemplem diferentes habilidades necessárias para a formação e autonomia dos estudantes, de modo que sejam capazes "de resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2017, p. 8).

Ao ter contato com as ideias do pesquisador francês Gérard Vergnaud, em uma de suas entrevistas concedida a Revista Nova Escola[2], no fim de abril de 2008, percebi que ele sinaliza que só conhecendo a forma como os alunos aprendem é possível ensinar. Um dos pontos interessantes da entrevista, ao meu ver, é quando menciona que o professor precisa entender os percursos trilhados pelos alunos ao cometerem erros. Caso isto não ocorra, o trabalho se perde, não funciona. Naquele momento, o pesquisador indicou que a Teoria dos Campos Conceituais estava apenas começando a ser utilizada nos cursos de formação, já se passaram mais de dez anos e podemos notar um número considerável de trabalhos acadêmicos nessa perspectiva, o que é muito importante para o ensino da Matemática.

Diante das justificativas apresentadas, destaco a Combinatória[3] como um conteúdo matemático importante na escolarização básica e que a Teoria dos Campos Conceituais pode fornecer aos professores uma fundamentação teórica de base sólida para a compreensão de determinados procedimentos e conceitos relacionados à Combinatória. Haja vista que a Combinatória[4] apresenta uma diversidade de situações em contextos distintos permitindo os alunos a pensarem e resolverem situações-problemas enfrentados por eles. É importante destacar que o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é um princípio multiplicativo presente em problemas combinatórios, e assim fica evidenciado, da Combinatória estar inserida no campo das estruturas multiplicativas.

---

[2] Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica <acesso em 17/03/2020>

[3] Em todo o trabalho utilizamos Análise Combinatória e Combinatória como termos sinônimos. "A **Análise Combinatória** como a parte da Matemática que estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios; a **Combinatória** como os tópicos referentes a esta parte da Matemática" (PESSOA; BORBA, 2010, p. 2), ou seja, A Análise Combinatória ou Combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem.

[4] Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) há a recomendação que os diferentes tipos de problemas combinatórios sejam propostos aos alunos desde o início do processo de escolarização, sem ênfase na formalização. Mas, apenas problemas do tipo produto cartesiano são trabalhos nas séries iniciais do Ensino Fundamental, e a maioria dos problemas referente ao raciocínio combinatório (arranjo, combinação e permutação) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio.

Desse modo, apoiaremos[5] a presente pesquisa nas discussões teóricas acerca da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no sentido de compreender diferentes estratégias mobilizadas pelos estudantes ao resolverem situações problemas envolvendo a Combinatória.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, foi o referencial teórico adotado nesta pesquisa, por ser uma teoria cuja principal finalidade é fornecer um quadro que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos (o saber fazer e os saberes expressos), nas crianças e nos adolescentes (VERGNAUD, 1990). Segundo Vergnaud (1990) um Campo Conceitual é um conjunto de situações, cujo tratamento implica esquemas, conceitos e teoremas em estreita conexão - a capacidade de resolver problemas nas mais diversas situações nas quais se faz presente um determinado conceito, não ocorre em poucos meses, nem mesmo em alguns anos.

E nessa perspectiva, Borba (2013) defende que, no ensino, conceitos estreitamente relacionados podem ser abordados concomitantemente, uma vez que situações que dão significado a estes conceitos estão intrinsicamente imbricadas, e se pode trabalhar progressivamente aspectos mais complexos dos conteúdos focados.

O entendimento de Borba (2013, p. 2), é o de que:

> “que diferentes situações que dão significado à Combinatória – tais como os problemas de *produto cartesiano*, de *arranjo*, de *combinação* e de *permutação* – são intimamente associadas por relações Combinatórias básicas, mas também possuem relações próprias que devem ser tratadas por meio de representações simbólicas que permitem o adequado levantamento de possibilidades.”

Assim, diante dos desafios e dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de alguns conteúdos da Matemática, enfrentados tanto por parte dos alunos, quanto dos professores, como por exemplo, os de Análise Combinatória, resolvemos recorrer aos documentos curriculares brasileiros para saber como é orientado o trabalho relacionado aos conceitos da Combinatória.

A seguir, apresentamos os seguintes documentos: os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997; 1998); as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2006); a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) e o Currículo Referência de Minas Gerais – CRMG (2018), prescrevem o Ensino de Combinatória para os anos inicias e finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

Nesse sentindo, no Quadro 1 apresentamos o nível de ensino, o documento curricular explicitado, ciclo ou ano de Ensino e uma citação ou habilidade[6].

---

[5] Desse ponto em diante utilizaremos a 3ª pessoa do plural pelo fato de as reflexões apresentadas são fruto de diálogos com o orientador da pesquisa.

[6] As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares (BNCC, 2017).

Quadro 1: Documentos curriculares brasileiros e orientações quanto ao Ensino de Combinatória

| | Documento | Ciclo/Ano | Citação/Habilidades |
|---|---|---|---|
| **Anos iniciais do Ensino Fundamental** | PCN | 1º e 2º Ciclos[7] | Relativamente à Combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem (BRASIL, 1997, p. 40). |
| | BNCC | 4º ano | Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (BRASIL, 2017, p. 291). |
| | | 5º ano | Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (BRASIL, 2017, p. 295). |
| | CRMG | 4º ano | Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (CRMG, 2018, p. 688). |
| | | 5º ano | Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (CRMG, 2018, p. 695). |
| **Anos finais do Ensino Fundamental** | PCN | 3º e 4º Ciclos[8] | Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998, p. 52) |
| | BNCC | 8º ano | Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (BRASIL, 2017, p. 313). |

[7] 1º Ciclo (faz referência a 1ª e 2ª série); 2º Ciclo (faz referência a 3ª e 4ª série).
[8] 3º Ciclo (faz referência a 5ª e 6ª série); 4º Ciclo (faz referência a 7ª e 8ª série).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | CRMG | 8º ano | Resolver problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (CRMG, 2018, p. 718). |
| **Ensino Médio** | PCNEM | 1º ao 3º ano | A Combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações Combinatórias (BRASIL, 2006, p. 79).<br><br>A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a Combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento (BRASIL, 2006, p. 79). |
| **Ensino Médio** | BNCC | 1º ao 3º ano | Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore (BRASIL, 2017, p. 529).<br><br>Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade e eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades (BRASIL, 2017, p. 529). |

Fonte: Produzido pelos autores (2020).

A BNCC é o documento curricular mais recente que norteia as equipes pedagógicas na elaboração dos currículos locais, dessa forma determina as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da Educação Básica – Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. A BNCC também sinaliza que essas competências, habilidades e conteúdos devem ser os mesmos, independentemente de onde as crianças, os adolescentes e os jovens moram ou estudam.

Podemos observar no Quadro 1, de acordo com os textos curriculares e os documentos aqui apresentados (BRASIL, 1997, 1998, 2006, 2017, 2018), que há orientações para que os processos de ensino e de aprendizagem da Combinatória sejam iniciados a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017), as habilidades estão estruturadas segundo unidades de conhecimento da própria área (*Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística*). Sendo que a Combinatória é pouco abordada na unidade de conhecimento *Probabilidade e Estatística*. Em relação à Probabilidade, “os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos” (BNCC, 2017, p. 518).

Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade de cada estudante. Nessa etapa, esses diferentes campos da Matemática são integrados de forma ainda mais consistente. Assim, são definidos, nessa etapa, um conjunto de pares de ideias fundamentais que produzem articulações entre os vários campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas (BNCC, 2017). De modo que, é dado maior ênfase à Combinatória, mas ainda de forma tímida, sem ser de fato um campo de estudo, e sim aliada com o estudo da Probabilidade. Visto que o trabalho com a Combinatória é um conteúdo geralmente abordado no 2º ano do Ensino Médio.

A BNCC na área de Matemática apresenta competências específicas de Matemática para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, dividas em: unidades temáticas; objetos de conhecimento e habilidades.

> Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas. Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (BNCC, 2017, p. 275).

Para os anos inicias e finais do Ensino Fundamental indica-se a necessidade de o professor propiciar diferentes situações de aprendizagem que possibilitem a exploração de diversos conceitos e procedimentos em relação aos problemas de contagem e o princípio multiplicativo da contagem da unidade temática *Números* e são aplicados a partir do desenvolvimento de um conjunto de habilidades, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, esquemas e tabelas, etc. Como exemplo, temos (BNCC, 2017, p. 295): "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, especificamente no 3º ou 4º ano, é quando se sugere a introdução as estruturas multiplicativas, daí o produto cartesiano é trabalhado junto com outros significados dos problemas de estruturas multiplicativas - proporcionalidade, configuração retangular e comparativa (PCN, 1997). Em um estudo das pesquisadoras Pessoa e Borba (2010) acerca do *"Desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica"*, elas salientam que alguns tipos de problemas de Combinatória, como os problemas de arranjos, combinações e permutações, não são explicitamente ensinados nesta etapa da escolarização, mas são enfatizados no Ensino Médio.

No que diz respeito aos anos iniciais do Ensino Fundamental, as orientações didáticas referente ao eixo[9] "números e operações", na parte que trata do Campo das Estruturas Multiplicativas, traz as situações associadas à ideia de Combinatória. Por exemplo: Tendo duas saias, uma preta (P) e uma branca (B) e três blusas, uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C), de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Analisando-se o problema, vê-se que a resposta à questão formulada depende das combinações possíveis, os alunos podem obter a resposta, num primeiro momento, fazendo desenhos, diagramas de árvore, até esgotar as possibilidades: o resultado que acabamos de mostrar traduz o número de combinações possíveis e evidencia um conceito matemático importante, que é o de produto cartesiano. Observa-se que por "essa interpretação não se diferenciam os termos iniciais, sendo compatível a interpretação da operação com sua representação escrita. Combinar saias com blusas é o mesmo que combinar blusas com saias e isso pode ser expresso por $2 \; x \; 3 = 3 \; x \; 2$." (BRASIL, 1997, p. 73).

Com base nos PCN, relacionado aos 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental, as orientações didáticas referente ao eixo números e operações, também apresenta situações associadas à ideia da Combinatória. Por exemplo: Lancei dois dados: um vermelho e um azul. Quantos resultados diferentes são possíveis de encontrar?

Nesse caso trata-se de uma situação em que é necessário determinar a quantidade de elementos de uma coleção finita, organizada de uma determinada maneira, contagem dos casos possíveis. Supostamente, problemas como este podem ser resolvidos sem que seja necessário fazer nenhum cálculo, uma vez que a solução pode ser obtida pela contagem direta das possibilidades. Nesse caso, o objeto da aprendizagem é a descoberta de um procedimento, como a construção de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama de árvore que assegure a identificação de todos os casos possíveis (BRASIL, 1998, p. 111).

> A exploração dos problemas de contagem levará o aluno a compreender o princípio multiplicativo. Tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?
> Além disso, o emprego de problemas envolvendo Combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 137).

Nesse direcionamento, estudo de Borba (2016) aponta que crianças, a partir de cinco anos de idade, são capazes de interpretar problemas combinatórios.

[9] Optamos por esta terminologia para contemplar a perspectiva de Blocos de Conteúdos (PCN).

Pessoa e Borba (2009) realizaram um estudo com alunos da Educação Básica, observando o desempenho dos educandos do 2º e 3º anos ao resolverem dois problemas combinatórios de cada tipo (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Essa pesquisa apresentou como um de seus resultados que crianças de 2º e 3º anos do Ensino Fundamental conseguem perceber as características dos problemas combinatórios. Porém, os alunos do 2º ano ainda apresentam dificuldade em esgotar todas as possibilidades. Já, os alunos do 3º ano conseguem chegar ao final das resoluções, mesmo quando os resultados são maiores que 20.

O caderno 7 do PNAIC, ressalta a importância do trabalho com as crianças desde o Ciclo de Alfabetização no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio combinatório:

> Podemos perceber que crianças com cinco, seis, sete e oito anos de idade, que estão ou que entrarão no Ciclo de Alfabetização, são capazes de desenvolver um raciocínio combinatório. Elas utilizam estratégias próprias de resolução e algumas conseguem esgotar todas as possibilidades e outras, mesmo que não consigam esgotar todas as possibilidades, demonstram que são capazes de entender o que o problema solicita. Há, também, crianças que não conseguem ainda compreender a lógica dos problemas, mas que, se vivenciarem um trabalho sistemático com problemas dessa natureza, poderão desenvolver esse modo de pensar. (BRASIL, 2014, p. 47).

E ainda,

> Na resolução das crianças, observa-se que um dos maiores problemas é a não contagem de todas as possibilidades. Isso ocorre porque o trabalho com a Combinatória exige uma organização dos dados de forma particular. Essa organização é realizada em níveis diferenciados de abstração que culmina nos anos finais do Ensino Médio em fórmulas. Sabendo disso, podemos auxiliar as crianças na sistematização de suas estratégias e no desenvolvimento de ferramentas que podem ser úteis (BRASIL, 2014, p. 47).

No estudo da Combinatória, as estratégias de resolução dos problemas não estão prontas de imediato, é necessário ser construídas, o que faz com que o aluno esteja frente a um problema a ser resolvido.

Embora os problemas relacionados à Combinatória fazem parte do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, estes não são problemas multiplicativos comuns, são mais complexos e, de um modo geral, não se resolvem via uma multiplicação direta. É notável que a Combinatória é um assunto formalizado no Ensino Médio, momento em que são tratados com uma excessiva e desnecessária quantidade de fórmulas, por isso é muito importante um trabalho no Ensino Fundamental que contemple o Princípio Fundamental da Contagem e problemas combinatórios do tipo: arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio), no que diz respeito ao uso de fórmulas destaca-se:

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente Matemática à Resolução de Problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da Resolução de Problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza Estatística ou probabilística (BRASIL, 2002, p. 126-127).

De acordo com Vergnaud (1998 apud MARQUES *et al.*, 2016), é sabido que a aprendizagem do aluno está diretamente relacionada com o ensino oferecido pelo professor. Nesse sentido, para que o docente estimule seus alunos no uso de diferentes estratégias de resolução de situações-problema, é essencial que as práticas realizadas em sala de aula os envolvam, os desafiem e os motivem a resolvê-las. A metodologia de Resolução de Problemas pode ser um caminho satisfatório para levar o aluno a compreender as diferentes situações necessárias à construção dos conceitos, uma vez que propicia um ambiente de investigação, de exploração e de reflexão.

Assim, a pesquisa intitulada: “Análise de estratégias de resolução mobilizadas por alunos do 9º ano frente a atividades envolvendo raciocínio combinatório” tem por objetivo identificar e analisar as diferentes estratégias de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de situações/problemas do Campo Conceitual Multiplicativo que envolve a Combinatória.

Nesse sentido, os documentos curriculares sinalizam o que se espera que os estudantes mobilizem com relação às estratégias de resolução ao se deparem com situações problema envolvendo raciocínio combinatório. Desta forma listamos possiblidades de estratégias apontadas em Brasil (1998, 2017 e 2018):

- *Contagem direta das possibilidades: construção de diagramas; tabelas ou esquemas;*
- *Determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.*
- *Resolução e elaboração dos problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.*

Observamos que as estratégias de resolução de problemas combinatórios mais indicadas recaem na construção de diagramas, tabelas, esquemas e formas de registro pessoais. Dessa forma, é muito importante que o estudante compreenda os conceitos envolvidos para utilização coerente dessas estratégias que os conduzem a solução esperada.

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2006, p. 126-127).

Portanto, a relevância desse tema para a área de Educação Matemática terá contribuições em relação ao ensino e aprendizagem dos alunos e práticas pedagógicas mais plausíveis para as aulas de Matemática. Daí, se faz necessário, a formação sólida do professor de Matemática e um trabalho baseado no desenvolvimento de habilidades na resolução de situações-problemas no Campo das Estruturas Multiplicativas, com ênfase no raciocínio combinatório, no qual permitem aos alunos criarem suas próprias conjecturas, utilizando e comunicando suas próprias estratégias de resolução de maneira mais clara e objetiva.

## APRESENTAÇÃO DO ESTUDO

Esta dissertação está estruturada em 4 capítulos, organizados conforme a seguir:

No Capítulo 1, apresentamos um mapeamento das pesquisas que investigaram o campo das estruturas multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Enquanto o Capítulo 2 apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, especificamente o campo multiplicativo, na qual apresentamos alguns conceitos que permitem ao professor de matemática analisar e compreender como os alunos mobilizam os conhecimentos para resolver problemas matemáticos. Em seguida, discorremos sobre o objeto de estudo da presente pesquisa, a análise Combinatória: conceito e perspectivas teóricas de investigação, onde traz o Princípio Fundamental da Contagem como base para a construção de procedimentos formais da resolução de situações/problemas envolvendo a Combinatória.

Já o Capítulo 3 apresenta o percurso metodológico da pesquisa, como: questão de pesquisa, objetivo e procedimentos de organização e análise de dados. O Capítulo 4 com a análise dos resultados, apresenta a descrição e interpretação dos dados coletados através de uma sequência de atividades aplicada para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental conforme os pressupostos teóricos adotados nesta pesquisa.

Finalmente, nas Considerações Finais apresentamos as conclusões, destacando os dados que foram relevantes durante a realização da pesquisa, bem como apontamentos que julgamos importantes no que se refere às estratégias mobilizadas pelos alunos participantes da pesquisa, além de sugestões para futuras investigações.

Compondo a organização estrutural, são apresentados as Referências Bibliográficas e os Apêndices.

# CAPÍTULO 1 - MAPEAMENTO DE PESQUISAS SOBRE O CAMPO DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GERARD VERGNAUD

Neste capítulo apresentamos um mapeamento de pesquisas brasileiras sobre o Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Tal mapeamento foi realizado a partir de buscas por pesquisas disponibilizadas no Banco de Dissertações e Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[10].

Sabemos que o mapeamento pode não conter todas as pesquisas realizadas no Brasil acerca do Campo das Estruturas Multiplicativas no período delimitado, haja vista que esse tipo de estudo é sempre intermitente. Além disso, um mapeamento depende das informações que os autores declararam como foco da pesquisa, das palavras-chave, do título e principalmente do resumo. Em algumas pesquisas, somente o título não favoreceu uma compreensão clara do que trata o trabalho, o que nos conduziu à leitura dos resumos.

A seguir, apresentaremos os critérios e procedimentos desencadeadores para a composição do mapeamento.

## 1.1 Critérios e procedimentos para a composição do mapeamento

Para a estruturação do presente mapeamento optamos por explorar o Banco de Dissertações e Teses da CAPES[11], considerando as pesquisas de Mestrado e Doutorado defendidas dentro do período (1997-2018) e os descritores de busca, "estruturas multiplicativas" (resultando em setenta pesquisas) e "Campo Multiplicativo" (resultando em vinte e sete pesquisas). Desse modo, considerando os critérios de busca, foram encontradas inicialmente, 97 pesquisas, sendo 66 dissertações de Mestrados Acadêmicos, 14 dissertações de Mestrados Profissionais e 17 teses de Doutorado.

A partir desse *córpus*, construímos um banco de dados com os arquivos das dissertações e teses, consideramos alguns elementos fundamentais para a construção do referido mapeamento, tais como: ID (identificação da pesquisa); Curso (mestrado/doutorado); Área de concentração; Título; Autor; Ano; Programa; Instituição e Resumo. Assim, elaboramos uma planilha eletrônica, com o auxílio do *software* Excel, para que fosse possível organizar os dados coletados.

[10] Disponível em: www.catalogodeteses.capes.gov.br
[11] Mapeamento realizado entre os dias 12 e 16 de junho de 2019.

De posse desse conjunto de instrumentos de organização, demos início a leitura dos 97 resumos. Cabe ressaltar que, nem sempre, os elementos que buscávamos estavam explicitados nos mesmos. Desse modo, precisamos realizar a leitura na íntegra das pesquisas para que pudéssemos estruturar o mapeamento aqui proposto.

Após realizarmos a leitura dos títulos/resumos e/ou pesquisas, observamos que apenas 66 pesquisas versavam sobre o Campo das Estruturas Multiplicativas em contextos de ensino e/ou de aprendizagem de Matemática. Além disso, é importante destacar que duas pesquisas não estavam disponibilizadas na íntegra. Diante da dificuldade de localizá-las optamos por não as incluir no presente mapeamento. Portanto, passamos a analisar um conjunto de sessenta e quatro estudos.

De posse dos resumos e textos das pesquisas, procedemos ao fichamento para identificar determinados aspectos das investigações. Para analisarmos os resumos, elaboramos uma Matriz de Análise considerando os seguintes elementos: código de identificação do trabalho; curso; título; pesquisador; orientador; programa de Pós-Graduação; área; Instituição; Estado; ano; problema de pesquisa; objetivo; referencial teórico; foco de pesquisa (aluno/professor/ materiais); procedimentos de coleta e análise de dados; principais resultados.

Em seguida, apresentamos uma breve análise sobre as pesquisas que investigaram o Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, detalharemos aspectos gerais e lócus de produção, os resultados oriundos dos processos de busca e coleta de dados e a organização dos dados coletados.

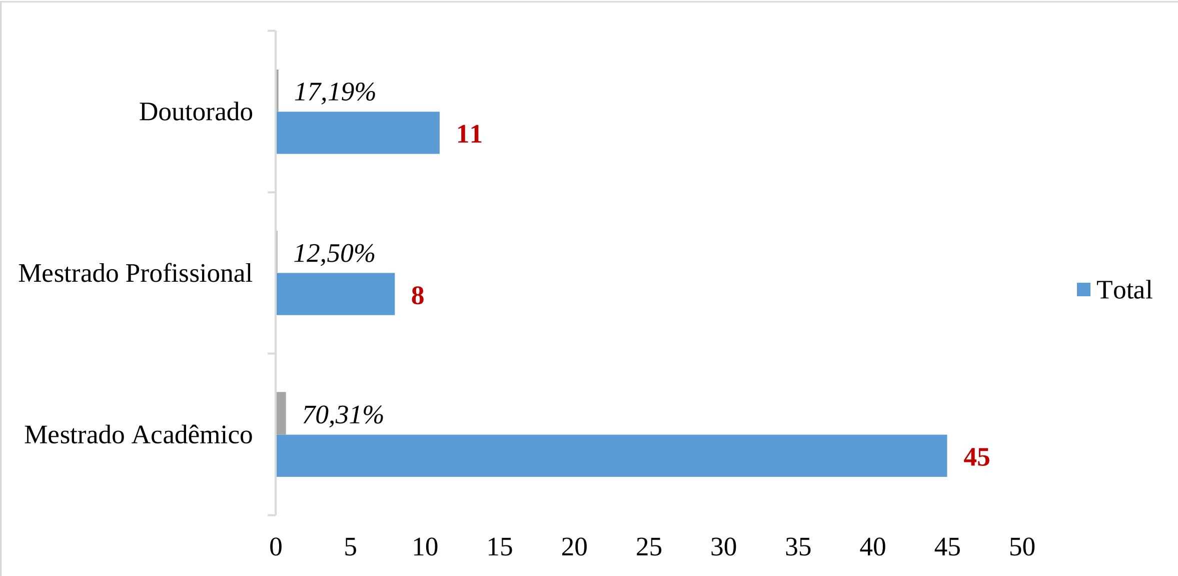
## 1.2 Um olhar para as pesquisas sobre o Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Neste tópico buscamos apresentar aspectos gerais e *lócus* de produção, como número de pesquisas por nível, número de produções acadêmicas por ano no período compreendido entre 1996 e 2019, Universidade e região Brasileira onde essas pesquisas foram produzidas. Por fim, destacamos alguns apontamentos e/ou resultados e foco de investigação dos pesquisadores, ou seja, os sujeitos de pesquisa.

### 1.2.1 Aspectos gerais e *lócus* de produção

O Gráfico 1 apresenta as sessenta e quatro pesquisas, destacadas em nossa busca, distribuídas entre as modalidades de curso de Mestrados (Profissional ou Acadêmico) e Doutorado. Assim, passamos a identificar as perspectivas e tendências apresentadas por essas pesquisas brasileiras no período de 1997 até 2018 sobre o Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Gráfico 1: Pesquisas que investigaram Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

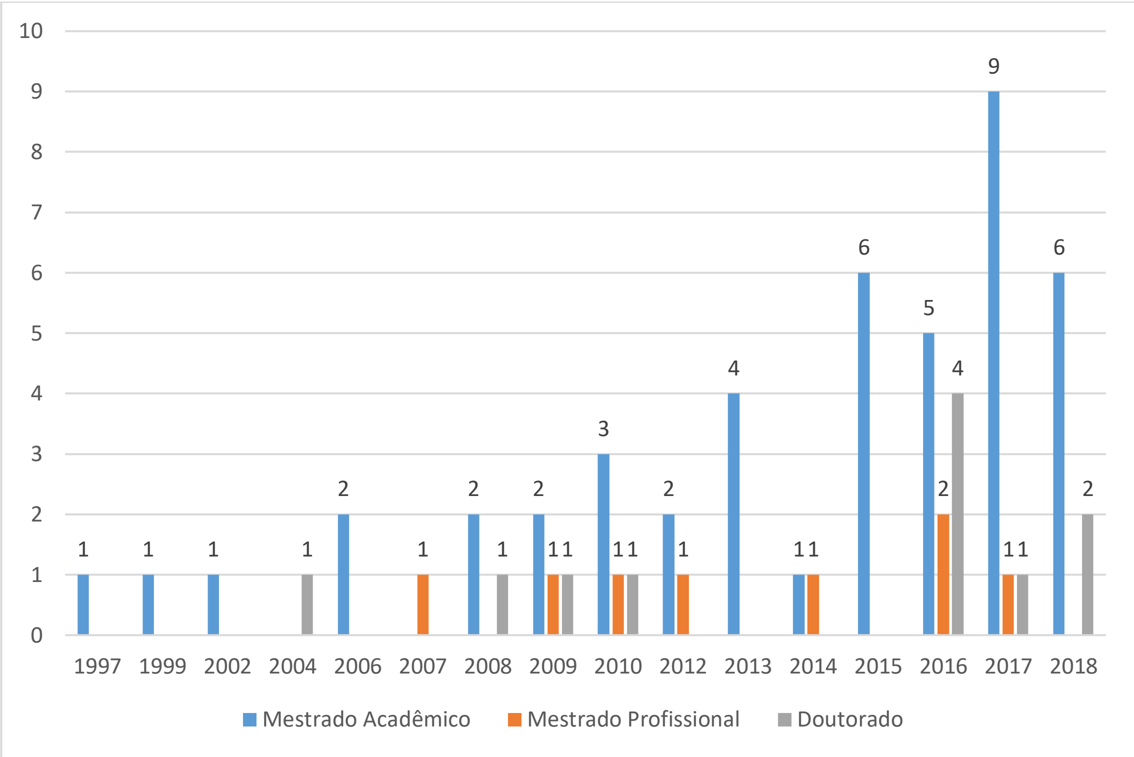



Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Observamos que o número de dissertações de Mestrado (Profissional ou Acadêmico) representam um percentual superior a 80% das pesquisas defendidas. Podemos perceber um número bem inferior de teses de doutorado. Isso pode estar relacionado aos programas de Pós-Graduação de onde originaram o maior número de pesquisas de mestrado, não ofertar o curso de Doutorado.

A seguir, o Gráfico 2 ilustra o número de produções acadêmicas por ano, do total das pesquisas, cinquenta e quatro são de Mestrado (Acadêmico e Profissional) e onze de Doutorado.

Gráfico 2: Distribuição das pesquisas envolvendo Estruturas Multiplicativas, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no período de 1997 a 2018.

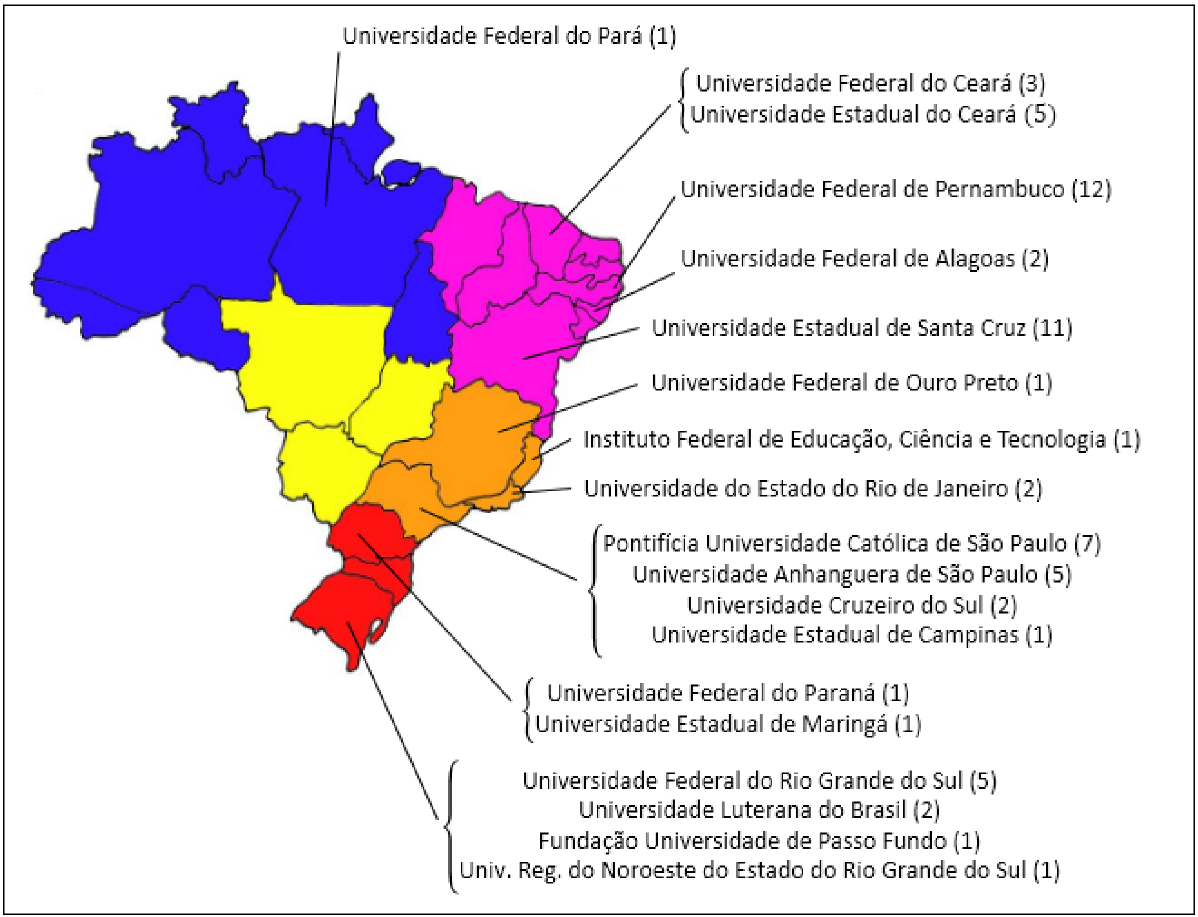



Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Com base no período analisado, podemos perceber no Gráfico 2 que, durante os dez primeiros anos, produziu-se apenas seis pesquisas, enquanto que na segunda década a produção cresceu expressivamente, com trinta e nove estudos, reflexo do crescente interesse pelo assunto e do aumento da quantidade de programas de pós-graduação Educação, Educação Matemática, Ensino de Matemática e Ensino de Ciência e Matemática. Também, podemos inferir que 2017, foi o ano em que teve o maior número pesquisas de mestrado defendidas.

Os dados apresentados neste mapeamento, nos mostram que essa temática referente as Concepções do Campo Conceitual e de Campo Multiplicativo propostas por Vergnaud, vem se destacando ao longo das duas últimas décadas, principalmente nos últimos quatro anos. Na Figura 1, evidenciamos a região do país e as Universidades onde essas pesquisas foram produzidas com maior frequência.

Figura 1: Número de pesquisas produzidas (por Universidade) e por Região Brasileira




Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Desta maneira verificamos, na Figura 1, uma concentração de trinta e três pesquisas na região nordeste do Brasil, notamos algumas evidências que podem ter gerado esse número bem expressivo para a região, com a adesão das Universidades ao projeto OBEDUC[12], criou-se um projeto intitulado "*Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental* (E-Mult)", desenvolvido em rede, nos estados da Bahia, do Ceará e de Pernambuco, que resultou em uma grande produção acadêmica. E também, as pesquisadoras dessa temática que atuam nos programas em Educação Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, a Rute Elizabete de Souza Rosa Borba; da Universidade Estadual de Santa Cruz, a Sandra Maria Pinto Magina; Vera Lucia Merlini e Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana, foram as que mais apareceram como orientadoras dos estudos.

[12] O Programa Observatório da Educação (OBEDUC), resultado da parceria entre a Capes, o INEP e a SECADI. Foi instituído em 2006 com o objetivo de fomentar estudos e pesquisas em educação. O OBEDUC visa, também, proporcionar a articulação entre pós-graduação, licenciaturas e escolas de educação básica, com o propósito de estimular produção acadêmica e formação.

O restante das pesquisas, foram produzidas nas regiões Norte, Sudeste e Sul, com um, dezenove, e onze trabalhos, respectivamente. Salientamos que não foram encontradas pesquisas na região Centro-Oeste do Brasil.

Ainda considerando o exposto na Figura 1, evidenciamos também, quais estados e Universidades foram desenvolvidas estas pesquisas. Observamos que a maior concentração desses estudos, são oriundos da Universidade Federal de Pernambuco/PE, com 12 pesquisas; seguido da Universidade Estadual de Santa Cruz/BA, com 11 pesquisas e a Pontifícia Universidade Católica/SP com 7 pesquisas, o que representa um percentual de 46,87% de toda a produção acadêmica, ou seja, quase metade dos estudos originaram de apenas três Universidades, das dezenove que fizeram parte do mapeamento. Sendo assim, os estados do Pernambuco e Bahia estão com a maior representatividade, acompanhado do estado de São Paulo.

As instituições públicas respondem por 73,43% das pesquisas, isso decorre das instituições públicas concentram mais de 80% dos programas de pós-graduação existentes no Brasil, para cada cinco Programas de Pós-graduação no país, quatro estão em instituições públicas[13]. Enquanto, as instituições privadas representam um percentual de 26,56% da produção acadêmica.

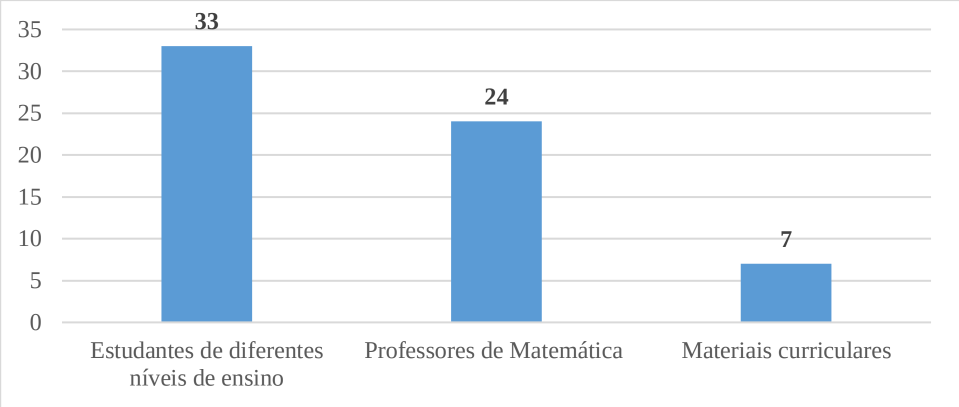
Passamos a seguir, à apresentação dos sujeitos de pesquisa e/ou objeto de investigação das pesquisas, não será possível contemplar todas, pois as pesquisas que constam no mapeamento não é nosso objeto de estudo, e sim, compreender possíveis lacunas e tendências acerca do Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais para melhor conduzir a nossa dissertação de Mestrado.

### 1.2.2 Sujeitos de pesquisa e/ou Objeto de investigação

Após a organização de aspectos físicos tais como número de pesquisas, ano de produção, instituição e região do país, iniciamos uma breve análise do conteúdo dessas investigações com o intuito de verificarmos quais foram os Sujeitos de pesquisa e/ou Objeto de investigação, para isso, recorremos aos resumos e até mesmo o texto completo das pesquisas. O Gráfico 3, ilustra essa distribuição.

[13] Fonte: Plataforma Sucupira, Capes.

Gráfico 3: Segmentação das pesquisas por Sujeito de pesquisa e/ou Objeto de investigação




Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Ao fazer as leituras, percebemos que mais da metade dos estudos tinham como Sujeito de pesquisa, os estudantes. Além disso, todas as pesquisas analisadas assumem a abordagem qualitativa da pesquisa com características de estudos exploratório, intervencionistas ou mesmo estudos de caso.

Convém destacar, ainda, que identificamos vinte e quatro estudos envolvendo os professores de Matemática como sujeitos de pesquisa. De modo geral, observamos que tais pesquisas buscaram investigar saberes docentes, crenças ou participaram de uma formação docente conforme as proposições de Vergnaud sobre campos conceituais, em especial, na Estrutura Multiplicativa.

E por fim, sete pesquisas tiveram como objeto de investigação os diferentes usos de materiais curriculares. Nesse sentido, tais pesquisas focalizaram análise de livros didáticos, de Propostas Curriculares e Currículos de diferentes Secretarias de Educação, além de manuais de ensino e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Diante do exposto, buscamos descrever o nível de escolaridade no qual estes estudos se destinaram. Para tanto, elaboramos os quadros 2, 3 e 4 seguindo uma ordem cronológica, nos quais buscamos evidenciar os sujeitos de pesquisa e/ou objeto de investigação, com os respectivos níveis de ensino e seus autores.

Como mencionado anteriormente, nossa intenção deste capítulo é apresentar um panorama das pesquisas, sem a pretensão de esgotar as discussões sobre os focos de investigação das mesmas.

**a) Pesquisas envolvendo estudantes de diferentes níveis de ensino**

A partir do Quadro 2, discorremos sobre os sujeitos de pesquisa, “aluno” e o nível de ensino das respectivas pesquisas. Constatamos que as pesquisas que escolheram o aluno como principal sujeito de estudo e focou nos Anos iniciais do Ensino Fundamental, representam 28,12% das pesquisas mapeadas, já para os Anos finais do Ensino Fundamental, com 20,31% e percentuais muito baixo para a Educação de Jovens e Adultos – EJA e estudante do Ensino Superior, um percentual de 3,12% voltada à EJA e apenas 1,56% foi adotado como sujeito de pesquisa o estudante do ensino superior.

Quadro 2: Distribuição das pesquisas cujos sujeitos envolvidos são alunos.

| **Sujeitos envolvidos** | **Nível de Ensino** | **Autores** |
|---|---|---|
| **Aluno** | Anos iniciais do Ensino Fundamental | Silva (1999); Batista (2002); Guimarães (2004); Placha (2006); Santana (2008); Silva (2010); Backendorf (2010); Lima (2012); Ferreira (2012); Zaran (2013); Fiore (2013); Sena (2015); Oliveira (2015); Teixeira (2016); Melo (2017); Nascimento (2017); Santana (2018); Oliveira (2018). |
| | Anos finais do Ensino Fundamental | Bonanno (2007); Barbosa (2008); Rasi (2009); Fioreza (2010); Porto (2015); Pereira (2015); Ferraz (2016); Castro (2016); Leite (2016); Dias (2016); Almeida (2017); Aguiar (2017); Pires (2018). |
| | EJA | Lima (2010); Lima (2018). |
| | Ensino Superior | Carvalho (2017) |

Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Diante do exposto, concluímos que mais de 50% das pesquisas tiveram como sujeito de pesquisa o aluno, os trabalhos que compõem esse eixo são as pesquisas com situações de ensino, intervenções ou propostas que estudam os processos de ensino e de aprendizagem acerca do Campo Conceitual Multiplicativo. Dos trabalhos que compõem o aluno como sujeito de pesquisa, temos vinte e nove dissertações de mestrado e apenas cinco teses de doutorado, sugerindo que não há muita continuidade de pesquisa de Mestrados para Doutorados.

### b) Pesquisas envolvendo a prática e a formação de professores

Quanto às pesquisas que apresentam o professor como sujeito de pesquisa, podemos observar no Quadro 3, vinte e três delas foram direcionadas aos professores que atuam nos Anos iniciais e Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Notamos a ausência de estudos relacionados ao professor do Ensino Superior, e apenas uma pesquisa em que o professor do Ensino Médio foi assumido enquanto sujeito de pesquisa. Temos um percentual de 35,93% entre dissertações e teses que consideraram o professor como sujeito de pesquisa, investigando a formação docente, suas crenças, saberes e conhecimentos. O quadro a seguir exibe os autores com o respectivo ano em que a pesquisa foi concluída.

Quadro 3: Distribuição das pesquisas cujos sujeitos envolvidos são professores.

| Sujeitos envolvidos | Nível de Ensino | Autores |
|---|---|---|
| **Professor** | Anos iniciais do Ensino Fundamental | Canôas (1997); Santos (2006); Vasconcelos (2008); Silva (2009); Yamanaka (2009); Alencar (2012); Silva (2014); Borga (2015); Maia (2016); Lima (2016); Castro (2016); Brito (2017); Luna (2017); Santos (2017); Santos (2017); Oliveira (2017); Silva (2018). |
| | Anos inicias e finais do Ensino Fundamental | Souza (2015); Barreto (2016); Milagre (2017); Correia (2018). |
| | Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio | Moreira (2014) |
| | Ensino Médio | Medeiros (2018) |

Fonte: Produzido pelos autores (2020).

No entanto, evidenciamos que os estudos que consideraram o professor como sujeito de pesquisa, que apesar de possuir um número reduzido de pesquisas em relação aos estudos direcionados ao aluno como sujeito, já contabilizam cinco teses de doutorado predominando assim um maior interesse pelo assunto, e também a existência de continuidade de pesquisas.

### c) Pesquisas envolvendo Materiais curriculares e estudos teóricos

Por último, construímos o tópico referente aos trabalhos que investigaram Materiais curriculares, como: livros didáticos; análise de documentos oficiais, mapeamento e estudos teóricos acerca do Campo Conceitual Multiplicativo, o que representa o percentual de 10,9% das pesquisas mapeadas. Na sequência, o Quadro 4, indica a composição desses estudos.

Quadro 4: Distribuição das pesquisas envolvendo Materiais curriculares.

| Objeto de investigação | Tipo de material curricular | Autores |
|---|---|---|
| **Materiais curriculares** | Livro didático | Filho (2009); Martins (2010); Castro (2016). |
| | Análise de documentos | Niemann (2013); Soares (2016). |
| | Mapeamento | Beyer (2018). |
| | Estudo teórico | Zanella (2013). |

Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Concluímos, que os pesquisadores que tiveram como sujeitos de pesquisa, aluno ou professor, os estudos em sua maioria, foram voltados para os anos inicias do Ensino Fundamental. Podemos evidenciar tal fato, a partir da criação do projeto OBEDUC, as pesquisas em sua maioria originaram a partir do projeto intitulado “Um estudo sobre o domínio das Estruturas

Multiplicativas no Ensino Fundamental (E-Mult)", vinculado ao programa, integrando Universidades da região nordeste do Brasil.

Por fim, os conteúdos matemáticos explorados nas pesquisas mapeadas foram, as operações básicas, mais especificamente, multiplicação e a divisão, razão, proporção, função, fração; porcentagem, combinatória, sendo que, apenas quatro dessas pesquisas apresentavam uma abordagem mais especifica em relação à temática, raciocínio combinatório. A seguir, detalharemos tais estudos pelo fato de estarem próximos ao nosso interesse de investigação.

## 1.3 Pesquisas que investigam o Raciocínio Combinatório na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

Como anunciado anteriormente, a primeira parte do desenvolvimento da pesquisa era mapear dissertações e teses acerca do Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Dessa forma, possibilitou conhecer a produção acadêmica relacionada à temática. O mapeamento nos oportunizou conhecer os estudos realizados, bem como compreender os significados das expressões associadas ao raciocínio combinatório, o referencial teórico e, também, ideias que emergiram das leituras das pesquisas.

Após o mapeamento consolidado percebemos um número reduzido de trabalhos cuja a abordagem se trata do tema Raciocínio Combinatório perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Nesse sentindo, o mapeamento nos permitiu comprovar tal lacuna e, desse modo, nos ajudar a evidenciar a relevância do presente estudo.

Além disso, pelo fato de tais estudos se aproximarem do nosso objeto de pesquisa, buscamos descrevê-los considerando aspectos como a questão de investigação, os métodos de produção de dados e alguns dos principais resultados dessas pesquisas. Antes, porém, apresentamos, no Quadro 5, uma síntese das pesquisas que abordam o Raciocínio Combinatório na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.

Quadro 5: Pesquisas que abordam a temática: Raciocínio Combinatório

| Título | Autor | Ano | Instituição | Curso |
|---|---|---|---|---|
| A solução de problemas de produto de medidas de crianças da 3ª série do Ensino Fundamental e a intervenção do professor. | Kelly Cristine Placha | 2006 | UFPR-PR | Mestrado |
| O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio. | Rita de Cássia Gomes de Lima | 2010 | UFPE-PE | Mestrado |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Os conhecimentos acerca dos conceitos de análise Combinatória de professores que ensinam Matemática: um estudo diagnóstico. | Francis Miller Barbosa Moreira | 2014 | UESC-BA | Mestrado |
| Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações. | Ewellen Tenorio de Lima | 2018 | UFPE-PE | Mestrado |

Fonte: Produzido pelos autores (2020).

Como podemos evidenciar no quadro anterior, todas as pesquisas identificadas foram desenvolvidas em nível de Mestrado. A seguir apresentaremos uma breve descrição de cada uma delas, buscando identificar suas contribuições e possíveis lacunas de investigação no âmbito da Educação Matemática.

A pesquisa de Placha (2006) teve como questão central de investigação: como ocorre o processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas de crianças da 3ª. série, na solução de problemas, sob a intervenção do professor? Trata-se de uma pesquisa de caráter exploratório, de natureza qualitativa, que investigou o processo de aprendizagem de crianças, das estruturas multiplicativas, conforme as proposições de Vergnaud sobre campos conceituais.

Para a coleta de dados, foram apresentados oito problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas. A pesquisa foi realizada com cinco crianças de terceira série dos anos inicias do Ensino Fundamental. Para a análise dos dados e discussão dos resultados foram tomados como base os estudos de Moro e Soares (2006), onde estão descritos os níveis e subníveis de raciocínio combinatório.

Nas discussões sobre os resultados a pesquisadora salienta que,

> Os resultados desta pesquisa indicam que os avanços das crianças no processo de aprendizagem de relações multiplicativas de produto de medidas, de níveis menos avançados de solução para níveis mais avançados de solução, no decorrer da solução dos problemas, estão ligados às formas de intervenção utilizadas pela experimentadora (PLACHA, 2006, p. 265).

A pesquisadora assinala para alguns dos resultados da sua pesquisa, os quais considerada de fundamental importância para professores e pesquisadores na área da Educação Matemática.

> [...] a necessidade de o professor incentivar e estimular as crianças à utilização de estratégias próprias de cálculo; a relevância do trabalho com os conceitos matemáticos a partir da solução de problemas; a importância de o professor identificar e acompanhar o processo de aprendizagem das crianças para que possa realizar intervenções significativas; a relevância das interpretações das crianças sobre as soluções notacionais e verbais que utilizam quando solucionam problemas; a importância do trabalho com as estruturas multiplicativas na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental e a necessidade de

> o professor compreender os conceitos matemáticos que trabalha com as crianças. (PLACHA, 2006, p. 270).

Diante das ponderações, a pesquisadora ainda ressalta que o trabalho com o raciocínio combinatório deve partir sempre do nível de compreensão em que as crianças se encontram. Em sua pesquisa, buscou durante a solução dos problemas pelas crianças, procurar partir sempre do nível de compreensão que as crianças dominavam sobre raciocínio combinatório.

Observamos que duas pesquisas (LIMA, 2010; LIMA, 2018) tiveram a mesma orientadora, Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, do Programa de Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal do Pernambuco. Os dois trabalhos realizaram a coleta de dados com alunos da modalidade de ensino EJA. Lima (2018), além de explorar os problemas de Combinatória, buscou focar nas relações que se estabelecem entre os conhecimentos da Combinatória e da Probabilidade.

A pesquisa de Lima (2010) teve como objetivo analisar a compreensão de indivíduos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) em cinco níveis desta modalidade de ensino sobre problemas de Estruturas Multiplicativas, especificamente os que envolvem o raciocínio combinatório de naturezas distintas (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Participaram do estudo 150 alunos da EJA de cinco instituições (uma municipal, duas estaduais, uma federal e uma mantida pelo Serviço Social do comércio (SESC).

A pesquisa está respaldada na Teoria dos Campos Conceituais e o Campo das Estruturas Multiplicativas de Vergnaud. Assim, foi aplicado um teste com os alunos da Educação de Jovens e Adultos, sendo 16 questões multiplicativas e de combinatória (duas questões para cada tipo de problema), elaborado a partir do estudo de Selva e Borba (2008) intitulado *Sondando o conhecimento de professoras sobre o desenvolvimento conceitual multiplicativo*. Os problemas de Combinatória fazem parte do estudo de Pessoa (2009), *"Quem dança com quem: a compreensão do raciocínio combinatório dos 7 aos 17 anos".*

Nesse sentido, a pesquisadora buscou apresentar sua análise e discussão dos resultados por desempenho em função da série; desempenho por tipo de problema multiplicativo e combinatório em função da série; desempenho em função dos anos de estudo, já que muitos desses alunos têm muita disparidade entre sua permanência na escola; desempenho em função da faixa etária; desempenho por profissão exercida; tipos de respostas apresentadas pelos alunos nos módulos e nas atividades profissionais e por fim, tipos de estratégias utilizadas pelos alunos por tipo de problemas multiplicativos e por profissões. Acreditamos que tal detalhamento se justifica em função do número de alunos e da variação dos módulos que os alunos cursavam.

Lima (2010) afirma que:

> Em todos os módulos (séries) os problemas de produto cartesiano, especialmente o de produto cartesiano direto, foram os que apresentaram o maior percentual de acertos. De acordo com o estudo de Pessoa (2009), isso pode acontecer por influência da escola, pois os problemas que envolvem o raciocínio combinatório geralmente são explicitamente trabalhados com as crianças a partir do 3º ou 4º ano do Ensino Fundamental, sendo o produto cartesiano trabalhado em conjunto com outros significados das estruturas multiplicativas, por exemplo, proporcionalidade, configuração retangular e comparativa. (LIMA, 2010, p. 92).

A pesquisadora faz uma inferência com relação a um dos objetivos principais da pesquisa no aspecto relacionado à comparação do desempenho em função da escolaridade, e afirma que:

> Quando relacionados com os anos de escolarização, percebeu-se que à medida que avançavam na escolarização também ocorreram avanços nos desempenhos com relação à compreensão dos significados dos problemas, ou seja, no sentido que avançavam nos anos escolares, os alunos iam utilizando os conceitos-em-ação característicos de cada tipo de problemas dos conceitos *combinatórios*, (LIMA, 2010, p. 126).

Já a pesquisa de Lima (2018) buscou analisar contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa no contexto da Educação de Jovens e Adultos. A pesquisa teve como foco as relações que se estabelecem entre os conhecimentos da Combinatória e da Probabilidade. Trata-se de uma investigação de caráter quanti-qualitativo que buscou respaldo teórico na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e na revisão de literatura trouxe a Educação de Jovens e Adultos (EJA). Desse modo apresenta e reflete sobre um apanhado das propostas curriculares para a EJA, assim como estudos anteriores voltados à temática dessa modalidade de ensino.

A pesquisadora afirma que alguns dos resultados se confirmam com os achados de Lima (2010), por exemplo em relação à escolaridade, *"à medida que avançava o nível de escolarização, percebeu-se uma melhor compreensão dos* ***invariantes*** *dos problemas abordados e o uso de* ***representações simbólicas*** *e estratégias mais adequadas às suas resoluções*", Lima (2018, p. 78, grifos do autor).

A pesquisadora destaca para o fato de que a articulação entre Combinatória e Probabilidade deve ser pensada de maneira não dissociada tendo em vista o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico:

> [...] desse modo, dado o observado a partir da realização do presente estudo exploratório com estudantes da EJA, defende-se que a articulação entre os raciocínios combinatório e probabilístico pode beneficiar o desenvolvimento de ambos nessa modalidade de ensino. Foi possível perceber, assim, contribuições que surgem entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade através da Resolução de Problemas que permitem uma relação entre ambos os raciocínios. (LIMA, 2018, p. 137).

Dando sequência aos estudos que abordaram o Raciocínio Combinatório, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, a pesquisa de Moreira (2014) investigou o desempenho e as estratégias apresentadas por professores que ensinam Matemática ao lidar com problemas envolvendo Análise Combinatória. Adotou-se como embasamento teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), especialmente no campo das Estruturas Multiplicativas - eixo produto de medidas, no qual a Análise Combinatória está inserida; e também nas ideias de Shulman (1986, 2005) no que se refere à importância do conhecimento do professor para a sua prática e o desenvolvimento profissional. Participaram da pesquisa 18 professores que lecionam Matemática, que estavam iniciando as atividades do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) de uma Universidade pública do sul da Bahia.

O pesquisador apresentou os resultados de sua pesquisa sob três aspectos: *Perfil dos professores, análise quantitativa do desempenho dos professores e análise qualitativa dos tipos de respostas e estratégias*. Em relação ao perfil dos professores, "os professores estão preocupados com sua formação, pois além de todos (exceto um) serem licenciados em Matemática, 11 destes já passaram por um curso de especialização e todos atualmente cursam o Mestrado Profissional em Matemática" (MOREIRA, 2014, p. 144).

No que se refere à análise quantitativa do desempenho dos professores, o autor afirma: "percebemos que os professores demonstraram menor dificuldade nas situações de arranjo, seguido de produto cartesiano, permutação e, por fim, as maiores dificuldades nos problemas de combinação" (MOREIRA, 2014, p. 145). Quanto à análise qualitativa dos tipos de respostas e estratégias, "as estratégias mais utilizadas foram o princípio fundamental da contagem e as fórmulas, o que demonstrou uma preferência dos professores por métodos mais formais de resolução" (MOREIRA, 2014, p. 145).

Além disso, o autor ressalta que a pesquisa atendeu ao objetivo proposto e no decorrer do desenvolvimento da pesquisa, algumas ideias, surgiram como possibilidades de encaminhamentos para futuras pesquisas. Segundo Moreira (2014),

> Ao desenvolver esta pesquisa com o intuito de investigar o desempenho de professores ao resolver problemas sobre Análise Combinatória, nos deparamos com um quadro que demonstra várias lacunas no conhecimento desses professores acerca desse conteúdo. A partir daí, nos questionamos o quanto essas lacunas estão relacionadas à formação desses professores? Isto é, de que forma os conceitos relacionados à Análise Combinatória estão sendo trabalhados nos cursos de formação de professores de Matemática? Assim, sugerimos que façamos uma reflexão sobre a formação dos futuros e atuais professores que ensinam Matemática acerca do ensino da Análise Combinatória (MOREIRA, 2014, p. 149).

De modo geral, os estudos até aqui apresentados, evidenciaram que há muitas barreiras na aprendizagem dos conceitos combinatórios e que os alunos apresentam grandes dificuldades na compreensão desses conceitos. Pires (2018), por exemplo, afirma que o Campo Conceitual multiplicativo, nas relações ternárias, no eixo produto de medidas, nas classes configuração retangular e Combinatória, numa perspectiva de Resolução de Problemas é ainda pouco trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental, visto que os resultados obtidos a partir da análise das estratégias utilizadas pelos estudantes apontam para uma soma de parcelas repetidas ou subtrações sucessivas.

Nesse sentindo, ao finalizarmos este mapeamento, é importante salientar que, após identificarmos quatro estudos sobre o Raciocínio Combinatório, um número bem reduzido de pesquisas acerca da temática em questão, seguindo nesta direção acreditamos que iremos contribuir com mais uma pesquisa para que haja melhor compreensão do processo de aprendizagem que envolvem o Raciocínio Combinatório no campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva teórica de Vergnaud.

Em posse dos resultados desse mapeamento, optamos por delimitar nosso objeto de investigação focado em análises das estratégias de resolução de atividades envolvendo raciocínio combinatório. Consequentemente, o Produto Educacional que decorre da presente investigação, assumirá a perspectiva dos dispositivos de formação, buscando contribuir com a proposição de uma proposta formativa pautada no Ensino de Combinatória.

Contudo, como assumiremos a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como um dos alicerces desta pesquisa, a seguir, apresentaremos alguns pressupostos deste quadro teórico bem como discussões sobre o campo das Estruturas Multiplicativas e Análise Combinatória.

# CAPÍTULO 2 – PRESSUPOSTOS TEÓRICOS: TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS, PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste Capítulo apresentamos os pressupostos teóricos que alicerçam a presente pesquisa. Num primeiro momento debruçamos sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud para dar suporte teórico em termos da compreensão de determinados procedimentos e conceitos relacionados ao estudo da Análise Combinatória, segundo discorremos sobre alguns tópicos e conceitos referente ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC) presentes em situações/problemas que envolvem a Análise Combinatória (parte da Matemática que estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios), enfatizando quatro tipos de problemas: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.

## 2.1 Alguns pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida na década de 1970, pelo psicólogo e pesquisador francês Gérard Vergnaud (1990; 2009). Trata-se de uma teoria cognitivista, que nos ajuda a entender como as crianças constroem os conceitos matemáticos. Nesse sentido, oferece um quadro coerente e alguns fundamentos para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas (VERGNAUD, 1990).

Autores como Moreira (2002); Magina (2005) e Pessoa e Borba (2010) indicam que a Teoria dos Campos Conceituais possibilita uma base sólida às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência à aprendizagem da Matemática, numa perspectiva de Campo Conceitual, isto é, estudar as várias relações existentes entre os conceitos matemáticos.

Antes de seguirmos, é importante sinalizar que optamos por apresentar apenas alguns dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais que podem auxiliar na compreensão do nosso objeto de estudo. Dentre estes pressupostos, discorreremos sobre a noção de Campo Conceitual, algumas contribuições de pesquisadores brasileiros na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais e, também, sobre o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

### 2.1.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A ideia de Vergnaud em estudar um Campo Conceitual e não um conceito se justifica pelo fato deste último estar presente em várias situações que dão sentido a um determinado conceito. Por outro lado, em uma mesma situação são evocados vários conceitos, ou seja, numa situação problema qualquer, por mais simples que seja, nunca um conceito aparece isolado (VERGNAUD, 1990).

Segundo Vergnaud (1990, p. 1, tradução nossa), "a Teoria dos Campos Conceituais não é específica da Matemática; mas tem sido elaborado em primeiro lugar para dar conta dos processos progressivos de conceituação das Estruturas Aditivas, estruturas multiplicativas, relações número-espaço e álgebra"[14].

Nesse sentido, Magina, Merlini e Santos (2016, p. 520), afirmam que "podemos nos referir a um Campo Conceitual como sendo um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros".

A assimilação de um Campo Conceitual, ou seja, a capacidade de resolver problemas nas mais diversas situações nas quais se faz presente um determinado conceito, não ocorre em poucos meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos se quisermos que os alunos progressivamente os dominem. Diante dessa visão, um conceito não pode ser reduzido a uma definição, sobretudo se estivermos interessados em seu ensino e em sua aprendizagem.

Nesse sentido, um Campo Conceitual é "um conjunto de situações cujo tratamento implica esquemas, conceitos e teoremas em estreita relação, assim como representações linguísticas e simbólicas que podem ser utilizadas para simbolizá-los" (VERGNAUD, 1990, p. 147).

Com base em Vergnaud (1986, p. 84), três argumentos importantes para a compreensão do que é um Campo Conceitual e as razões pelas quais é mais conveniente estudar os campos e não os conceitos isolados.

Em primeiro lugar, uma situação dada não dispõe, geralmente, em execução todas as propriedades de um conceito. Se queremos fazer os alunos encontrar todas estas propriedades é preciso fazer, necessariamente, referência a uma diversidade de classes de problemas. Em segundo, uma dada situação não dispõe necessariamente de um único conceito; a sua análise requer, a maior parte das vezes, vários conceitos, e as dificuldades encontradas pelos alunos derivam, em geral, de vários conceitos. Por exemplo, problemas da multiplicação e de divisão podem implicar os conceitos de proporções simples e múltiplas, funções, número racional (decimal, fração, razão e proporção) e outros. E por último, a formação de um conceito, particularmente se considerarmos através das atividades de resolução de problema, em geral comtempla um longo período de tempo, com muitas interações e rupturas.

---

[14] "*La teoría de los campos conceptuales no es específica de las Matemáticas; pero ha sido elaborada primeramente para dar cuenta de procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del álgebra*."

> Não se pode compreender a significação dos erros ou dos procedimentos de uma criança de 13 anos se não se conhece de que maneira são formadas as suas concepções e competências na idade de 8 ou 9 anos, ou mesmo de 4 ou 5 anos, e a maneira como estas concepções e competências evoluíram através de uma variedade de situações, de definições, de interpretações e de representações simbólicas. (VERGNAUD, 1986, p. 84).

A Teoria dos Campos Conceituais aponta uma diversidade de situações que são necessárias à construção dos conceitos. Vergnaud (1986, p. 7) afirma que "estudar a aprendizagem de um conceito isolado, ou de uma técnica isolada, não tem praticamente sentido". Nessa perspectiva, de acordo com Vergnaud (1990), a construção de um conceito envolve um tripé de conjuntos que, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, é chamada simbolicamente de C = (*S*, *I*, *R*) onde:

> **S**: é o <u>conjunto de situações</u> que dão sentido ao conceito (a referência);
> **I**: é o <u>conjunto de invariantes</u> (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito (o significado);
> **R**: é o <u>conjunto de representações simbólicas</u>, ou seja, das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante), (VERGNAUD, 1990, p. 166, grifos nosso).

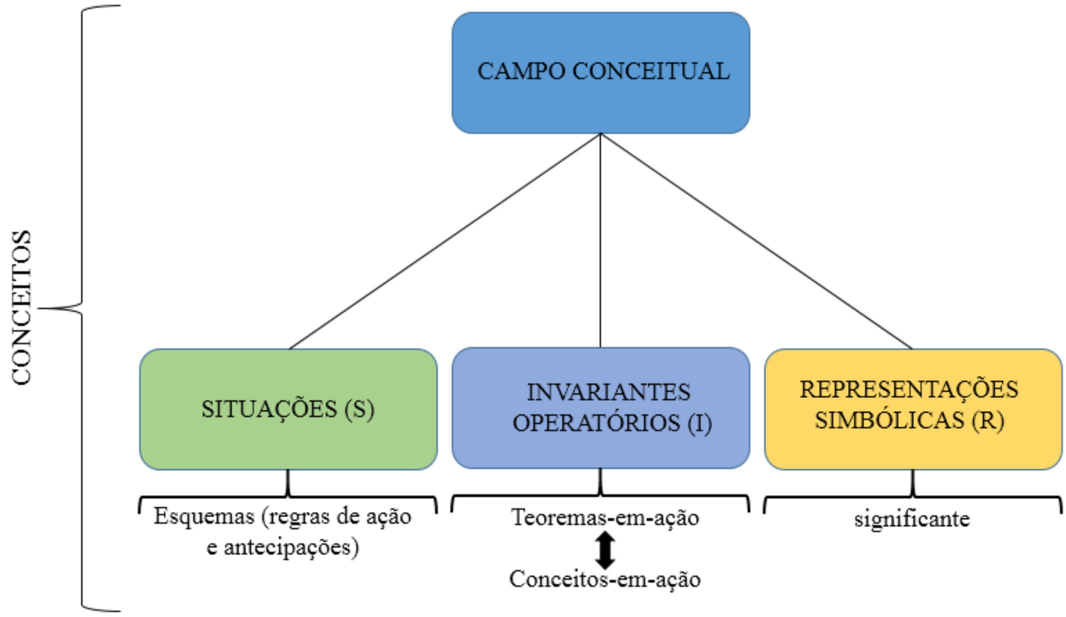
De acordo com Vergnaud (1990, p. 166) estudar o desenvolvimento e operação de um conceito, durante o aprendizado ou durante o uso, é necessário considerar esses três planos ao mesmo tempo. Não existe, em geral, bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações. Portanto, o significado não pode ser reduzido a significantes ou às situações.

Com base em Vergnaud (1998, apud MOREIRA, 2002, p. 10):

> uma definição pragmática poderia considerar um conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação, mas esta definição implica também um conjunto de situações que constituem o referente e um conjunto de esquemas postos em ação pelos sujeitos nessas situações. Daí, o tripleto (**S**, **R**, **I**) onde, em termos psicológicos, **S** é a realidade e (**I**, **R**) a representação que pode ser considerada como dois aspectos interagentes do pensamento, o significado (**I**) e o significante (**R**).

A seguir, na Figura 2, apresentamos um diagrama para a teoria, ou seja, uma ilustração para os conceitos-chave e suas principais conexões.

Figura 2: Diagrama para a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud




Fonte: os autores a partir das ideias de Moreira (2002).

Vamos nos atentar para uma das definições propostas pelo pesquisador Vergnaud (1986, p. 10), "um Campo Conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão".

A partir dessa definição iremos descrever, brevemente, sobre alguns termos que contemplam o diagrama anteriormente (Figura 2). O conceito de situação atribuído por Gérard Vergnaud não tem aqui o sentido de situação didática, mas sim o de tarefa. Nesse sentido, a ideia é que qualquer situação complexa possa ser analisada como uma combinação de tarefas das quais é importante conhecer sua própria natureza e dificuldade. "A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das diferentes subtarefas envolvidas, mas é claro que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global" (VERGNAUD, 1990, p. 8).

Segundo Vergnaud (1990), ao se tratar de situações precisamos manter duas ideias principais: a  primeira, é que se relaciona com a pluralidade: existe uma grande variedade de situações em um dado Campo Conceitual, e essas várias situações são um meio de gerar sistematicamente o conjunto de classes possíveis; e a segunda é a história: o conhecimento dos alunos é moldado pelas situações que foram encontrados e progressivamente dominados, especialmente pelas primeiras situações capaz de entender os conceitos e procedimentos que eles querem que sejam ensinados, Vergnaud (1990, p. 10).

Portanto, podem ser identificadas regularidades notáveis de uma criança para outra, na maneira como abordam e tratam da mesma situação, nas concepções primitivas formadas por objetos, suas propriedades e de seus relacionamentos e nos estágios pelos quais passam (VERGNAUD, 1990). São as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos; as situações são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito.

De acordo com Vergnaud (1990, p. 15 apud MOREIRA, 2002, p. 11), o sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes. Mais precisamente, são os esquemas evocados no sujeito individual por uma situação ou por um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para este assunto. Por exemplo, o sentido da adição para um tópico (conteúdo) é o conjunto de esquemas que você pode implementar para lidar com situações em que o sujeito passa a ser confrontado e que envolvem a ideia de adição; é também o conjunto de esquemas que pode ser colocado em ação para operar com os símbolos, numérico, algébrico, gráfico e linguístico representado pela adição.

No entendimento de Moreira (2002, p. 11), a ideia de Campo Conceitual nos leva a conceitualizar conceito. Um conceito pode ser definido, com efeito, como um tripleto de conjuntos (referente, significado e significante); porém, como são as situações que dão sentido ao conceito, chegamos ao conceito de situação e dele ao de esquema, pois são os esquemas evocados pelo sujeito que dão sentido a uma dada situação. O conceito de esquema, como veremos, nos levará ao conceito de invariante operatório.

Para Vergnaud (1990, p. 2) os esquemas se referem necessariamente a situações, ou classes de situações, as quais ele distingue em:

1) tipos de situações para as quais o sujeito tem em seu repertório, em um momento dado o seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, as competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação;

2) tipos de situações para as quais o sujeito não possui todas as competências necessárias, o que o leva a um tempo de reflexão e exploração, de dúvidas, tentativas abortadas e, eventualmente, levam ao sucesso ou ao fracasso.

O conceito de esquema é interessante para ambos os tipos de situações, mas não funciona da mesma forma nos dois casos. No primeiro caso, será observado por uma mesma classe de situações, comportamentos altamente automatizados, organizados por um esquema somente; no segundo caso, será observado o esquema sucessivo de vários esquemas, que eles podem entrar em competição e que, para alcançar a solução desejada, devem ser acomodados, separados e recombinados; esse processo é necessariamente acompanhado de descobertas. (VERGNAUD, 1990).

Baseado em estudos de Gérard Vergnaud, uma definição de esquema é dada por (MOREIRA, 2002, p. 12), "esquema é a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações”. E ainda ele traz, aquilo que Vergnaud chama de ingredientes dos esquemas: um esquema é composto de regras de ação e antecipações como gera uma série de ações para atingir determinado objetivo, não é reconhecido desde que também seja essencialmente composto por invariantes operativos (conceitos-em-ação e conhecimento-em-ação) e inferências[15]. (VERGNAUD, 1990, p. 5).

Segundo Vergnaud (1990, p. 2), é nos esquemas que o conhecimento-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operativa.

Como exemplo, podemos pensar na situação em que um grupo de alunos do 6º ano devem comparar o volume de um objeto sólido preenchido e o de um recipiente (uma nova situação para eles). Com base nas ideias de (VERGNAUD, 1990, p. 4), o primeiro esquema mobilizado foi o de comparar as alturas, como se fosse comparar a quantidade de suco de laranja em dois copos da mesma maneira: essa ação de comparação dos níveis não leva a nenhuma conclusão. O segundo esquema observado foi a da imersão parcial do objeto sólido no recipiente: evidentemente como ao recipiente também estava cheio, a água transborda; a conclusão do aluno foi que o objeto sólido era maior. Somente como consequência de outras ações mais ativas, foram realizadas é quando um procedimento preciso permite elucidar a questão. Assim, vários esquemas, aparentemente menos relevantes, haviam sido lembrados antes que uma solução surgisse.

Vergnaud (1990, p. 160), indica que “conceito-em-ação” e “teorema-em-ação” designam os conhecimentos contidos nos esquemas. São também designados, pela expressão mais global invariantes operatórios. Teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira ou falsa sobre o real, portanto associá-los às situações remete a um determinado conceito de conhecimento; conceito-em-ação é uma categoria de pensamento considerada como pertinente.

Um conceito torna-se significativo por meio de uma variedade de situações, Vergnaud (1990, p. 10), mas o sentido não está nas situações em si mesmas, assim como não está nas palavras nem nos símbolos matemáticos, Vergnaud (1990, p. 14).

O sentido é uma relação do sujeito com situações e significantes. Mais precisamente, são os esquemas, ou seja, as ações e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante, que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo (MOREIRA, 2002, p. 17).

Apresentamos um breve estudo sobre a noção de Campo Conceitual fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Lembrando que esse estudo não se esgota por aqui, por ser uma teoria que está presente em pesquisas do campo da Educação Matemática e do Ensino de Ciências e, portanto, exige uma melhor compreensão/entendimento.

[15] Inferências são indispensáveis para executar cada situação específica: esquema permite gerar séries de diferentes ações e coleta de informações dependendo dos valores das variáveis da situação. Um esquema é sempre um universal pois está associado a uma classe e também que essa classe geralmente não é finita.

### 2.1.2 – O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas

A proposta de classificação de Vergnaud (1990) para a área da Matemática, considera que as quatro operações da Aritmética estão divididas em dois Campos Conceituais importantíssimos que sustentam todos os demais conceitos matemáticos: o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas.

> Por exemplo, para o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, o conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação destas duas operações e, para as estruturas multiplicativas, o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações. (VERGNAUD, 1990, p. 167).

Tomando como base as ideias de Vergnaud apresentamos um exemplo de situação do Campo Aditivo com base no entendimento de Magina (2005), no qual podemos identificar a implicação de vários conceitos. Se pensarmos em uma situação aditiva extremamente simples, como por exemplo: *Joana tinha 40 figurinhas e ganhou 35 num jogo. Quantas figurinhas ela tem agora?*[16] Podemos identificar vários conceitos aqui envolvidos, os quais a criança precisa ter adquirido para resolver com sucesso o problema, são eles: adição, temporalidade (tinha = passado, tem agora = presente), contagem, compreensão do sistema decimal (os numerais são 10 – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – e a partir de suas combinações obteremos infinitos números).

Nesse sentido, com base em Vergnaud (1998), a situação descrita anteriormente envolve vários conceitos mencionados, há vários conceitos-em-ação distintos implícitos na compreensão dessas situações: número cardinal, ganho e perda, aumento e diminuição, transformação e estado, estado inicial e final, transformação positiva e negativa, adição e subtração.

Para o desenvolvimento da nossa pesquisa, daremos ênfase ao segundo Campo Conceitual, ou seja, Campo Conceitual das estruturas multiplicativas. Desse modo, apresentaremos, a seguir, algumas considerações sobre sua estruturação.

### 2.1.3 - Sobre as relações multiplicativas

A partir da Teoria dos Campos Conceituas de Vergnaud (1983, 1988, 1994, 2009) referente às relações multiplicativas, que é denominado de Campo Conceitual Multiplicativo,

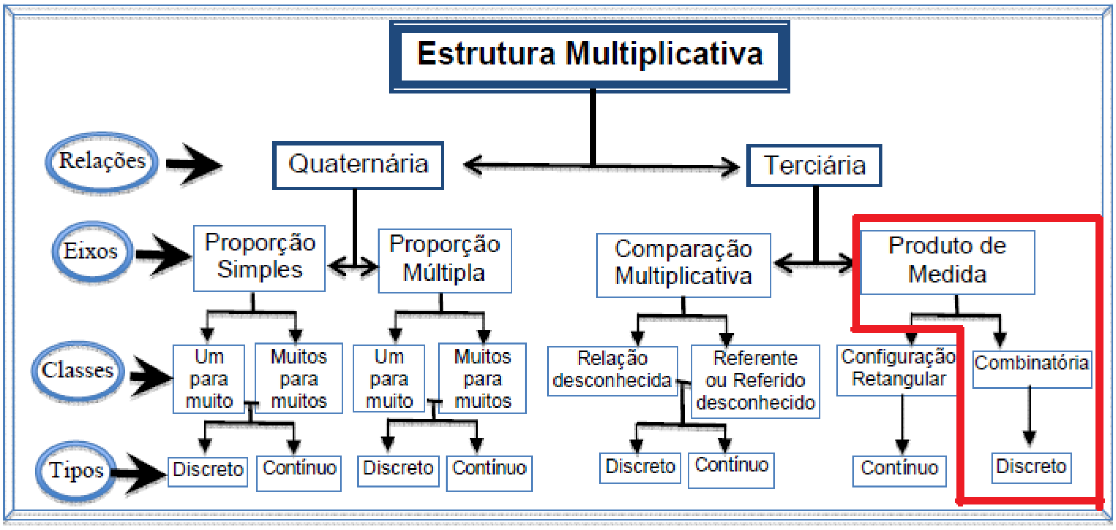
---

[16] Ainda, o mesmo problema pode se apresentar de maneira variada, por exemplo:
"Joana tinha algumas figurinhas, ganhou 35 num jogo e ficou com 75. Quantas figurinhas ela tinha?
"Joana tinha 40 figurinhas. Ganhou algumas e ficou com 75. Quantas figurinhas ela ganhou? Adaptado de Magina (2005, p. 4)

Magina, Merlini e Santos (2016) elaboraram um esquema (Figura 3) que sintetiza as ideias centrais desse campo.

O esquema é constituído por duas relações: *quaternárias* e *ternarias*. Cada uma dessas relações, por sua vez, é constituída por dois eixos. Os eixos pertencentes às relações *quaternárias* dividem-se em duas classes: *um para muitos* e *muitos para muitos*. Os eixos das relações *ternárias* encontram-se assim divididos: para o eixo *comparação multiplicativa* tem-se as classes: *relação desconhecida* e *referido desconhecido*; o eixo produto de medida tem as classes: *configuração retangular* e *Combinatória*. Todas as classes podem usar quantidades do tipo *discreta* ou *contínua*, exceto a classe configuração retangular (apenas quantidade contínua) e combinatória (apenas quantidade discreta).

Figura 3: Esquema de classificação de problemas do Campo Multiplicativo.

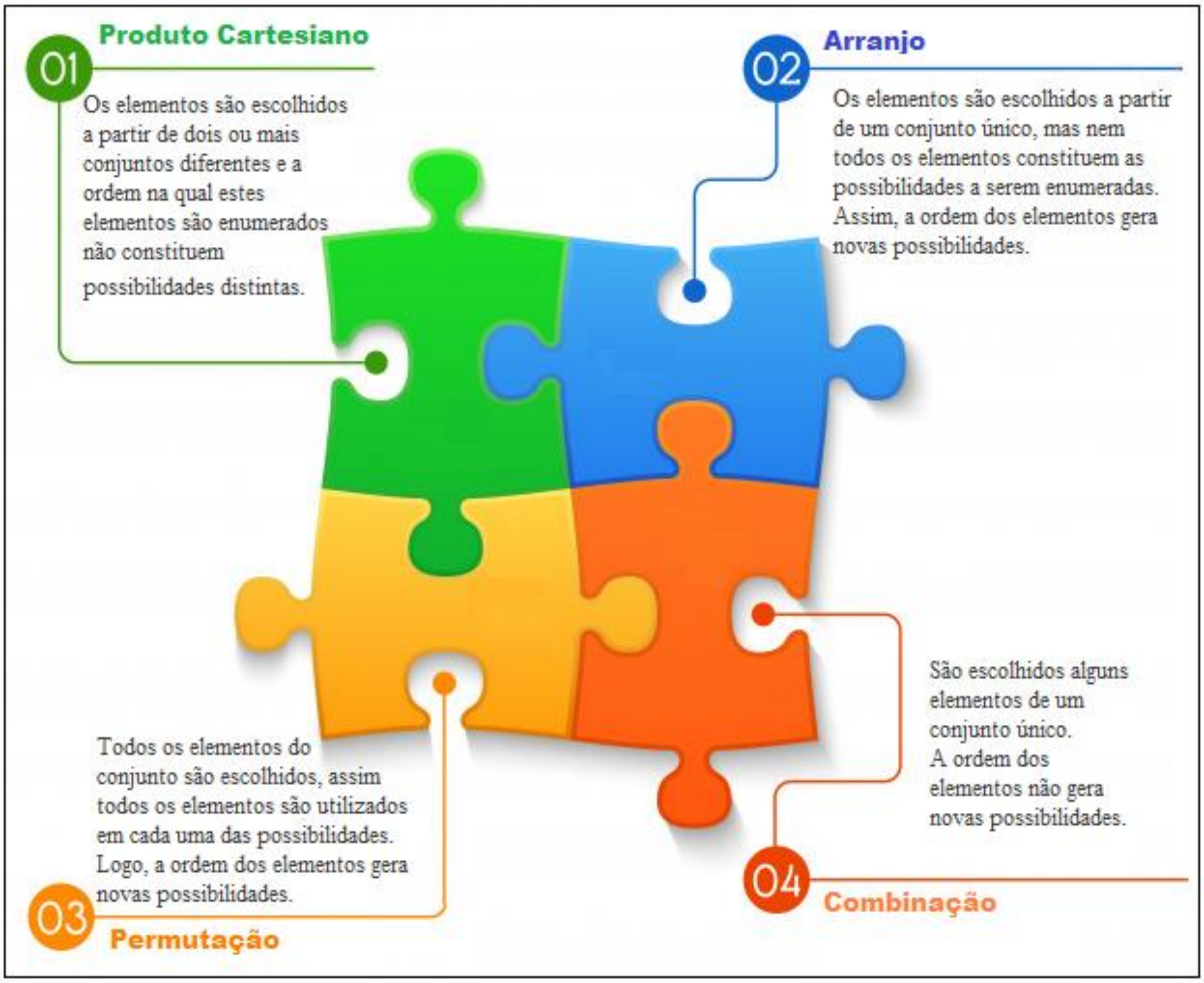



**Fonte:** Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69, grifos nossos).

Ressaltamos que a Figura 3 sintetiza as ideias centrais acerca das situações envolvendo o Campo Multiplicativo, contemplando os problemas referente ao Produto de Medida (Produto Cartesiano), mas que não abarca os todos os problemas de Combinatória, por exemplo: arranjo, e permutação, tal como sinalizado por Borba (2010, 2013).

Na sequência apresentamos na Figura 4 um diagrama para ilustrar uma das ideias de Borba (2010, 2013) referente à Combinatória, ela considera quatro tipos de problemas como característicos do pensamento combinatório: o produto cartesiano, a permutação, o arranjo e a combinação.

Figura 4: Esquema referente aos tipos de problemas Combinatórios.



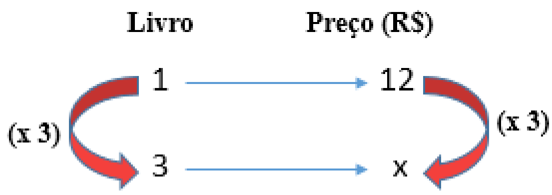

**Fonte:** elaborado pelos autores a partir das ideias de Borba (2013).

Com base em Borba (2013), apresentamos neste diagrama os problemas que envolvem raciocínio combinatório trabalhados no Ensino Fundamental e Médio – o produto cartesiano, a permutação, o arranjo e a combinação, os quais estão intimamente associados por relações Combinatórias básicas, mas também possuem relações próprias que devem ser tratadas por meio de representações simbólicas que permitem o adequado levantamento de possibilidades. A pesquisadora defende que é necessário estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório bem antes do Ensino Médio. Isto, porque demanda um longo tempo para se apropriar de tal conhecimento, dado que são várias as possibilidades de situações Combinatórias a serem tratadas, as quais apresentam vários níveis de complexidade.

Para fazermos uma breve diferenciação entre as relações ternárias e quaternárias, propomos analisar a seguinte situação: *Um livro custa R$ 12,00. Quanto pagarei na compra de três livros?*

Situação desse tipo são recorrentes na escola. Gitirana *et al.* (2013) a consideram como protótipo da multiplicação, cuja resolução, comumente, se apoia em uma relação ternária: $a\ x\ b = c\ (12\ x\ 3 = 36)$. Esse tipo de resolução permite que o estudante lance mão da adição de parcelas iguais (12 reais + 12 reais + 12 reais = 36 reais). Contudo, o que está implícito nessa situação é uma relação quaternária entre duas variáveis de naturezas distintas que pode ser representada pelo esquema a seguir (Figura 5), da seguinte maneira:

Figura 5: Escalar multiplicativa: um caminho para resolver problemas multiplicativos




Fonte: elaborado pelos autores (2020).

Essa é uma situação típica das relações *quaternárias*. Nesse caso, tem-se uma dupla relação entre duas quantidades (livro e preço). O entendimento das relações quaternárias possibilita aos estudantes compreenderem o porquê dessa situação; ao se multiplicar o preço de um livro pela quantidade deste, o resultado será dado em reais e não em livro. Além disso, amplia os procedimentos de resolução, podendo pensar no fator escalar multiplicativo como estratégia ou ainda no fator funcional (conhecimento de base que é central para o trabalho com as funções nos anos mais avançados de escolaridade).

As relações *ternárias* são tratadas como uma relação entre dois elementos, de naturezas iguais ou distintas, que se compõem para formar um terceiro elemento. Por exemplo, multiplicam-se metros por metros (unidade de medida linear), resultando metros quadrados (unidade de medida de superfície).

Diante de uma breve diferenciação entre as relações *quaternária* e *terciária*, apresentaremos cada um dos eixos que compõe tais relações. Ainda, com base em Magina, Merlini e Santos (2016), descrevemos cada um dos eixos com suas respectivas classes.

**Eixo 1 – Proporção simples:** trata-se de uma relação *quaternária*. Como o próprio nome diz, envolve uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de uma natureza e as outras duas de outra natureza, ou, então, uma simples proporção direta entre duas quantidades, como por exemplo: lado e perímetro, deslocamento e tempo, tempo e distância, entre outras. Esse eixo pode ser subdivido em duas classes de situações: a correspondência *um para muitos* e a correspondência *muitos para muitos*.

**Eixo 2 – Proporções múltiplas:** trata-se de uma classe de situações que envolvem uma relação *quaternária* entre mais de duas quantidades relacionadas duas a duas. Por exemplo: operários, dias e horas. Como no eixo anterior, esse eixo pode ser subdivido em duas classes: a correspondência *um para muitos* e a correspondência *muitos para muitos*.

**Eixo 3 – Comparação multiplicativa:** as situações que fazem parte desse eixo envolvem a comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma natureza. Já no início da escolarização, situações envolvendo a relação de dobro e de metade são exploradas e se configuram como protótipo dessa classe de situação, como por exemplo: Na loja de brinquedos, uma boneca custa R$ 28,00 e o quebra-cabeças simples custa metade do preço da boneca. Quanto custa o Quebra-cabeças?

**Eixo 4 – Produto de medidas:** esse eixo é constituído por duas classes: (a) situações envolvendo a ideia de *configuração retangular,* (b) situações envolvendo a ideia de *Combinatória*. A última: Combinatória – a ideia presente nessa classe remete à noção do produto cartesiano entre dois conjuntos disjuntos, ou seja, não possui nenhum elemento em comum ($A \cap B = \emptyset$). Temos, como exemplo: "João e Pedro foram a uma lanchonete para cada um deles tomar um suco e comer um lanche. Pediram o cardápio e verificaram que podiam escolher entre quatro tipos de suco (laranja, abacaxi, uva e graviola) e dois tipos de lanche (queijo ou misto). De quantas maneiras diferentes cada um deles pode escolher um suco e um lanche"?

A seguir continuaremos com ênfase nas relações multiplicativas que segundo Vergnaud denomina de Campo Conceitual Multiplicativo que alicerçam para a compreensão do Campo Multiplicativo.

### 2.1.4 O Campo Conceitual Multiplicativo

Segundo Vergnaud (1990, p. 9), o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é ao mesmo tempo o conjunto de situações cujo tratamento envolve uma ou mais multiplicações ou divisões. É o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar situações, como: proporção única e proporção múltipla, função linear e n-linear, razão escalar direta e inverso, quociente e produto das dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor, etc.

### 2.1.4.1 Classes de problemas do tipo multiplicativo

Podem-se distinguir duas grandes categorias de relações multiplicativas, assim estabelecendo-se as relações que procedem, seja uma multiplicação seja uma divisão. As relações básicas mais simples são as quaternárias, e não as ternárias, pois os problemas mais simples de multiplicação e divisão envolve a proporção simples de duas variáveis uma em relação à outra. Assim sendo, numerosas classes de problemas podem ser identificadas segundo a forma da relação multiplicativa, segundo o caráter discreto ou contínuo das quantidades em discussão, segundo as propriedades dos números utilizados, etc.

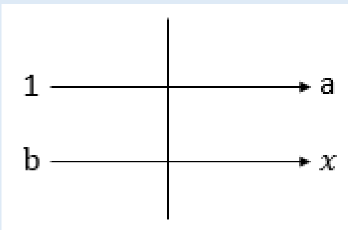
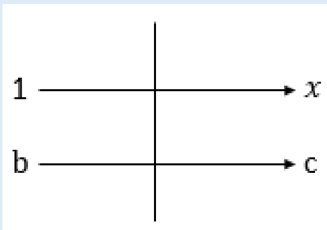
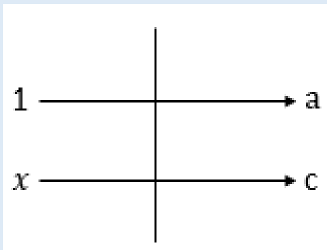
Iremos apresentar as duas principais classes de problemas do tipo multiplicativo: *Isomorfismo de medidas* e *Produto de medidas*. Nessa ordem, a primeira grande forma de relação multiplicativa é uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras medidas, de outro tipo. E a segunda, apoia-se em uma relação ternária entre três quantidades.

**a) Isomorfismo de medidas**

O conceito de Isomorfismo de medidas coloca em discussão quatro quantidades, mas nos problemas mais simples, sabe-se que uma dessas quantidades é igual a um. Logo, há três grandes classes de problemas conforme seja a incógnita uma ou outras das três outras quantidades.

O Quadro 6 apresenta uma ilustração de três classes de problemas do tipo multiplicativo. Supondo que a coluna da esquerda indique os pesos de objetos de certo tipo, e a coluna da direita os custos correspondentes, pode-se representar com o mesmo esquema esses casos de proporcionalidade simples (x representa a incógnita):

Quadro 6: Classe de problemas do tipo multiplicativo.

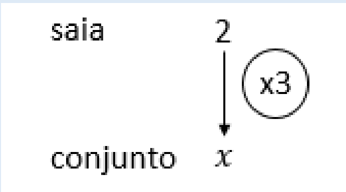
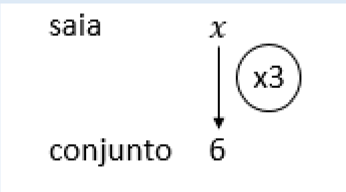
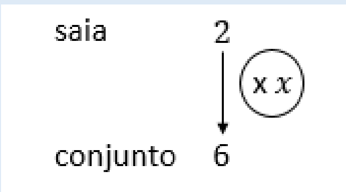
<table>
<tr><th colspan="3">Classe de problemas por meio de esquemas</th></tr>
<tr>
<td>Multiplicação<br><br></td>
<td>Divisão: busca do valor unitário<br><br></td>
<td>Divisão: busca da quantidade unitário<br><br></td>
</tr>
</table>

Fonte: Vergnaud (2009, p. 261)

Cada uma dessas três classes subdivide-se em várias subclasses. Algumas dessas subclasses ainda são difíceis para a maior parte dos alunos ao final da escola básica, principalmente àquelas relacionadas as propriedades dos números empregados (números muito grandes, números decimais, números inferiores a 1) e conforme os conceitos aos quais eles remetem.

No Quadro 7, ilustramos cada uma dessas classe de problemas do tipo multiplicativo com exemplo e o esquema possível para cada uma delas. A primeira coluna apresenta os esquemas possíveis, já na segunda coluna, temos os exemplos correspondentes.

Quadro 7: Classe de problemas com seu respectivo exemplo.

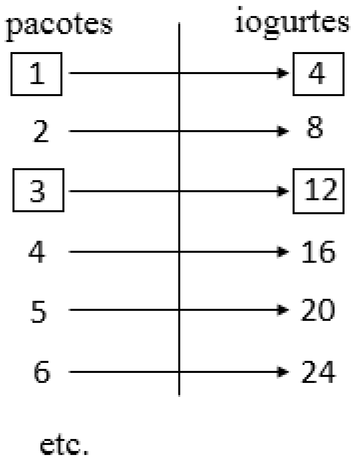
| **Classe de problemas por meio de esquemas** | **Exemplo** |
|---|---|
| <u>Multiplicação</u><br> | São necessários 2 metros de tecido para fazer uma saia; são necessárias três vezes mais para fazer um conjunto. Quanto de tecido é necessário para fazer o conjunto? |
| <u>Divisão: busca de uma medida</u><br> | São necessárias três vezes mais de tecido para fazer um conjunto do que uma saia. São necessários 6 metros para o conjunto. Quanto de tecido é necessário para fazer uma saia? |
| <u>Divisão: busca de um escalar</u><br> | São necessários 2 metros de tecido para fazer uma saia, 6 metros para o conjunto. Quantas vezes mais são necessárias para fazer o conjunto (em relação a uma saia)? |

Fonte: elaborado pelos autores a partir de Vergnaud (2009, p. 263).

Diante dos esquemas acima, apresentemos um exemplo muito simples que envolve os conceitos de isomorfismo de medidas: *"Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?"*

Analisemos o esquema da Figura 6, apenas as quatro quantidades colocadas nos quadradinhos:

Figura 6: Quadro de correspondência (isomorfismo de medidas)




Fonte: Vergnaud (2009, p. 241)

Esse quadro de correspondência (Figura 6) traduz o *isomorfismo* de dois tipos de medidas (número de pacotes e número de iogurtes). No exemplo dado é facilmente observado pelo aluno em entender os esquemas empregados para analisar a correspondência entre duas espécies de quantidades (os de pacotes de iogurtes e os iogurtes), pois se trata de grandezas discretas e números inteiros. São necessárias explicações adicionais para que o aluno compreenda o significado quando essas grandezas forem contínuas.

Para se tratar de isomorfismo apresentamos duas formas de relação utilizáveis no raciocínio sobre quantidades e grandezas, e os conceitos aplicados são todos do tipo isomorfismo de medidas. Precisamos nos atentar para as duas formas de raciocínio, apesar de se apresentar semelhantes; no entanto, elas são conceitualmente muito diferentes. Por exemplo, as propriedades de isomorfismo da função linear:

$$f(nx) = nf(x)$$

$$f(n_1 x_1 + n_2 x_2) = n_1 f(x_1) + n_2 f(x_2)$$[17]

e sua generalização para as relações com números não inteiros.

[17] Relações entre grandezas de mesma natureza (relações escalares) – $n$ é uma relação escalar sem dimensão.

Também, as propriedades que se referem ao coeficiente constante dessa mesma função

$$f(x) = ax, \qquad\qquad x = \frac{1}{a} f(x)$$[18]

e algumas propriedades específicas da bilinearidade,

$$f(n_1 x_1,\ n_2 x_2) = n_1 . n_2 f(x_{1,} x_2)$$[19].

Além destes teoremas, existem outros relacionados às estruturas multiplicativas.

Na sequência, abordemos a segunda grande forma de relação multiplicativa.

**b) Produto de medidas**

A noção de Produto de medidas consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional.

Acompanhemos a seguinte situação: *"4 rapazes e 5 moças querem dançar. Cada rapaz irá dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis"?*

O esquema mais natural para representar essa forma de relação, é o conhecido como, tabela cartesiana porque, de fato, é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas. Então, iremos utilizar a ideia de produto cartesiano.

Chamaremos de R = $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ o conjunto de rapazes e M = $\{f,\ g,\ h,\ i,\ j\}$ o conjunto de moças. O conjunto C dos casais possíveis é o produto cartesiano do conjunto de rapazes pelo conjunto de moças,

C = R x M

assim como mostra a tabela cartesiana abaixo:

| | | | | M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | f | g | h | i | j |
| | a | (a, f) | (a, g) | (a, h) | (a, i) | (a, j) |
| R | b | (b, f) | (b, g) | (b, h) | (b, i) | (b, j) |

[18] Relações entre grandezas de natureza diferente (relações do tipo função entre variáveis) - $a$ é um quociente de dimensões.

[19] Exemplificamos um caso particular do teorema das funções bilineares:
*"Os alunos preparam a temporada em uma colônia de férias de inverno e devem calcular as quantidades de comida necessárias para 50 crianças durante 28 dias. Em um documento, eles se informam que são necessários 3,5 quilos de açúcar por semana para 10 crianças".*
Vejamos que aqui pode ser empregada uma propriedade das funções bilineares, e que pode ser analisada da seguinte forma:
Açúcar (50 pessoas, 28 dias) = consumo (5.10 pessoas, 4.7 dias) = consumo 5.4 (10 pessoas, 7 dias).
Ou de forma mais cuidadosa $f$ (5.10, 4.7) = 5.4 $f$ (10.7). (VERGNAUD, 2011, p. 23-24)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| c | (c, f) | (c, g) | (c, h) | (c, i) | (c, j) |
| d | (d, f) | (d, g) | (d, h) | (d, i) | (d, j) |

Um casal consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo. O número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de moças.

$x$ casais = 4 rapazes x 5 moças.

A segunda forma de relação multiplicativa, o produto de medidas, permite ainda evidenciar duas classes de problemas:

<u>Multiplicação:</u> encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares;

<u>Divisão:</u> encontrar as medidas elementares, conhecendo-se a outra e a medida produto.

No entanto, nas duas classes acima, devem ser identificadas subclasses conforme as propriedades dos números empregados (inteiros, decimais, números muito grandes, números inferiores a 1) e conforme os conceitos aos quais eles remetem.

Observamos que o estudo das relações multiplicativas apresenta várias classes de problemas cuja solução pede uma multiplicação ou uma divisão.

> “A distinção dessas diferentes classes e sua análise devem ser cuidadosamente abordadas a fim de ajudar a criança a reconhecer a estrutura dos problemas e a encontrar o procedimento que levará a sua solução. Não se deve subestimar a dificuldade de certas noções como as de relação, de proporção, de fração e de função que exigem precauções didáticas importantes bem depois do ensino elementar. Apesar disso, essas noções devem ser tratadas desde o ensino elementar” (VERGNAUD, 2009, p. 265).

Assim sendo, cremos que a Teoria dos Campos Conceituais tem um espaço considerável nas pesquisas que versam sobre os mais variados temas, pois se configura numa teoria abrangente e que proporciona à Educação Matemática uma amplitude cognitiva. É, assim, “uma excelente ferramenta didática, e, permite identificar a natureza das potencialidades e resistências dos estudantes ao trazerem à tona as suas competências sobre um conceito ou sobre um Campo Conceitual” (ALVES, 2012, p. 23).

No próximo tópico apresentamos o Princípio Fundamental da Contagem como uma estratégia de cálculo que possibilita a resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios juntamente com outras formas de representação, como a árvore de possibilidades e a dedução de fórmulas da Análise Combinatória usando o PFC.

## 2.2 Princípio Fundamental da Contagem e os tipos de problemas combinatórios

O estudo da Análise Combinatória começou no século XVI com o matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557), também conhecido por *Tartaglia* (que significa gago). A este, seguiram-se os franceses Pierre de Fermat (1601- 1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Refere-se a uma parte da Matemática que estuda os processos de contagem, no entanto, não se esgota no estudo das combinações, arranjos e permutações, e sim, um ramo da Matemática que analisa estruturas e relações Matemáticas.

Pode-se dizer que a Análise Combinatória surgiu da necessidade de se calcular o número de possibilidades que podem ocorrer em uma certa experiência, sem precisar descrever cada uma dessas possibilidades. Desse modo, é também o suporte da Teoria das Probabilidades, apoiando-se no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo (PM).

Segundo Morgado (1991, p. 2):

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com essa disciplina. Por exemplo, a primeira técnica Matemática aprendida por uma criança é contar, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. Dessa forma, as operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) por meio de sua utilização na Resolução de Problemas de contagem (MORGADO, 1991, p. 17).

### 2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou princípio multiplicativo

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo é um princípio de contagem muito importante no campo da Análise Combinatória e do cálculo de Probabilidades. Esse método consiste em calcular as possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de descrever todas as possibilidades. Pois facilita e reduz consideravelmente o número de fórmulas necessárias ao bom entendimento desse tema, nas classes do Ensino Médio. As primeiras noções de contagem discutidas nesse tema, podem ser abordadas inclusive nas classes Iniciais do Ensino Fundamental.

Com base em Santos *et al.* (2007, p. 39), definimos o Princípio Multiplicativo como:

> Se um evento $A$ pode ocorrer de $m$ maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas $m$ maneiras possíveis de $A$ ocorrer, um outro evento $B$ pode ocorrer de $n$ maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento $A$ seguido do evento $B$ é $m \cdot n$. Em linguagem de conjuntos, se $A$ é um conjunto com $m$ elementos e $B$ é um conjunto com $n$ elementos, então o conjunto $A \times B$ (lê-se $A$ cartesiano $B$) dos pares ordenados $(a, b)$, tais que $a$ pertence a $A$ e $b$ pertence a $B$, tem cardinalidade $m \cdot n$.

Sendo assim, o Princípio Fundamental da Contagem, pode ser considerada uma das estratégias mais importantes para a resolução de situações combinatórias e, também a base de fórmulas utilizadas no estudo da Análise Combinatória, pois evidencia o caráter multiplicativo dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

#### 2.2.1.1 Produtos cartesianos

Segundo Borba (2013) são duas relações básicas presentes em problemas envolvendo a combinatória: a *escolha de elementos* e a *ordenação dos elementos*. Então, "o que diferencia os problemas básicos de Combinatória – produtos cartesianos, arranjos, permutações e combinações – são as formas como são escolhidos e ordenados os seus elementos. Esse é um aspecto que precisa ficar claro aos alunos ao serem trabalhadas situações combinatórias em sala de aula" (BORBA, 2013, p. 3).

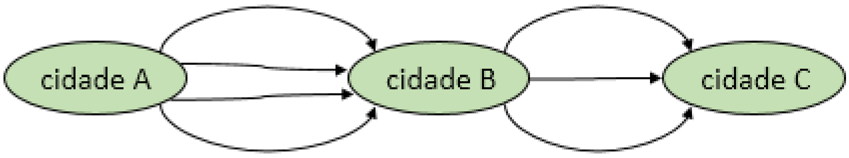
Em relação ao produto cartesiano, "os elementos são escolhidos a partir de dois ou mais conjuntos diferentes e a ordem na qual estes elementos são enumerados não constituem possibilidades distintas" (BORBA, 2013, p. 3). Já os problemas de arranjo, combinação e permutação "são determinados a partir da escolha de elementos de um conjunto único" (BORBA, 2013, p. 4), ou seja, o que os caracterizam é a circunstância do número de elementos a serem escolhidos e/ou do fato da ordenação dos elementos constituírem, ou não, possibilidades distintas.

A seguir exemplificamos uma situação característica de Produto Cartesiano, em que temos: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, resultando em $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$. O produto cartesiano de três conjuntos é definido de forma semelhante tomando ternos em lugares de pares. Em geral, se temos $n$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é definido como conjunto das $n$-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

Para entendermos melhor a situação proposta, observemos atentamente exemplos de Produto Cartesiano em que se aplica o Princípio Multiplicativo em sua resolução.

**a) Exemplo 1:** *"De uma cidade A, saem quatro rodovias para a cidade B e, de B, partem três rodovias para a cidade C. De quantas formas é possível sair da cidade A e chegar à cidade C, passando pela cidade B".*

Figura 7: Esquema de resolução do exemplo 1




Fonte: Castrucci & Júnior (2018, p. 202).

O problema apresentado mobiliza os conhecimentos prévios que os alunos têm a respeito de possibilidades. Ele pode ser resolvido por meio de esquema como foi sugerido, desenhar as rodovias que partem da cidade $A$ e chegam à $B$ e, em seguida, desenhar as rodovias que partem de $B$ e chegam à $C$.

Outro modo de resolver o problema é descrever os elementos dos conjuntos $E_1$ e $E_2$, em que $E_1$ corresponde ao conjunto das estradas que ligam as cidades $A$ e $B$ e $E_2$ ao conjunto das estradas que ligam $B$ a $C$:

$E_1 = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ e $E_2 = \{d_1,\ d_2,\ d_3\}$. Usando o Princípio Multiplicativo, temos 12 possibilidades $(4 \times 3)$ de sair da cidade $A$ e chegar à cidade $C$, passando pela cidade $B$.

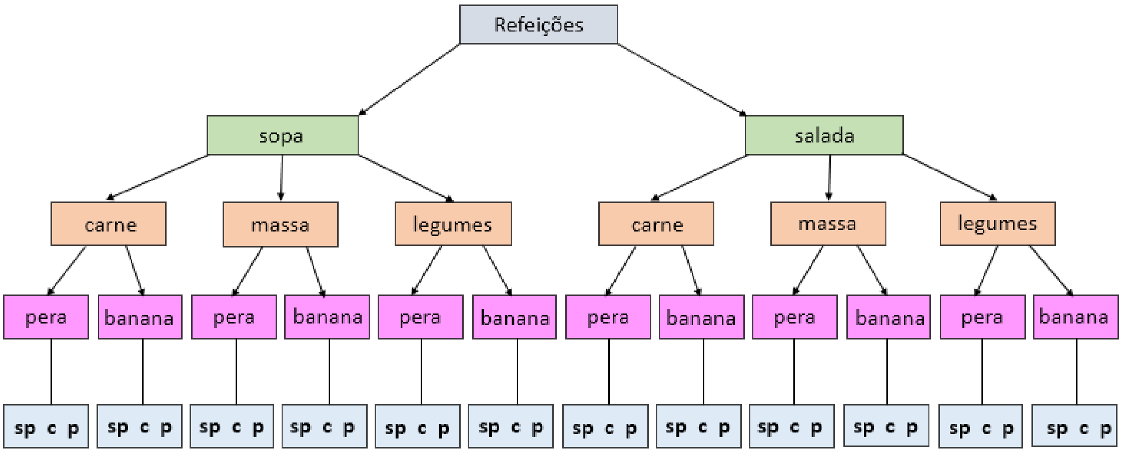
Uma outra situação que recai em problemas desta característica é a seguinte:

**b) Exemplo 2:** *"uma pessoa almoça em um restaurante que oferece refeições a um preço fixo com direito a uma entrada, um prato principal e uma fruta. O restaurante oferece 2 opções de entrada (sopa ou salada), 3 opções de prato principal (carne, massa ou legumes) e 2 de fruta (pera ou banana). Quantas refeições diferentes essa pessoa pode montar?"*

A pessoa deve fazer três tipos de escolha: $E_1$: sopa ou salada (*sp* ou *sl*); $E_2$: carne, massa ou legumes (*c*, *m* ou *l*); $E_3$: pera ou banana (*p* ou *b*).

Vamos enumerar os casos possíveis em uma árvore de possibilidades. Em problemas de contagem mais simples, *a árvore de possibilidades*, também chamada *diagrama de árvore* ou *diagrama sequencial*, ajuda na visualização e na contagem de todas as possibilidades.

Figura 8: Esquema de resolução do exemplo 2.




Fonte: Leonardo (2016, p. 201).

Usando o princípio multiplicativo, concluímos que essa pessoa pode montar $2\ x\ 3\ x\ 2 = 12$ maneiras de tomar as três decisões, ou seja, 12 refeições diferentes.

O diagrama de árvore, apresentado na situação de escolha de uma entrada, um prato principal e uma fruta é um bom recurso para resolução dos primeiros problemas apresentados aos alunos. Esse tipo de recurso fica inviável em situações que apresentam número maior de possibilidades.

No entanto, os problemas exigem procedimentos coerentes, criatividade e compreensão da situação proposta. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter clareza dos dados e da solução que se busca para o problema. A seguir buscamos estabelecer os vários modos de formar agrupamentos e deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado. Enfatizando que o Princípio Fundamental da Contagem é um procedimento de cálculo que pode ser utilizado na resolução dos tipos de problemas que envolvam o raciocínio combinatório e também na construção das fórmulas de Analise Combinatória.

#### 2.2.1.2 Permutações simples

Uma *permutação* de $n$ objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos $P_n$ o número das permutações simples dos $n$ objetos, então:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ \cdots 1 = n!$$

Definimos $P_0 = 0! = 1$

Para ilustrar, podemos tomar o seguinte exemplo: *Quantos são os anagramas*[20] *da palavra PRÁTICO?*

Observe que, para a primeira letra, temos 7 possiblidades (P, R, Á, T, I, C, O). Depois dessa escolha, há 6 possibilidades para a colocação da segunda letra, 5 para a terceira letra, 4 para a quarta, 3 para a quinta letra, 2 para a sexta letra e 1 para a sétima letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$, ou seja, $5\,040$ anagramas. Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra PRÁTICO.

De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam a posição. Daí o nome *permutação* (permutar significa trocar os elementos que formam um todo com a finalidade de obter nova configuração).

#### 2.2.1.3 Permutações com repetição

Na permutação com repetição, como o próprio nome indica, as repetições são permitidas e podemos estabelecer uma fórmula que relacione o número de elementos, $n$, e as vezes em que o mesmo elemento aparece.

Tomemos o seguinte exemplo: *Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?*

Esse é um caso que demanda um certo cuidado. A resposta seria $10! = 3\,628\,800$ anagramas, caso todas as letras fossem distintas. Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, é claro que uma permutação entre essas duas letras não geraria anagramas novos. Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples $(10!)$ por $(3!\,2!\,2!)$. Logo, o número correto de anagramas é $3\,628\,800 : 24 = 151\,200$ anagramas. Problemas como esse é o que denominamos de *Permutações com elementos repetidos*.

O número de permutações de $n$ elementos, dos quais $n_1$ é de um tipo, $n_2$ de um segundo tipo, . . ., $n_k$ de um *k*-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

[20] Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, um anagrama da palavra AMOR é ROMA. Matematicamente, consideramos todas as ordens diferentes em que se podem colocar as letras de uma palavra, ainda que não sejam formadas novas palavras.

Em que $n_1,\ n_2,\ n_3,\ ...,n_k$ representam a quantidade de repetições de cada um dos elementos repetidos.

#### 2.2.1.4 Arranjos simples

Vamos considerar a definição apresentada por Santos (2007, p. 57):

> *Arranjo Simples* de $n$ elementos tomados $p$ a $p$, onde $n \geq 1$ e $p$ é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de $p$ elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos $p$ elementos que compõem cada grupo. Notação $A_n^p$.

Usando o princípio multiplicativo, encontramos uma expressão Matemática que caracterize $A_n^p$. Temos $n$ elementos dos quais queremos tomar $p$. Este é um problema equivalente a termos $n$ objetos com os quais queremos preencher $p$ lugares.

$$\overline{\ }\ \ \overline{\ }\ \ \overline{\ }\ \ \cdots\ \ \overline{\ }$$
$$L_1\ \ L_2\ \ L_3\ \ \ \ \ \ L_p$$

O primeiro lugar pode ser preenchido de $n$ maneiras diferentes. Tendo preenchido $L_1$, restam $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de $L_2$, há $(n-2)$ maneiras de se preencher $L_3$ e, assim sucessivamente, vamos preenchendo as posições de forma que $L_p$ terá $[n-(p-1)]$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo, podemos dizer que as $p$ posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n\,(n-1)(n-2)\cdots[n-(p-1)]$ maneiras diferentes.

Portanto, $A_n^p = \dfrac{\left[n\,(n-1)(n-2)\cdots\left(n-(p-1)\right)\right][(n-\mathrm{p})(n-\mathrm{p}-1)\cdots 2\cdot 1]}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}$,

Podendo ser simplificada para

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.}$$

Com vistas a ilustrar o exposto, tomemos por base o seguinte exemplo: *Considerando os dígitos* $1,2,3,4,5$, *quantos números de* $2$ *algarismos diferentes podem ser formados?*

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$$

Podemos verificar que um arranjo simples é, de certa forma, similar a uma permutação simples, sendo que em cada grupamento formado usamos apenas $p$ elementos, dos $n$ distintos disponíveis. Também, arranjo simples é conhecido como arranjo sem repetição.

### 2.2.1.5 Arranjos com repetição

Seja $X$ um conjunto com $n$ elementos, isto é, $X = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$. Chamamos arranjo com repetição dos $n$ elementos, tomados $p$ a $p$, toda $p$-upla ordenada (sequência de tamanho de $p$) formada com elementos de $X$ não necessariamente distintos. Para a dedução da fórmula do número de arranjos com repetição, seja , $X = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ e indiquemos por $(AR)_{n,\ p}$ o número de arranjos com repetição de $n$ elementos tomados $p$ a $p$.

Cada arranjo com repetição é uma sequência de $n$ elementos, em que cada elemento pertence a $X$.

$$\underbrace{(-,-,-,\ \ldots,-)}_{p\ elementos}$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de arranjos $(AR)_{n,\ p}$ será:

$$(AR)_{n,\ p} = \underbrace{(n \cdot n \cdot\ \ldots\ \cdot n)}_{p\ vezes} = n^p$$

Observemos que, se $p = 1$, $(AR)_{n,\ 1} = n$ e a fórmula acima continua válida $\forall\ p \in N^*$.

A seguir, apresentamos um exemplo: *Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?*

Assim, temos: Cada sequência é um par ordenado de cores $(x, y)$ em que $x, y \in X = \{V, B, A\}$. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de pares é

$$(AR)_{3,\ 2} = 3^2 = 9.$$

### 2.2.1.6 Combinações simples

De acordo com Santos (2007, p. 62), podemos definir:

> *Combinação simples* de $n$ elementos tomados $p$ a $p$, onde $n \geq 1$ e $p$ é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de $p$ desses

$n$ elementos. Notação: $C_n^p = \binom{n}{p}$ (lê-se combinação de $n$ $p$ a $p$). Se $p > n$, $p$ e $n$ inteiros, define-se $C_n^p = 0$.

Pra ilustrar, vamos considerar um exemplo proposto por Morgado (1991, p. 31): "de quantos modos podemos escolher $p$ objetos distintos entre $n$ objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com $p$ elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?"

Cada subconjunto com $p$ elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe $p$ dos $n$ objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ são

$$
\begin{array}{ccccc}
\{a_1, a_2, a_3\} & \{a_1, a_2, a_4\} & \{a_1, a_2, a_5\} & \{a_1, a_3, a_4\} & \{a_1, a_3, a_5\} \\
\{a_1, a_4, a_5\} & \{a_2, a_3, a_4\} & \{a_2, a_3, a_5\} & \{a_2, a_4, a_5\} & \{a_3, a_4, a_5\}
\end{array}
$$

O número de combinações simples de classes $p$ de $n$ objetos é representado por $C_n^p$. Assim, $C_5^3 = 10$.

Analisemos esta resposta: a escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 5 modos; a do 2º, de 4 modos e a do 3º, de 3 modos. A resposta parece ser $5 \times 4 \times 3 = 60$. Entretanto, se pensarmos numa combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, etc... são idênticas e foram contadas e foram contadas como se fossem diferentes. Com efeito, se dissemos que há 5 modos de escolher o 1º elemento da combinação é porque estamos considerando as escolhas $a_1$ e $a_2$ como diferentes e portanto estamos contando $\{a_1, a_2, a_3\}$ como diferente de $\{a_2, a_1, a_3\}$. Em suma, na resposta 60 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo a resposta é $60/6 = 10$.

No caso geral temos

$$C_n^p = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}, \qquad 0 < p \leq n \qquad \text{e} \qquad C_n^p = 1.$$

Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por $(n-1)!$. Obtemos

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \qquad 0 \leq p \leq n.$$

Vamos considerar o seguinte exemplo: q*uantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?*

Dessa maneira, para formar uma salada basta escolher 4 das 10 frutas, o que pode ser feito de:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \text{ modos}$$

### 2.2.1.7 Combinações com repetição

Vamos pensar na seguinte situação: um menino está em um parque de diversões, onde há 4 tipos de brinquedos; chapéu mexicano, trem fantasma, montanha russa e roda gigante. O menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele pode comprar 2 bilhetes iguais para ir num mesmo brinquedo? Esta é uma situação que pode ser matematicamente representada por uma combinação completa. Note que o número de possibilidades possíveis aumenta consideravelmente.

Dados $n$ elementos distintos, chamamos combinações completas, de ordem ou classe $p$ dos $n$ elementos, os agrupamentos sem repetição ou com repetição, formados com $p$ dos elementos dados, de maneira que um agrupamento difere do outro pela natureza de seus elementos (MORGADO, 1991, p. 48).

Em geral, $C_n^p$ é o número de modos de escolher $p$ objetos distintos entre $n$ objetos distintos dados, e $CR_n^p$ é o número de modos de escolher $p$ objetos, distintos ou não, entre $n$ objetos distintos dados. Por exemplo, se temos um conjunto $\{a_1,\ a_2,\ a_3\ ,\ a_4\}$ com 4 elementos e queremos escolher 3 elementos. Neste caso, sabemos que $C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$ maneiras de escolher 3 objetos distintos dos 4 elementos dados. A escolha é a seguinte:

$$a_1, a_2, a_3 \quad a_1, a_2, a_4 \quad a_2, a_3, a_4 \quad \text{e} \quad a_1, a_3, a_4$$

Mas no caso de combinações completas, a escolha não é necessariamente por elementos distintos, ou seja, podemos escolher

$$\begin{array}{ccccc}
\{a_1, a_1, a_1\} & \{a_1, a_1, a_2\} & \{a_1, a_1, a_3\} & \{a_1, a_2, a_4\} & \{a_1, a_4, a_3\} \\
\{a_2, a_2, a_2\} & \{a_2, a_2, a_1\} & \{a_2, a_2, a_3\} & \{a_2, a_2, a_4\} & \{a_1, a_3, a_4\} \\
\{a_1, a_2, a_3\} & \{a_3, a_3, a_3\} & \{a_3, a_3, a_1\} & \{a_3, a_3, a_2\} & \{a_3, a_3, a_4\} \\
\{a_4, a_1, a_4\} & \{a_4, a_4, a_4\} & \{a_4, a_4, a_1\} & \{a_4, a_4, a_2\} & \{a_2, a_3, a_4\}
\end{array}$$

Neste caso temos $C_4^3 = 20$.

A fórmula para o cálculo de combinações completas é dada por:

$$C_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,\ p} = \frac{(n-1+p)!}{p!\,(n-1)!}$$

Para ilustrar, podemos pensar na seguinte situação: *de quantos modos podemos comprar 4 salgadinhos em uma lanchonete que oferece 7 opções de escolha de salgadinhos?*

Assim, temos que escolher os quatro tipos de salgadinhos, entre as 7 opções disponíveis (distintos ou não). Isto será igual a:

$$C_7^4 = P_{10}^{6,\ 4} = \frac{10!}{6!\,4!} = 21 \text{ modos}$$

É importante salientar que apresentamos nesse tópico as fórmulas que podem ser utilizadas para resolver três principais tipos de problemas de Análise Combinatória (arranjo, combinação e permutação), no sentido de evidenciar essa discussão no âmbito do Ensino de Matemática. Contudo, ressaltamos que a intensão pedagógica não deve estar centrada em um movimento de defesa de que o aluno memorize todas as fórmulas de Análise Combinatória, mas numa perspectiva de possibilitar que ele compreenda cada conceito envolvido e saiba o "por que" da aplicação da fórmula para cada tipo de problema, pois sabemos que muitos problemas não serão resolvidos sem o uso de fórmulas.

No entanto, podemos observar dois tipos de conjuntos de elementos interligados, aqueles em que a ordem dos elementos é importante; e aqueles em que a ordem não é importante. Os conjuntos de elementos interligados em que a ordem dos elementos é importante são chamados arranjos ou permutações. E, quando a ordem dos elementos não é importante temos, uma combinação.

Normalmente, os problemas de Análise Combinatória podem ser resolvidos com os processos de multiplicação, adição (e divisão). As definições e fórmulas de arranjo, permutação e combinação podem ser apresentadas e deduzidas entre as questões propostas e através do Princípio Fundamental da Contagem e podem ser usadas para resolver estes tipos de problemas combinatórios mais rapidamente; no entanto, a memorização dessas fórmulas, além de em nenhum momento conseguir substituir o raciocínio combinatório, prejudica a aprendizagem quando, são confundidas em suas aplicações.

No próximo capítulo discorremos sobre o percurso metodológico da pesquisa, como: questão de pesquisa, objetivo e procedimentos de organização e análise de dados.

# CAPÍTULO 3 - PERCURSO METODOLÓGICO

Na sequência, apresentamos a abordagem metodológica do nosso estudo; os procedimentos de coleta e análise de dados, em que consiste detalhar as Etapas de realização da pesquisa; o contexto no qual se insere a pesquisa; os alunos participantes desse estudo e os Aspectos Éticos da Pesquisa.

## 3.1. Natureza da pesquisa

Considerando o objetivo da pesquisa, optou-se por essa abordagem em consonância com o que apontam Bogdan e Biklen (1994, p. 47-51)

> Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Nesse sentido, focalizamos de forma subjetiva o objeto analisado, ou seja, as estratégias utilizadas pelos alunos do 9º ano, ao resolverem situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo.

## 3.2. Questão de pesquisa, objetivo e procedimentos

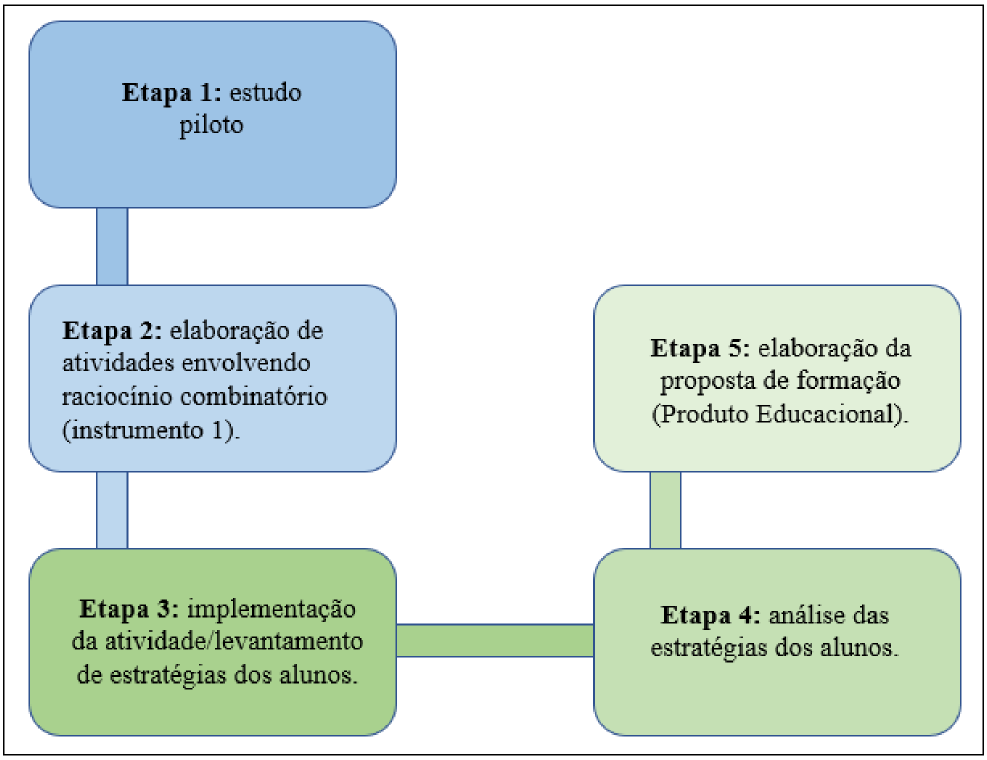
A presente pesquisa tem como objetivo geral: *identificar e analisar as diferentes estratégias de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de situações/problemas do Campo Conceitual Multiplicativo que envolve a Combinatória*.

Para tanto, elegemos os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar uma sequência de atividades, que possibilitam o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos anos finais do Ensino Fundamental;
- Identificar as estratégias de resolução das atividades mobilizadas pelos alunos no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio combinatório;
- Analisar as estratégias de resolução das atividades mobilizadas pelos alunos no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio combinatório;
- Elaborar um Produto Educacional com orientações à pratica docente, a partir das atividades aplicadas remotamente e de suas análises que contribuam para a reflexão acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de Combinatória em espaços de formação de professores de Matemática.

Em função dos objetivos indicados, delineamos algumas etapas a serem seguidas, visando a coleta e análise dos dados na pesquisa e a elaboração do Produto Educacional, tal como ilustramos na Figura 9.

Figura 9: Etapas de coleta e análise de dados




Fonte: produzido pelos autores.

A *Etapa 1* (estudo piloto) consiste na implementação de um estudo piloto de sondagem da viabilidade de realização da pesquisa.

Na *Etapa 2* (elaboração de atividades envolvendo raciocínio combinatório) compreende à elaboração de uma sequência de atividades, composta por situações/problemas envolvendo raciocínio combinatório. Buscamos respaldo teórico nas discussões de Gérard Vergnaud (1986, 1996, 2009); Pessoa e Borba (2009); Magina (2005) e Magina, Merlini e Santos (2016). Tal atividade foi considerada como o primeiro instrumento referente à produção dos dados da pesquisa, que foi desenvolvida na *Etapa 3* (implementação da atividade/levantamento de estratégias dos alunos) com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Itabirito no Estado de Minas Gerais.

Em posse das resoluções utilizadas pelos alunos realizamos a identificação e a análise das estratégias de resolução apresentadas na *Etapa 4* (análise das estratégias dos alunos), mais uma vez buscamos respaldo teórico nas discussões de Gérard Vergnaud (1986, 1996); Borba (2010, 2013); Pessoa e Borba (2009).

Na *Etapa 5* (Produto Educacional), demos prosseguimento a elaboração de uma proposta de formação para professores de Matemática, envolvendo as discussões teóricas e metodológicas acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório, que se constitui no Produto Educacional decorrente da pesquisa.

## 3.3. Contexto da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida na Escola Municipal Ana Amélia Queiróz localizada na cidade de Itabirito/MG, a escolha da escola se deu pelo fato de a professora-pesquisadora pertencer ao quadro de professores da instituição e buscar atender ao quantitativo de alunos desejados para a realização da pesquisa. A escola atende turmas da Educação Infantil até os Anos finais do Ensino Fundamental. Em média, as turmas do Ensino Fundamental são formadas por 30 alunos, em sua maioria alunos do entorno escolar. Quanto à disciplina de Matemática especificamente, a escola adota uma estrutura curricular na qual o conteúdo é lecionado por somente um professor da disciplina. Como mais um recurso visando ampliar o aprendizado dos alunos dos Anos Iniciais quanto Finais do Ensino Fundamental é oferecido no contraturno aulas de reforço escolar nos conteúdos de Matemática e Português. A última Coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental adotada pela escola é *"A Conquista da Matemática - 6º ao 9º ano"*[21]. A escolha do livro didático se dá em dois momentos, reuniões entre professores da mesma escola e posteriormente com professores da rede municipal de ensino.

Nesta escola, a professora-pesquisadora atua como professora de Matemática nas turmas do 6º ao 9° ano do Ensino Fundamental nas quais leciona todos os tópicos temáticos da Matemática: números, álgebra, geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística nas aulas do ensino regular e do reforço escolar.

Portanto, achamos necessário contextualizar o ambiente em que foi desenvolvido os primeiros passos para se tornar viável a realização do presente estudo. No ano de 2019, foi aplicado um estudo piloto em duas turmas de 8º ano do Ensino Fundamental no sentido de sondar a possibilidade de desenvolver um trabalho na linha investigativa, perspectiva adotada na proposta de sequência aqui apresentada. O estudo piloto consistiu na aplicação de uma sequência de exercícios que visavam o desenvolvimento dos conceitos relacionados ao raciocínio combinatório. A análise que realizamos deste estudo piloto indicou que os alunos desenvolveram, de maneira informal, evidenciando a ausência da formalização dos conceitos envolvidos, apenas usando procedimentos de resolução como: cálculos numéricos, desenhos, algoritmos da adição e da

[21] De autoria de José Ruy G. Júnior e Benedicto Castrucci, publicado pela Editora FTD, São Paulo, 2018.

multiplicação e o Princípio Fundamental da Contagem. Tal resultado nos possibilitou verificar a aplicabilidade e, também, estruturar a presente pesquisa.

### 3.3.1. Os alunos participantes

O presente estudo foi realizado com 16 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública Municipal de Itabirito, já mencionado anteriormente. Com relação a idade dos alunos são todos com idade entre 13 e 14 anos, dentro da faixa etária. Os alunos participantes deste estudo são em sua maioria que estudam na escola desde da educação infantil até a etapa dos Anos finais do Ensino Fundamental, é comum alguns desses alunos da referida instituição se matricular em cursos preparatórios paralelamente ao ano que estão cursando como forma de aprimorar os seus estudos para o ingresso nos Instituto Federais de Ensino da região.

A escolha dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental foi baseada, principalmente, no fato de que, esses alunos encontram-se em uma fase conclusiva de uma etapa da Educação Básica e, por este fato, compreendemos que eles já tiveram contato com as estruturas multiplicativas e podem possuir maior autonomia na leitura, interpretação dos enunciados e resolução dos problemas propostos.

Nesta pesquisa, seguindo princípios éticos da pesquisa acadêmica, os nomes atribuídos aos alunos participantes da pesquisa serão fictícios, preservando, assim, o anonimato dos mesmos. Deste modo, todos os alunos participantes da pesquisa receberam os códigos **A1**, **A2**, **A3**, ..., **A16**.

## 3.4. Aspectos Éticos da Pesquisa

Esta pesquisa passou pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEPE) da UFOP e sua realização foi aprovada pelas instâncias competentes[22]. Após esse processo, houve a liberação para que a investigação acontecesse.

Como apontado anteriormente, a fim de garantir a privacidade e a preservação da identidade dos participantes da pesquisa, por se tratar de um potencial risco, foi assegurado o uso de nomes fictícios nos relatórios da pesquisa e em todo material coletado, além do diário de campo da professora-pesquisadora.

Ademais, todo material coletado ficará arquivado por um período de cinco anos na responsabilidade dos pesquisadores. Fica assegurado ainda que só terão acesso a esses dados os envolvidos na pesquisa.

[22] CAAE: 25548819.5.0000.5150

Todos os participantes da pesquisa foram informados acerca dos riscos e benefícios inerentes ao processo. Também foram informados acerca da participação voluntária e da possibilidade de suspenção da participação na pesquisa a qualquer momento, sem que isso lhes acarrete nenhuma espécie de ônus.

Na primeira etapa da pesquisa, ou seja, o desenvolvimento da atividade envolvendo raciocínio combinatório na escola, a participação na pesquisa foi formalizada a partir da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE (Apêndice 1), pelos responsáveis legais dos participantes. Neste termo estão contidos os principais riscos, benefícios, deveres e direitos relacionados à pesquisa. À direção da escola foi disponibilizada a Autorização da escola (Apêndice 2), contendo explicações acerca da pesquisa e sua contribuição para a melhoria da Educação Básica. Também consta nos termos a garantia de sigilo das identidades dos participantes, durante a produção de dados e/ou imagens.

## 3.5. O cenário de pandemia e a produção de dados

Primeiramente iremos discorrer brevemente sobre da pandemia da Covid-19[23], pois a produção dos dados da presente pesquisa está condicionada a este cenário. O ano de 2020 foi marcado por um dos maiores problemas atuais de saúde pública, o novo Coronavírus, cuja denominação da doença é A COVID-19, teve o seu início na China, no final de dezembro de 2019. No Brasil, o vírus começou a se propagar no início de março de 2020, diante de toda a devastação sofrida mundialmente, foi necessária a tomada de medidas de proteção contra a expansão do vírus. Assim todos os estabelecimentos considerados não essenciais foram fechados, atingindo totalmente o meio educacional, provocando a suspensão das aulas presenciais em todos os níveis de ensino (Educação Infantil ao Ensino Superior) em nome da preservação da vida. Em decorrência do fato, se fez necessário o isolamento social como uma única forma de prevenção.

Com relação às escolas fechadas, surgiu a preocupação das organizações educacionais quanto a interrupção das aulas, que poderia levar a perda do ano letivo. Para isso não ocorrer, houve a necessidade de retomar as aulas de forma remota, com o objetivo de que os discentes pudessem continuar exercendo seus papéis enquanto estudantes, apesar das dificuldades inerentes a essa mudança, já que os professores não tiveram uma preparação prévia para isso e muitos alunos não possuem acesso a ferramentas necessárias, entre outras questões.

[23] Decreto Nº 47.891, de 20 de março de 2020, que reconhece o estado de calamidade pública decorrente da pandemia causada pelo agente coronavírus (COVID-19).

Nesse sentido o ensino remoto foi pensado de forma emergencial sendo a única opção para continuação do ano letivo de 2020. O ensino remoto é diferente do ensino presencial, os docentes e discentes que antes estavam acostumados ao ensino presencial tiveram que se readaptar rapidamente dentro de uma nova sistemática. Assim, o ensino remoto,

> [...] envolve o uso de soluções de ensino e produção de atividades totalmente remotas, como, por exemplo, a produção de videoaulas que podem ser transmitidas por televisão ou pela Internet. [...] O objetivo principal nessas circunstâncias não é recriar um novo modelo educacional, mas fornecer acesso temporário aos conteúdos e apoios educacionais de uma maneira a minimizar os efeitos do isolamento social nesse processo (JOYE; MOREIRA; ROCHA, 2020, p. 13).

Em função da situação de calamidade pública decorrente da pandemia da COVID-19, o ministério da educação (MEC) cria uma Medida Provisória nº 934/2020, solicitando a flexibilização do cumprimento do calendário escolar. Tal medida foi homologada com o parecer n° 5/2020, autorizando a reorganização do Calendário Escolar e da possibilidade de cômputo de atividades não presenciais para fins de cumprimento da carga horária mínima anual, em razão da Pandemia da COVID-19 e da consequente suspensão das aulas presenciais (BRASIL, 2020).

Diante da maior crise sanitária, os profissionais da área de Educação se viram obrigados a planejarem suas aulas de uma maneira muito diferente do habitual. Assim, o ensino remoto surgiu como uma solução momentânea em meio à crise na saúde mundial. Nesse contexto, de acordo com Schwanz e Felcher (2020) o ensino remoto não é um novo modelo de ensino no meio educacional incorporado e, sim, uma solução provisória, que em breve seja possível a retomada pelo ensino presencial.

A seguir, detalhamos cada Instrumento relacionado à produção dos dados, utilizamos de quatro, sendo que o primeiro deles, se trata das questões que compuseram a sequência de atividades sobre raciocínio combinatório. Já o segundo Instrumento, a sequência de questões propostas aos alunos e tempo de duração, o terceiro Instrumento se trata dos registros dos participantes e por fim, o quarto Instrumento que consiste no Diário de bordo da professora-pesquisadora.

### 3.5.1 Instrumentos relacionados à produção de dados

Em função da pandemia da Covid-19, as aulas presenciais foram suspensas, dificultando a aplicação dos instrumentos de produção de dados de maneira presencial. Diante do panorama apresentado, optamos por realizar as atividades com os alunos nos moldes adotados pela escola e também fazendo o uso do aplicativo *WhatsApp* para orientações e mobilização dos alunos para retirada das atividades na escola e também realizá-las dentro do período estipulado, por meio de mensagens de texto com o consentimento dos participantes.

Além disso, consideramos como fontes de dados os registros realizados pelos participantes bem como o diário de bordo da professora-pesquisadores. Desse modo, podemos elencar os instrumentos de produção de dados considerados na pesquisa:

- **Instrumento 1:** Atividade sobre o raciocínio combinatório;

O Instrumento 1 contou com uma sequência de 12 questões[24] sobre o raciocínio combinatório envolvendo os tipos significados de Combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação). O Instrumento sobre raciocínio combinatório (Apêndice 3) apresenta as questões selecionadas de maneira que o aluno conseguiria resolvê-las usando procedimentos relativos ao Campo das Estruturas Multiplicativas, como uma técnica básica e muito eficiente nas situações que envolvem contagem, o Princípio Fundamental da Contagem.

- **Instrumento 2:** A aplicação da sequência de atividades propostas aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental;

A sequência de atividades foi planejada para ser deixada na escola e o aluno retirar com a autorização da Direção e Supervisão, pois já ocorre na escola a entrega dos blocos de conteúdos mensalmente para os alunos que optam pelo material impresso. Também foram disponibilizadas as mesmas questões em um arquivo PDF via *WhatsApp* no grupo dos pais e/ou responsáveis e no grupo de dúvidas dos alunos do 9ºano, os alunos tiveram uma semana para entregar os registros.

- **Instrumento 3:** Registros dos participantes (resolução das questões apresentadas pelos alunos, e outros registros escritos pelos participantes);

A sequência de atividades envolvendo raciocínio combinatório foi devolvida na escola pelo aluno e/ou responsável com os registros das resoluções uma semana após a disponibilização do material na escola.

- **Instrumento 4:** Diário de bordo da professora-pesquisadora;

[24] As questões serão referenciadas da seguinte maneira: Questão 01 (**Q01**), Questão 02 (**Q02**), ..., Questão 12 (**Q12**).

O Diário de bordo da professora-pesquisadora consistiu em fazer observações e anotar cuidadosamente o que ocorreu desde do primeiro momento em fazer o contato com os alunos com o objetivo de mobilizá-los para participar da pesquisa até a entrega do material na escola. A seguir, apresento um registro do primeiro contato com os alunos referente ao trabalho. Vale ressaltar que o grupo de estudos via W*hatsApp*, foi criado com intuito de tirar as dúvidas dos alunos em relação aos blocos de estudos. Como a professora-pesquisadora já atua nas turmas de 6º ao 9ºano como professora de reforço no ano em curso, então achamos interessante começar a intervenção no grupo usando questões envolvendo raciocínio combinatório como desafio para iniciar a aula de dúvidas[25]. A seguir, uma das questões (desafio) propostas e o registro da interação dos alunos.

Figura 10: Questão (desafio)


Fonte: (UFG-GO)

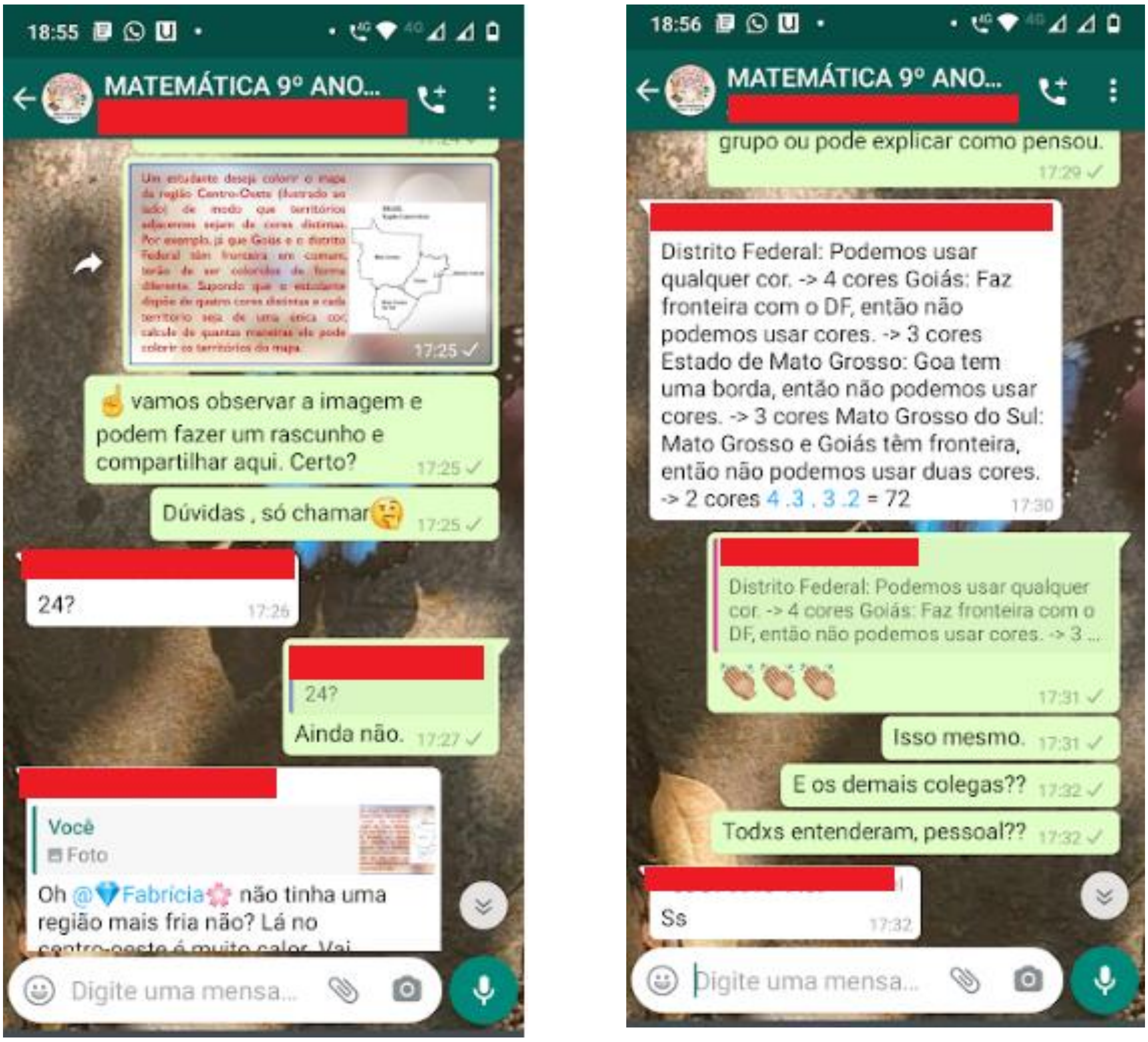
A interação ocorreu no sentindo de estimular o maior número possível de alunos para participar da referida pesquisa. A aulas de dúvidas aconteciam todas as quartas-feiras no horário das 17hs às 19hs. O número de alunos participantes era bem reduzido em comparação ao número de alunos matriculados, a não participação pode estar diretamente ligada à falta de recurso de alguns pais e/ou responsáveis, pois como sabemos nem todos os alunos neste período de pandemia possuem ferramentas tecnológicas a sua disposição.

A dinâmica das aulas de matemática por meio do aplicativo W*hatsApp* sempre iniciava pela professora de matemática da turma, tirando as possíveis dúvidas em relação ao bloco de conteúdo, a professora-pesquisadora como professora de reforço das turmas proponha atividades na forma de desafios de acordo com o conteúdo que estava sendo trabalhado. Foi oportunizado à professora-pesquisadora fazer intervenção no grupo de dúvidas no sentido esclarecer sobre o desenvolvimento da referida pesquisa que estava sendo desenvolvida naquela instituição antes da disponibilização da sequência de atividades na escola.

[25] Esta aula ocorreu no dia 30/09/2020.

A seguir um registro de interação em uma aula de dúvidas com os alunos do 9º ano.

Figura 11: Registro da interação na aula de dúvidas com os alunos do 9º ano.




Fonte: arquivos dos pesquisadores.

Na semana seguinte após a interação realizada, os alunos já estavam com a sequência de atividades em mãos, então a professora-pesquisadora teve a oportunidade de conversar através do aplicativo W*hatsApp* com alguns alunos presentes e fazer indagações sobre a sequência de atividades proposta. Os alunos que tiveram interesse em participar da pesquisa, responderam que não tiveram dificuldades para resolver as questões, pois já tinham resolvido questões semelhantes.

### 3.6. Procedimentos de organização e análise de dados

A presente pesquisa está inserida no Campo das Estruturas Multiplicativas com foco em situações/problemas envolvendo o raciocínio combinatório no qual apresenta características de uma relação discreta.

Para atender a demanda do nosso estudo, apresentamos e discorremos sobre os resultados alcançados. Primeiramente, os dados foram organizados em tabelas e/ou quadros, conforme a resposta apresentada pelos alunos em cada problema, acompanhado da identificação e análise das estratégias de resolução utilizadas a partir dos registros apresentados para os tipos de problemas da combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação) propostos aos alunos.

Como mencionada anteriormente, no Instrumento 1 foi proposto uma sequência com doze questões envolvendo os quatro significados de Combinatória, dessa sequência de atividades elegemos quatro questões, sendo cada uma representando um tipo de problema combinatório. Para compor a análise dos resultados, optamos por selecionar quatro problemas dos quais os alunos mobilizaram uma variedade de estratégias de resolução e também para evitarmos descrever uma análise repetitiva.

### 3.7. O Produto Educacional

O Produto Educacional decorrente desta pesquisa, foi elaborado a partir da análise das estratégias de resolução apresentadas pelos participantes da pesquisa de campo, as quais subsidiarão a elaboração de uma proposta de formação, envolvendo as discussões teóricas e metodológicas acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Neste sentido, o Produto Educacional decorrente da presente investigação, assumirá a perspectiva dos dispositivos de formação voltado à formação de professores de Matemática, com vistas a propiciar um espaço formativo pautado na reflexão acercada dos processos de ensino e de aprendizagem de Combinatória.

No próximo capítulo apresentaremos a análise dos resultados, trazemos uma discussão dos problemas combinatórios propostos elegidos para a análise, a identificação e análise das resoluções apresentadas pelos alunos, dialogando entre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e os estudos relacionados à temática abordada.

## CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS

O presente capítulo apresenta a descrição e interpretação dos dados coletados para esta pesquisa à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986; 1996). Além do pressuposto teórico mencionado, a análise se respaldou em materiais curriculares (BRASIL, 1998; BRASIL, 2017 e BRASIL, 2018) além de estudos como o de Pessoa e Borba (2009), que abordam os diversos significados presentes na Combinatória, e o de Borba (2010), que trata do raciocínio combinatório.

Para a análise foram selecionados quatro problemas[26] referente ao raciocínio combinatório da sequência de atividades (12 questões) proposta aos alunos participantes da pesquisa conforme (Apêndice 3). A escolha por estes quatro problemas ancora-se no entendimento de Pessoa e Borba (2009) e Borba (2013) de que problemas envolvendo Raciocínio Combinatório podem apresentar quatro significados da Combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação).

Assim sendo retomamos alguns conceitos que já foram apresentados anteriormente, os quais precisam estar claros para compreensão da análise que nos propusemos a construir, são eles: invariante, situação e conceitos-em-ação.

O conceito de invariante é compreendido tal como definido por Vergnaud (1986), ou seja:

> consiste em uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformação. Por exemplo, em geometria, a rotação e a simetria conservam certas propriedades das figuras, a homotetia não conserva as mesmas propriedades bem como a projeção. Ou seja, são propriedades que se relacionam com um determinado conceito, nas quais essas propriedades não sofrem alterações (VERGNAUD, 1986, p. 81).

Desse modo, os invariantes são propriedades fundamentais para que se compreendam as lógicas subjacentes em cada significado da Combinatória, isto significa, os tipos de problemas combinatórios. Independentemente da representação simbólica adotada, as propriedades permanecem inalteradas. Nesse sentido, Pessoa e Silva (2012) nos indica que os problemas podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de representação (representações simbólicas): desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras.

Com relação ao termo situação, pode ser considerada um conjunto que envolve diversos conceitos - significados, invariantes e representações simbólicas, assim podemos afirmar que "são as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, as situações é que são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito" (VERGNAUD, 1986, p. 84).

[26] Na sequência de atividades aplicada aos alunos aderimos ao termo "questão", já para o capítulo referente à análise dos dados iremos adotar o termo "problema".

Neste estudo consideramos o entendimento de Pessoa (2009) para definir o termo conceitos-em-ação,

> referem-se ao uso prático de conceitos em processo de construção. Dessa forma, ao utilizar um conceito-em-ação não se tem consciência clara deste uso, mas sabe-se que para aquela situação distinta o conceito se aplica. Baseado em teoremas-em-ação, ou seja, premissas que constituem os conceitos-em-ação, situações podem ser resolvidas mesmo sem um pleno entendimento dos motivos pelos quais os mesmos se aplicam (PESSOA, 2009, p. 49).

Além destes conceitos, para o exercício de categorização dos dados, consideramos os diferentes tipos de problemas de Combinatória propostos Pessoa e Borba (2010).

Desse modo, a análise se estruturou em quatro categorias:

a) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Produto Cartesiano;

b) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Arranjo;

c) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Permutação; e

d) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Combinação.

Desse modo, agrupamos os problemas propostos seguindo esta categorização. Em cada categoria realizamos uma análise preliminar de cada um dos problemas que a contemplou, buscando identificar qual problema mobilizou uma diversidade maior de estratégias de resolução. Desse modo, cada problema escolhido foi o mais representativo da categorização elegida.

Após este movimento, passamos a realizar uma análise focalizada nas estratégias de resolução, destacando as diferentes estratégias mobilizadas pelos alunos. Para que pudéssemos apresentar e analisar tais estratégias, evitando repetições, optamos por não exibir estratégias de resolução semelhantes, mas, apresentar a mais representativa dentro de um determinado conjunto de respostas dos alunos.

Para cada uma das categorias apresentamos o problema proposto e seus invariantes e, na sequência, algumas estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos com a respectiva análise dessas respostas independentemente dos erros e/ou acertos.

Contudo, considerando o objetivo da presente pesquisa, salientamos que o nosso foco não é comparar e/ou quantificar os resultados, mas em identificar e analisar estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos frente aos problemas propostas e, principalmente, as noções relacionadas ao raciocínio combinatório nas quais contemplam o Campo Multiplicativo.

A seguir são apresentadas para cada categoria de análise, os significados presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e invariantes (relações e propriedades), as características fundamentais desse tipo de significado envolvendo o raciocínio combinatório e estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos analisando e identificando tais estratégias.

### 4.1 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos em um Problema de Produto Cartesiano

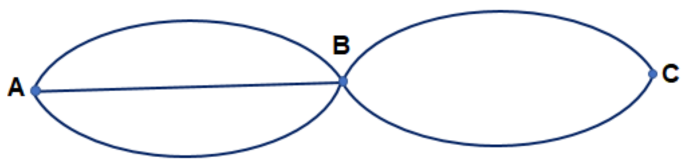
Para a primeira categoria analisada, discorremos acerca do tipo de problema combinatório denominado Produto Cartesiano. Uma característica que o diferencia dos demais problemas (arranjos, permutações e combinações), "é que os elementos são escolhidos a partir de dois ou mais conjuntos diferentes e a ordem na qual estes elementos são enumerados não constituem possibilidades distintas" (BORBA, 2013, p. 3).

A seguir apresentamos um problema combinatório do tipo Produto Cartesiano, proposto aos alunos participantes do estudo e os invariantes (relações e propriedades que se mantêm constantes) e as características fundamentais desse tipo de significado presente na Combinatória.

- **Significado presente no problema de combinatória - Produto Cartesiano**

A seguir um dos problemas do tipo Produto Cartesiano proposto aos alunos e que, dentro da sequência de atividades sugerida, se mostrou o mais representativo referente a primeira categoria de análise.

- Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.




a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?

b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

Ao analisarmos o problema em questão, observamos que o mesmo possui os seguintes *Invariantes*:

- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades;

- Dado dois (ou mais) conjuntos diferentes, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto;

- A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.

Para ilustrar a caracterização dessa situação, temos como exemplo: para ir da cidade A até C passando por B, uma pessoa pode escolher dentre três caminhos (x, y, z) ligando A até B e dois outros caminhos (m, n) ligando B a C. Desse modo, são duas etapas de escolha neste caso: a escolha de A até B e a escolha de B até C. Estas escolhas são realizadas a partir de conjuntos diferentes (neste caso, o de cidades e o de caminhos), são combinações que formam um terceiro conjunto e a ordenação dos elementos não formam possibilidades distintas.

Para analisarmos as diferentes estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos, fizemos um agrupamento das respostas apresentadas pelos alunos do 9º ano de modo a possibilitar uma melhor compreensão dos dados da presente pesquisa.

Desse modo, num primeiro momento, evidenciaremos em um quadro as estratégias identificadas pelos alunos e, posteriormente, apresentaremos algumas resoluções que estes alunos mobilizaram ao responder a cada um dos três itens do referido problema.

### 4.1.1 Análise das estratégias mobilizadas no item a - Produto Cartesiano

No Quadro 8 listamos todas as estratégias mobilizadas que foram identificadas na análise das respostas dos alunos ao item a do problema em questão.

Quadro 8: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item a do Problema de Produto Cartesiano

| | **Resposta** | | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | |
| Utilização do Princípio Fundamental da Contagem | 9 | 0 | 9 |
| Apenas resposta | 2 | 1 | 3 |
| Elaboração de desenhos e esquemas | 1 | 1 | 2 |
| Contagem direta das possibilidades | 1 | 0 | 1 |
| Utilização do algoritmo da multiplicação | 1 | 1 | 1 |

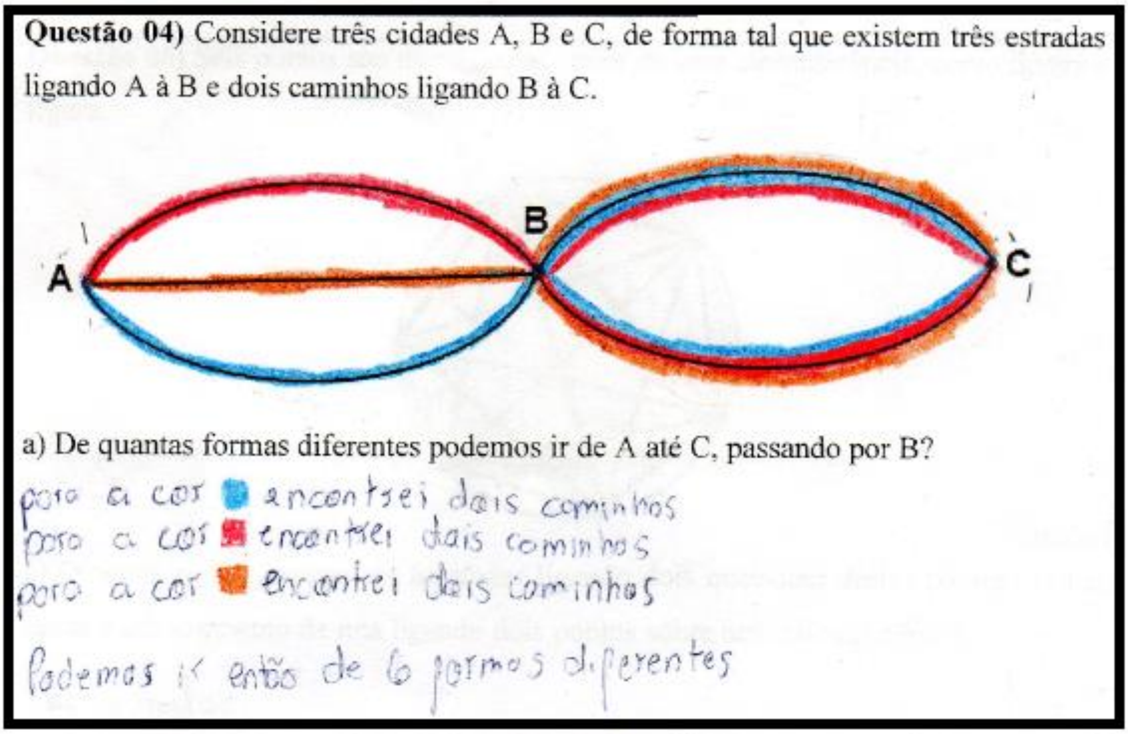
Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Com vistas a analisar as estratégias identificadas, optamos por selecionar, para este item do problema, as estratégias "*Utilização do Princípio Fundamental da Contagem*" e "*Elaboração de desenhos e esquemas*". A primeira se justifica pelo fato de ter sido a mais representativa do Quadro 8 e a segunda, embora não tenha sido a estratégia mais utilizada pelos alunos, optamos por apresentá-la com o intuito de diversificar a análise dos tipos de estratégias mobilizadas na resolução do item analisado.

A seguir, as Figuras 12 e 13 apresentam as resoluções de dois participantes da pesquisa, foram estratégias bem sucedidas para o item a do problema sugerido.

Como podemos observar na Figura 12, o Aluno A1 utilizou como estratégia a Elaboração de desenhos e esquemas, utilizando-se de lápis colorido para registrar seu raciocínio. Tal estratégia favoreceu a construção e o registro de uma argumentação pessoal para a solução do problema proposto.

Figura 12: Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item a do Problema de Produto Cartesiano

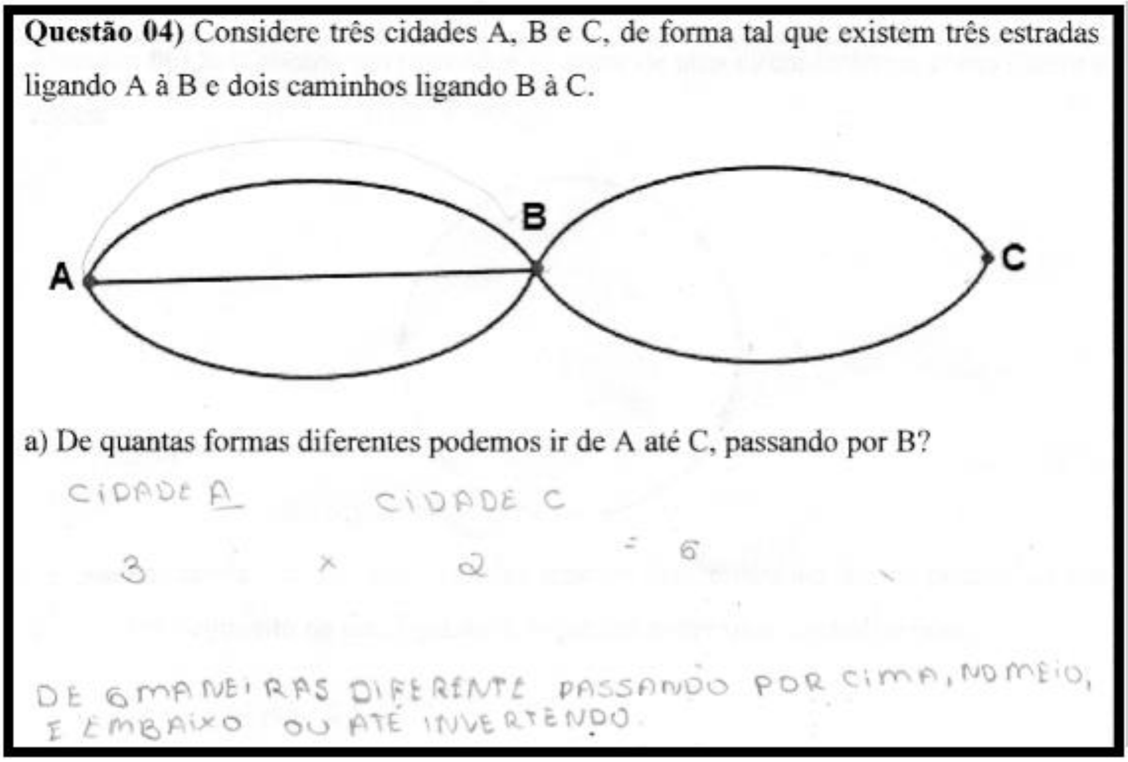



Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Com relação a resolução destacada na Figura 12 observamos que o aluno mobilizou representações simbólicas (estratégias) por meio de desenhos e esquemas, estimulando o uso do conceito-em-ação referente ao Produto Cartesiano. Haja vista que, ao colorir cada possibilidade de uma cor diferente, com o intuito de formalizar a sua resposta, observamos que essa estratégia implicou no entendimento do Aluno A1 em relação à situação proposta.

Como apresentado no Quadro 8, a maioria dos alunos recorreu à utilização do Princípio Fundamental da Contagem. Dentre todas as resoluções apresentadas com esta estratégia, optamos por ilustrar a apresentada pelo Aluno A2 visto que foi a mais representativa.

Figura 13: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do item a do Problema de Produto Cartesiano




Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Como evidenciado na Figura 13, o Aluno A2 recorreu às noções do Princípio Fundamental da Contagem encontrou a solução para o problema proposto. Considerando que os participantes da pesquisa são alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, era esperado que mobilizassem tal estratégia na resolução desse tipo de problema.

De acordo com as prescrições dos PCN (BRASIL, 1997), os problemas com significado de Produto Cartesiano estão associados à ideia de combinatória sendo os únicos discutidos no referido documento. É recomendado o trabalho desde os primeiros anos de escolarização, por considerar "um conceito matemático importante, que é o de Produto Cartesiano" (BRASIL, 1997, p. 73).

É importante lembrar que o problema do tipo Produto Cartesiano, é denominado por Vergnaud (1983) como produto de medidas e que este tipo de problema pertencente ao Campo das Estruturas Multiplicativas. Para esse autor, esse tipo de problema envolve uma estrutura de problemas que remete para a composição cartesiana de dois espaços de medidas $a$ e $b$, em uma terceira medida $c$. Nessa perspectiva, $\mathrm{a} = 3$, $\mathrm{b} = 2$ que resultaria em $\mathrm{c} = 6$ formas diferentes (Produto de medidas: $3 \times 2 = 6$).

### 4.1.2 Análise das estratégias mobilizadas no item b - Produto Cartesiano

No Quadro 9 listamos todas as estratégias mobilizadas no item b pelos alunos que participaram deste estudo.

Quadro 9: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item b do Problema de Produto Cartesiano

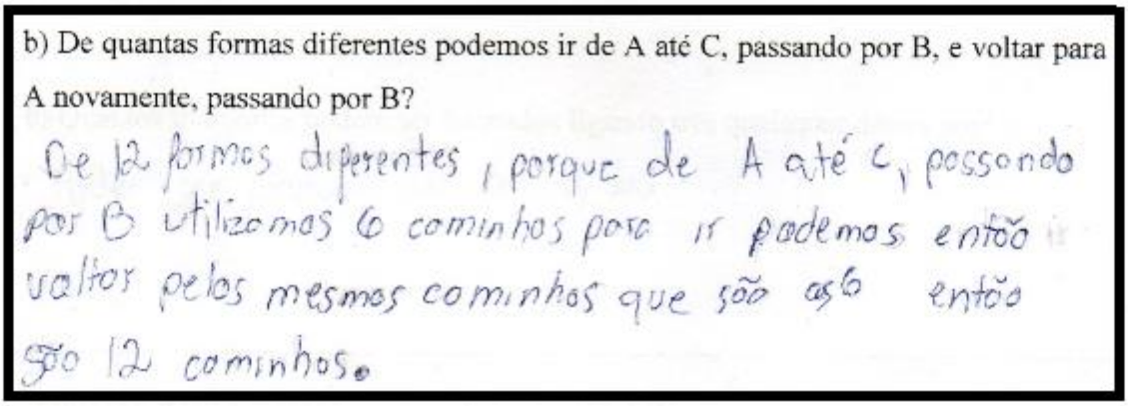
| | **Resposta** | | |
|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | **Total** |
| Utilização do Princípio Fundamental da Contagem | 7 | 0 | 7 |
| Apenas resposta | 1 | 2 | 3 |
| Elaboração de desenhos e esquemas | 0 | 1 | 1 |
| Contagem direta das possibilidades | 0 | 1 | 1 |
| Utilização do algoritmo da multiplicação | 0 | 1 | 1 |
| Registro de argumentação pessoal | 0 | 1 | 1 |
| Cálculos que não condiz com problema | 1 | 1 | 2 |

Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Com vistas a analisar as estratégias identificadas, optamos por selecionar, para este item do problema, as estratégias "*Utilização do Princípio Fundamental da Contagem*" e "*Registro de argumentação pessoal*". Semelhante a análise do item anterior, houve uma maior representatividade da primeira estratégia. Para este item optamos por apresentar, também, a análise de uma segunda estratégia visto que possibilita a compreensão de outra forma de raciocínio dos alunos.

Nesse sentido, a Figura 14, ilustra a resolução apresentada pelo Aluno A1 no item b da questão 4. Trata-se de um exemplo de uma resolução sem sucesso, na qual o aluno utilizou o registro de argumentação pessoal no qual é possível inferirmos que o mesmo pode não ter compreendido o que foi solicitado no problema de Produto Cartesiano.

Figura 14: Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item b do Problema de Produto Cartesiano


b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

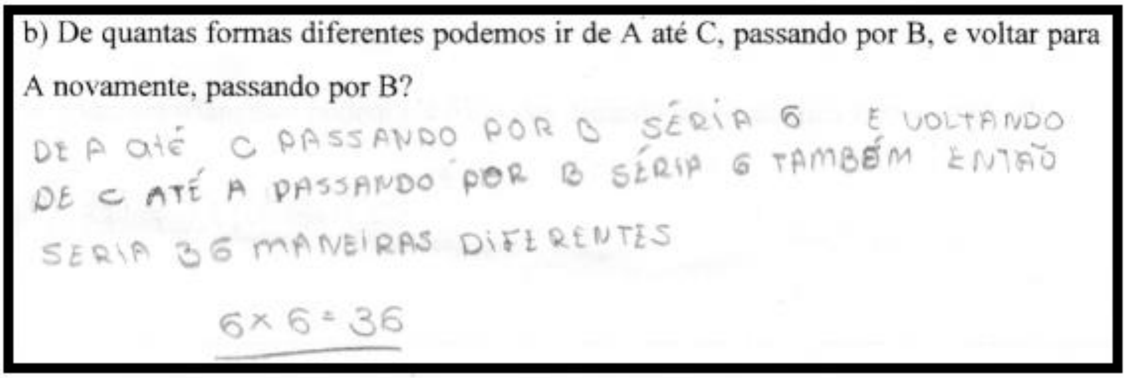
De 12 formas diperentes, porque de A até C, passando por B utilizamos 6 caminhos para ir podemos então voltar pelos mesmos caminhos que são os 6 então são 12 caminhos.

Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Ao analisarmos a resolução apresentada pelo Aluno A1 para o item b observamos que ele registrou uma argumentação pessoal, que nos permite inferir que o mesmo pode ter aplicado o algoritmo da adição $(6 + 6 = 12)$ ou da multiplicação $(2 \times 6 = 12)$ por entender que os caminhos eram os mesmos e, portanto, deveria realizar o mesmo percurso duas vezes (ida e volta). Desse modo, a análise nos permite evidenciar que, mesmo não apresentando a resposta esperada, a argumentação revela indícios de raciocínio combinatório.

Para resolver o item analisado, observamos que sete alunos utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de resolução, dentre os quais optamos por apresentar a do Aluno A2, por ser a mais representativa deste grupo.

Figura 15: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do item b do Problema de Produto Cartesiano


b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

DE A ATÉ C PASSANDO POR B SÉRIA 6 E VOLTANDO DE C ATÉ A PASSANDO POR B SÉRIA 6 TAMBÉM ENTÃO SERIA 36 MANEIRAS DIFERENTES

$6 \times 6 = 36$

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Ao analisarmos a solução apresentada pelo Aluno A2, observamos que o mesmo explicita que são seis possibilidades para ir e seis possibilidades também para voltar, justificando sua resposta, cuja solução está correta, o que implica na compreensão dos significados presentes nesse tipo de situação. Desse modo evidenciamos, também, a presença do raciocínio combinatório que possibilitou a solução esperada para o problema.

Nesse contexto, o aluno do 9º ano mostrou ter clareza dos invariantes presentes neste tipo de problema combinatório, compreendendo que teria que percorrer os mesmos caminhos duas vezes (ida e volta) e mobilizou uma estratégia de resolução alicerçada no princípio multiplicativo.

### 4.1.3 Análise das estratégias mobilizadas no item c - Produto Cartesiano

No Quadro 10 estão listadas todas as estratégias mobilizadas no item c pelos alunos que participaram da pesquisa.

Quadro 10: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item c do Problema de Produto Cartesiano

| | **Resposta** | | |
|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | **Total** |
| Utilização do Princípio Fundamental da Contagem | 8 | 1 | 9 |
| Apenas resposta | 0 | 2 | 2 |
| Elaboração de desenhos e esquemas | 0 | 1 | 1 |
| Contagem direta das possibilidades | 0 | 1 | 1 |
| Resposta inconclusiva - sem conexão ao problema proposto | 0 | 1 | 1 |
| Registro de argumentação pessoal | 0 | 1 | 1 |
| Cálculos que não condiz com problema | 0 | 1 | 1 |

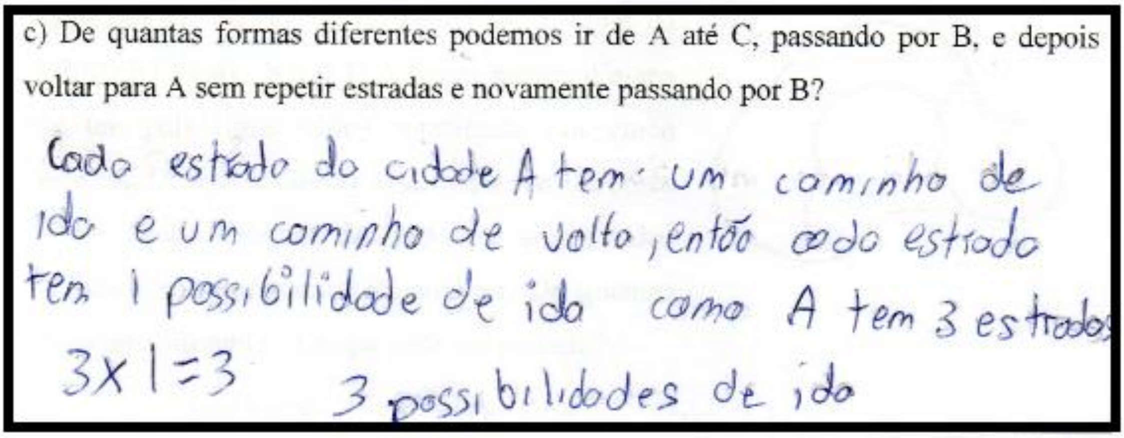
Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Tendo em vista a análise das estratégias identificadas, optamos por eleger, para este item do problema, apenas a estratégia "*Utilização do Princípio Fundamental da Contagem*" presente nas resoluções de dois dos alunos que utilizaram esse procedimento de resolução. A justificativa se fundamenta em observar que a mesma estratégia pode ser evidenciada de maneira diferente pelos alunos, ou seja, uma constatação de como os alunos mobilizam o conceito-em-ação de diversas formas frente às situações propostas.

Na resolução do item analisado, observamos que nove alunos utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia para resolver o problema, dentre os quais priorizamos por apresentar as respostas dos Alunos A1 e A2, por expressar raciocínios distintos usando uma mesma estratégia.

A Figura 16 mostra uma das estratégias de resolução presentes em problemas de combinatória apresentada pelo aluno participante deste estudo no item c referente a questão 4. Na Figura 16, é possível ver que o Aluno A1 argumenta seu raciocínio utilizando do Princípio multiplicativo e chega a uma resposta mal sucedida, mais uma vez parece não ter entendido o enunciado proposto.

Figura 16 Estratégia mobilizada pelo Aluno A1 na resolução do item c do Problema de Produto Cartesiano


c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

Cada estrada da cidade A tem um caminho de ida e um caminho de volta, então cada estrada tem 1 possibilidade de ida como A tem 3 estradas

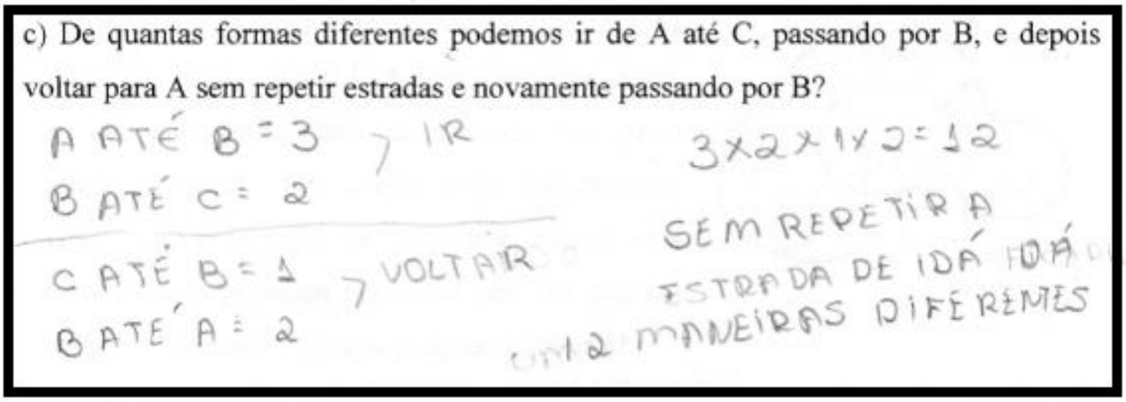
3x1=3 3 possibilidades de ida

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Tal resolução nos permite perceber que o Aluno A1 procurou utilizar o Princípio Fundamental da Contagem, mas não elegeu corretamente os valores a serem considerados no princípio multiplicativo. O que poderia ocorrer para esta situação, é o aluno usar a Contagem direta das possibilidades, já que para o item proposto a solução apresenta um resultado possível de listagem de todas as possibilidades sem se perder, é também por ser uma estratégia que aparece com frequência desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

Na Figura 17, podemos observar que o Aluno A2 ilustra um nível de compreensão elaborado, na qual descreve sua resposta em forma de esquema e conclui através do Princípio Fundamental da Contagem, assim podemos deduzir que ele pensou que, para ir são 6 possibilidades, mas apenas uma delas foi escolhida, para não repetir estradas na volta, resta 1 possibilidade de C para B e 2 de B para A, resultando em $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$ maneiras diferentes.

Figura 17: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do item c do Problema de Produto Cartesiano



c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

A ATÉ B = 3 → IR
B ATÉ C = 2
C ATÉ B = 1 → VOLTAR
B ATÉ A = 2

3x2x1x2 = 12
SEM REPETIR A ESTRADA DE IDA
12 MANEIRAS DIFERENTES

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Podemos inferir que a estratégia adotada pelo Aluno A2, o Princípio Fundamental da Contagem, pode estar ligada ao uso frequente da mesma em sala de aula. Tendo em vista que os participantes deste estudo são alunos do 9º ano, no entanto, acreditamos que em algum momento de sua trajetória escolar se deparou com tal estratégia para resolver situações pertencentes ao campo Multiplicativo, como os problemas combinatórios abordados nesta pesquisa.

Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2017) recomenda que para o desenvolvimento de habilidades relativas aos Números, Estatística e Probabilidade os alunos do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de utilizar o Princípio Multiplicativo para “resolver e elaborar problemas de contagem” (p. 313).

## 4.2 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Arranjo

Ao dar prosseguimento na análise relacionada à segunda categoria, onde abordamos o tipo de problema de Arranjo, é necessário atentarmos para algumas características presentes neste tipo de situação combinatória. “Os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas nem todos os elementos formam as possibilidades a serem enumeradas. Neste tipo de problema a ordem na qual os elementos são escolhidos constituem possibilidades distintas” (BORBA, 2013, p. 4).

Na sequência apresentamos o problema de Arranjo e seus invariantes, caracterização do tipo de problema, identificação de todas as estratégias de resolução, bem como também apontar algumas dessas estratégias mobilizadas por parte dos alunos.

- **Significado presente no problema de combinatória - Arranjo**

Nesta continuidade apresentamos um dos problemas do tipo Arranjo proposto aos alunos participantes da pesquisa, indicado como o mais representativo desta segunda categorização.

- Cinco cavalos disputam um páreo no Jockei Clube. Quantos são os possíveis trios para as três primeiras colocações nesta corrida?

<u>*Invariantes*</u>

- Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades;

- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0 < p < n, p** e **n** naturais.

Sendo assim, podemos exemplificar da seguinte maneira: o que caracteriza o referido problema é que de um grupo maior, assim denominamos (cinco cavalos: A, B, C, D, E), alguns subgrupos são organizados e a ordem de escolha destes elementos em arranjos gera possibilidades distintas, sendo importante na disposição das possibilidades, ou seja, a organização em "cavalo A, cavalo B, cavalo C" é diferente da "cavalo A, cavalo C, cavalo B".

Quando observadas as estratégias de resolução que os alunos mobilizaram ao resolverem o problema apontado, podemos citar algumas. Nesse sentido, o Quadro 11 especifica todas as estratégias apresentadas no problema pelos alunos que fizeram parte da pesquisa.

Quadro 11: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o Problema de Arranjo

| | **Resposta** | | |
|---|---|---|---|
| **Estratégias mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | **Total** |
| Utilização do Princípio Fundamental da Contagem | 11 | 1 | 12 |
| Utilização da fórmula de Arranjo | 1 | 0 | 1 |
| Utilização da árvore de possibilidades | 0 | 1 | 1 |
| Contagem direta das possibilidades | 0 | 1 | 1 |
| Utilização do algoritmo da multiplicação e diagrama | 0 | 1 | 1 |

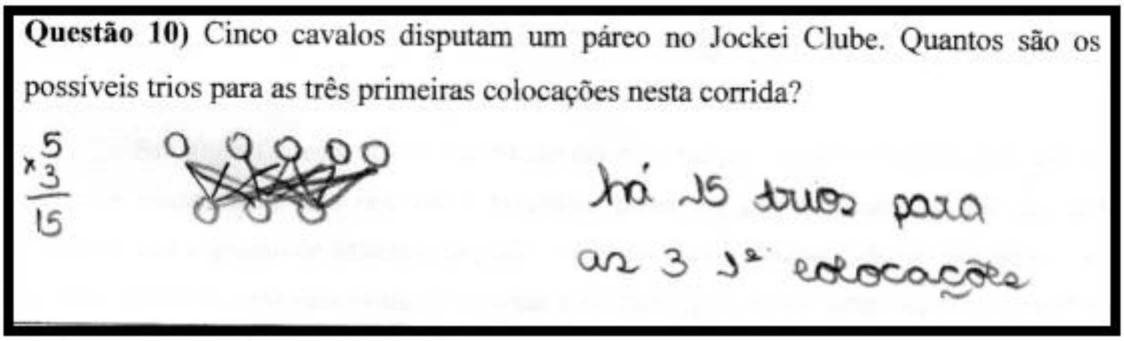
Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Ao identificarmos todas as estratégias mobilizadas pelos alunos na resolução do problema de Arranjo, observamos que 12 deles utilizaram o *"Princípio Fundamental da Contagem"*. Sendo assim, optamos por escolher, para este problema, as estratégias *"Princípio Fundamental da Contagem"* e *"utilização do algoritmo da multiplicação e diagrama"*. Relativo ao problema de Arranjo proposto aos alunos, as estratégias de resolução (representada na Figura 18) apareceram apenas uma vez nos registros dos alunos, enquanto que a estratégia mobilizada pelo Aluno A14 (representada na Figura 19) – foi considerado o procedimento de resolução mais usado pelos alunos em seus registros. Quanto à escolha dessas estratégias para análise se ancora no fato de terem sido as mais representativas de todas estratégias mobilizadas na resolução do referido problema.

Segundo Lima (2015) o Princípio Fundamental da Contagem é entendido como um princípio implícito na resolução de todos os tipos de problemas combinatórios. Em um estudo sobre o *"Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias"*, a autora está em acordo com as pesquisadoras Pessoa e Borba (2009) acreditando "que se os professores têm conhecimento de como o PFC pode ser explorado na resolução de distintas situações combinatórias e de como este princípio é base das fórmulas da Combinatória, o ensino e a aprendizagem da mesma podem ser facilitados" (LIMA, 2015, p. 26).

Na Figura 18, é possível observar que o Aluno A6 apresenta o algoritmo da multiplicação e o diagrama como estratégias de resolução para a questão 10 que se relaciona com o significado presente na combinatória, Arranjo. O que apresenta não ter a compreensão de situações desse tipo, neste caso, apresentando 15 possíveis trios de se ter 1º, 2º e 3º lugar a partir de cinco elementos.

Figura 18:  Estratégia mobilizada pelo Aluno A6 na resolução do Problema de Arranjo

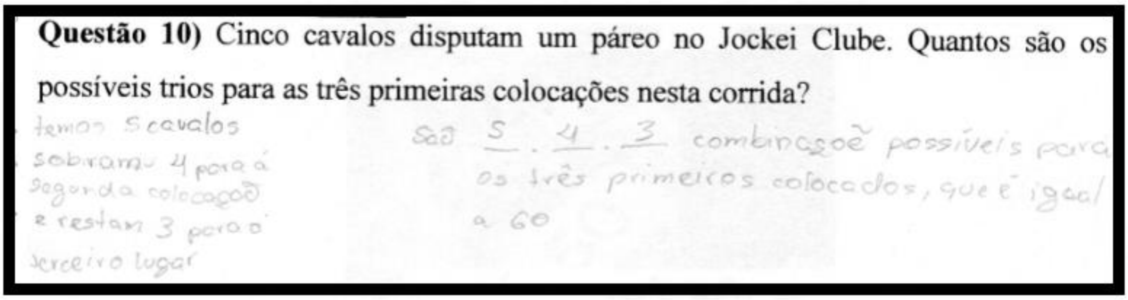



Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Podemos observar na Figura 18 em relação à estratégia apresentada pelo Aluno A6, ao usar o algoritmo da multiplicação e o diagrama como representações simbólicas para a referida questão, que o aluno não consegue chegar ao resultado correto, deduzimos que tal raciocínio poderia estar relacionado às tentativas de usar estratégias no sentido de validar o seu pensamento na representação dos possíveis trios.

Quanto ao Aluno A14, como ilustrado na Figura 19 a seguir, há indícios de que ele tenha entendido o significado presente no problema combinatório indicado, uma vez que justifica sua resposta de forma coerente utilizando o Utilização do Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de resolução, que o levou ao acerto.

Figura 19: Estratégia mobilizada pelo Aluno A14 na resolução do Problema de Arranjo


**Questão 10)** Cinco cavalos disputam um páreo no Jockei Clube. Quantos são os possíveis trios para as três primeiras colocações nesta corrida?

temos 5 cavalos
sobramu 4 para a
segunda colocação
e restam 3 para o
terceiro lugar

são 5 . 4 . 3 combinaçoẽ possíveis para os três primeiros colocados, que é igual a 60

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Em relação a estratégia de resolução mobilizada pelo Aluno A14 do 9º ano no problema de Arranjo, os dados evidenciam o registro de um raciocínio coerente em que utilizou um esquema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

Dessa forma, um dos argumentos para o uso desta estratégia, pode estar alinhada ao estudo de Moreira (2014) com professores que ensinam matemática, nos principais resultados com relação à análise qualitativa dos tipos de respostas e estratégias, o pesquisador afirma que: "as estratégias mais utilizadas foram o Princípio Fundamental da Contagem e as fórmulas, o que demonstrou uma preferência dos professores por métodos mais formais de resolução" (MOREIRA, 2014, p. 145).

Nesse sentido, podemos deduzir que as práticas/abordagens elegidas pelos professores no tocante às estratégias de resolução de problemas, podem estar influenciando na maneira como os alunos buscam solucionar as situações que lhes são apresentadas, pois há uma tendência de os alunos reproduzirem os mesmos procedimentos trabalhados em de sala de aula.

### 4.3 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Permutação

Com relação a terceira categoria a ser analisada, amparamos numa referência de Borba (2013), em que a autora admite, Permutações são casos particulares de arranjos, nos quais todos os elementos são escolhidos. Num entendimento mais amplo do conceito, “estes são tipos de problemas distintos, pois nos arranjos os elementos não são todos utilizados na escolha de cada possibilidade e nas permutações todos os elementos são utilizados em cada uma das possibilidades” (BORBA, 2013, p. 4).

Nesse contexto, exibimos os invariantes desse tipo problema combinatório, características que o diferencia dos demais significados presentes na combinatória, bem como a identificação das estratégias de resolução e uma ilustração de respostas dos alunos utilizando duas dessas estratégias.

## Significado presente no problema de combinatória - Permutação

Para a terceira categoria, exibimos a seguir o problema do tipo Permutação proposto aos alunos do 9º ano, foi escolhido por ser o único da sequência de atividades que possuía este significado da Combinatória. Desta maneira é o problema que contempla esta categorização.

- Quantos números, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

*Invariantes*

- Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades;
- Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição).

O que caracteriza o tipo de problema é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações, com base no problema exposto, podemos usá-lo como exemplo: dado um conjunto de três elementos distintos (como 7-8-9), são usados todos os três elementos para formar as sequências ordenadas. Para formar todas as permutações com todos os algarismos, os três algarismos devem ser usados e quando a ordem dos elementos é modificada, novas possibilidades são geradas, por exemplo, 789 é diferente de 897, que é diferente de 978.

Na direção de organização para esta categoria, passamos a apresentar todas as estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos, exibindo duas dessas estratégias que tiveram maior representatividade e fazendo uma análise do processo de resolução do problema proposto. A seguir, o Quadro 12 apresenta todas as estratégias mobilizadas pelos alunos ao resolverem o problema de Permutação.

Quadro 12: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o Problema de Permutação

| | Resposta | | |
|---|---|---|---|
| **Estratégias mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | **Total** |
| Utilização do Princípio Fundamental da Contagem | 7 | 0 | 7 |
| Contagem direta das possibilidades | 6 | 1 | 7 |
| Árvore de possibilidades | 1 | 0 | 1 |

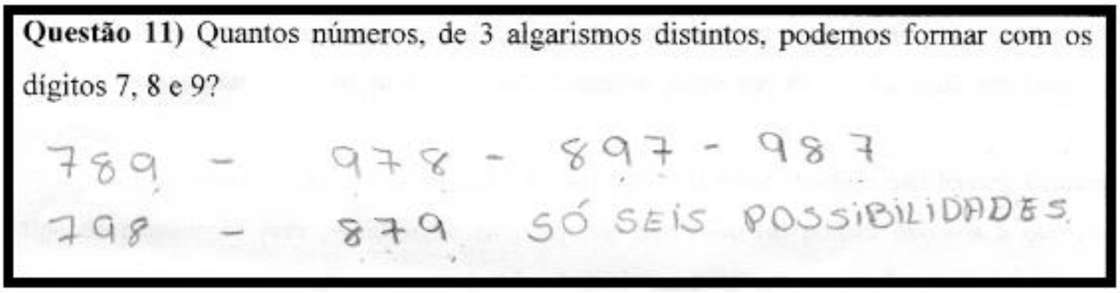
| | | |
|---|---|---|
| Problema de Permutação em branco | 1 | 1 |

Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Semelhante ao que ocorreu no problema de Arranjo, o mesmo também foi observado para o problema de Permutação, ou seja, houve um menor número de diversificação das estratégias, sendo o Princípio Fundamental da Contagem como a estratégia mais utilizada. Assim, identificadas as estratégias, decidimos selecionar duas dessas estratégias para a análise, *“Contagem direta das possibilidades”* e *“Princípio Fundamental da Contagem”*, com o intuito de apresentar àquelas que dão maior visibilidade e diversificação em relação aos tipos de respostas dadas pelos alunos ao problema sugerido.

Assim, a Figura 20 apresenta uma das estratégias de resolução para o problema proposto. O aluno A2, mostra evidências no entendimento da situação proposta, listou todas as possibilidades de três algarismos distintos com os algarismos 7, 8 e 9. Dessa forma, o que indica ter compreensão dos invariantes envolvidos no problema de Permutação.

Figura 20: Estratégia mobilizada pelo Aluno A2 na resolução do Problema de Permutação


**Questão 11)** Quantos números, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

789 - 978 - 897 - 987

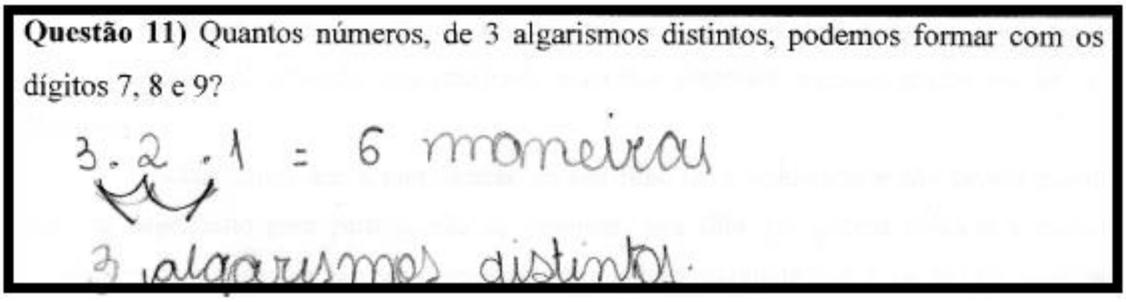
798 - 879 SÓ SEIS POSSIBILIDADES

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Para o problema de Permutação exibido na Figura 20, podemos perceber a mobilização do conceito-em-ação de permutações por este aluno, mesmo sem ter consciência de seu conhecimento de permutações. Temos a situação em que se pede para formar números com três algarismos distintos (algarismos 7, 8 e 9) e, assim, o aluno pode listar sistematicamente as seis possibilidades. Provavelmente os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental não saberiam expressar matematicamente como se faz para obter todas as possíveis permutações de elementos de um dado conjunto.

Na sequência, apresentamos a solução apresentada na Figura 21 pelo Aluno A7 em que ele utiliza o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de resolução para encontrar resultado de maneira correta.

Figura 21: Estratégia mobilizada pelo Aluno A7 na resolução do Problema de Permutação


**Questão 11)** Quantos números, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

3 . 2 . 1 = 6 maneiras

3 algarismos distintos.

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Diante da resolução é possível perceber que o Aluno A7, como mostrado na Figura 21 recorreu ao Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de resolução e consegue estabelecer o resultado corretamente. Percebemos que o aluno, ao registrar sua resposta, usou um procedimento adequado para o registro de sua resposta, evidenciando a não utilização da fórmula de Permutação ($P_n = n!$). Haja vista que, pelo fato de ser um aluno do 9º ano, possivelmente, ainda não teve contato com resoluções de problemas de Permutação utilizando procedimentos formalizados.

A análise possibilitou observar, que nos registros do Aluno A7 ele não utiliza a fórmula de Permutação, mas de maneira implícita a fórmula se evidencia. Nesse sentido, as pesquisadoras Pessoa e Borba (2009, 2010) afirmam que é possível desenvolver bem cedo compreensões sobre esses tipos de problemas (arranjo, permutação e combinação).

### 4.4 Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Combinação

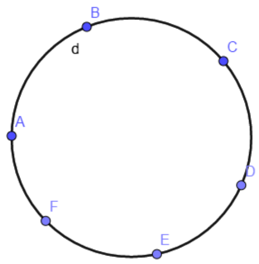
Na quarta e última categoria da referida análise, apresentamos as características desse tipo de significado presente na combinatória. Em um estudo realizado por Pessoa e Borba (2010) sobre *"O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica"*, as autoras afirmam que os problemas de Combinação, podem ser compreendidos de forma semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são retiradas possibilidades para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não constituem possibilidades distintas.

Por fim, para completar a nossa análise discorremos em relação ao último problema de Combinatória, invariantes nele envolvidos, assim como as principais características.

- **Significado presente no problema de combinatória - Combinação**

Na quarta e última categorização, apresentamos o problema do tipo Combinação que foi proposto aos alunos e que, dentro da sequência de atividades proposta, se mostrou o mais representativo.

- (Adaptado do banco de questões da OBMEP (2011, p. 37) - Nível 2) Seis pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.




a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)

b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

*Invariantes*

- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades;

- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0 < p < n, p** e **n** naturais.

O que caracteriza o problema acima é a ordenação dos elementos que não determina possibilidades diferenciadas entre si. Deste modo, por exemplo, se temos uma circunferência como ilustrada no problema proposto, sendo seis pontos ao seu redor (A, B, C, D, E, F) e assim deseja escolher dois pontos quaisquer que estão nas extremidades da circunferência para formar uma corda. Então, temos um conjunto único com seis elementos (pontos) a partir do qual devemos escolher dois desses elementos. Se escolhermos o ponto A e o ponto B (corda $\overline{AB}$), esta possibilidade é idêntica à escolha dos pontos B e A (corda $\overline{BA}$).

Na sequência elencamos todas as estratégias de resolução em que os alunos se mobilizaram ao resolver cada item do referido problema e dois exemplos de resposta que melhor expressam tais estratégias de resolução.

### 4.4.1 Análise das estratégias mobilizadas no item a - Combinação

No Quadro 13 estão listadas todas as estratégias mobilizadas pelos alunos que participaram da pesquisa referente ao item a da questão de Combinação.

Quadro 13: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item a do Problema de Combinação

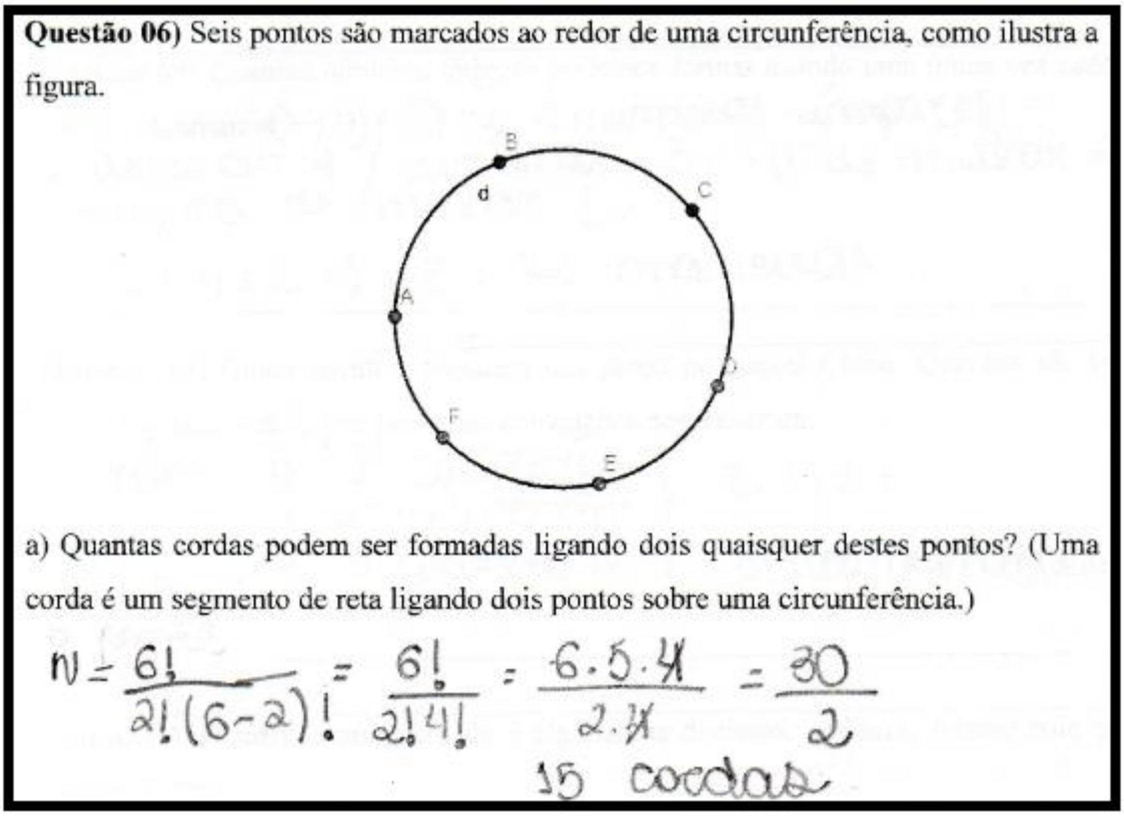
| | Resposta | | |
|---|---|---|---|
| **Estratégias mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | **Total** |
| Apenas resposta | 2 | 2 | 4 |
| Elaboração de desenhos e esquemas | 3 | 2 | 5 |
| Contagem direta das possibilidades | 1 | 1 | 2 |
| Utilização do Princípio Aditivo | 1 | 0 | 1 |
| Resposta inconclusiva - sem conexão ao problema proposto | 0 | 1 | 1 |
| Utilização da fórmula de Combinação | 3 | 0 | 3 |

Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

Por meio do Quadro 13, podemos observar uma variedade de estratégias apresentadas pelos alunos ao responder o problema indicado. Chamamos a atenção para a ausência de uma das estratégias mais evidenciadas pelos alunos nos problemas do tipo (Produto Cartesiano, Arranjo e Permutação), que foi o Princípio Fundamental da Contagem. Desse modo, com vistas a analisar as estratégias identificadas, optamos por selecionar, para este item do problema, as estratégias *"Utilização da fórmula de Combinação" e "Contagem direta das possibilidades"*. A primeira se justifica pelo fato de ter sido uma das mais representativas do Quadro 13 e a segunda, embora não tenha sido a estratégia mais utilizada pelos alunos, optamos por apresentá-la com a finalidade de diversificar a análise no tocante aos tipos de estratégias mobilizadas na resolução do item em questão.

Na sequência, as estratégias ilustradas nas Figuras 22 e 23 se relacionam com o tipo de problema combinatório presente no item a da questão 6. Por meio da Figura 22, o Aluno A7 utilizou a fórmula de Combinação para resolver o problema proposto de forma correta. Como os dados não são identificados, mas conhecendo a característica dos participantes da pesquisa, inferimos que a utilização de fórmulas como estratégias de resolução usada pelo aluno A7 e também por outros alunos, pode estar relacionado à participação deles em curso preparatório para o ingresso no ensino médio, o que é uma das características comuns dos alunos que estudam na instituição de realização da referida pesquisa, pois até nos Anos finais do Ensino Fundamental geralmente não é trabalhado conceitos formalizados para a situação proposta.

Figura 22: Estratégia mobilizada pelo Aluno A7 na resolução do item a do Problema de Combinação

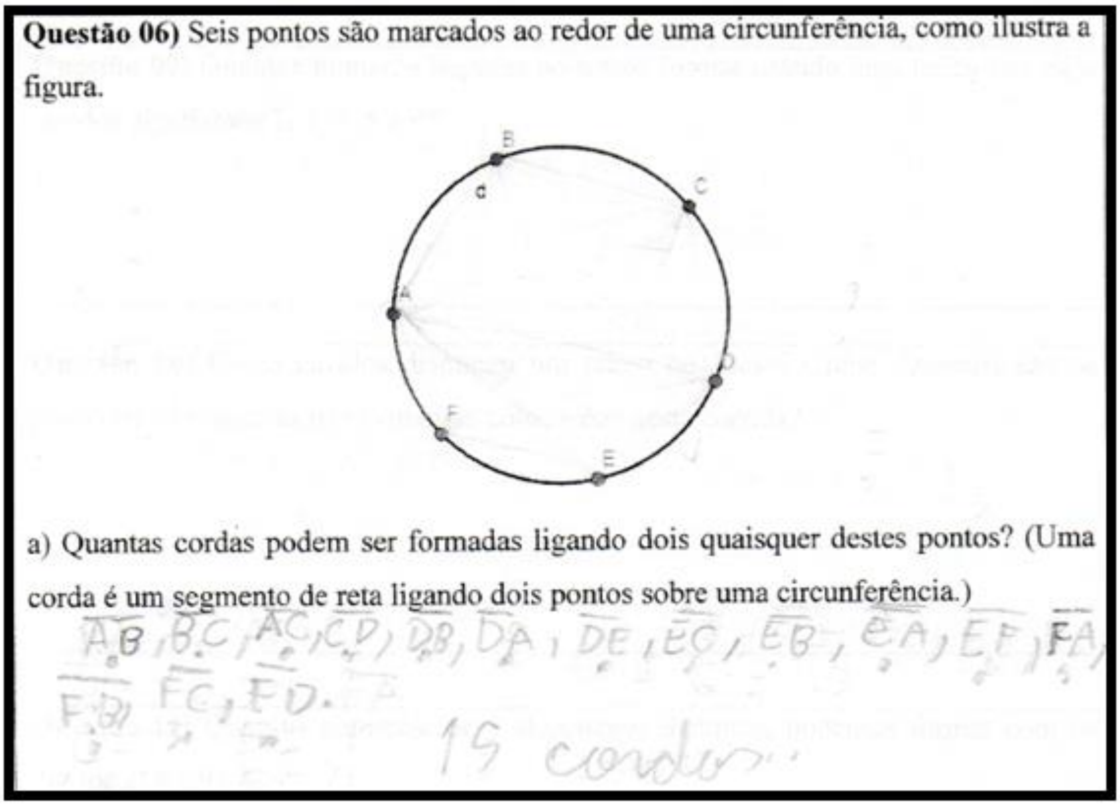



Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Ao analisar o item a do problema proposto, percebemos que o aluno priorizou o cálculo numérico através da fórmula de Combinação de maneira correta, mas ao indicá-la de *"N"* e não de "$C_{(6,2)}$", mostra não ter clareza na compreensão da aplicação da fórmula. Com isso, podemos inferir que esse aluno apresentou uma resolução de forma mecanizada, ou mesmo pelo motivo que já foi afirmado no item anterior.

O Aluno A11 representado na Figura 23, exibiu todas as possibilidades de combinação das cordas, utilizando a representação simbólica listagem (contagem direta das possibilidades) para responder o item a referente ao problema de Combinação, cuja solução está correta, chegando a conclusão de quinze possibilidades. Nesse caso, o aluno apresentou todos os casos possíveis.

Figura 23: Estratégia mobilizada pelo Aluno A11 na resolução do item a do Problema de Combinação




Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

O Aluno A11, representado pela Figura 23, resolveu o item via listagem de possibilidades, ou seja, enumerou todas as possibilidades ao identificar alguma regularidade com relação à situação proposta. Em problemas desse tipo em que apresentam um número de possibilidades considerado pequeno é bem razoável que o aluno utilize dessa estratégia, caso contrário, pode ficar inviável simbolizar uma quantidade de possibilidades quando se tem um resultado maior, pois dificulta no controle das possibilidades, neste caso, é necessário a formalização do procedimento realizado.

### 4.2.2 Análise das estratégias mobilizadas no item b - Combinação

No Quadro 14 estão listadas todas as estratégias mobilizadas no item a pelos alunos que participaram da pesquisa.

Quadro 14: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolver o item b do Problema de Combinação

| | **Resposta** | | |
|---|---|---|---|
| **Estratégias mobilizadas** | **Correta** | **Incorreta** | **Total** |
| Apenas resposta | 2 | 4 | 6 |
| Elaboração de desenhos e esquemas | 0 | 2 | 2 |
| Contagem direta das possibilidades | 2 | 0 | 2 |
| Resposta inconclusiva - sem conexão ao problema proposto | 0 | 1 | 1 |
| Utilização da fórmula de Combinação | 4 | 0 | 4 |
| Registro de argumentação pessoal | 0 | 1 | 1 |

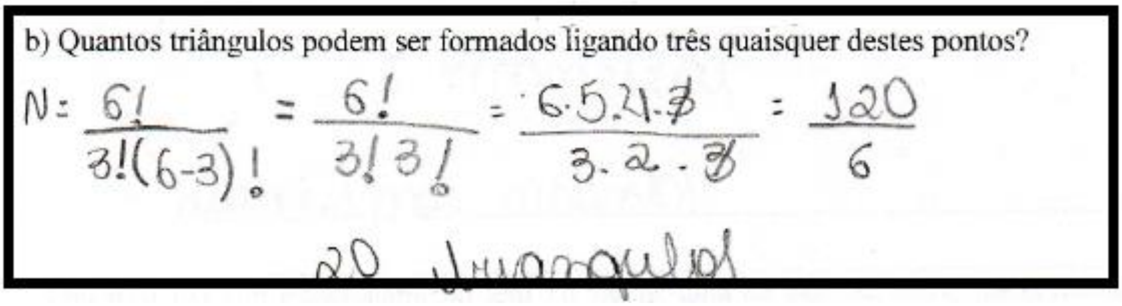
Fonte: Dados da Pesquisa (2020).

No Quadro 14, foram listadas todas as estratégias apresentadas pelos alunos para o item do b do problema de Combinação, tendo em vista a análise das estratégias identificadas, optamos por selecionar, para este item do problema, *"Utilização da fórmula de Combinação" e "Contagem direta das possibilidades"*. Notamos que os procedimentos de resolução foram semelhantes ao descrito no item anterior do referido problema. A justificativa pela escolha de duas dessas estratégias para a análise está amparada na representatividade e diversificação dos tipos de respostas atribuídas pelos alunos ao responder à questão em análise.

As Figuras 24 e 25 apresentadas na sequência mostram duas das estratégias citadas para o item b da questão 6, mobilizadas pelos alunos do 9º ano participantes desta pesquisa. Podemos observar que na Figura 24 quanto na Figura 25 os alunos utilizaram de estratégias bem sucedidas no item b do problema de Combinação, raciocínio análogo ao que ocorreu também no item a.

Na Figura 24, podemos perceber como o Aluno A7 apresentou a fórmula de Combinação mostrando compreensão em sua aplicação, que o conduziu ao acerto.

Figura 24: Estratégia mobilizada pelo Aluno A7 na resolução do item b do Problema de Combinação


b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

$$N = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3}}{3.2.\cancel{3}} = \frac{120}{6}$$

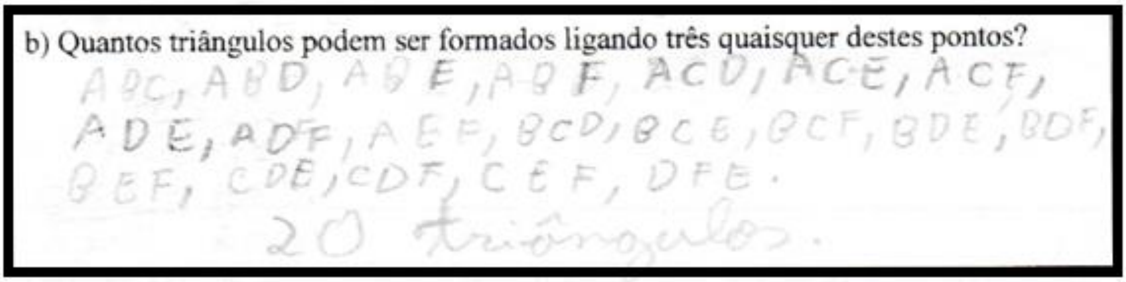
20 triângulos

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Nos registros revelados pelo Aluno A7 no item b apresentados na Figura 24, podemos observar que ele utilizou dos mesmos procedimentos analisados para o item a da Questão 06.

Por meio da resolução apresentada na Figura 25, é possível perceber que o Aluno A11 utilizou estratégias de resolução como, listagem de todas as possíveis combinações com os três pontos a fim de formar os triângulos esgotando todas as possibilidades com a cautela de não cometer erros nesta contagem, utilizando a representação simbólica Contagem direta das possibilidades, assim alcançando vinte casos possíveis.

Figura 25: Estratégia mobilizada pelo Aluno A11 na resolução do item b do Problema de Combinação


b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF, BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DFE.

20 triângulos.

Fonte: Dados da Pesquisa (2020)

Na Figura 25, podemos observar que o Aluno A11 recorre da mesma estratégia de resolução, Contagem direta das possibilidades utilizada por ele no item a da Questão 06.

Diante dos dados analisados, podemos observar que a utilização de algumas representações simbólicas no sentido de responder o problema de Combinação proposto aos alunos participantes desse estudo, exigem dos alunos uma atenção no que diz respeito à exclusão dos casos repetidos, por exemplo, ao usar estratégias de resolução como a listagem e a árvore de possibilidades.

Nesse sentido, em relação aos problemas combinatórios que apresentam o significado da Combinação, é fundamental que o professor conduza um trabalho no sentido de orientar os alunos quanto aos invariantes presentes neste tipo de situação. Os invariantes (VERGNAUD, 1986) dos diferentes significados precisam ser analisados, discutidos, refletidos, dessa maneira, permite ao aluno desenvolver a compreensão das diferentes lógicas envolvendo as situações propostas.

Portanto, buscamos identificar e analisar as diferentes estratégias mobilizadas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que participaram desta pesquisa. Diante da análise foi possível verificar os variados procedimentos utilizados pelos alunos que não são característicos de níveis específicos de ensino. Segundo Borba (2013), um aspecto que precisa ficar evidente aos alunos ao serem trabalhadas situações combinatórias em sala de aula, diz respeito às relações específicas de escolha de elementos e ordenação dos elementos, é o que diferencia os problemas básicos de combinatória (produtos cartesianos, arranjos, permutações e combinações).

### 4.5 Algumas considerações sobre as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos no presente estudo

Concluída a análise a partir dos dados coletados para o estudo em discussão, foi possível verificar a variedade de estratégias mobilizadas pelos alunos do 9º ano para a resolução de problemas que envolveram o raciocínio combinatório.

De acordo com PESSOA e BORBA (2009) são várias as representações simbólicas, como: desenhos, listagens de possibilidades, árvores de possibilidades, diagramas, quadros, uso de fórmulas ou cálculos, entre outras.

Desse modo, na presente pesquisa identificamos uma variedade de estratégias utilizadas pelos alunos nos problemas que envolveram diferentes significados de Combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação ou Combinação), então decidimos descrevê-las no Quadro 15 de acordo com as ideias sugeridas por Pessoa (2009).

Assim, apresentamos a seguir o Quadro 15 ancorado na concepção de Pessoa (2009), com a organização de diferentes tipos de estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem os problemas de Combinatória. Tal estudo foi, posteriormente, utilizado por Azevedo (2013) e Vega (2014) para classificar a variedade de respostas que os alunos utilizaram ao deparar-se com problemas combinatórios.

Quadro 15: Estratégias de resolução apresentadas pelos alunos ao resolverem problemas de Combinatória propostos.

| Estratégias | Características |
|---|---|
| **1. Não explicitou estratégia** | Quando o aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual estratégia foi utilizada para a resolução. |
| **2. Adição / subtração** | O aluno utilizou os valores apresentados no enunciado numa destas operações. A resposta é *incorreta sem relação*. |
| **3. Divisão** | Neste caso o aluno utilizou os valores apresentados no enunciado para realizar uma divisão. A resposta é *incorreta sem relação*. |
| **4. Desenho** | O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo, ou não, sistematização* no processo de resposta e *com* ou *sem o esgotamento de todas as possibilidades*. |
| **5. Árvore de possibilidades** | O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo, ou não, sistematização* no processo de resposta e *com* ou *sem o esgotamento de todas as possibilidades*. O aluno construiu uma árvore de possibilidades, podendo apresentar uma resposta *correta* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização dos elementos, com* ou *sem esgotamento de possibilidades*. |
| **6. Diagrama** | O aluno construiu um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta *correta* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*, *com* ou *sem esgotamento de possibilidades.* |
| **7. Listagem de possibilidades** | O aluno listou as possibilidades de forma escrita, com os nomes ou com símbolos, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo*, ou *não*, o *estabelecimento de relação* e/ou o *esgotamento de todas as possibilidades*. |
| **8. Adição inadequada de parcelas repetidas** | Quando o aluno utilizou a adição de parcelas repetidas, mas esta é inadequada para o que o problema solicita. A resposta é *incorreta sem relação*. |
| **9. Adição adequada de parcelas repetidas** | Quando o aluno percebeu que pode utilizar uma adição de parcelas repetidas para resolver o problema, geralmente substituindo a multiplicação adequada. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*. |
| **10. Multiplicação inadequada** | O aluno relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica. A resposta é *incorreta sem relação*. |
| **11. Multiplicação adequada** | O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*. |
| **12. Princípio Fundamental da Contagem (PFC)** | Quando o aluno utilizou o PFC para resolver o problema. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*. |
| **13. Uso adequado de fórmulas** | Quando o aluno utilizou uma fórmula adequada ao que o problema solicita. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*. |

Fonte: adaptado a partir das ideias de Pessoa (2009).

Concluindo a referida análise optamos por adaptar o Quadro 15 com as representações simbólicas classificadas pela autora citada, e mencionar àquelas que foram encontradas durante o processo de análise dos dados da referida pesquisa. De todas as estratégias apresentadas pelos alunos participantes deste estudo, destacamos treze tipos de representações simbólicas (estratégias), encontradas nos registros das resoluções utilizadas pelos alunos ao responderem os problemas propostos.

A análise possibilitou uma melhor compreensão dos aspectos relacionados às discussões teóricas e metodológicas acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório bem como a problematização das diferentes estratégias que podem ser mobilizadas pelos alunos ao resolverem situações problema desta natureza.

Contudo, os dados analisados nos possibilitaram elaborar um Produto Educacional voltado à formação de professores de Matemática, tal como mencionado anteriormente.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo principal *identificar e analisar as diferentes estratégias de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de situações/problemas do Campo Conceitual Multiplicativo, especificamente os problemas de Combinatória*. Ao buscarmos atender o objetivo dessa pesquisa identificamos diferentes estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos, com relação a análise das mesmas, foi feita mediante à descrição de quatro categorias: a) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Produto Cartesiano; b) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Arranjo; c) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Permutação; e d) Análise das estratégias mobilizadas pelos alunos no Problema de Combinação.

Foram apresentados os pressupostos teóricos, um mapeamento acerca do Campo das Estruturas Multiplicativas e o percurso metodológico no qual embasaram o desenvolvimento da mesma. A partir das referências citadas, bem como da investigação proposta, foram apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da análise quantitativa dos dados coletados junto a dezesseis alunos do 9º ano do Ensino Fundamental através da realização de uma sequência de atividades envolvendo doze questões sobre os 4 tipos de problemas combinatórios (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação, Combinação).

Vale ressaltar que realizamos um mapeamento de pesquisas brasileiras acerca do Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Tal mapeamento foi realizado a partir de buscas por pesquisas disponibilizadas no Banco de Dissertações e Teses da CAPES, mapeamos 64 pesquisas, sendo que apenas 4 delas, tinham como foco de investigação o Raciocínio Combinatório. Sabemos que vários estudos (ROCHA, 2011; AZEVEDO, 2013; VEGA, 2014; MONTENEGRO, 2018) que abordam o raciocínio combinatório na perspectiva do Vergnaud, nos quais estão inseridos no Campo das Estruturas Multiplicativas não estão contemplados neste mapeamento, pelo fato dos descritores utilizados na busca.

Em função da pandemia da COVID-19, os dados para a referida pesquisa foram obtidos no contexto do ensino remoto. Essa foi uma limitação para o estudo, uma vez que acreditamos que poderíamos ter alcançado uma quantidade maior de dados se a produção dos dados pudesse ter sido realizada com os alunos de forma presencial. Um indicador que nos possibilita apontar esta limitação é o número de alunos participantes no contexto remoto. Presencialmente, provavelmente, a adesão teria sido maior, já que na escola havia duas turmas de alunos do 9º ano com aproximadamente 56 alunos regularmente matriculados. Com esse montante de alunos participando, acreditamos que poderíamos ter uma diversidade maior de estratégias de resoluções.

Com a pandemia evidenciamos que nem todos os alunos tiveram acesso ao ensino remoto de maneira igualitária. Outro ponto relevante é a presença da professora-pesquisadora em sala de aula para as interações entre aluno e professor, as relações que os próprios alunos estabelecem quando estão reunidos presencialmente. Enquanto, que no ensino remoto não existe essa conexão face a face, enxergamos o aluno e professor de um aparelho tecnológico ou por meio de interações via mensagens de texto.

Por outro lado, dentro das possibilidades da professora-pesquisadora, da escola, dos alunos e de seus responsáveis, foi possível coletar os dados que dão sustentação a presente pesquisa através de orientações, documentos enviados via aplicativo de *WhatsApp*, o grupo de discussão por meio do *WhatsApp* com os alunos para a condução de todo o processo de coleta dos dados e a sequência de atividades disponibilizada na escola para que o aluno ou responsável tivesse acesso seguindo os protocolos de segurança.

Quanto aos problemas selecionados para a análise, de uma sequência de atividades proposta aos alunos contendo doze questões, optamos por selecionar uma questão de cada um dos tipos de problemas combinatórios, assim sendo, havia apenas um problema do tipo Permutação, e com isso a questão de Permutação foi a escolhida por ser a única da sequência que possuía este tipo de significado. Após a análise dos dados evidenciou-se que esta foi uma das limitações do estudo. Sugerimos que haja pelo menos duas questões de cada tipo de significado da Combinatória para poder ter uma diversidade maior de estratégias.

A análise se pautou principalmente no diz respeito aos significados de Combinatória dos problemas (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação). Vale ressaltar que neste estudo tratamos apenas de Permutação simples, Arranjos sem repetição e Combinações simples. De acordo com Pessoa (2009) é importante lembrar o que diferencia cada significado com seus invariantes da combinatória para que se possa refletir sobre as particularidades de cada um dos tipos de problemas combinatórios. O que caracteriza o produto cartesiano é que dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formarem um terceiro conjunto. Nos arranjos, de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades. No caso da Permutação, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações e, quando a ordem dos elementos é modificada, novas possibilidades são geradas. E nas combinações, de modo semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são retiradas possibilidades para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades (PESSOA, 2099, p. 245).

Com relação aos problemas combinatórios discutidos neste estudo, são várias as estratégias de resolução que os alunos mobilizaram para resolver os problemas propostos, diferentes formas de representação: Princípio Fundamental da Contagem, desenhos, esquemas, Contagem direta das possibilidades, respostas inconclusivas (sem conexão ao problema proposto), utilização de fórmulas, registro de argumentação pessoal, apenas respostas corretas ou incorretas, princípio aditivo, algoritmos da multiplicação e da divisão. *"As diferentes formas de representação simbólica ocorrem tanto no que se refere às soluções apresentadas pelos alunos quanto na proposição da questão"* (PESSOA, 2009, p. 80).

Percebemos que a maioria dos alunos do 9º ano participantes desta pesquisa, conseguiram apresentar respostas utilizando de estratégias bem sucedidas evidenciando raciocínios coerentes com relação aos problemas propostos, no caso específico deste estudo, foram nos problemas de Produto Cartesiano e Combinação que os alunos mobilizaram estratégias mais diversificadas, entretanto, muitos ainda não conseguiram perceber os invariantes envolvidos nos problemas de Arranjo, Permutação e Combinação e apresentaram estratégias incompletas ou inadequadas, ou mesmo utilizou de estratégias adequadas, mas não implicou em respostas corretas.

De acordo com Pessoa e Silva (2012) os invariantes são elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas subjacentes em cada significado da Combinatória (tipos de problema combinatório). Assim, os problemas combinatórios podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de representação (representações simbólicas): desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras.

Um ponto a ser observado na análise dos resultados, e com relação à estratégia mais utilizada pelos alunos e estratégias menos exploradas, o Princípio Fundamental da Contagem foi uma estratégia muito recorrente nas resoluções apresentadas pelos alunos, pois possibilita a resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios e duas das estratégias apresentadas nos registros menos usadas foram a árvore de possibilidades e o diagrama, sendo que a árvore de possibilidades é uma estratégia muito indicada nas resoluções de exercícios propostos em livros didáticos destinados aos anos finais do Ensino Fundamental (JUNIOR; CASTTRUCCI, 2018) e no Ensino médio (LEONARDO, 2016).

Como sugestão para futuras investigações com os mesmos dados, é possível considerar uma análise teórica e metodológica acerca dos erros e acertos praticados pelos alunos nos quatro tipos de problemas de Combinação, na tentativa de investigar se a estratégia adotada pelo aluno pode ou poderá induzi-lo ao erro ou acerto. Ainda, pode-se pensar na possibilidade de desenvolver uma pesquisa do tipo estado da arte no sentido de ampliar o mapeamento já realizado, sobre o Campo das Estruturas Multiplicativas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e de outras teorias com foco na combinatória.

Acreditamos na relevância desta temática para a área de Educação Matemática e que a presente pesquisa possa contribuir, de alguma forma, para que nós professores nos atentemos para nossas dificuldades e limitações em relação aos nossos conhecimentos, procurando nos aperfeiçoar profissionalmente e compreender que a nossa formação é contínua. Assim esperamos, que as discussões teóricas e metodológicas tecidas neste estudo acerca das estratégias de resoluções em problemas combinatórios auxiliem na formação de professores de matemática.

Assim sendo, elaboramos um Produto Educacional no sentido de fomentar os professores de matemática a desenvolver habilidades em resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem, no que tange o raciocínio combinatório, permitindo assim aos alunos criarem suas próprias conjecturas, utilizando e comunicando suas estratégias de resolução de maneira mais clara e objetiva.

## REFERÊNCIAS


AGUIAR, M. B. **Introduzindo a noção de proporcionalidade via resolução de problemas**: uma análise acerca de esquemas mobilizados por estudantes do sétimo ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ALENCAR, E. S. **Conhecimento Profissional Docente de professores do 5º ano de uma escola com bom desempenho em Matemática:** O caso das estruturas multiplicativas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Bandeirantes, São Paulo, 2012.

ALMEIDA, L. C. de. **Solução de situações de comparação multiplicativa e a criatividade matemática.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2017.

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades:** é melhor no papel ou no computador? Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

BACKENDORF, B. V. R. **Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5º ano do ensino fundamental:** um estudo de caso. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

BARRETO, M. das G. B. **Formação continuada: um desvelar de saberes dos professores da educação básica em diálogos reflexivos sobre a estrutura multiplicativa.** Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2016.

BATISTA, A. M. da S. B**. A influência dos suportes de representação na resolução de problemas com estruturas multiplicativas.** Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

BARBOSA, G dos S. **O teorema fundamental da aritmética:** jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

BEYER, F. L. L. **Campo Conceitual Multiplicativo: um mapeamento das pesquisas produzidas no Brasil entre os anos de 1997 e 2016.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2018.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994.

BONANNO, A. de L. **Um estudo sobre o cálculo operatório no campo multiplicativo com alunos de 5ª série do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

BORBA, R. **Vamos combinar, arranjar e permutar:** Aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: **Anais...** do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013. p. 1 – 16.

BORBA, R. **Vamos combinar?** Aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. Salto para o Futuro, v. 6, p. 6-10, 2014.

BORBA, R. **ANTES QUE SEJA TARDE:** aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamearicana, v. 7, p. 1-17, 2016.

BORGA, M. F. **Formação continuada de professores com foco na resolução de problemas do campo multiplicativo para o 4º ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2015.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto.** Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

**_________**. **Ministério da Educação e do Desporto.** Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

**_________**. MEC. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. **PCNs+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 144 p. 2002.

**_________**. **Secretaria de Educação Básica**. Orientações curriculares para o ensino médio – PCNEM. volume 2. Brasília: MEC, 2006.

**_________**. SEB. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística. Ministério da Educação. Brasília: MEC, SEB, 2014.

**_________**. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Parecer do CNE/CP Nº 5/2020**, de 28 de abril de 2020. Reorganização do Calendário Escolar e da possibilidade de cômputo de atividades não presenciais para fins de cumprimento da carga horária mínima anual, em razão da Pandemia da COVID19. Diário Oficial da União, 1 de junho de 2020, Seção 1, p. 32.

BRITO, K. L. G. de. **Divisão com números naturais:** um estudo de saberes (re)construídos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2017.

CANÔAS, S. S. **O Campo Conceitual Multiplicativo na Perspectiva do Professor das Séries Iniciais (1ª a 4ª série).** Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1997.

CARVALHO, R. L. **Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores de matemática com suporte das tecnologias digitais.** Tese (Doutorado) - Educação da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

CASTRO, E. R. **Competências conceituais e didáticas de professores do 5° ano do ensino fundamental sobre as situações multiplicativas de isomorfismo de medidas.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2016.

CASTRO, J. B. de**. Construção do conceito de covariação por estudantes do Ensino Fundamental em ambientes de múltiplas representações com suporte das tecnologias digitais.** Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

CLARA, R. F. de M. **Quantidades contínuas e discretas:** um olhar sobre a compreensão de estudantes acerca das relações inversas em problemas de divisão. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2017.

CORREIA, D. S. **O desenvolvimento profissional de professores que ensinam as estruturas multiplicativas.** Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2018.

DIAS, A. C. A. M. **Avaliação de um objeto de aprendizagem para a compreensão do conceito de proporcionalidade por estudantes do 6º. ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2016.

FERRAZ, S. R. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo:** um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). Dissertação (Mestrado), UFOP, Ouro Preto, 2016.

FERREIRA, M. dos S. **Marcas da divisão - um estudo de caso sobre a aprendizagem da operação de divisão no 4º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.

FILHO, N. G. de O. **Problemas de estruturas aditivas e multiplicativas propostos em livros didáticos de matemática:** o impacto do Programa Nacional do Livro Didático. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

FIORE, C. A. **Os pensamentos narrativos e lógico científico na resolução de problemas nos campos conceituais aditivo e multiplicativo no ano final do ensino fundamental I.** Dissertação (mestrado) - Universidade Bandeirante. São Paulo, 2013.

FIORESE, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2013.

GUIMARÃES, K. P. **Processos cognitivos envolvidos na construção de estruturas Multiplicativas.** Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2004.

JOSÉ RUY, G. J.; CASTRUCCI B. **A conquista da matemática:** 8º ano/ensino fundamental. 4ªEd. São Paulo: FTD, 2018.

JOYE, C.R.; MOREIRA, M.M.; ROCHA, S.S.D. Educação a Distância ou Atividade Educacional Remota Emergencial: em busca do elo perdido da educação escolar em tempos de COVID-19. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 7, p. 1-29, 2020.

LEITE, A. B. B. **Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla:** um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016.

LEONARDO, F. M. De. **Conexões com a Matemática:** 2º ano/ensino médio. 3ªEd. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, A. P. **Princípio fundamental da contagem: conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

LIMA, D. C. **A formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e as estruturas multiplicativas.** Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2016.

LIMA, R. R. de. **Campo Multiplicativo: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2012.

LIMA, R. de C. G. de. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos:** do início da escolarização até o ensino médio. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

LIMA, E. T. de. **Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA:** investigando relações. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2018.

LUNA, J. M. O. de. **As concepções e as crenças do professor sobre a multiplicação e a divisão para ensinar crianças de anos iniciais.** Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Duque de Caxias, 2017.

MAGINA, Sandra. **A teoria dos campos conceituais:** contribuições da psicologia para a pratica docente. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf>. Acesso em: 19 de Outubro de 2019.

MAGINA, S..; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 6, n. 1, p. 53-71, 2004.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO-FILHO, J. A. de et al. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV, 2016, p. 65-82.

MAIA, D. L. **Aprendizagem docente sobre estruturas multiplicativas a partir de uma formação colaborativa apoiada em tecnologias digitais**. Doutorado (Tese) – Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2016.

MARQUES, E. O.; VIEIRA, E. R.; SILVA, A. M. G. DA; PEREIRA, P. C.; OLIVEIRA, T. G. de. Campo Conceitual Aditivo nos anos iniciais: uma abordagem no contexto de resolução de problemas. **Educação Matemática na Contemporaneidade**: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

MARTINS, G. V. **Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos:** um estudo sobre as estruturas multiplicativas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

MEDEIROS, D. M. **A reflexão como fundamento para a formação do professor:** um olhar sobre função linear. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2018.

MILAGRE, P. H. **Proporção simples:** análise de situações elaboradas por professores em um processo formativo. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2017.

MINAS GERAIS, **Currículo Referência de Minas Gerais** (CRMG). Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: fev. 2020.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias.** Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2018.

MOREIRA. F. M. B. **Os conhecimentos acerca dos conceitos de análise combinatória de professores que ensinam matemática:** um estudo diagnóstico. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2014.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n.1, p. 7-29, 2002.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORO, M. L. F. e SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006.

NASCIMENTO, S. M. do. **Problemas multiplicativos no 4º ano do ensino fundamental:** ensino e estratégias de resolução. Dissertação (Mestrado) – Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2017.

PEREIRA, E. F. **Esquemas utilizados por estudantes do 9º ano ao resolver situações da estrutura multiplicativa.** Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2015.

OLIVEIRA, F. S. M. de A. **Crianças de 5° ano do Ensino Fundamental resolvendo problemas de divisão:** a calculadora pode contribuir? Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

OLIVEIRA, R. M de. **Permanência de elementos da formação continuada acerca da teoria dos campos conceituais na prática de professora que ensina matemática.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2017.

OLIVEIRA, T. da S. **Proporcionalidade:** um olhar sobre os esquemas de estudantes do ensino fundamental. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2018.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, n. 1, p. 1 - 22, 2010.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, n. 31, p. 105 - 150, jan-jun. 2009.

PLACHA, K. C. **A solução de problemas de produto de medidas de crianças da 3ª. série do ensino fundamental e a intervenção do professor.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2006.

PORTO, E. R. S. **Raciocínio proporcional:** a resolução de problemas por estudantes da EJA. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

RASI, G. C. **Estruturas multiplicativas: concepções de alunos de Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

ROCHA, C. de A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. Mestrado (Dissertação) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

SANTANA, R. N. S. **Resolução de problemas multiplicativos e sua complexidade do ponto de vista da leitura**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Belém, 2008.

SANTANA E.; ALVES, A. A; NUNES, C. B. A Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 29, n. 53, p. 1162-1180, dez. 2015.

SANTOS, J. S. de S. **Formação de professores com dimensões colaborativas:** as estruturas multiplicativas em foco. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2017.

SANTOS, M. O. **Formação continuada de professoras dos anos iniciais:** a comparação multiplicativa. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2017.

SANTOS, R. R. dos. **Formação continuada de professores sobre estruturas multiplicativas a partir de sequências didáticas.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2006.

SCHWANZ, C. B.; FELCHER, C. D. O. Reflexões acerca dos desafios da aprendizagem matemática no ensino remoto. **Redin**, Taquara/RS, FACCAT, v. 9, n. 1, p. 91-106, 2020.

SELVA, A. C. V. & BORBA, R. E. S. R. Sondando o conhecimento de professoras sobre o desenvolvimento conceitual multiplicativo. **Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife: UFPE, 2008.

SENA, C. X. D. S. **Resolução de estudantes frente a problemas de divisão:** antes e depois do ensino formal. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2015.

SILVA, A. C da. **A constituição dos saberes da docência:** uma análise do campo multiplicativo. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SILVA, S. Das N. S. **Aprendendo e ensinando resolução de problemas matemáticos com estruturas multiplicativas envolvendo números naturais:** vivência de uma sequência didática. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1999.

SILVA, S. H. da. **Reflexões com professoras acerca da teoria dos campos conceituais como fundamento de reelaboração da prática docente em matemática.** Tese (Doutorado) - Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2018.

SILVA, S. R. F. da S. **Um estudo das estruturas multiplicativas nos Guias de Planejamento e Orientações Didáticas do Programa Ler e Escrever.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2010.

SILVA, P. A. da. **Campo multiplicativo das operações - uma iniciativa de formação com professores que ensinam matemática.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014.

SOARES, M. A. da S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática:** uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica. Tese (Doutorado) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Unijuí, 2016.

SOUZA, E. I. R. de. **Estruturas multiplicativas: concepção de professor do ensino fundamental.** Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2015.

TEIXEIRA, A. C. N. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental:** uma proposta de intervenção. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Bahia, 2016.

VEGA, D. A. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha:** Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação ou Permutação? 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2014.

VASCONCELOS, C. F. B. S. de. **A (re) construção do conceito de dividir na formação dos professores:** o uso do jogo como recurso metodológico. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2009.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In. HIEBERT, H. and BEHR, M. (Ed.). **Research Agenda in Mathematics Education.** Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

VERGNAUD, G. A. Multiplicative structures. Im R. Lesh 8 M. Landau (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, 1983, pp. 127-174.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, n. Especial: 1/2011, p. 15-27, 2011

VERGNAUD. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 10 (23): 133-170, 1990.

VERGNAUD. G. **El niño, las matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p. 75 - 90, 1986.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

YAMANAKA, O. Y. **Estudo das concepções e competências dos professores:** a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

ZANELLA, M. S. **Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá. Paraná, 2013.

ZARAN, M. L. O. **Uma análise dos procedimentos de resolução de alunos de 5º ano do ensino fundamental em relação a problemas de estruturas multiplicativas.** 2013. Dissertação (Mestrado) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2013.

**Apêndice 1 – Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE para pais ou responsáveis)**

**Universidade Federal de Ouro Preto - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática**

**Título da pesquisa:** *Análise de estratégias de resolução de atividades, envolvendo raciocínio combinatório, enquanto dispositivo para a formação inicial de professores de Matemática*

Seu filho (a) está sendo convidado (a) a participar, como voluntário (a), em uma pesquisa educacional, cujo objetivo é investigar como um projeto composto por atividades voltadas para o ensino de Matemática pode contribuir para a mudança da representação social da Matemática e como essa mudança impacta a aprendizagem de um grupo de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Para que a pesquisa possa ser realizada, utilizaremos duas horas aulas do período letivo. O material coletado será destinado à análise posterior, exclusivamente em favor da pesquisa.

Esclarecemos que a participação de seu filho (a) é voluntária e não haverá qualquer tipo de pagamento para participação na pesquisa. Seu filho (a) poderá deixá-la a qualquer momento, bem como se recusar a responder a qualquer pergunta que a ele (a) for feita, sem qualquer tipo de prejuízo.

Os possíveis riscos que poderão ocorrer nessa etapa da metodologia adotada nessa investigação estão relacionados com o manejo de materiais manipulativos, alguns de utilização frequente dos alunos, como, por exemplo, lápis, borracha, régua, caneta e calculadora, que serão necessários para a realização das atividades propostas em sala de aula.

No entanto, os possíveis riscos serão minimizados e/ou eliminados por meio da supervisão e da orientação da professora-pesquisadora e do professor-orientador por meio de orientações específicas para que a atividade em sala de aula seja realizada com segurança.

Os benefícios referem-se à oportunidade de os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental revisitarem conhecimentos prévios, bem como consolidar conceitos e procedimentos relacionados ao estudo de Análise Combinatória.

A participação é confidencial e em hipótese alguma o material coletado durante a atividade será divulgado, sem prévia autorização. Todo o material coletado será arquivado na sala nº 1-13, ICEB III do professor orientador dessa pesquisa, no Instituto de Ciências Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto – Campus Morro do Cruzeiro por cinco anos, assegurando-se o sigilo sobre a participação dos envolvidos no projeto. Após esse período, os dados serão destruídos. Os conhecimentos resultantes do estudo poderão ser divulgados em revistas, jornais, congressos, simpósios, uma dissertação de mestrado e um Produto Educacional. As identidades da escola e dos alunos serão salvaguardadas pelo uso de nomes fictícios. Caso o (a) senhor (a) não autorize a participação de seu filho (a), dele (a) nenhuma informação será coletada, incluindo registros escritos. Além disso, a recusa em participar do estudo não acarretará qualquer tipo de punição ou prejuízo acadêmico.

Para esclarecimento de qualquer dúvida, o (a) senhor (a) poderá entrar em contato com os pesquisadores responsáveis através dos telefones e/ou endereços eletrônicos constantes desse termo, e, em caso de dúvidas éticas, poderá recorrer ao Comitê de Ética e Pesquisa – Universidade Federal de Ouro Preto (CEP/UFOP) Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – Centro de Convergência – cep@propp.ufop.br – (31) 3559-1368. Agradecemos, desde já, a sua colaboração.

Agradecemos, desde já, a sua colaboração.

Ouro Preto, 08 de novembro de 2019.

| | |
|---|---|
| Douglas da Silva Tinti | Fabrícia Gomes Moreira |
| **Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti** | **Fabrícia Gomes Moreira** |
| **(pesquisador responsável)** | **(professora-pesquisadora)** |
| **email: tinti@ufop.edu.br** | **email: fagomes.pnaic@gmail.com.br** |

---

Consentimento para participação do aluno (a) como sujeito na pesquisa: *Análise de estratégias de resolução de atividades, envolvendo raciocínio combinatório, enquanto dispositivo para a formação inicial de professores de Matemática*

Eu,___, li e entendi as informações e os detalhes descritos nesse documento. Autorizo a participação do (a) meu (minha) filho (a),________, nesta pesquisa de acordo com os procedimentos descritos no corpo deste documento. Autorizo a recolha do material por ele produzido durante as atividades desenvolvidas. Todo o material coletado, referente a meu (minha) filho (a), poderá ser guardado e utilizado na dissertação resultante dessa pesquisa e de outros trabalhos decorrentes da mesma.

Itabirito, Minas Gerais______de____de 2020.

________________________________________

Assinatura do responsável legal pelo (a) aluno (a)

## Apêndice 2 – Termo de autorização da escola

**Termo de autorização da escola**

Prezada Profa. Lúcia Anunciação Marinho, Diretora da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz.

Solicitamos autorização institucional para realização da pesquisa intitulada *Análise de estratégias de resolução de atividades envolvendo raciocínio combinatório, enquanto dispositivo para a formação inicial de professores de matemática* nesta instituição de ensino pela Fabrícia Gomes Moreira, aluna do Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Professor Dr. Douglas da Silva Tinti. A pesquisa tem por objetivo: *analisar as potencialidades e limites da utilização da análise de estratégias de resolução de atividades envolvendo raciocínio combinatório como dispositivo para a formação inicial de professores de matemática*. Para atingir tais objetivos, necessitamos desenvolver uma atividade com os alunos regularmente matriculados no 9º ano do Ensino Fundamental no ano de 2020.

Lembramos que toda a pesquisa será custeada pelos pesquisadores, não causando ônus a esta instituição nem à Universidade dos pesquisadores.

Ressaltamos que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo. Salientamos, ainda, que tais dados serão utilizados somente para a realização deste estudo ou como material para a escrita de artigos para publicação em revistas e periódicos. Caso a direção deseje, por qualquer motivo, esclarecer algum aspecto do projeto e/ou das atividades que serão desenvolvidas no mesmo, poderá entrar em contato com os pesquisadores (cujos endereços eletrônicos e telefones estão abaixo de seus nomes) e, em caso de dúvidas éticas, poderá recorrer ao Comitê de Ética e Pesquisa – Universidade Federal de Ouro Preto (CEP/UFOP) Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – Centro de Convergência – cep@propp.ufop.br – (31) 3559-1368.

Na certeza de contarmos com a colaboração e empenho desta direção agradecemos, antecipadamente, a atenção, ficando à disposição para quaisquer esclarecimentos adicionais que se fizerem necessários.

Itabirito, Minas Gerais, 08 de novembro de 2019.

Douglas da Silva Tinti

**Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti**
**(pesquisador responsável)**
**email: tinti@ufop.edu.br**

Fabrícia Gomes Moreira

**Fabrícia Gomes Moreira**
**(professora-pesquisadora)**
**email: fagomes.pnaic@gmail.com.br**

**(X) Concordamos com a solicitação** **( ) Não concordamos com a solicitação**

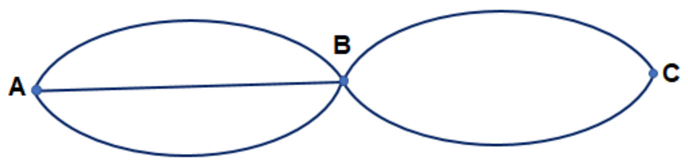
Lúcia Anunciação Marinho

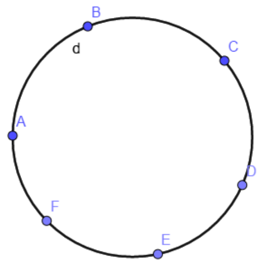
Profa. Lúcia Anunciação Marinho

Diretora da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz.

Lúcia Anunciação Marinho
Diretora
Autorização Nº 811150
Base Legal RESOL. CEE Nº 397/94 e
RESOL. SEE Nº 3995/18

**Apêndice 3 – Sequência de atividades sobre raciocínio combinatório: Problemas propostos aos alunos (na ordem em que foram apresentados)**

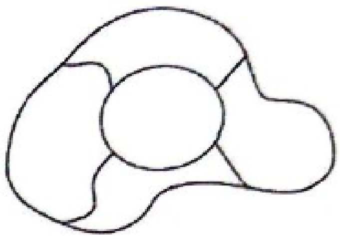
| |
|---|
| **Questão 01)** Bernardo é o técnico do time masculino de handebol da escola de Mari. Ele tem de mandar confeccionar os uniformes do time para o campeonato que vai acontecer no fim do ano. Como as cores da escola são azul, amarela, vermelha e branca, a empresa que vai confeccionar os uniformes deu as seguintes opções de escolha para Bernardo: 3 cores de camisetas (vermelho, amarelo e branco) e 2 cores de shorts (branco com lista azul e todo azul).<br>a) De quantas maneiras diferentes Bernardo pode montar um uniforme com uma camiseta e um shorts?<br>b) Do total de possibilidades, quantos uniformes podem ser formados com uma camiseta branca? |
| **Questão 02)** Uma sorveteria dispõe de 16 sabores de sorvete que podem ser combinados com 3 caldas diferentes (morango, chocolate e caramelo). De quantas maneiras é possível combinar uma bola de sorvete e uma calda? |
| **Questão 03)** Numa sala há 4 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher? |
| **Questão 04)** Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.<br><br><br>a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?<br>b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?<br>c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B? |
| **Questão 05)** De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras alinhadas? |
| **Questão 06)** (Adaptado do banco de questões da OBMEP (2011, p. 37) - Nível 2) Seis pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura. |




a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)

b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

**Questão 07)** (Adaptado do banco de questões da OBMEP (2004) - Nível 1) A figura mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarelo, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



**Questão 08)** Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

**Questão 09)** Quantos números ímpares podemos formar usando uma única vez cada um dos algarismos 3, 4, 7, 8 e 9?

**Questão 10)** Cinco cavalos disputam um páreo no Jockei Clube. Quantos são os possíveis trios para as três primeiras colocações nesta corrida?

**Questão 11)** Quantos números, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

**Questão 12)** (Adaptado do banco de questões da OBMEP (2018) - Nível 1) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?